



Universidad
Zaragoza

Proyecto Fin de Carrera

Simulación numérica de flujos magnetoreológicos

Autor:

Víctor Javier Llorente Lázaro

Director:

Antonio Pascau Benito

Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza

2015

RESUMEN

Simulación numérica de fluidos magnetoreológicos

El presente proyecto consiste en la simulación numérica de fluidos cuyas propiedades, y en consecuencia su movimiento, se ven afectadas y modificadas mediante la aplicación externa de campos magnéticos. Dichas simulaciones se realizará sobre una geometría de placas planas, paralelas y fijas.

Para llevar a cabo lo comentado anteriormente, se dispondrá de un software académico desarrollado por el profesorado del Área de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Zaragoza denominado CRETINO (Código de Resolución de Ecuaciones de Transporte con Introducción Numérica de Opciones). Dicho software, que es utilizado por los alumnos del centro en prácticas, puede simular tanto flujos laminares como turbulentos, estacionarios y transitorios mediante el método de discretización de "Volúmenes Finitos", método muy empleado en el ámbito de la mecánica de fluidos computacional (CFD).

Para poder alcanzar la meta de nuestro proyecto es necesario modificar el código interno del programa. Al tener una nueva variable de cálculo, es necesario incorporar por un lado, un término adicional a la ecuación del movimiento lineal del fluido debido a la aparición de fuerzas de origen magnético. Y por otro lado, incorporar la ecuación de inducción magnética que nos permitiría resolver el campo magnético inducido que se generaría debido a que el propio movimiento del fluido modifica el campo magnético en el que está sumergido.

Todos estos resultados se validarán con la literatura científica existente en revistas especializadas y libros técnicos, para así proveer de un código académico en el cálculo de flujos que se ven modificados mediante campos magnéticos externos.

Índice

1. Introducción	5
1.1. Literatura científica previa.....	6
1.2. Softwares utilizados.....	7
1.3. Objetivos.....	7
1.4. Alcance del proyecto.....	7
2. Definición del problema	9
3. Modelización matemática	11
3.1. Hipótesis.....	11
3.2. Ecuaciones magnetohidrodinámicas.....	12
3.2.1.Cierre del sistema de ecuaciones.....	13
3.3. Condiciones de Contorno.....	13
3.4. Números adimensionales.....	14
3.5. Resolución analítica.....	15
4. Modelización numérica	17
5. Simulaciones	18
5.1. Elección del mallado.....	18
5.2. Comparación entre resultados teóricos y numéricos.....	20
5.2.1.Caso sin la aplicación de campos magnéticos.....	20
5.2.2.Caso sin contribución del campo inducido.....	21
5.2.3.Caso con contribución del campo inducido.....	23
5.3. Visualización del “Modo Válvula”.....	26
6. Conclusiones y trabajo futuro	33
7. Bibliografía	35
Anexo I. Desarrollo teórico	36
Anexo II. Desarrollo numérico	54

1. Introducción

Un fluido magnetoreológico es una clase especial de fluido cuyas propiedades físicas como la viscosidad cambian cuando se le aplica un campo magnético externo. Estos fluidos están compuestos principalmente por partículas metálicas como hierro de carbonilo, polvo de hierro o aleaciones de hierro/cobalto, cuyo tamaño de partícula (supuestamente esférica) ronda el micrómetro, Figura 1. Dichas partículas son suspendidas en un líquido denominado “fluido portador”. El agua, algunos hidrocarburos, glicoles y aceites de silicona son utilizados para estos propósitos.

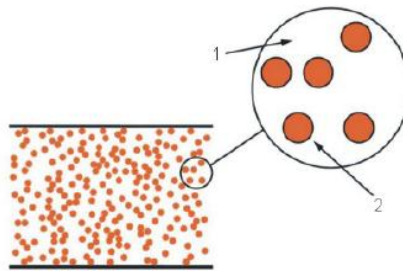


Figura 1: Fluido magnetoreológico sin la aplicación de un campo magnético externo (1 – fluido portador, 2 - suspensión de partículas magnetizables)

El comportamiento de un fluido magnetoreológico en un estado normal (sin aplicarle un campo magnético) es la de un típico fluido Newtoniano. Sin embargo, cuando se le expone sobre un campo magnético, las partículas metálicas adquieren un momento dipolar el cual se alinea con el campo magnético externo formando cadenas lineales, Figura 2. Dichas estructuras metálicas restringen el movimiento del fluido modificando su comportamiento reológico y por lo tanto el perfil de velocidad del flujo de fluido.

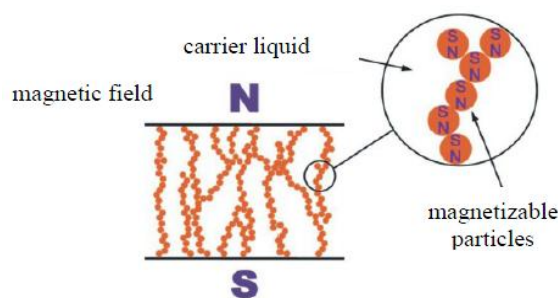


Figura 2: Fluido magnetoreológico con la aplicación de un campo magnético externo

Las aplicaciones tecnológicas de estos fluidos son muy diversas y muy utilizadas en dispositivos o aplicaciones de ingeniería como amortiguadores, embragues, frenos, dispositivos de pulido, actuadores, válvulas hidráulicas, amortiguadores sísmicos, y sistema de suspensión militar. Por ello existen tres modos fundamentales de trabajo: modo válvula, modo cizalladura, modo aplastamiento.

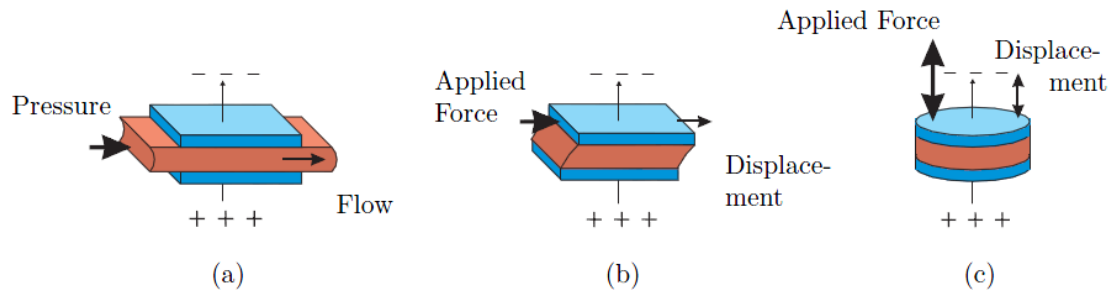


Figura 3: Modos fundamentales de trabajo de dispositivos magnetoreológicos. (a) modo válvula, (b) modo cizalladura, (c) modo aplastamiento

El “modo válvula” suele ser apropiado para controles hidráulicos (servo-válvulas, amortiguadores, y absorbentes de seísmos) en donde lo que nos interesa es controlar el caudal que pasa sobre un canal o una tubería a través del campo magnético externo.

Otra de las formas de trabajo es el control mecánico a través del desplazamiento relativo que sufre una de las placas del canal o tubería debido a una fuerza externa al dispositivo. Los modos fundamentales que se apoyan en este tipo de forma de control son el “modo cizalladura” utilizado en frenos, en dispositivos de bloqueo y de sujeción, en amortiguadores, y dispositivos antichoques; y el “modo aplastamiento” utilizado en aplicaciones de amortiguadores de baja amplitud de vibración, o en prótesis.

La diferencia que existe entre el modo de cizalladura y el modo aplastamiento es la dirección en que la fuerza externa se aplica respecto a la dirección de la normal de la pared del canal, como se observa en la Figura 3.

Además de estos tres modos de trabajo, los dispositivos que utilizan fluidos magnetoreológicos pueden funcionar como una combinación de los anteriores modos.

1.1 Literatura científica previa

El presente proyecto, como se ha comentado anteriormente, trata sobre simulaciones numéricas de fluidos magnetoreológicos en canales o tuberías. Por consiguiente es preciso modelizar matemáticamente el nuevo fluido, para posteriormente resolver numéricamente las ecuaciones implicadas en su movimiento y las acciones externas a las que se ve sometido, en este caso de origen magnético. También es necesario resolver, como se verá posteriormente, la posible inducción generada por las partículas magnéticas debido al movimiento del flujo.

Para ello, se ha estado buscando y leyendo diversas publicaciones científicas en revistas de carácter divulgativo y con renombre en el mundo de las simulaciones y la mecánica de fluidos. De entre todas, se encontró en la revista “*Computers & Fluids*”, una investigación sobre simulaciones de flujos magnetoreológicos entre placas paralelas [1].

Es en dicha publicación en la que se ha basado casi todo este proyecto fin de carrera y en el que se pretende reproducir y comparar de manera cualitativa, los resultados allí expuestos.

En la publicación mencionada se expone que el modelo matemático utilizado es el desarrollado en la disciplina académica conocida como MagnetoHidroDinámica (MHD). Al tratarse de una publicación de carácter investigador no se hace hincapié en la obtención de las ecuaciones allí mostradas. Para un mayor detalle matemático y comprensivo el lector puede consultar [2].

Con toda esta literatura científica será posible profundizar en detalle el nivel matemático que es necesario para generar un código abierto que nos permita resolver numéricamente fluidos que responden a acciones externas producidas por campos magnéticos.

1.2 Softwares utilizados

El programa informático que se utiliza para realizar las simulaciones, se denominado CRETINO (siglas de *“Código de Resolución de Ecuaciones de Transportes con Introducción Numérica de Opciones”*). Este código facilitado por el Área de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Zaragoza, se utiliza en prácticas de la asignatura *“Instrumentación y Simulación de Sistemas Fluidos”* y por lo tanto tiene un carácter puramente académico.

Dicho código, escrito en lenguaje FORTRAN, utiliza el método de volúmenes finitos a la hora de discretizar las ecuaciones que se pretenden resolver. Puede ser utilizado para el cálculo de problemas bidimensionales, con flujos incompresibles, laminares y/o turbulentos, estacionarios y/o transitorios, utilizando coordenadas cartesianas y cilíndricas.

La herramienta de post-procesado utilizado para analizar los resultados obtenidos ha sido TECPLOT.

1.3 Objetivos

Para alcanzar la meta de nuestro proyecto, dos objetivos son necesarios. El primero de todo, y el más importante, será la modificación del código descrito anteriormente. Al considerar un fluido incompresible y un problema bidimensional, nos es suficiente dicho programa para las modificaciones y simulaciones que realizaremos posteriormente.

El otro objetivo a cumplir será la validación teórica de los resultados numéricos obtenidos por el programa, así como la comparación cualitativa con los resultados obtenidos en la publicación científica.

1.4 Alcance del proyecto

Las tareas que deberemos realizar para completar satisfactoriamente el proyecto, podemos enmarcarlas en dos categorías. La primera categoría, corresponde a todas las modificaciones necesarias para adaptar el código a las necesidades del proyecto.

- Transformar el archivo de entrada para incorporar la nueva variable a calcular, que en nuestro caso corresponde al campo magnético.
- Anadir un nuevo término fuente a la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento lineal, provocado por las fuerzas magnéticas a las que se ve sometido el fluido.
- Introducir la ecuación que nos permita calcular las inducciones magnéticas que se nos producen debido al movimiento del fluido.
- Permitir al usuario decidir si en el problema quiere tener presente las inducciones magnéticas y la posibilidad de generar zonas de nuestro dominio donde exista la presencia de campo magnético.

Por último, la segunda categoría correspondería a la utilización de la teoría matemática expuesta en la publicación.

- Formular las fuerzas de origen magnético dependiendo de si consideramos las inducciones producidas o no.
- Obtener la ecuación de inducción magnética.
- Encontrar las soluciones analíticas a nuestro problema.

Antes de terminar con este capítulo, es conveniente detallar como se ha dividido la memoria del proyecto. En el capítulo 2 se pretende introducir al lector en los distintos tipos de configuraciones de amortiguadores magnetoreológicos así como la geometría utilizada. En el capítulo 3 obtendremos las ecuaciones que gobiernan nuestro problema, así como de las condiciones de contorno. También será necesario presentar las soluciones de manera analítica para tres casos en concreto: sin la presencia de campo magnético, con la presencia de un campo magnético externo pero sin tener en cuenta las inducciones producidas por el movimiento del flujo, y con la presencia de un campo magnético externo teniendo en cuenta las inducciones producidas. En el capítulo 4 se introducirá brevemente aspectos utilizados en el proyecto sobre la discretización utilizada.

El núcleo del proyecto lo compone el capítulo 5 donde se simularán diferentes casos comprobando que los resultados numéricos obtenidos por el programa concuerdan con los teóricos, así como los efectos que producen el campo magnético al campo de fluido. En el capítulo 6 se expondrán las conclusiones obtenidas a lo largo del proyecto así como de posibles trabajos futuros.

Se acompañará dicho proyecto con anexos en donde se detallarán el cálculo y las demostraciones que se han realizado durante dicho trabajo.

2. Definición del problema

Los amortiguadores magnetoreológicos son utilizados en diferentes aplicaciones industriales. A pesar de su uso en el sector de la construcción civil (útiles como amortiguadores de vibraciones sísmicas en edificios y/o puentes), es en el sector automovilístico donde más auge están teniendo dichos dispositivos. Este uso se debe principalmente a la facilidad y rapidez que pueden tener los sistemas electrónicos en el control de la estabilidad de los vehículos gracias a una respuesta inmediata del fluido ante campos magnéticos externos (ver Figura 4).



Figura 4: Sistema MagneRide desarrollado por Delphi Automotive

Dichos amortiguadores logran su funcionamiento a través de la circulación de un fluido magnetoreológico, por pequeños orificios y/o válvulas situados en el émbolo del amortiguador, o por pequeños canales (ver Figura 5) que comuniquen diferentes cámaras plenum del fluido. Estas circulaciones del flujo generan una caída de presión para dispositivos que funcionan en “modo válvula” entre la entrada y la salida del orificio o canal, la cual nos permite controlar las oscilaciones que se producen sobre el amortiguador.

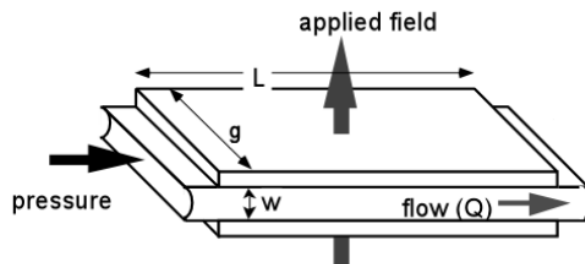


Figura 5: Geometría utilizada y modo de trabajo del fluido magnetoreológico (Modo Válvula)

En este proyecto se considerará una disposición de placas planas e infinitas en dirección normal al plano ($g \rightarrow \infty$). Las placas estarán fijas, debido a la necesidad de un control hidráulico sobre nuestro sistema (suponemos “modo válvula” como forma de trabajo). Esta geometría nos permitirá la comparación tanto con resultados analíticos como con resultados obtenidos por otros investigadores sacados de la literatura científica.

Por otro lado consideraremos que las placas no son conductoras de electricidad, bien sea porque su conductividad eléctrica sea prácticamente igual a cero o porque el espesor de las placas sea muy pequeño. Esta condición de contorno que debemos imponer para el campo magnético se detallará posteriormente.

En lo que respecta a las condiciones de entrada del flujo, serán dependientes de las simulaciones que se realizarán. La velocidad en la entrada (supuesto un perfil plano) se fijará a un valor pequeño (del orden del centímetro por segundo) o la caída de presión será fijada entre entrada/salida del canal. Aun así, esta condición se explicará más adelante en el capítulo 5 del proyecto.

A continuación se muestran tanto los datos geométricos de nuestra placa como las propiedades físicas que utilizaremos para simular el fluido magnetoreológico.

Propiedades del fluido		Datos geométricos	
Densidad	2.380 kg/m ³	Longitud (L)	300 mm
Viscosidad dinámica	0,042 kg/ms	Separación (w)	10 mm
Permeabilidad magnética relativa	4		
Conductividad eléctrica	3,46•10 ⁴ S/m		

Tabla 1: Descripción de las propiedades del fluido, y de los datos geométricos de nuestro problema

Conviene comentar que salvo la conductividad eléctrica del fluido, todas las propiedades físicas son las mismas que las empleadas por la publicación científica con la que se pretende comparar. Esto se debe a que en la publicación dicha propiedad no aparece su valor o no hacen mención de ella. Por consiguiente se ha realizado una estimación en base a otros fluidos en resultados obtenidos por otros investigadores.

También, en lo que respecta a la longitud de las placas (L), en la publicación científica se especifica que la longitud del canal es 300 mm. Observando sus resultados se comprueba que existe más longitud en donde el flujo de entrada aún no está desarrollado. Dicha zona donde el flujo se desarrolla no la especifican ni la comentan, y por lo tanto no fue contemplada en el proyecto.

Estos dos breves comentarios, dan pie a manifestar que la comparación de nuestros resultados numéricos con los dados en la publicación será más de carácter cualitativo que cuantitativo.

3. Modelización matemática

El primer paso que debemos dar para la obtención de un código numérico, es la descripción matemática de nuestro fluido. Para ello, se presentan diferentes apartados en donde se explicarán desde las hipótesis realizadas, pasando por las ecuaciones que gobiernan el problema así como de las condiciones de contorno impuestas en el flujo. También será preciso detallar el uso de nuevos número adimensionales, así como la obtención de las ecuaciones analíticas del problema planteado en el proyecto.

3.1 Hipótesis

La primera hipótesis a considerar es el continuo de las partículas magnéticas. Sabemos que el tamaño de las partículas no son muy grandes (en torno al micrómetro e incluso pudiendo llegar al nanómetro), y la concentración de partículas en el fluido portador suele ser elevada. Además, la velocidad que va a llevar el flujo está en torno al centímetro por segundo. Dicha velocidad no es muy elevada y podemos suponer que entre la partícula magnética y la partícula fluida en sus movimientos no se va a producir un “desfase”, es decir, que ambas partículas van a viajar a la misma velocidad. También supondremos la nula interacción entre partículas magnéticas como choques, o fuerzas de interacción entre partículas.

Todo esto nos permite hacer la suposición del continuo. Por así decirlo, consideramos que a cada partícula fluida la dotamos de una partícula magnética que le confiere la propiedad del magnetismo. Por consiguiente, es factible el poder utilizar la mecánica de fluidos a la hora de modelizar nuestro fluido magnetoreológico.

La segunda hipótesis a tener en cuenta es en lo que respecta a la conductividad eléctrica. Está claro que las partículas magnéticas están hechas de aleaciones de hierro, o materiales que son conductores de la electricidad, aunque el fluido portador en la mayoría de los casos no lo sea. Además sabemos que cuando un material conductor se mueve por el seno de un campo magnético, en este material se genera ciertas densidades de corrientes eléctricas. Dichas corrientes producen sobre el material conductor una fuerza adicional de origen magnético, ecuación 3.1. Como hemos supuesto el continuo, dicha fuerza podrá ser aplicada en todo el dominio de nuestro fluido.

$$\vec{f}_{Lorentz} = \frac{d\vec{F}_{Lorentz}}{dV} = \vec{f}_{\vec{E}} + \vec{f}_{\vec{B}} = \rho_c \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.1)$$

Con estas hipótesis descritas se hace posible la utilización de la teoría física denominada “Magnetohidrodinámica” (MHD). Esta disciplina, relativamente joven en las ciencias naturales y en la ingeniería, nos permite estudiar la dinámica de fluidos conductores eléctricamente en presencia de campos eléctricos y/o campos magnéticos.

Además de estas hipótesis, se supondrá que el flujo es laminar, incompresible, se despreciará las acciones producidas por la gravedad, cuasineutralidad del fluido y, se considera

que todas las propiedades físicas de nuestro fluido (densidad, viscosidad, conductividad eléctrica y permeabilidad magnética) son constantes e independientes del campo magnético.

3.2 Ecuaciones magnetohidrodinámicas

La idea con la que trabaja la magnetohidrodinámica (MHD) es que los campos magnéticos pueden inducir corrientes eléctricas en el fluido conductor, generando fuerzas adicionales. Además debido al movimiento del fluido, se generan campos magnéticos inducidos que modifican el campo magnético primario.

Por lo tanto, las ecuaciones generales en las que se basa la MHD pueden ser descritas mediante una combinación de las ecuaciones de la conservación de la mecánica de fluidos, las ecuaciones de Maxwell y adicionalmente, al tener un conductor que se mueve (en nuestro caso es el fluido), deberemos tener presente la Ley de Ohm generalizada.

Si se realizan las simplificaciones y operaciones oportunas sobre el anterior sistema de ecuaciones (ver Anexo I, pág. 38-41), llegamos a nuestro sistema particular:

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (3.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \bar{u} + \bar{j} \times \bar{B} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{B} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \bar{B} + (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{u} \quad (3.4)$$

La ecuación 3.4 es una ecuación de transporte para el campo magnético \bar{B} denominada "Ecuación de Inducción Magnética". Dicha ecuación es la que nos permitirá calcular los campos magnéticos inducidos debido al movimiento del fluido. Por consiguiente, el campo magnético \bar{B} (denominado también "campo magnético total") puede ser descompuesto en un campo magnético conocido e impuesto externamente (\bar{B}_0), y en un campo magnético inducido (\bar{b}). Solamente dicho campo de inducción necesita ser resuelto.

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{b} \quad (3.5)$$

Generalmente, para resolver la ecuación de inducción magnética se suele sustituir en ella, la descomposición del campo magnético total \bar{B} . Logrando con ello una nueva ecuación para resolver \bar{b} . Dicha sustitución implicará la aparición de unos nuevos términos, cuyo origen están en el campo magnético impuesto externamente \bar{B}_0 . Para obtener más información de cómo se transforma la ecuación 3.4, ver el Anexo I pág. 38-41.

Solamente se va a recalcar, que en este proyecto se ha considerado que el campo magnético externo \bar{B}_0 es generado en un medio no conductor. El resultado es una nueva ecuación de inducción magnética para \bar{b} , ecuación 3.6.

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{b} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \bar{b} + (\bar{b} \cdot \nabla) \bar{u} - \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}_0) - \frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t} \quad (3.6)$$

3.2.1 Cierre del sistema de ecuaciones

Realizando un análisis de la cantidad de ecuaciones e incógnitas a resolver en el subapartado anterior, vemos que el sistema está incompleto. Tenemos que resolver 7 ecuaciones con 10 incógnitas ($\bar{u}, P, \bar{B}, \bar{J}$). Para poder cerrar el sistema de ecuaciones, deberemos buscar una ecuación que relacione la densidad de corriente \bar{J} con el campo magnético \bar{B} . Y es aquí donde encontramos el primer obstáculo.

Cuando se realiza el estudio de la interacción entre el campo del flujo y el campo electromagnético, es fundamental conocer el origen de dichas densidades de corriente \bar{J} debido a la inducción. Según las leyes del electromagnetismo, su obtención sería posible de dos maneras:

- La ley de ohm generalizada: $\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B})$
- La ley de Ampere: $\bar{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{B}$

Generalmente, hay dos enfoques que pueden ser utilizados para evaluar la densidad de corriente. Uno es a través de la ley de ohm generalizada, denominando a este método como “el método del potencial eléctrico”; usado normalmente cuando las paredes son conductoras eléctricas. El otro, es el uso de la ley de Ampère para casos más generales. A dicho método se le denomina bajo el nombre de “el método de la inducción”.

En nuestro proyecto se ha seguido la siguiente metodología para el uso de la densidad de corriente eléctrica \bar{J} . Cuando se realicen simulaciones en donde se desprecia el campo magnético inducido, como el campo \bar{B}_0 se genera en medios no conductores, la ley de Ampère no nos sirve ya que el rotacional de \bar{B}_0 es cero. Por lo tanto se utilizará la ley de ohm generalizada, ecuación 3.7. La presencia de campos eléctricos se considera nula por la cuasineutralidad del fluido y por tener un problema estacionario (ver Anexo I, pág. 42-43). Además para este caso no será necesaria la resolución de la ecuación 3.6.

Las simulaciones en las que el campo magnético inducido no sea despreciable o simplemente queremos tener en cuenta su contribución en el flujo, se ha optado por la utilización de la ley de Ampère, ecuación 3.8.

$$\bar{f}_{\bar{B}} = \bar{J} \times \bar{B} = \sigma(\bar{u} \times \bar{B}) \times \bar{B} = \sigma(\bar{u} \cdot \bar{B})\bar{B} - \sigma B^2 \bar{u} \quad (3.7)$$

$$\bar{f}_{\bar{B}} = \bar{J} \times \bar{B} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \bar{B}) \times \bar{B} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\bar{B} \otimes \bar{B}}{\mu} \right) \quad (3.8)$$

Para profundizar más sobre las demostraciones y/o observaciones realizadas en las ecuaciones 3.7 y 3.8, ver Anexo I, pág. 42-43.

3.3 Condiciones de contorno

En lo que respecta a las condiciones de contorno para la ecuación de conservación del movimiento lineal de un fluido, consideraremos que no hay deslizamiento en la interfase

fluido-pared (Γ). Por lo tanto toda componente de la velocidad desaparece, lo que equivale a decir que en la interfase fluido-pared la velocidad equivale a:

$$\bar{u} = \bar{0} \quad \text{en } \Gamma \quad (3.9)$$

Las condiciones de contorno para el electromagnetismo se controlan mediante la conductividad eléctrica σ_w del material de las que están hechas las paredes del canal. Si las paredes son conductoras las corrientes pueden cruzar la interfase entre fluido y pared y generar a su vez corrientes eléctricas en las paredes (\bar{J}_w), que en ciertos casos son difíciles de evaluar y de estimar. Su condición general se escribe como:

$$\frac{1}{\sigma} (\bar{J} \times \bar{n}) = \frac{1}{\sigma_w} (\bar{J}_w \times \bar{n}) \quad \text{en } \Gamma \quad (3.10)$$

Realizando simplificaciones, se puede reducir la condición de contorno obteniendo la ecuación 3.11. En ella se observa un nuevo parámetro “ c ” denominado “ratio de conductividad de la pared”, y el cual describe el ratio de la conductividad eléctrica de la pared y del fluido. Además, tienen presente otros parámetros como el espesor de las paredes (t_w) frente a una longitud característica del canal (L), así como las permeabilidades magnéticas de la pared (μ_w) y del fluido que se trabaja.

$$\frac{\partial b}{\partial n} - \frac{1}{c} b = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad \text{donde} \quad c = \frac{\mu_w \sigma_w t_w}{\mu \sigma L} \quad (3.11)$$

Cuando estamos en el caso límite de paredes aislantes, el ratio “ c ” toma un valor de cero. Si estamos en el otro extremo, tenemos un caso de paredes conductoras perfectas; el ratio de conductividad de la pared toma un valor muy grande ($c \rightarrow \infty$). Para otro caso en el que se tiene paredes conductoras, el ratio “ c ” tomara un valor mayor que cero.

En el presente proyecto, se considerará que las paredes son aislantes perfectas. Con lo que la condición de contorno queda:

$$\bar{b} = \bar{0} \quad \text{en } \Gamma \quad (3.12)$$

3.4 Números adimensionales

Siempre, para evaluar y comparar flujos de fluidos es conveniente utilizar números adimensionales. En la mecánica de fluidos, un número adimensional muy utilizado es el número de Reynolds (Re). En cambio, en problemas de magnetohidrodinámica es mejor comparar las fuerzas magnéticas sobre las fuerzas viscosas. Dicho número se denomina “número de Hartmann” y es el resultado de multiplicar el número de Reynolds por el parámetro de interacción (N), el cual compara las fuerzas magnéticas sobre las fuerzas de inercia.

$$Ha^2 = Re \cdot N = \frac{\rho u_0 L}{\eta} \cdot \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho u_0} = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\eta} \quad (3.13)$$

Otro número sin dimensiones a tener en cuenta aparece al adimensionalizar la ecuación de inducción magnética. Este número denominado “*número de Reynolds magnético*” da una estimación de los efectos de la advección del campo magnético frente a su difusión, Figura 6. Generalmente se define como:

$$Re_m = \mu\sigma Lu_0 \quad (3.14)$$

En la bibliografía utilizada se comenta que para un número de Reynolds magnético bajo, $Re_m \ll 1$, el campo magnético inducido debido a las corrientes producidas en el fluido se puede despreciar si lo comparamos con el campo magnético externo \bar{B}_0 , por lo que el campo inducido apenas tendrá influencia sobre el flujo.

Sobre la utilización del Reynolds magnético para conocer la influencia de la inducción en el flujo, se discrepa en su uso. Esto es debido a que en su definición no existe tal comparación entre campos magnéticos (inducido vs externo). El número de Reynolds magnético solo nos indica si el campo magnético se mueve con el fluido (domina la convección), o se difunde más rápidamente por el dominio del fluido (domina la difusión).

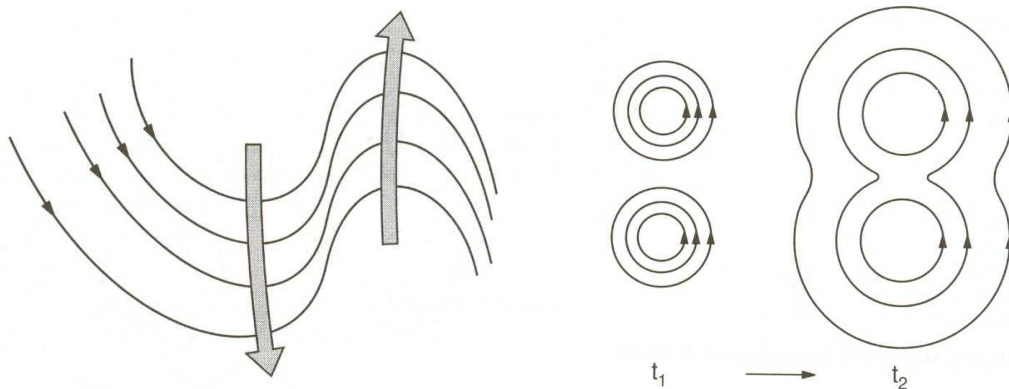


Figura 6: Representación esquemática del término de advección (izquierda) frente al término difusivo (derecha)

Si lo que queremos es comparar cómo de fuerte o de débil es el campo magnético inducido frente al externo y por consiguiente saber si los efectos de inducción afectan al campo del flujo, se propone en este proyecto un nuevo número que compararía dichos campos magnéticos y es el resultado de dividir el número de Reynolds magnético por el número de Hartmann.

$$Lp = \frac{Re_m}{Ha} = \frac{u_0 \mu \sqrt{\sigma \eta}}{B_0} \quad (3.15)$$

3.5 Resolución analítica

En este apartado se describen las fórmulas para el cálculo del campo de velocidades del flujo, el campo magnético inducido, la velocidad máxima que se alcanza, así como el caudal volumétrico que pasa por el canal. Las ecuaciones 3.19 a 3.22 simulan el flujo en presencia de un campo magnético, con la salvedad de que la ecuación 3.20 sólo la tenemos que tener

presente si tenemos en cuenta la contribución del campo magnético inducido. Por otro lado, estas fórmulas matemáticas en el caso límite cuando $Ha \rightarrow 0$ se transforman en un perfil parabólico.

Además, para mejorar la comprensión de las formulas se han escrito bajo un mismo formato en donde encontramos dos variables: la primera es una variable adimensional denominada \hat{u} , la cual depende de la intensidad del campo magnético y del caso generado (ver Tabla 2). La segunda son variables, ecuaciones 3.16 a 3.18, que proporcionan la dimensión a las ecuaciones y se denominan “escala de velocidad” (u_0), “escala de campo magnético inducido” (b_0), y “escala de caudal” (q_0). Si se necesita profundizar sobre la resolución analítica, ver Anexo I, pág. 44-53.

$$u_0 = \frac{kw^2}{\eta} \quad \text{donde} \quad k = -\frac{dP}{dx} \approx -\frac{\Delta P}{L} \quad (3.16)$$

$$b_0 = u_0 \mu \sqrt{\sigma \eta} \quad (3.17)$$

$$q_0 = u_0 w \quad (3.18)$$

$$u(y) = u_0 \hat{u} \left[\frac{\cosh(Ha)-1}{\sinh(Ha)} \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) + 1 \right] \quad (3.19)$$

$$b(y) = b_0 \left\{ \frac{1}{2Ha} - \frac{1}{Ha} \frac{y}{w} + \hat{u} \left[\sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \frac{\cosh(Ha)-1}{\sinh(Ha)} \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) \right] \right\} \quad (3.20)$$

$$u_{max} = u_0 \hat{u} \frac{\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right)-1}{\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right)} \quad (3.21)$$

$$q = q_0 \hat{u} \left[2 \frac{1-\cosh(Ha)}{Ha \sinh(Ha)} + 1 \right] \quad (3.22)$$

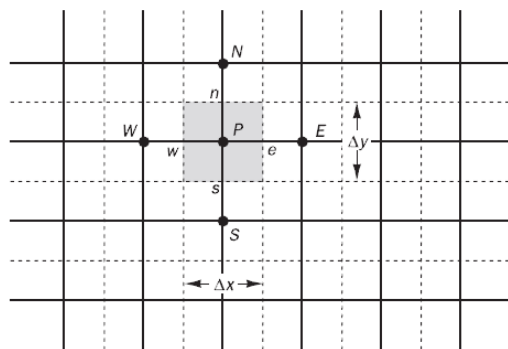
Caso	Variable adimensional \hat{u}
Sin la presencia de ningún campo magnético	$\frac{1}{2}$
Sin contribución del campo inducido	$\frac{1}{Ha^2}$
Con contribución del campo inducido	$\frac{1}{Ha} \frac{c+1}{cHa + 2 \frac{\cosh(Ha)-1}{\sinh(Ha)}}$

Tabla 2: Valores que toma la variable adimensional (\hat{u}) para diferentes casos.

4. Modelización numérica

El método numérico utilizado para discretizar las ecuaciones magnetohidrodinámicas, es el denominado “volúmenes finitos”. Este método consiste en dividir el dominio de trabajo en un número finito de nodos. Sobre estos volúmenes finitos (ver Figura 7) se integran las ecuaciones diferenciales que queremos discretizar, obteniendo una ecuación algebraica para todos los nodos internos.

Al final, lo que resulta es un sistema lineal algebraico cuyas incógnitas son los valores de las variables que queremos calcular (velocidad, presión, temperatura, energía, campo magnético, etc...) en cada nodo de nuestra malla. Dicho sistema necesita ser resuelto mediante procesos iterativos.



$$\begin{aligned} \text{div}(\rho\phi\bar{u}) &= \text{div}(\Gamma\text{grad } \phi) + S_\phi \\ \Downarrow \int_S^n \int_w^e (\blacksquare) dx dy \\ a_P\phi_P &= a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + \bar{S}_\phi \end{aligned}$$

Figura 7: Esquema de nodos internos P (izquierda); Discretización de las ecuaciones diferenciales (derecha)

En el presente proyecto sólo será necesaria la discretización del nuevo término fuente que aparece en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento debido a las fuerzas magnéticas que aparecen, así como la ecuación de inducción magnética. Todo el proceso de discretización se contempla en el Anexo II, pág. 56-59. Por otro lado, el método iterativo utilizado en el programa académico es el comúnmente conocido como “método de la relajación”.

5. Simulaciones

El presente capítulo podemos considerarlo como el bloque fundamental de nuestro proyecto, ya que se realizarán las simulaciones correspondientes para cumplir con los objetivos marcados. Por ello el capítulo 5 está subdividido en tres bloques. En el primero de ellos “Elección del mallado”, se calculará el tamaño correcto de los volúmenes para que los resultados obtenidos no se vean influenciados por el tamaño de la malla. El segundo bloque denominado “Comparación entre resultados teóricos y numéricos”, se realizará una comparación para determinar si el código numérico reproduce lo que dicta la teoría. Por último, el bloque “Visualización del “Modo Válvula”” será en donde compararemos cuantitativamente nuestros resultados con los resultados arrojados por la publicación científica.

5.1 Elección del mallado

A la hora de elegir el mallado adecuado para nuestro problema, se ha seguido el siguiente experimento numérico confeccionando una tabla de doble entrada con doble salida (ver Tabla 3). Las entradas corresponderían a diferentes niveles del mallado y diferentes números de Hartmann. Mientras que las salidas corresponderían a los errores relativos cometidos en la velocidad máxima, y al tiempo empleado por el código en obtener la solución.

En lo que respecta a las entradas, se optó inicialmente por un mallado constante en dirección X así como en dirección Y, partiendo con unos 2.500 nodos (50x50). Se fue incrementando el número de nodos de 50 en 50, hasta alcanzar una densidad de malla de 90.000 nodos (300x300). La segunda entrada es la correspondiente a diferentes niveles de Hartmann, se empezó con un nivel de 0 ($H_a = 0$, implica la nula presencia de campo magnético externo) para posteriormente aplicarle un nivel de 0,01 e ir aumentándolo en un factor de 10; hasta finalizar en un nivel de Hartmann de 100.

Al considerar la nula presencia de campos magnéticos inducidos los costes computacionales serán menores al no resolverse la ecuación de inducción magnética. A continuación se muestra la tabla con los resultados obtenidos a partir de 53 horas aproximadas de simulación.

Erelativo	Ha						Tiempos
	0	0,01	0,1	1	10	100	
50x50	0,08002%	0,08002%	0,08002%	0,08144%	0,13910%		6min
100x100	0,01974%	0,02001%	0,02001%	0,02036%	0,03782%	0,16453%	24min
150x150	0,00892%	0,00892%	0,00892%	0,00869%	0,01776%	-0,08862%	55min
200x200	0,00514%	0,00514%	0,00514%	0,00543%	0,01085%	-0,52815%	1h y 39min
250x250	0,00324%	0,00324%	0,00324%	0,00217%	0,00921%	-1,07617%	2h y 34min
300x300	0,00027%	0,00027%	0,00027%	0,00244%	0,00526%	-1,66512%	3h y 43min

Legenda	
0,14%	0,13%
0,13%	0,11%
0,11%	0,10%
0,10%	0,08%
0,08%	0,07%
0,07%	0,06%
0,06%	0,04%
0,04%	0,03%
0,03%	0,01%
0,01%	0,00%

Tabla 3: Errores relativos cometidos en la velocidad máxima del flujo

Observando la tabla anterior se comprueban varios aspectos. Entre niveles de Hartmann que van de 0 a 10, al disminuir el tamaño del volumen finito el error relativo que se comete disminuye también hasta unos valores del 0,00027% (la diferencia entre el valor numérico y teórico residía en la 4ª - 5ª cifra decimal).

Cuando los niveles de Hartmann alcanzan valores de 100 suceden dos situaciones. Si el mallado toma valores de 50x50 la solución no adquiere un “núcleo de velocidad” y por consiguiente no tenemos un valor máximo de velocidad (ver Figura 8). La explicación ante esta solución numérica reside en las capas límites. Cuando tenemos problemas de magnetohidrodinámica, no solo hay que tener en cuenta la “capa límite viscosa”; sino que además se forma otra capa límite denominada “capa de Hartmann”. El espesor de dicha capa se sabe que $\delta \sim O(Ha^{-1})$. Si comparamos dicho espesor con el tamaño del primer volumen (Δy) en la zona de la pared, el resultado es el siguiente:

$$\delta = \frac{w}{Ha} = \frac{0.01 \text{ m}}{100} = 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta y = \frac{w}{n_y} = \frac{0,01 \text{ m}}{50} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

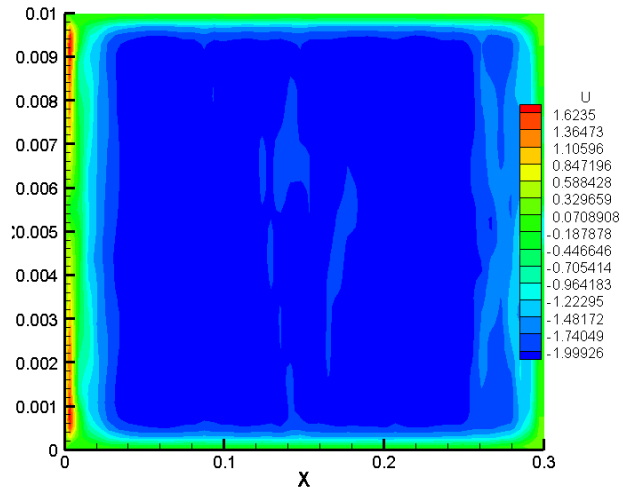


Figura 8: Campo de velocidad U en el canal

Vemos que el tamaño del volumen cercano a la pared es mayor que el espesor de Hartmann, lo que nos indica que el código numérico no resuelve bien el flujo en torno a la pared, dando como resultado un campo de velocidad como el que se muestra.

Por otro lado se observa que los errores relativos a niveles de Hartmann de 100, aumentan negativamente conforme aumenta la densidad de la malla. Esto es debido a que las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, cuando el número de Reynolds y/o el número de Hartmann son elevados, necesitan ser resueltas mediante otros modelos matemáticos como DNS (Direct Numerical Simulation) y/o las LES (Large Eddy Simulation).

En consecuencia, el tamaño de la malla elegida inicialmente ha sido de 100x200, teniendo en cuenta los resultados y los tiempos computacionales obtenidos. La elección de este mallado es sencilla: con un mallado de 200x200 el error relativo está comprendido entre 0,005%-0,01%; por otro lado el tiempo de computación tampoco ha sido alto (1h y 39min).

Además hay que tener presente que el código empleado no calcula la posible presencia de campos magnéticos inducidos, lo que implica que dicho tiempo aumentará si consideramos la posibilidad de la contribución en el flujo del campo magnético inducido. Por ello se ha decidido reducir la cantidad de nodos en el eje X. También, lo importante de la comparación no es la variación de la velocidad y/o la presión a lo largo del canal; sino el perfil de la velocidad U sobre el eje Y.

5.2 Comparación entre resultados teóricos y numéricos

5.2.1 Caso sin la aplicación de campos magnéticos

El primer caso considerado, ha sido un flujo de fluido conductor conducido por un canal de anchura $w = 0.01 \text{ m}$ y una largura de $L = 0.3 \text{ m}$, en donde no se le ha aplicado en toda la región del canal ningún campo magnético externo B_0 perpendicularmente a la dirección del flujo. En los resultados obtenidos que se muestran a continuación, se representan tanto los perfiles de velocidad en dirección X y en dirección Y, al igual que la variación de la presión a lo largo del tramo del canal (ver Figura 9).

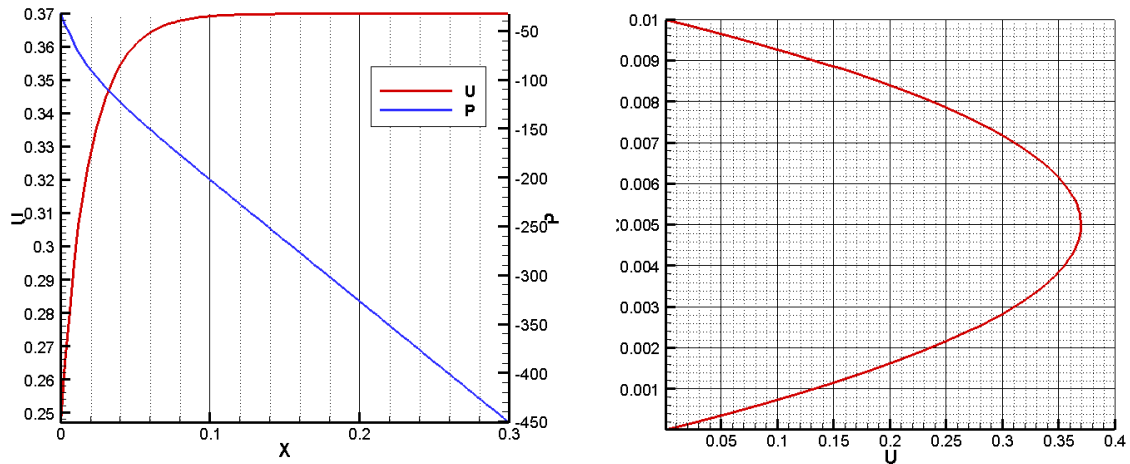


Figura 9: Variación de la velocidad U y de la presión a lo largo del canal (izquierda); perfil de velocidad U (derecha)

Se observa que los resultados obtenidos dan como flujo el denominado “flujo de Hagen-Poiseuille”. En la gráfica de la izquierda, la evolución de la presión a lo largo del canal es cuadrática hasta que el flujo se desarrolla teniendo una caída de presión (dP/dx) constante; de la misma manera que la evolución de la velocidad U en donde el flujo se acelera hasta alcanzar un máximo de velocidad. Por otro lado en la gráfica de la derecha, ya en una zona desarrollada del canal el perfil de velocidad U es de tipo parabólico.

$\epsilon_{\text{relativo}} = m \pm I$					
U (y)			K = - dP/dx		
m	σ	I (98%)	m	σ	I (98%)
0,00512%	0,00514%	0,00130%	0,10783%	0,17696%	0,05461%

Umax		$\epsilon_{\text{relativo}}$
numérico	teórico	
0,369874	0,3699	0,00703%

Tabla 4: Errores relativos cometidos en el perfil de velocidad U , caída de presión K , y velocidad máxima

Si comparamos estos valores numéricos con los teóricos (ver Tabla 4), vemos que los errores relativos obtenidos a lo largo del perfil de velocidad U están comprendidos entre 0,00642% - 0,00382%; errores por debajo de la milésima. Esto mismo sucede con la velocidad máxima cuyo error se sitúa en 0,00703%. Con respecto a la caída de presión (K), sucede algo parecido obteniendo unos errores entre 0,16244% - 0,05322%. Errores que aun siendo mayores que en el caso anterior, siguen siendo porcentajes pequeños de error.

Por consiguiente, se puede garantizar que al ser la diferencia entre los valores numéricos y teóricos pequeñas, los resultados obtenidos mediante el código numérico generado para este caso se asemejan a los resultados obtenidos analíticamente.

5.2.2 Caso sin contribución del campo inducido

En el segundo caso simulado, con el mismo fluido y misma geometría que el caso anterior, se ha aplicado en toda la región del canal un campo magnético externo B_0 perpendicular a la dirección del flujo, y despreciando la contribución del campo magnético inducido. Además, este campo B_0 se ha ido modificando para obtener diferentes valores en el número de Hartmann (1, 5, 10, 20, 30, 50, 100) y de este modo comparar los efectos del campo magnético externo en el flujo. En todos los casos simulados, el caudal introducido en el canal se ha mantenido constante.

En los resultados mostrados a continuación se representan tanto los perfiles de velocidad en dirección X y en dirección Y, al igual que la variación de la presión a lo largo del tramo del canal (ver Figura 10). Todas estas representaciones, como hemos dicho anteriormente, para diferentes niveles de Hartmann.

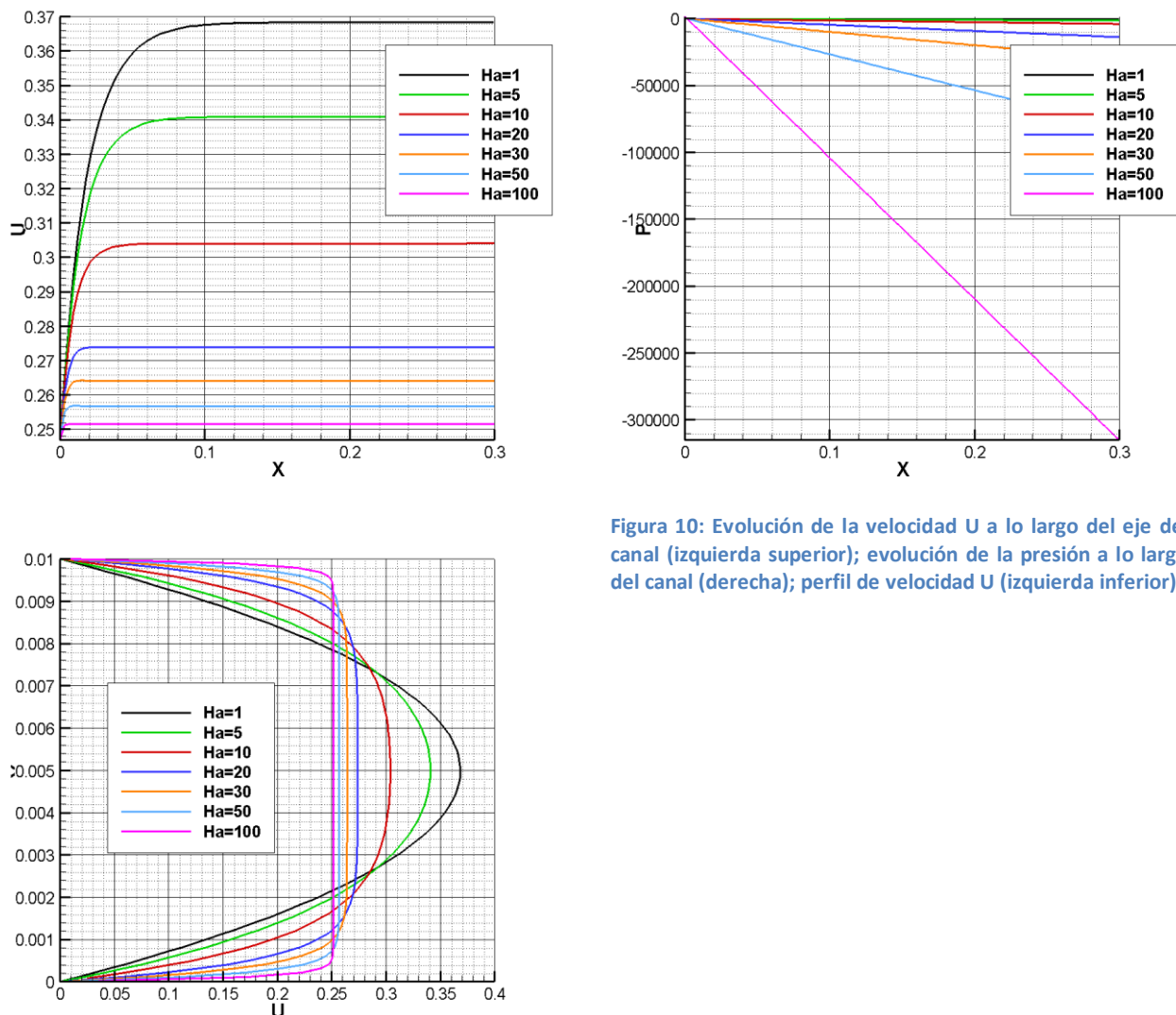


Figura 10: Evolución de la velocidad U a lo largo del eje del canal (izquierda superior); evolución de la presión a lo largo del canal (derecha); perfil de velocidad U (izquierda inferior)

De estas gráficas empezamos a obtener muchísima información sobre las modificaciones que se realizan en el flujo, debido a las acciones externas de B_0 . En la gráfica que muestra la evolución de la velocidad U a lo largo del canal se observa cómo el flujo necesita un cierto espacio del canal para desarrollarse obteniendo al final una velocidad máxima. Esta velocidad máxima disminuye conforme el nivel de Hartmann aumenta, de la misma manera que la longitud de desarrollo. Para niveles de Hartmann de 20 a 100 la reducción de velocidad máxima cae entre un 34% a 46% respecto al primer nivel ($Ha = 1$). En lo que respecta a la longitud de desarrollo, para niveles de Hartmann igual a 1 es necesario una longitud de aproximadamente de 0,08 m. En cambio con niveles que van entre 20 a 100, el flujo necesita tan solo una longitud para desarrollarse de 0,01 m como máximo.

Como vemos, al aumentar el nivel de Hartmann el flujo necesita menos espacio para desarrollarse. Esta disminución de velocidad, manteniendo un caudal constante, implica que las caídas de presiones sobre el tramo de la tubería aumentarían. Este hecho se puede observar en la gráfica de la anterior página.

Ya en la zona desarrollada, el perfil de velocidad U cambia conforme va aumentando el nivel de Hartmann. Se distingue que valores de Hartmann entre 1 a 10 el perfil apenas cambia de la forma parabólica, aunque al reducirse la velocidad máxima su perfil se ve reducido. Para valores entre 10 a 100, se empieza a vislumbrar una zona del perfil denominada “núcleo de velocidad”. Este perfil plano es como consecuencia de la acción de la fuerza magnética aparecida en el dominio del fluido, que tiende a compensar el gradiente de presión y distribuir la velocidad a lo ancho del canal.

Además, la anchura del núcleo aumenta conforme el nivel de Hartmann aumenta dando un perfil de velocidad casi plano, ya que tenemos que tener en cuenta las zonas cercanas a la pared donde existe un gradiente de velocidad. Este gradiente está provocado por la “capa límite de Hartmann” donde el campo magnético tiene una componente normal distinta de cero en la pared.

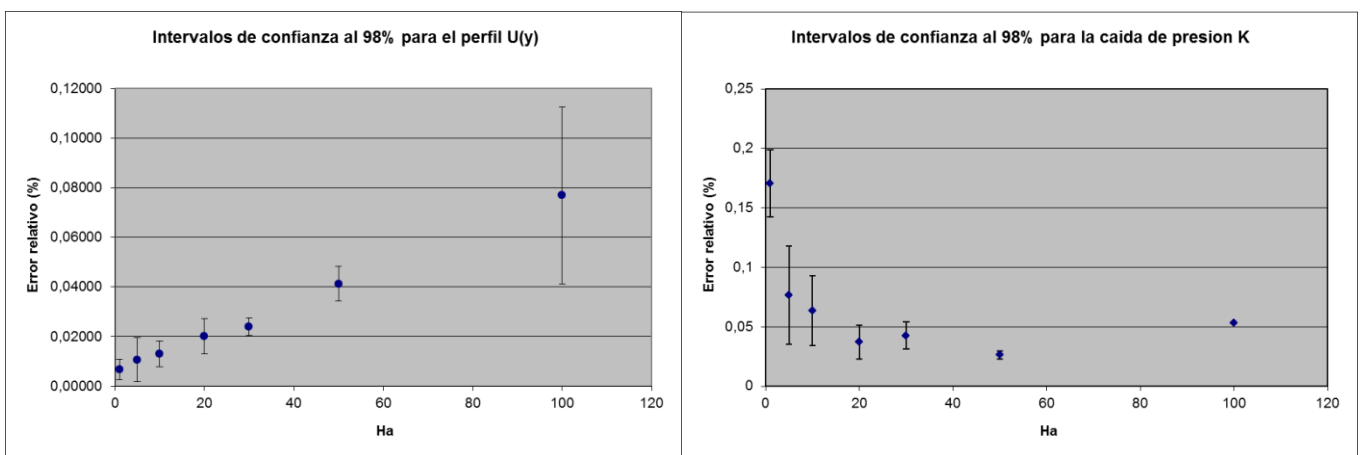


Figura 11: Variaciones de los errores cometidos en el perfil de velocidad U y la caída de presión K para diferentes niveles de Hartmann

Realizando una comparación para el perfil de velocidad U entre los valores numéricos y los teóricos (ver Figura 11) punto a punto, se observa que sus errores relativos medios aumentan conforme aumenta el nivel de Hartmann, mientras que los errores relativos medios de la caída de presión disminuyen. También se observa en los perfiles de velocidad U cómo la variabilidad de los errores a lo largo del perfil se mantiene casi constante en diferentes niveles de Hartmann, salvo en el caso de 100 donde la variabilidad es mayor debido posiblemente a las turbulencias generadas. En lo que respecta a la variabilidad de la caída de presión, está disminuye en tanto en cuanto el nivel de Hartmann aumenta.

Si se comentan los errores relativos cometidos en la evolución de la velocidad máxima, Tabla 5, se visualiza un aumento del error a medida que aumenta el nivel de Hartmann. Sin embargo, este error es lo suficientemente pequeño como para encontrar la diferencia en la 4ª cifra decimal.

Ha	U _{max}		ε _{relativo}
	numérica	teórica	
1	0,368379	0,368354	0,00679%
5	0,340935	0,340908	0,00792%
10	0,304089	0,304049	0,01316%
20	0,273975	0,273932	0,01570%
30	0,264214	0,264162	0,01968%
50	0,256875	0,256792	0,03232%
100	0,251633	0,251479	0,06124%

Tabla 5: Errores relativos en la velocidad máxima

Al igual que en el caso anterior, los errores relativos en todo el análisis no han sido muy grandes (superiores al 1%). Se puede concluir para este caso que sus resultados concuerdan con los resultados analíticos.

5.2.3 Caso con contribución del campo inducido

Por último, en este caso se realizó la simulación exactamente con las mismas condiciones que en el subapartado 5.2.2. No obstante, en el código desarrollado se tuvo ya en cuenta la contribución del campo magnético inducido por el movimiento del flujo.

En los resultados obtenidos se representan tanto la evolución de la velocidad U como la evolución de la presión a lo largo del canal (ver Figura 12), y los perfiles tanto de velocidad como de campo magnético inducido a lo ancho del canal (ver Figura 13). De igual manera que en el anterior subapartado, todas estas representaciones se han realizado para diferentes niveles de Hartmann.

En las diferentes gráficas se observa el mismo fenómeno que en el anterior caso generado. La evolución de la velocidad U a lo largo del canal disminuye conforme el nivel de Hartmann aumenta, al igual que su longitud de desarrollo. Esta disminución de velocidad, manteniendo un caudal constante, generan unas caídas de presiones sobre el tramo de la tubería que aumentan al aumentar el nivel de Hartmann.

Ya en la zona desarrollada, los perfiles de velocidades U cambian de igual manera que en el anterior subapartado. Por otro lado, la nueva variable calculada, el campo magnético inducido, posee dos máximos y tres mínimos. Los mínimos se encuentran dos en las paredes (ya que son aislantes), y el tercero en el centro del canal. Atendiendo a la ley de Ampère, es en el centro del canal donde se encontrarán las densidades de corriente eléctrica máximas. Por lo tanto, el campo magnético inducido tenderá a rotar en torno al eje central del canal. Los

máximos (uno positivo y otro negativo, ya que la función es antisimétrica) se encontrarán en un punto entre el centro del canal y las paredes. Este máximo se irá desplazando hacia la pared y aumentando de valor debido a que al aumentar los niveles de Hartmann, las densidades de corriente son cada vez mayores dando casi una variación lineal del campo magnético inducido para niveles de Hartmann igual a 100.

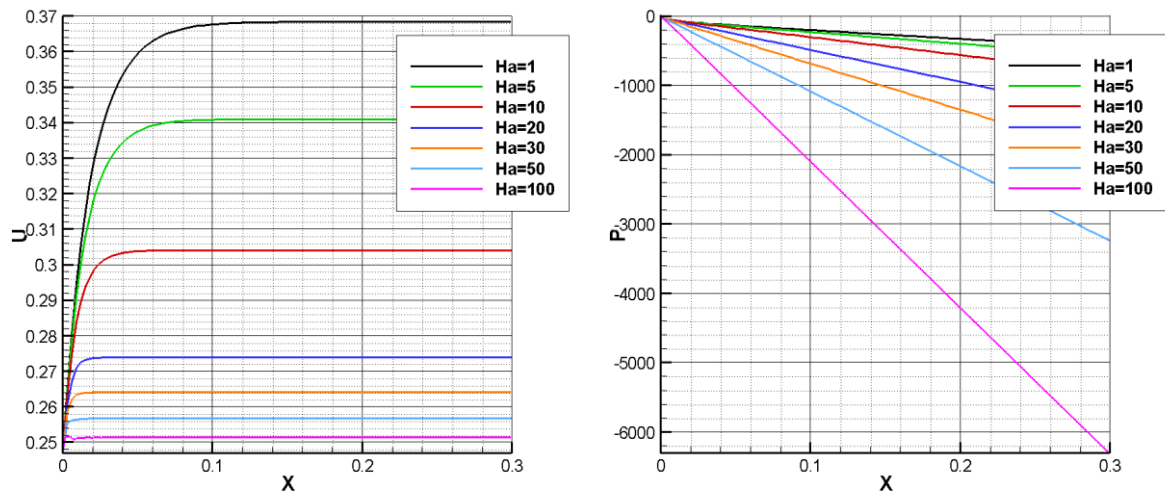


Figura 12: Evolución de la velocidad U (izquierda); evolución de la presión (derecha)

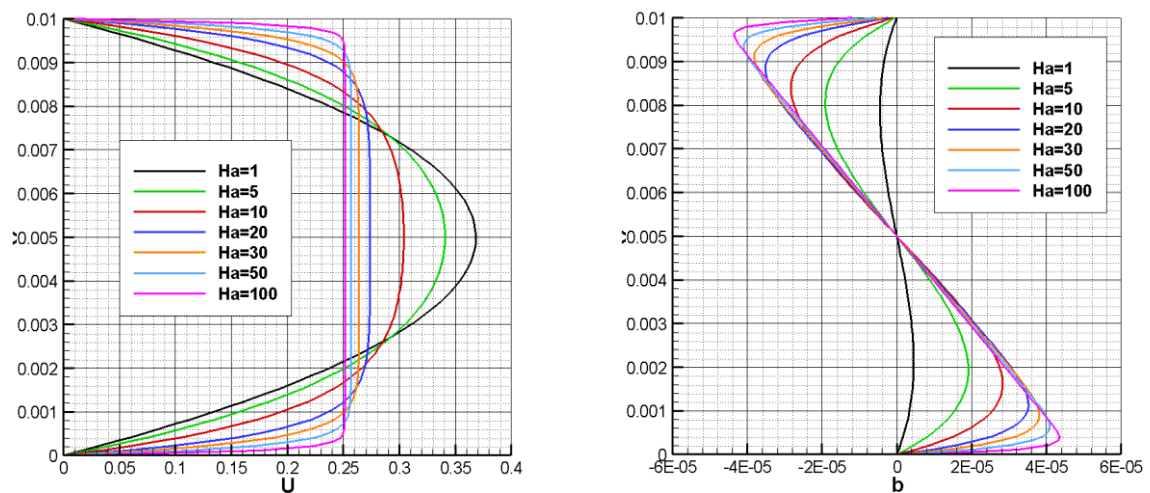


Figura 13: Perfiles de velocidad U (izquierda); perfiles de campo magnético inducido b (derecha)

Si realizamos otra misma comparación entre los resultados numéricos con los teóricos (ver Figura 14) se ve por un lado, para el perfil de velocidad U cómo aumenta el error relativo medio al aumentar el nivel de Hartmann mientras que la variabilidad del error, aun siendo ancho el intervalo, se mantiene constante al aumentar Hartmann. Por otro lado, en el perfil del

campo magnético inducido b el error relativo medio disminuye salvo en el caso de Ha igual a 100. A diferencia de la gráfica anterior, la variabilidad de nuestros errores relativos en el perfil b aumenta a medida que aumenta el nivel de Hartmann. Sobre la caída de presión K , los errores relativos medios ya no siguen una tendencia, aunque la variabilidad de sus errores sí que tiende a disminuir a medida que aumenta el nivel de Hartmann.

Ha	U _{max}		E _{relativo}
	numerico	teorico	
1	0,368352	0,368379	0,00733%
5	0,340908	0,340935	0,00792%
10	0,304034	0,304089	0,01809%
20	0,273893	0,273975	0,02993%
30	0,26411	0,264214	0,03936%
50	0,256707	0,256875	0,06540%
100	0,251312	0,251633	0,12757%

Tabla 6: Errores relativos en la velocidad máxima

En lo que respecta a los errores relativos en la velocidad máxima, Tabla 6, sucede lo mismo que en el subapartado anterior. Estos errores aumentan a medida que aumentan el nivel de Hartmann. Sin embargo, este error es lo suficientemente pequeño para encontrar la diferencia en la 4ª cifra decimal.

Se puede concluir que siendo que los errores relativos no son superiores al 1%, los resultados numéricos concuerdan con los resultados teóricos.

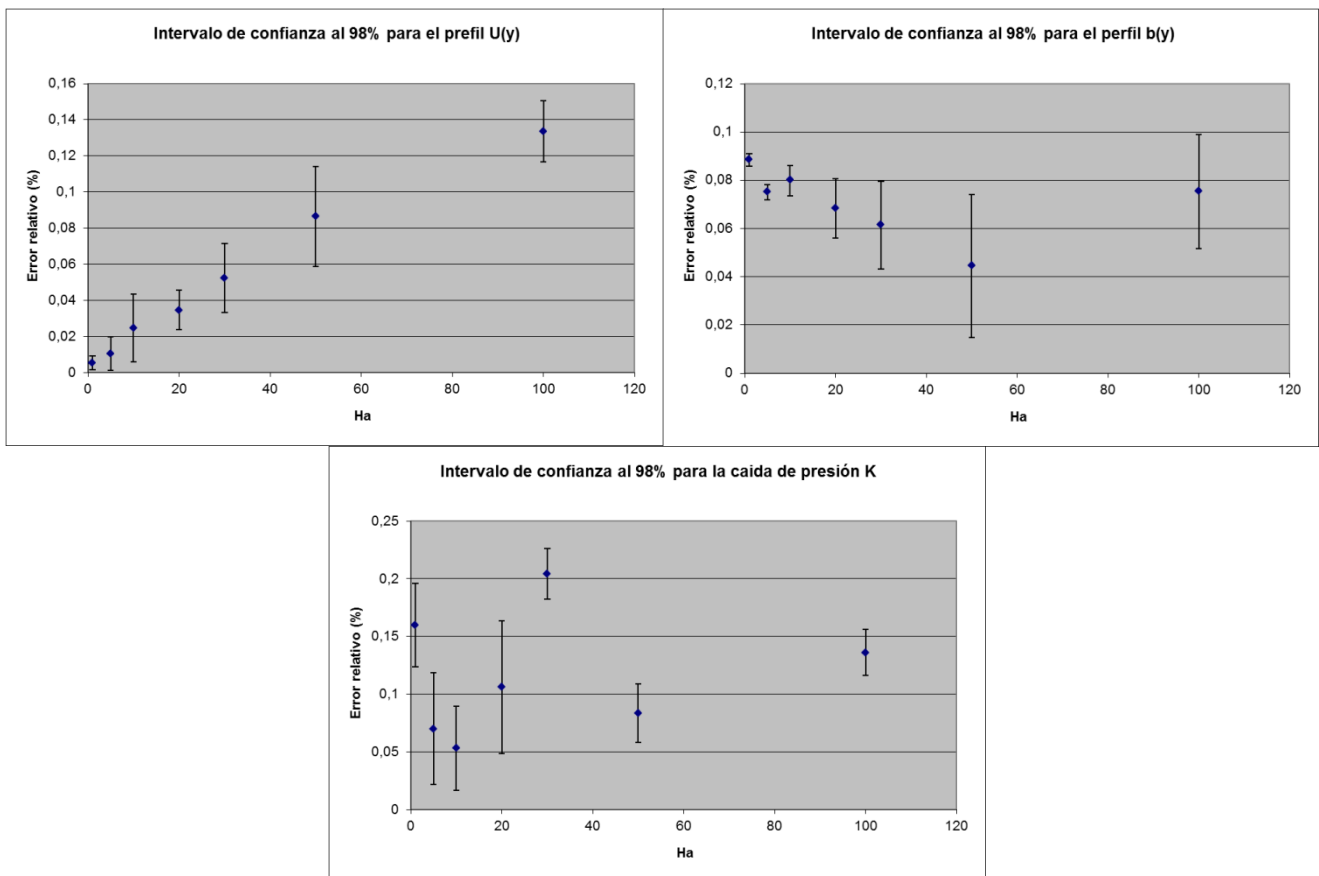


Figura 14: Variaciones de los errores cometidos en el perfil de velocidad U, perfil de campo magnético b , y la caída de presión K para diferentes niveles de Hartmann

De un interesante análisis comparativo de los resultados obtenidos en el subapartado 5.2.3 con los del subapartado 5.2.2, se desprende que al tener unos valores de campo magnético inducido menores que el campo magnético externo, la contribución del campo

magnético inducido apenas tiene influencia sobre el flujo. Por ejemplo: para $Ha = 100$ el valor de b es igual a $4,2 \cdot 10^{-5}$ T; mientras que el valor de B_0 equivale a 11,01 T ($Lp = 3,81 \cdot 10^{-6}$). Si se observa las gráficas de los perfiles de velocidad y la evolución de velocidad de cada subapartado, los valores apenas cambian. Sin embargo, la caída de presión es más pronunciada en el caso en el que despreciamos los cálculos del campo magnético inducido que en el caso en el que los tenemos en cuenta. Lo que nos hace indicar que a pesar de no tener una acción significativa sobre el campo del flujo, sí que la tienen sobre el campo de presión.

5.3 Visualización del “modo válvula”

En el siguiente apartado, se realizará la correspondiente comparación con los resultados expuestos en la publicación científica. Además, estos resultados nos permitirán visualizar el modo fundamental de trabajo denominado “modo válvula”. Con este modo lo que se permite es el control hidráulico sobre el flujo (como el caudal y/o la caída de presión en el tramo de la tubería) mediante la aplicación externa de acciones como son los campos magnéticos.

El modelo geométrico que se sigue en este apartado es el mismo que los anteriores: placas no conductoras separadas a 10 mm, con una longitud del canal de 300 mm. Sin embargo, al contrario de los casos anteriormente generados, la caída de presión en el tramo de la tubería será constante con un valor de aproximadamente 373 Pa. Además, el campo magnético externo B_0 no va a ser aplicado en todo el dominio del canal, sino que se distinguirán tres zonas (divididas en longitudes a partes iguales) como se observa en la figura 15. El mallado rojo y azul correspondería al fluido aguas-abajo y aguas-arriba respectivamente, en donde no existe la presencia de ningún campo magnético externo. Mientras que, en el mallado verde un campo magnético en dirección Y ha sido aplicado con diferentes valores en el nivel de Hartmann (0, 1, 5, 10, 20, 30, 50, 100).

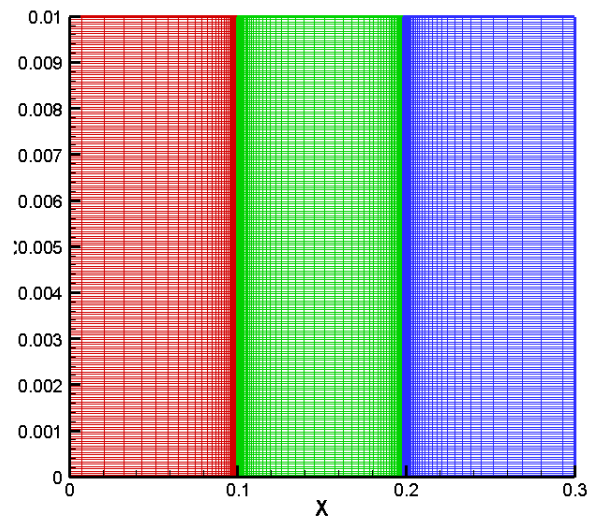


Figura 15: Mallado contractivo/expansivo en las interfaces del área magnética (mallado verde) donde se le es aplicado un campo B_0

A diferencia de la publicación científica la cual utiliza un mallado uniforme, el mallado que se observa en este apartado no es uniforme por la existencia de unas interfaces magnéticas aguas-arriba y aguas-abajo. Por lo tanto para prestar especial atención a dichas zonas se optó por un mallado contractivo/expansivo. Este nuevo mallado requirió un total de 153x200 nodos respectivamente.

Los resultados obtenidos a partir de unas 50 horas de simulación numérica se resumen en diferentes gráficas. En la primera de ellas se han obtenido los diferentes perfiles de

velocidad, en diferentes tramos de nuestro canal como se observa en la Figura 16. Los tramos L(-2) y L(+2) corresponde a los perfiles en las zonas de aguas-abajo y aguas-arriba respectivamente, en un punto intermedio de dicha región. L(0) corresponde a los perfiles en la zona magnética, también en un punto intermedio de la región. Mientras que, los perfiles en los tramos L(-1) y L(+1) corresponde a los valores en las zonas de las interfaces magnéticas aguas-arriba y aguas-abajo respectivamente.

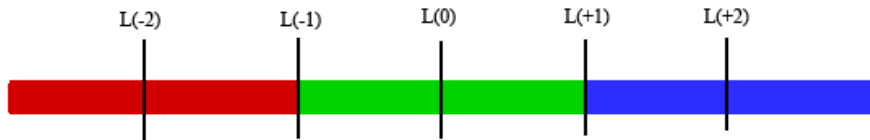


Figura 16: Esquema de los perfiles obtenidos

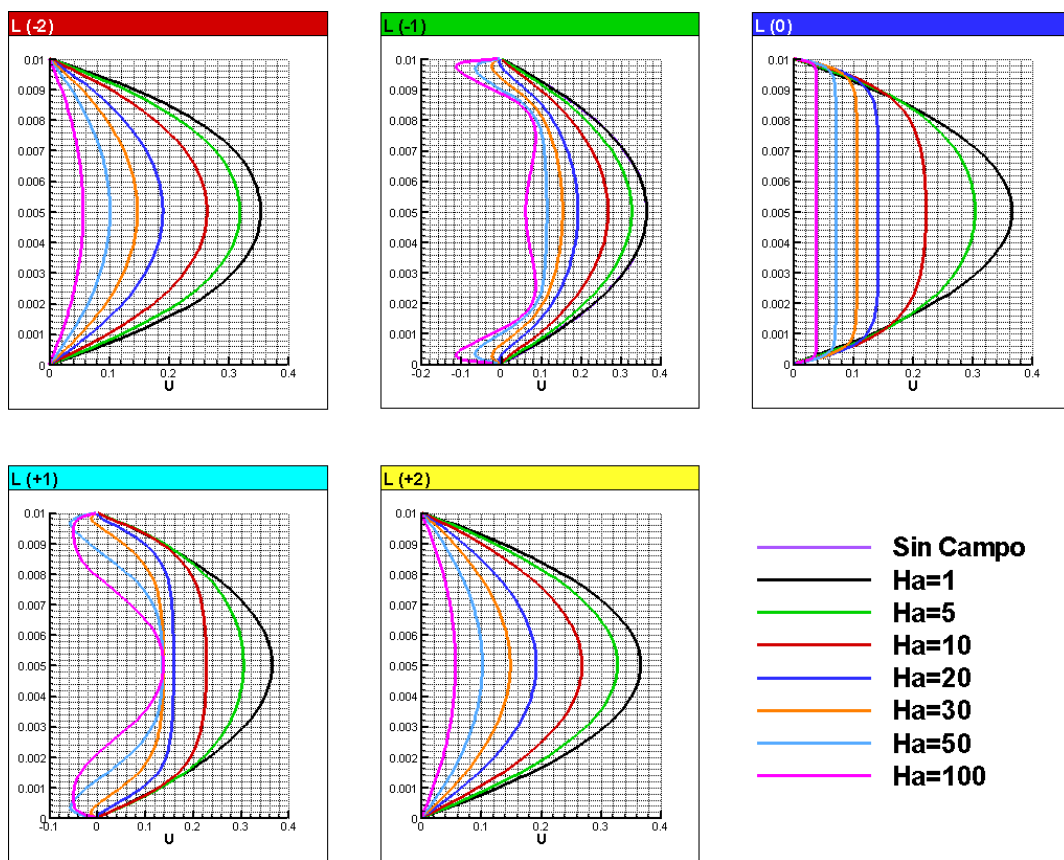


Figura 17: Perfiles de velocidad en diferentes tramos del canal

De estos perfiles de velocidad (Figura 17) se desprenden varias ideas. La primera es que todo efecto que suceda en la región magnética tendrá un efecto tanto aguas-arriba como aguas-abajo. Es así como podemos comprobar en las regiones L(-2) y L(+2) en donde el perfil de velocidad disminuye a medida que aumenta el nivel de Hartmann. Los valores de velocidad máxima en L(-2) son 0,353836; 0,353836; 0,319186; 0,264201; 0,190396; 0,148008; 0,102073; y 0,0573353 m/s y en L(+2) son 0,367797; 0,367797; 0,328634; 0,269356; 0,192647; 0,149215; 0,102507; y 0,0574416 m/s; para los diferentes valores de Ha (Sin Campo, 1, 5, 10, 20, 30, 50, 100 respectivamente). Estos valores nos dan una idea más clara del control hidráulico (ver

Tabla 7) que tenemos en el flujo a partir de las acciones externas de B_0 . Aunque exista una pequeña diferencia en nuestros valores máximos entre L(-2) y L(+2) provocados por la resolución numérica de nuestro código, la conservación de la masa se cumple.

Ha	q (cm ³ /s)/m
0	2.453,13
1	2.453,13
5	2.199,12
10	1.802,98
20	1.285,36
30	994,16
50	683,10
100	382,93

Tabla 7: Datos del caudal

En la zona magnética L(0) la aplicación de un campo magnético externo hace que se visualice un núcleo de velocidad a partir de unos niveles de Hartmann superiores a 10. Este núcleo aparece, como ya hemos comentado antes; debido a que la fuerza magnética también denominada “fuerza de Lorentz” intenta contrarrestar el gradiente de presión oponiéndose al sentido del flujo en el canal. Los valores de velocidad máxima en L(0) son 0,366389; 0,366389; 0,304582; 0,222317; 0,142721; 0,106458; 0,0710993; 0,0390318 m/s

Estos resultados si los ajustamos con la publicación científica debido a que se desconoce el valor de la conductividad eléctrica σ (Figura 18), para sus 0,5 T le corresponderían unos niveles de Hartmann en torno a 5, para 1 T le correspondería un nivel en torno a 20, y para 1.5 T le correspondería un nivel en torno a 50.

A pesar del desconocimiento de la conductividad eléctrica del fluido, existe una diferencia que reside en los perfiles de las interfases aguas-abajo y aguas-arriba magnéticas L(-1) y L(+1).

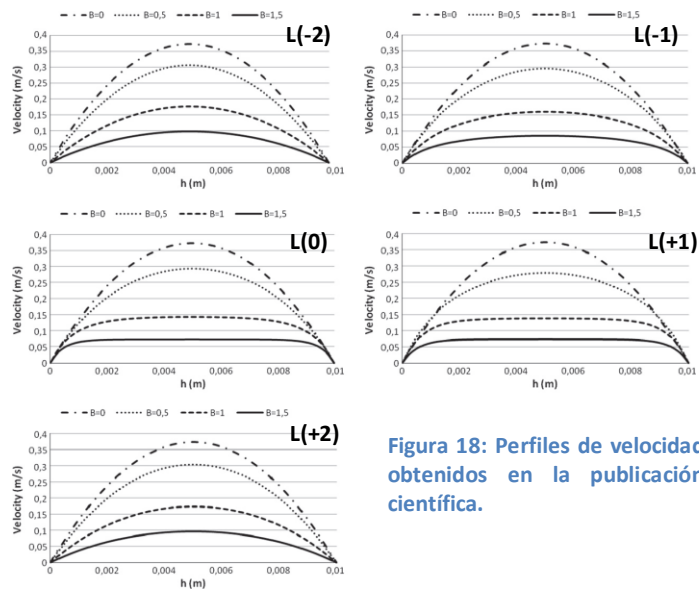


Figura 18: Perfiles de velocidad obtenidos en la publicación científica.

En estas zonas se aprecia la existencia de unas recirculaciones próximas a la pared a partir de unos niveles de Hartmann superiores a 20, Figura 19. Recirculaciones no presentes en la publicación científica con la que se compara. En la interfase de entrada al área magnética L(-1) estas recirculaciones son más estrechas que las recirculaciones en la interfase de salida L(+1), pero son más intensas. Además, las recirculaciones a la entrada quedan en el interior de la zona magnética, mientras que las recirculaciones a la salida quedan fuera

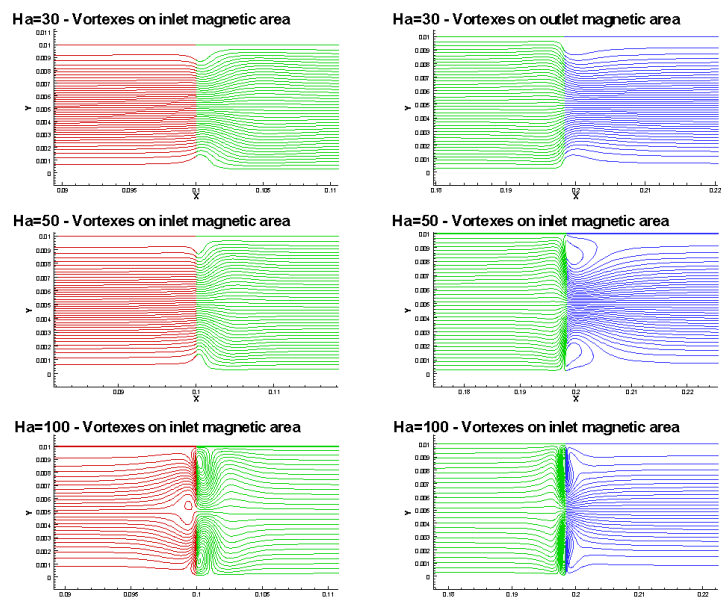


Figura 19: Líneas de corriente de flujo

de ella. También se aprecia para Hartmann igual a 100 la existencia de unas recirculaciones a la entrada de la interfase magnética L(-1), situadas a una distancia de 0,005 m en la dirección Y (centro del canal).

La existencia de estas recirculaciones se explicaría gracias a la fuerza magnética que está actuando en la zona. Como la fuerza de Lorentz intenta frenar al flujo, y en consecuencia a aplanar el perfil, se generará unas componentes de velocidad V en dirección Y que serán cada vez más fuertes al aumentar el nivel de Hartmann. Esto provocará que llegado a un nivel, el flujo aguas-abajo necesite generar una componente de velocidad V en dirección Y, pero en sentido opuesto a las velocidades verticales aparecidas en la zona magnética para compensar el gradiente de presión. Estas velocidades originarían las recirculaciones que aparecen en los resultados, Figura 20. Esto mismo ocurrirá en sentido contrario, a la salida de la interfase magnética.

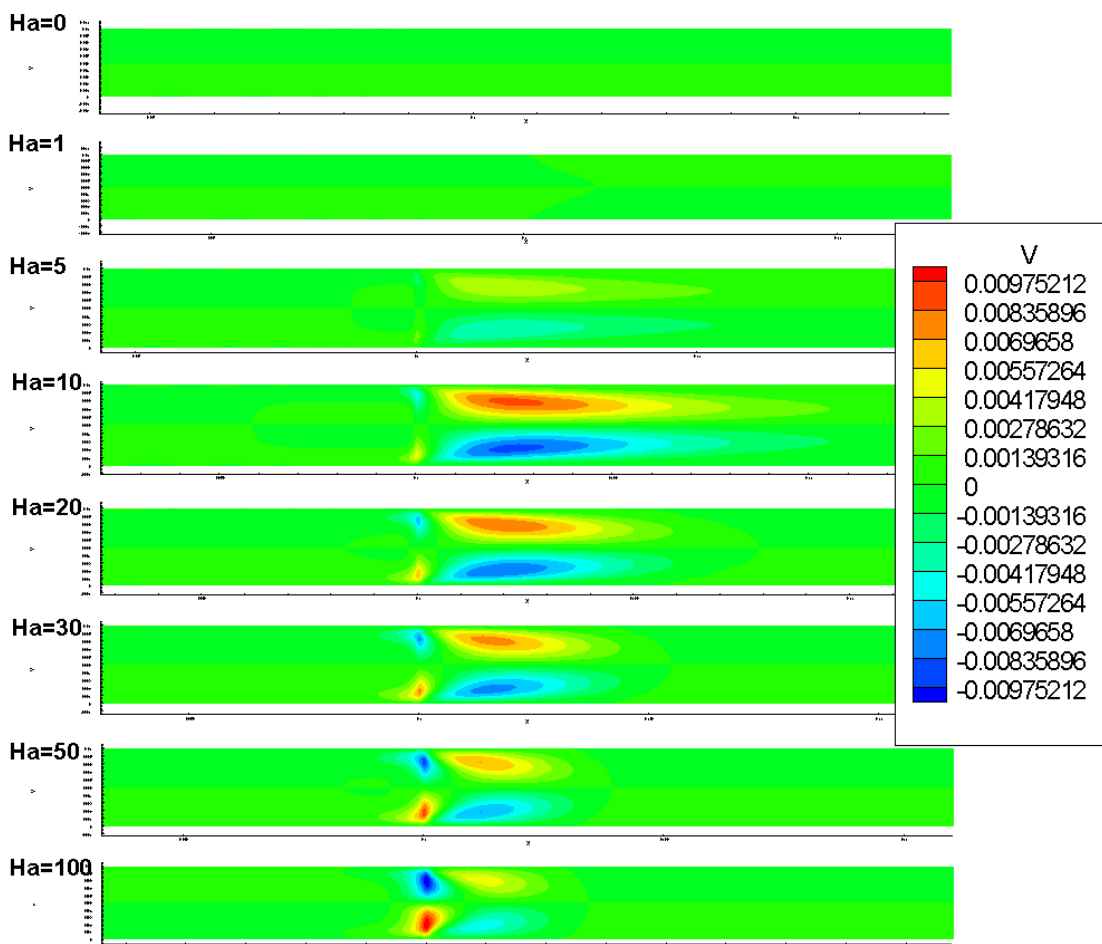


Figura 20: Contornos de la velocidad V en la interfase magnética de entrada

En la Figura 21 se muestran los contornos de velocidad U para diferentes niveles de Hartmann. Se observa para niveles de Hartmann iguales y en consecuencia menor que 1, el perfil del flujo apenas cambia debido a que las fuerzas magnéticas que aparecen son inferiores o iguales a las fuerzas de origen viscoso. Entre niveles de Hartmann que van de 5 a 20 la reducción de velocidad pasa de 0,37 m/s a 0,14 m/s, aproximadamente la velocidad se ha reducido un 62%. Cuando los niveles de Hartmann aumentan de 30 a 100 ya la reducción de

velocidad es drástica pasando casi a una velocidad máxima de 0,04 m/s para niveles de 100. En estos niveles de Hartmann, al aparecer importantes recirculaciones, el flujo en la interfase de la salida magnética necesita ser acelerado debido a la conservación de la masa.

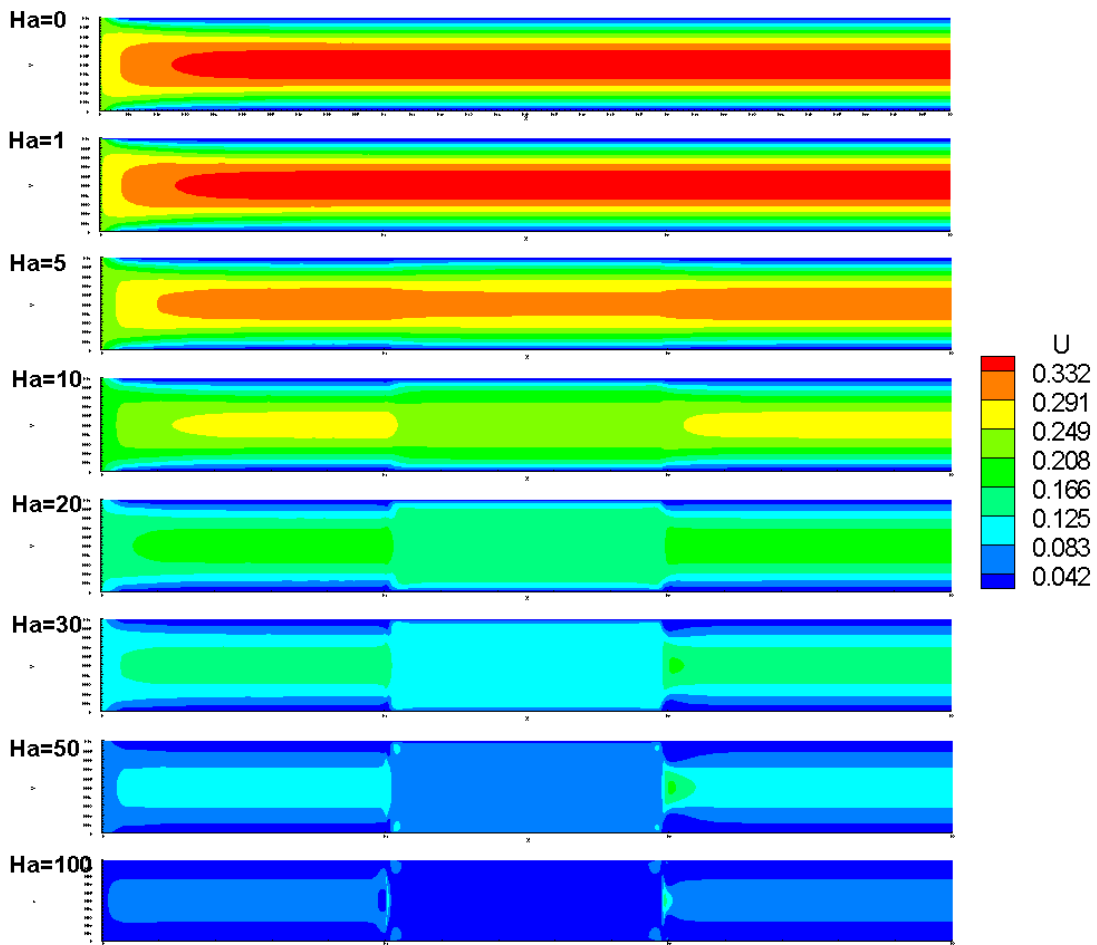


Figura 21: Contornos de velocidad U para diferentes niveles de Hartmann

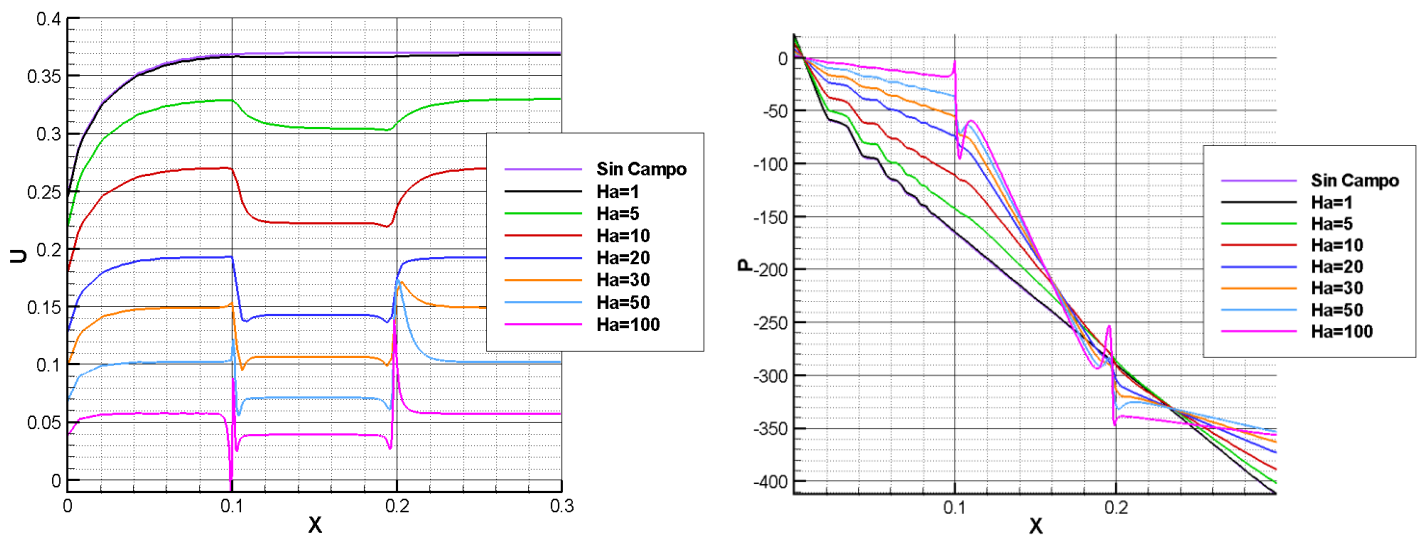


Figura 22: Evolución de la velocidad U (izquierda) y la presión (derecha) a lo largo del canal

En la Figura 22 de la izquierda se muestra la evolución de la velocidad U a lo largo del canal y como dicha velocidad se ve modificada cuando pasa por las diferentes zonas. En la gráfica la velocidad máxima que alcanza al no aplicar ningún campo magnético son unos 0,37 m/s, al aumentar el nivel de Hartmann se observa lo mismo que anteriores comentarios y la velocidad disminuye. Aun así, todo esto no sucede instantáneamente sino que necesita una cierta longitud para que el flujo se desarrolle y alcance su velocidad máxima, tanto a la entrada del área magnética como a la salida. Entre niveles de Hartmann que van de 5 a 20 esa longitud se va reduciendo (0,14; 0,12; y 0,11 m respectivamente) y la pendiente cada vez es más pronunciada en esas regiones no desarrolladas. A partir de niveles de 20 se notan unas sobreoscilaciones en la velocidad a la salida debido a esas recirculaciones comentadas (al ser más grandes, los efectos en el flujo se notan más) y a la conservación de la masa. Estas sobreoscilaciones aparecidas aumentan, a medida que el nivel de Hartmann aumenta (ver Tabla 8).

Ha	pico de velocidad [m/s]	velocidad maxima aguas-arriba [m/s]	Sobreoscilaciones [%]
30	0,171	0,149	14,77
50	0,172	0,103	66,99
100	0,14	0,06	133,33

Tabla 8: Sobreoscilaciones de la velocidad

Por otro lado, esta disminución de velocidad hace que en la zona magnética de nuestro canal, la caída de presión (ver Figura 22) se vea incrementada dando los siguientes valores: 1.243,37; 1.256,60; 1.497,21; 1.892,58; 2.398,22; 2.682,05; 2.985,38; y 3.276,76 Pa/m. También se observa en la zona aguas-abajo del flujo como unas irregularidades en la presión. Esto es debido al tamaño del volumen de la malla en la entrada del canal. Al necesitar contraer la malla en la interfase magnética de entrada para lograr mayor precisión en nuestros resultados, se la estamos quitando en la zona más alejada de la interfase, y esa es la entrada del canal. Sin embargo, los resultados allí obtenidos apenas tienen influencia en el resto del canal.

Como en este apartado se han calculado también los campos magnéticos provocados por el movimiento del flujo, se puede visualizar las líneas de corriente del campo magnético inducido (ver Figura 23). De ellas se deducen como aparte de existir un cierto campo magnético en el interior del área magnética también existe cierto campo magnético aguas-arriba y aguas-abajo cercano a las interfases. Se observa como además estas líneas de campo magnético rotan alrededor de cuatro centros: dos en el exterior y dos en el interior del área magnética. Si se atiende a lo que nos dice la ley de Ampere ($\vec{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{b}$) se deduce que en dichos puntos se generan densidades de corriente eléctrica provocadas por el movimiento del flujo. En consecuencia en el fluido se generan dos anillos de corrientes eléctricas que al final se juntarán en el infinito (debido a que la placa la hemos supuesto infinita en el eje perpendicular al papel). Estas corrientes eléctricas intentan perturbar el campo magnético externo pero al ser tan débiles apenas lo modifican. Mientras tanto, las líneas del campo magnético inducido quedan contenidas en el canal porque las condiciones de contorno impuestas en las placas son de aislantes eléctricas.

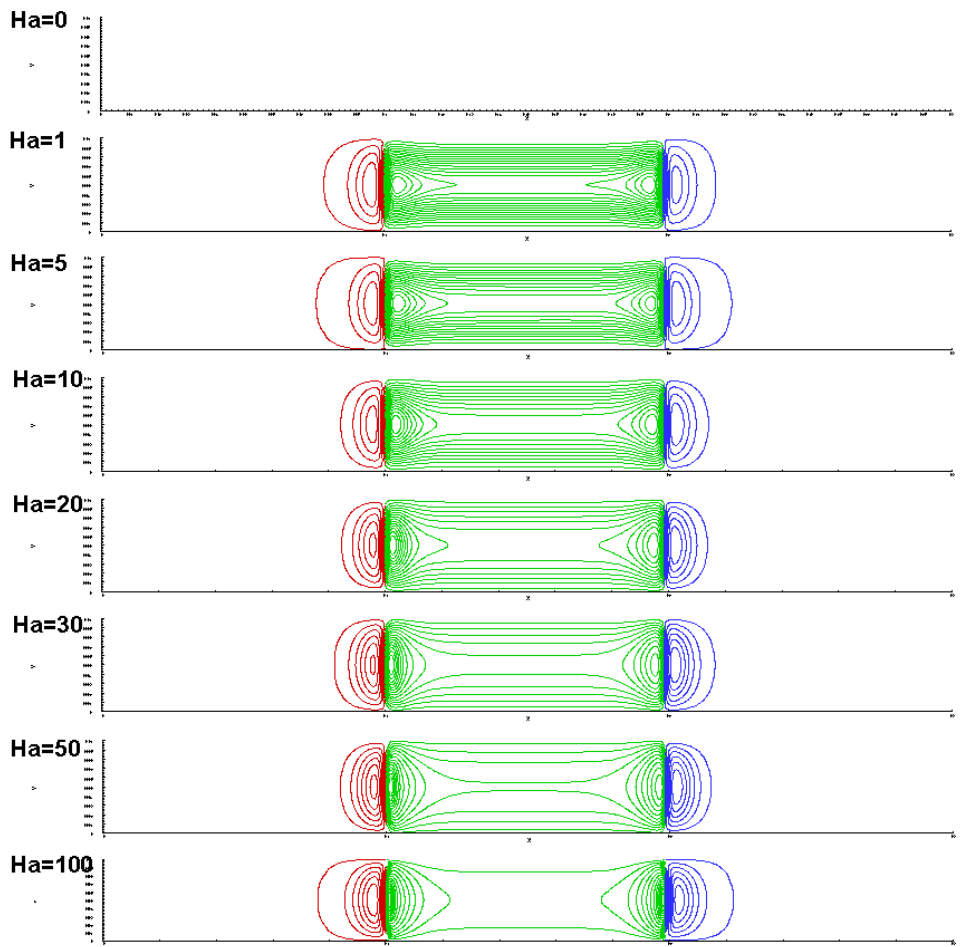


Figura 23: Líneas de corriente para el campo magnético inducido

Adicionalmente, estas corrientes eléctricas al estar sumergidas en un campo magnético generan una fuerza magnética. Cuanto mayor sea el campo magnético, mayor será la fuerza que se ejerza sobre el fluido. A su vez, estas corrientes eléctricas se irán desplazando cada vez más hacia las interfaces haciéndose cada vez más intensas debido a que tienen que contrarrestar el movimiento del fluido. Es por ello que para valores muy altos del nivel de Hartmann, como por ejemplo 100; el campo magnético inducido se concentra casi en su totalidad en las interfaces de salida/entrada del área magnética.

6. Conclusiones y trabajo futuro

Las modificaciones realizadas han supuesto una mejora en el código académico, teniendo como resultado un programa que puede ser utilizado para estudiar el movimiento de fluidos conductores de la electricidad en presencia de campos magnéticos. Además, se ha llegado a resultados en donde el código numérico concuerda con lo que la teoría predecía, gracias a que nos hemos podido ayudar de libros especializados en temas de magnetohidrodinámica (MHD), así como de publicaciones científicas para contrastar mejor los resultados. Por lo tanto, y aunque durante el modelado se han realizado diversas simplificaciones e hipótesis hemos podido obtener una serie de conclusiones:

- 1.- La aplicación de campos magnéticos externos en el flujo provoca un control hidráulico en el canal, pudiendo este control estar aplicado a la presión (a mayor campo magnético, mayor caída de presión para un mismo caudal), o aplicarlo al caudal (a mayor campo magnético, menor caudal para una misma caída de presión).
- 2.- El flujo en presencia de campos magnéticos se ve frenado por estas nuevas acciones externas y hace que en el perfil de velocidad aparezca un núcleo de velocidad.
- 3.- En problemas de MHD no hay que olvidarnos de la existencia de otras capas límites adicionales a las viscosas denominadas “capas de Hartmann”.
- 4.- Cuando los campos magnéticos inducidos son despreciables frente a los externos, apenas existen una contribución adicional al flujo, pero si tiene una influencia sobre el campo de presiones.
- 5.- Cuando los niveles de Hartmann son inferiores o iguales a 1, apenas existen diferencias con casos generados en donde no existía la presencia de campos magnéticos externo. Por consiguiente, se pueden despreciar las fuerzas de origen magnético y modelar nuestro problema como un simple problema de mecánica de fluidos.
- 6.- Entre niveles de Hartmann que van de 5 a 20 la reducción de caudal supone entre un 10-48%. Por otro lado, niveles de Hartmann situados entre 30 y 100 supone una reducción entre un 59-84% del caudal.
- 7.- La existencia de unas recirculaciones a partir de niveles de Hartmann superiores a 20, que inicialmente no estaban contempladas en la publicación científica.
- 8.- Cuando los niveles de Hartmann son superiores a 100, serían necesarios la utilización de modelos matemáticos de DNS o LES.

Aun así, queda mucho trabajo por hacer. Las siguientes líneas bien podría decirse que sería un “trabajo futuro” para futuros estudiantes y/o para el mero ámbito de la investigación.

En lo que respecta a los fluidos magnetoreológicos (MR):

- 1.- Está claro que al principio hemos realizado unas simplificaciones para poder utilizar la teoría de la MHD a los fluidos MR. Pero no hay que olvidar que estos fluidos llevan en su interior partículas magnéticas que son arrastradas por el fluido

portador. Y aunque hemos podido visualizar con nuestro código un núcleo de velocidad de la misma manera que experimentos con fluidos MR, esto no implica que ambos resultados sean iguales debido a diferentes fenómenos de formación. Por ello, es necesario realizar experimentos en laboratorio que corroboren los resultados obtenidos. Y en consecuencia, dependiendo de los resultados, poder aplicar factores de corrección para que dichos resultados concuerden con los resultados del programa.

- 2.- También podría ser generado un código numérico de Fluidos MR que tuviese en cuenta la viscosidad variable y compararlos con los resultados aquí obtenidos.

En lo que respecta a la teoría de la magnetohidrodinámica (MHD):

- 1.- Un debate que surge en problemas de MHD es cómo se originan las densidades de corriente eléctrica \vec{J} . Dos mecanismos de formación estarían presentes: La ley de Ampère y la ley de Ohm generalizada. Por ello, sería útil realizar simulaciones para saber qué ley es mejor utilizar en diferentes casos que se puedan pensar.
- 2.- En muchos estudios, se dice que cuando los números de Reynolds magnéticos Re_m son muy pequeños, los campos magnéticos inducidos son despreciables frente a los externos y en consecuencia no tienen influencia sobre el flujo. A pesar de ello, el número de Reynolds magnético no sería un buen indicador para poder despreciar el campo magnético inducido. En cambio, el cociente entre el Reynolds magnético y el Hartmann Re_m/Ha sí que sería un buen indicador de ello.

En lo que respecta al código numérico empleado:

- 1.- La geometría utilizada ha sido muy sencilla: placas planas paralelas y aislantes. Sería ventajoso modificar el código para poder utilizar geometrías y condiciones de contorno un poco más complejas. Por ejemplo: coordenadas cilíndricas y condiciones de contorno del tipo “pared conductora eléctrica”.
- 2.- También en el problema se ha supuesto un fluido estacionario, y podría extenderse este código para calcular problemas transitorios y ver los fenómenos que en estos se sucederían.
- 3.- Incorporar al código modelos DNS o LES.

7. Bibliografía

- [1] *“Two-dimensional CFD simulation of magnetorheological fluid between two fixed parallel plates applied external magnetic field”*; Engin Gedik, Hüseyin Kurt, Ziyaddin Recebli, Corneliu Balan. *Computers&Fluids*, Volumen 63, pp 128 – 134.
- [2] *“Magnetofluidynamics in Channels and Containers”*; U. Müller, L. Bühler; Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.

ANEXO I

Desarrollo Teórico

Nomenclatura

ρ	Densidad del fluido (kg/m^3)
ρ_c	Densidad de carga eléctrica (C/m^3)
η	Viscosidad dinámica del fluido (Kg/ms)
η_v	Viscosidad volumétrica del fluido (Kg/ms)
$\mu = \mu_r \mu_0$	Permeabilidad magnética del fluido (H/m)
μ_r	Permeabilidad magnética relativa del fluido
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	Permeabilidad magnética del vacío (H/m)
μ_w	Permeabilidad magnética de la pared (H/m)
$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$	Permitividad eléctrica del fluido (F/m)
ε_r	Permitividad eléctrica relativa del fluido
$\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$	Permitividad eléctrica del vacío (F/m)
σ	Conductividad eléctrica del fluido (S/m)
σ_w	Conductividad eléctrica de la pared (S/m)
σ'	Conductividad eléctrica del medio donde se genera B_0 (S/m)
t_w	Espesor de las placas (m)
L	Longitud característica de la geometría (m) Longitud del canal (m)
$c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$	Velocidad de las ondas electromagnéticas en el fluido
$c = \mu_w \sigma_w t_w / \mu \sigma L$	Ratio de conductividad de la pared
u_0	Escala de velocidad (m/s) Velocidad de referencia (m/s)
$b_0 = u_0 \mu \sqrt{\sigma \eta}$	Escala de campo magnético inducido (T) Campo magnético inducido de referencia (T)
$q_0 = u_0 w$	Escala del caudal ($\text{m}^3/\text{s/m}$)
\hat{u}	Magnitud de la velocidad
u_{max}	Velocidad máxima (m/s)
\bar{u}	Vector velocidad (m/s)
\bar{B}	Vector campo magnético (T)
\bar{E}	Vector campo eléctrico (N/C)
\bar{E}'	Vector campo eléctrico corregido (N/C)
\bar{b}	Vector campo magnético inducido (T)
\bar{B}_0	Vector campo magnético externo (T)
\bar{J}	Vector densidad de corriente eléctrica (A/m^2)
P	Presión (Pa)
$K = -\Delta P/L$	Caída de presión por tramo de longitud (Pa/m)
ΔP	Variación de presión entre entrada, P_e , y salida, P_s . (Pa)
$\bar{\tau}_\eta$	Tensor de esfuerzos viscosos (Pa)
\bar{f}_{em}	Fuerza de Lorentz (N/m^3)

I. FUNDAMENTOS

La “magnetohidráulica” o “magnetohidrodinámica” (MHD) es la ciencia que estudia el comportamiento de ciertos fluidos, que bajo las aplicaciones de campos magnéticos y/o eléctricos se ven perturbados por fuerzas cuya aparición es consecuencia de la generación de corrientes eléctricas que circulan sobre el fluido. A su vez, el propio fluido puede alterar los campos electromagnéticos sobre él debido a su propio movimiento.

Por ello esta disciplina académica combina las ideas que se describen en la “mecánica de fluidos” como la conservación de la masa y la cantidad de movimiento lineal del fluido.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0 \quad (I.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u} \otimes \bar{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\tau}_\eta + \bar{f}_{em} \quad (I.2)$$

$$\bar{\tau}_\eta = 2\eta \bar{e} + \left(\eta_v - \frac{2}{3}\eta\right) (\nabla \cdot \bar{u}) \bar{I} \quad (I.3)$$

Así como las “leyes del electromagnetismo” cuyos descubrimientos agrupan diferentes fenómenos que hablan sobre la carga eléctrica, el comportamiento de los campos eléctricos (ley de Gauss y Ley de Faraday-Henry), y de los campos magnéticos (ley de Gauss para el campo magnético y la Ley de Ampère-Maxwell).

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J} = 0 \quad (I.4)$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon} \quad (I.4)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (I.5)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (I.6)$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu \bar{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (I.7)$$

Además de otros tipos de fenómenos que se producen en materiales sumergidos en campos electromagnéticos como la denominada “fuerza de Lorentz por unidad de volumen” o la “ley de Ohm generalizada”. Se le denomina generalizada porque estas corrientes también pueden ser producidas por tener materiales que están sumergidos en el seno de un campo magnético con una determinada velocidad relativa.

$$\bar{f}_{em} = \rho_c \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B} \quad (I.8)$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}' \quad (I.9)$$

$$\bar{E}' = \bar{E} + \bar{u} \times \bar{B} \quad (I.10)$$

Todas estas ecuaciones que describirían perfectamente el comportamiento de estos tipos de fluidos, son difíciles y complejas de resolver. Sin embargo, imponiendo diferentes hipótesis y condiciones podremos simplificar las anteriores ecuaciones.

En el proyecto las suposiciones básicas que se han realizado son las comunes en problemas de fluidodinámica como: flujo laminar, fluido incompresible, propiedades físicas

constantes y el desprecio de la fuerza de la gravedad sobre el fluido. Estas hipótesis hacen que las ecuaciones 1.1 y 1.2 se transformen en las siguientes:

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (1.11)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \bar{u} + \bar{f}_{em} \quad (1.12)$$

Otra hipótesis que podemos realizar es sobre la velocidad local de nuestro fluido. Como la condición de entrada de la velocidad, va a ser del orden del centímetro por segundo; se puede suponer que en cualquier región del dominio del fluido, la velocidad va a ser del mismo orden. Esta hipótesis es bastante interesante, ya que si adimensionalizamos la ley de Ampere-Maxwell se obtiene los diferentes “pesos” para cada término de la ecuación.

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{B} &= \mu \bar{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \stackrel{\xi=\xi_0 \xi^*}{\Rightarrow} \frac{B_0}{L_0} \nabla^* \times \bar{B}^* = \mu J_0 \bar{J}^* + \frac{E_0}{c^2 T_0} \frac{\partial \bar{E}^*}{\partial t^*} \\ \nabla^* \times \bar{B}^* &= \frac{\mu J_0 L_0}{B_0} \bar{J}^* + \frac{E_0 L_0}{c^2 B_0 T_0} \frac{\partial \bar{E}^*}{\partial t^*} \stackrel{\substack{E_0=u_0 B_0 \\ L_0=u_0 T_0 \\ J_0=\sigma u_0 B_0}}{\Rightarrow} \nabla^* \times \bar{B}^* = Re_m \bar{J}^* + \left(\frac{u_0}{c} \right)^2 \frac{\partial \bar{E}^*}{\partial t^*} \end{aligned}$$

Cuando se obtiene la ecuación adimensionalizada, el término de corrientes de desplazamientos ($\varepsilon \partial \bar{E} / \partial t$) queda multiplicada por un factor que está muy ligado al denominado “factor de Lorentz” en la Relatividad General. Este factor o “peso” es el ratio entre una velocidad de referencia u_0 , por ejemplo la velocidad del fluido a la entrada del canal; y la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas c , en el fluido ($\mu_r = 4$; $\varepsilon_r = 1$). Como se ha realizado la suposición de una velocidad del fluido en torno al centímetro por segundo, y la velocidad de las ondas electromagnéticas en el fluido va a estar en torno a la velocidad de la luz (299.792,458 km/s); el término de corrientes de desplazamiento se desprecia frente al término de densidades. Por decirlo de otro modo, este término sólo es necesario tenerlo en cuenta en nuestros cálculos cuando los fenómenos relativistas están presentes en el fluido.

$$\left. \begin{aligned} c &\sim O(km/s) \\ u_0 &\sim O(cm/s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{u_0}{c} \right)^2 \sim 10^{-10}$$

Al suponer que las corrientes de desplazamiento son despreciables, se concluye que el fluido está en un estado de cuasi-neutralidad eléctrica debido a que la variación temporal de la densidad de carga es igual a cero y se supone que inicialmente el fluido no estaba cargado eléctricamente ($\rho_c(t=0) = 0$).

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \bar{B} = \mu \bar{J} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \bar{B}) = \mu \nabla \cdot \bar{J} \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = 0 \\ \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = 0 \Rightarrow \underline{\rho_c(t) = 0 \quad \forall t \geq 0}$$

Utilizando esta hipótesis, al final la fuerza electromagnética por unidad de volumen queda de la siguiente forma:

$$\bar{f}_{em} = \overbrace{\rho_c \bar{E}}^{\rho_c=0} + \bar{J} \times \bar{B} \Rightarrow \bar{f}_{em} = \bar{J} \times \bar{B} \quad (1.13)$$

Por último, será necesario encontrar una ecuación para calcular las posibles contribuciones del campo magnético inducido sobre el flujo. Para ello combinaremos las leyes de Faraday-Henry, Ampere y Ohm generalizada.

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} ; \quad \nabla \times \bar{B} = \mu \bar{J} ; \quad \bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B}) \\ &\Downarrow \\ \nabla \times \bar{B} &= \mu \sigma(\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B}) \\ \nabla \times (\nabla \times \bar{B}) &= \mu \sigma \nabla \times \bar{E} + \mu \sigma \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}) \\ \frac{1}{\mu \sigma} \nabla \times (\nabla \times \bar{B}) &= \nabla \times \bar{E} + \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}) \\ \frac{1}{\mu \sigma} \nabla \times (\nabla \times \bar{B}) &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B})\end{aligned}$$

Si se realiza las simplificaciones en los productos con el operador nabla y teniendo en cuenta lo que nos dice la ley de Gauss para el campo magnético (ecuación I.6) y la ley de la conservación de la masa (ecuación I.11), se obtiene la “ecuación de la inducción magnética” (ecuación I.14).

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \bar{B}) &= \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \bar{B}}_{=0}) - \nabla^2 \bar{B} = -\nabla^2 \bar{B} \\ \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}) &= \bar{u} (\underbrace{\nabla \cdot \bar{B}}_{=0}) + (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{u} - \bar{B} (\underbrace{\nabla \cdot \bar{u}}_{=0}) - (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{B} = (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{u} - (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{B} \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{B} &= \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \bar{B} + (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{u}\end{aligned}\tag{I.14}$$

La anterior ecuación es una típica ecuación de transporte para una variable determinada, en este caso para el campo magnético total \bar{B} . En ella se observa la existencia de un término temporal ($\partial \bar{B} / \partial t$), el término convectivo ($(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{B}$), el término difusivo ($\nabla^2 \bar{B}$) con su correspondiente constante de difusión denominada “difusividad magnética” ($1/\mu\sigma$), y un nuevo término fuente ($(\bar{B} \cdot \nabla) \bar{u}$). Esta ecuación nos indica como a partir de una condición inicial, como por ejemplo un campo magnético impuesto externamente, se generan unas densidades de corrientes eléctricas en el fluido, que a su vez crean un campo magnético secundario el cual puede modificar el campo magnético principal. Por ello, el campo magnético total \bar{B} puede ser descompuesto en un campo magnético externo \bar{B}_0 , y en un campo magnético inducido \bar{b} debido al movimiento del flujo.

Gracias a esta descomposición, se puede conocer más sobre el origen de estos campos magnéticos \bar{B}_0 y \bar{b} . Con “origen” nos referimos a las ecuaciones que describen su comportamiento. Para el caso del campo magnético impuesto externamente, si suponemos una conductividad eléctrica σ' del medio en el cual el campo \bar{B}_0 es generado, deberá satisfacer la siguiente ecuación como combinación de la ley de Faraday-Henry, la ley de Ampere y la ley de Ohm.

$$\left. \begin{aligned}\nabla \times \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{B}_0 &= \mu \bar{J} \\ \bar{J} &= \sigma' \bar{E}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t} - \frac{1}{\mu \sigma'} \nabla^2 \bar{B}_0 = 0\tag{I.15}$$

La ecuación I.15 nos da una idea de las formas en las que el campo externo \bar{B}_0 puede ser generado. Y es que dos casos necesitan ser considerados, ya que \bar{B}_0 puede ser originado en un medio que no es conductor eléctrico o en cambio, en un medio el cual si lo es.

Si \bar{B}_0 fuese generado en un medio no conductor, al no existir conductividad eléctrica del medio generado ($\sigma' = 0$); el campo \bar{B}_0 deberá satisfacer la siguiente condición:

$$\nabla^2 \bar{B}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \bar{B}_0 = 0 \quad (I.16)$$

Por lo tanto, atendiendo a la descomposición del campo magnético total ($\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{b}$) y a la anterior condición, la ecuación de inducción magnética quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{b} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \bar{b} + (\bar{b} \cdot \nabla) \bar{u} - \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}_0) - \frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t} \quad (I.17)$$

Si \bar{B}_0 fuese generado en un medio conductor, la conductividad eléctrica del medio es no nula ($\sigma' \neq 0$). Por lo tanto, puede ocurrir que el propio fluido sea el que genere \bar{B}_0 , entonces $\sigma' = \sigma$ y \bar{B}_0 deberá satisfacer la ecuación I.15. De la misma manera, la ecuación de inducción magnética se trasformaría en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{b} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \bar{b} + (\bar{b} \cdot \nabla) \bar{u} - \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}_0) \quad (I.18)$$

II. Densidad de corriente eléctrica

El segundo punto importante es la generación de las corrientes eléctricas en nuestro fluido. Según las leyes del electromagnetismo (ecuaciones I.4 a I.10) el origen de la densidad de corrientes eléctricas pueden estar en la ley de Ampere ($\mu\vec{J} = \nabla \times \vec{B}$) o en la ley de Ohm generalizada ($\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$). Dependiendo de qué ley utilicemos, la fuerza electromagnética tendrá una forma u otra.

Si se utiliza la ley de Ohm generalizada para calcular las corrientes eléctricas, asumiendo que el campo eléctrico es uniforme e igual a cero debido no de campo eléctrico no existe debido a la cuasi-neutralidad eléctrica del fluido ($\rho_c = 0$), y además de considerar el problema como estacionario. La fuerza electromagnética queda de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{f}_{em} = \vec{J} \times \vec{B} \\ \vec{J} = \sigma(\vec{u} \times \vec{B}) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{f}_{em} = \sigma(\vec{u} \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

$$\text{Producto Vectorial triple: } (\vec{u} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{u} \cdot \vec{B})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{B})\vec{u}$$

$$\text{Producto Escalar: } \vec{B} \cdot \vec{B} = B \cdot B \cdot \cos 0 = B^2$$

$$\vec{f}_{em} = \sigma(\vec{u} \cdot \vec{B})\vec{B} - \sigma B^2 \vec{u} \quad (II.1)$$

Se observa en la ecuación II.1 como en la fuerza por unidad de volumen aparecen dos términos. El primero de ellos ($\sigma(\vec{u} \cdot \vec{B})\vec{B}$) tienen la misma dirección que el vector campo magnético. Por otro lado, la existencia o no de este término dependerá de la no-ortogonalidad de los vectores velocidad del fluido y campo magnético. El segundo término ($-\sigma B^2 \vec{u}$) tienen la misma dirección pero sentido opuesto a la dirección del flujo. Esto nos indica que este sumando de la fuerza intenta frenar el movimiento del flujo a su paso por el seno del campo magnético.

Esta fuerza electromagnética se usará en el proyecto para calcular simulaciones en donde se consideran despreciables las posibles contribuciones del campo magnético inducido. Por lo tanto el único campo magnético que actúa es el campo magnético externo \vec{B}_0 , además de que las ecuaciones empleadas serán la ecuación de la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento lineal del fluido, con una fuerza adicional que será esta nueva fuerza de origen magnético (ver sistema de ecuaciones II.2)

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{u} + \sigma(\vec{u} \cdot \vec{B})\vec{B} - \sigma B^2 \vec{u} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \end{array} \right\} \quad (II.2)$$

Si se utiliza la ley de Ampère para calcular las corrientes eléctricas, la fuerza electromagnética queda reducida (ecuación II.3) a un producto vectorial entre el vector campo magnético y el rotacional del campo magnético:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{f}_{em} = \vec{J} \times \vec{B} \\ \vec{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{f}_{em} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\frac{1}{\mu} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \quad (II.3)$$

Si se realiza las simplificaciones correctas en el producto con el operador nabra, la ecuación II.3 se transforma en la ecuación II.4, dando como resultado un una descomposición de la fuerza interesante.

$$\begin{aligned}
\nabla(\bar{B} \cdot \bar{B}) &= \bar{B} \times (\nabla \times \bar{B}) + (\bar{B} \cdot \nabla)\bar{B} + \bar{B} \times (\nabla \times \bar{B}) + (\bar{B} \cdot \nabla)\bar{B} \\
\nabla\left(\frac{B^2}{2}\right) &= \bar{B} \times (\nabla \times \bar{B}) + \underline{(\bar{B} \cdot \nabla)\bar{B}} \\
(\bar{B} \cdot \nabla)\bar{B} &\equiv B_i \frac{\partial}{\partial x_i} B_j = \frac{\partial}{\partial x_i} B_j B_i - B_j \frac{\partial}{\partial x_i} B_i \equiv \nabla \cdot (\bar{B} \otimes \bar{B}) - \bar{B} \overbrace{(\nabla \cdot \bar{B})}^{=0} = \nabla \cdot (\bar{B} \otimes \bar{B}) \\
\bar{B} \times (\nabla \times \bar{B}) &= \nabla\left(\frac{B^2}{2}\right) - \nabla \cdot (\bar{B} \otimes \bar{B}) \\
\bar{f}_{em} &= -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{\bar{B} \otimes \bar{B}}{\mu}\right) \tag{II.4}
\end{aligned}$$

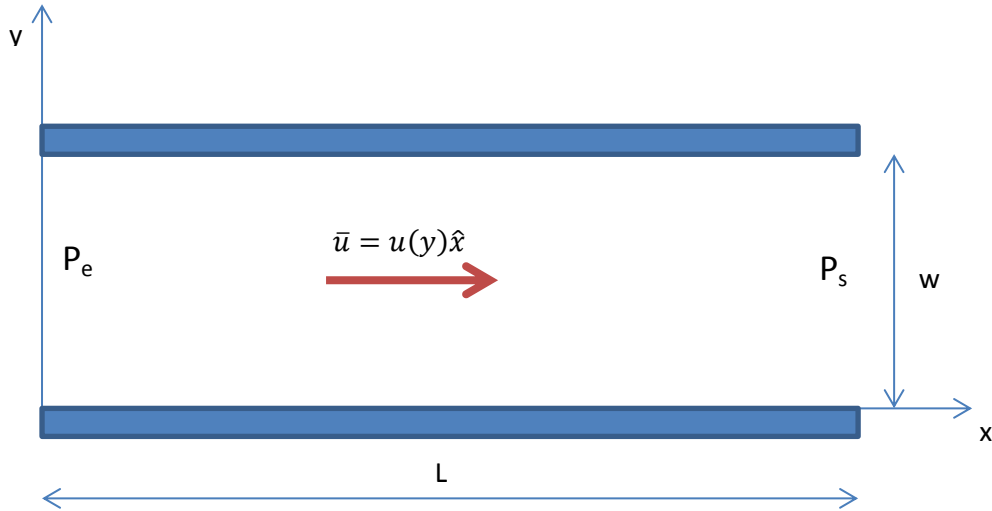
El primer término de la ecuación corresponde a lo que se denomina “gradiente de la presión magnética” ($-\nabla(B^2/2\mu)$), el cual actúa perpendicularmente a las líneas del campo magnético y a efectos se comporta como una presión como la ejercida por un gas o un líquido pero de origen magnético. El segundo término ($\nabla \cdot (\bar{B} \otimes \bar{B}/\mu)$) se denomina “tensor de tensiones magnéticas” y se puede identificar como un “tirón” que sufriría el fluido, y el cual actúa paralelamente al campo magnético.

Esta fuerza electromagnética será utilizada para el caso en donde tengamos en cuenta la contribución del campo magnético inducido. Además de las ecuaciones de la mecánica de fluidos se deberá resolver la ecuación de inducción magnética teniendo en cuenta el origen del campo magnético externo \bar{B}_0 (ver sistema de ecuaciones II.5). En el proyecto se suponen la creación de \bar{B}_0 en un medio no conductor.

$$\left. \begin{aligned}
\nabla \cdot \bar{u} &= 0 \\
\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} \right) &= -\nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu} \right) + \eta \nabla^2 \bar{u} + \nabla \cdot \left(\frac{\bar{B} \otimes \bar{B}}{\mu} \right) \\
\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla)\bar{b} &= \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \bar{b} + (\bar{b} \cdot \nabla)\bar{u} - \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}_0) - \frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t} \\
\bar{B} &= \bar{B}_0 + \bar{b}
\end{aligned} \right\} \tag{II.5}$$

III. Resolución analítica

III.1 Sin la presencia de ningún campo magnético



Para este caso, se realizan las hipótesis de flujo completamente estacionario ($\partial/\partial t = 0$), propiedades físicas constantes, se desprecia la gravedad, las paredes no se mueven, y la velocidad del fluido varía a lo largo de la anchura del canal.

1) Perfil de velocidad

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \text{Flujo Desarrollado}$$

$$\rho(\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \bar{u} \Rightarrow \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\eta \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dP}{dx}$$

Para mayor comodidad, la caída de presión (K) por tramo de longitud se puede definir como la variación de presión entre la entrada y la salida por tramo de longitud (ecuación III.1.1).

$$K = -\frac{dP}{dx} \approx \frac{P_e - P_s}{0 - L} = -\frac{\Delta P}{L} \quad (\text{III.1.1})$$

Si aplicamos la anterior definición y despejamos, se obtienen la ecuación diferencial que junto a las condiciones de contorno (pared sin movimiento) nos permitiría llegar al perfil de velocidad del flujo (ecuación III.1.2).

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{u} = \frac{-K}{\eta} \\ u(y=0) = 0 \\ u(y=w) = 0 \end{array} \right\} \text{Ecuación diferencial de 2º Orden}$$

$$\text{Ecuación general: } \ddot{u} = \frac{-K}{\eta} \Rightarrow \dot{u} = \frac{-K}{\eta}y + A \Rightarrow \underline{u(y) = \frac{-K}{2\eta}y^2 + Ay + B}$$

$$\left. \begin{array}{l} u(y=0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-K}{2\eta} \cdot 0^2 + A \cdot 0 + B \Rightarrow B = 0 \\ u(y=w) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-K}{2\eta} \cdot w^2 + A \cdot w \Rightarrow A = \frac{Kw}{2\eta} \end{array} \right\} \Rightarrow u(y) = \frac{K}{2\eta}(w-y)y$$

Si sacamos factor común en el interior del paréntesis y dividimos la variable “y” por la anchura “w” para obtener una variable adimensional “y/w”, lo que queda multiplicando a la ecuación por consiguiente deberá tener dimensiones de velocidad. A esta velocidad característica se la denominará “Escala de Velocidad” ($u_0 = \frac{Kw^2}{\eta}$). Como vemos esta velocidad dependerá de cuanta caída de presión caiga por tramo de tubería.

$$u(y) = u_0 \hat{u} \left(1 - \frac{y}{w}\right) \frac{y}{w} \quad (\text{III.1.2})$$

En la ecuación III.1.2 aparece una nueva variable adimensional \hat{u} . Esta variable es más importante en los casos donde se empieza a hablar sobre campos magnéticos, ya que depende del número de Hartmann y aparece en repetidas ocasiones en el perfil de velocidad, la velocidad máxima, y la relación caudal-caída de presión. Para casos en donde no se tenga un campo magnético externo, la variable adimensional es

$$\hat{u} = \frac{1}{2}$$

2) Velocidad máxima

Para calcular la velocidad máxima, primero se debería obtener el punto donde la pendiente de la recta tangente a la curva del perfil de velocidad es igual a cero. Luego, determinar la curvatura de la curva para saber si en dicho punto se tiene un máximo o mínimo en la función. Y por último, sustituir dicho punto en el perfil para obtener la velocidad máxima.

A pesar del hecho de haber descrito el procedimiento en el cálculo de máximos/mínimos de funciones matemáticas, sabemos que el perfil de velocidad al tener unos mínimos de velocidad en las paredes y la función es simétrica entorno al punto medio, el máximo se encontrará en el centro de la anchura del canal ($y = \frac{w}{2}$).

$$u_{max} = u\left(y = \frac{w}{2}\right) = u_0 \hat{u} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} = \frac{u_0}{8} = u_0 \hat{u}^3 \quad (\text{III.1.3})$$

3) Relación caudal-caída de presión

El cálculo del caudal (Q) es simple ya que lo único que se necesita es integrar el perfil de velocidad sobre el área del canal. Como el canal es infinito en la dirección z, el caudal unitario (q) se definirá como “los metros cúbicos de fluido que pasa por segundo y por metro de longitud perpendicular al canal”.

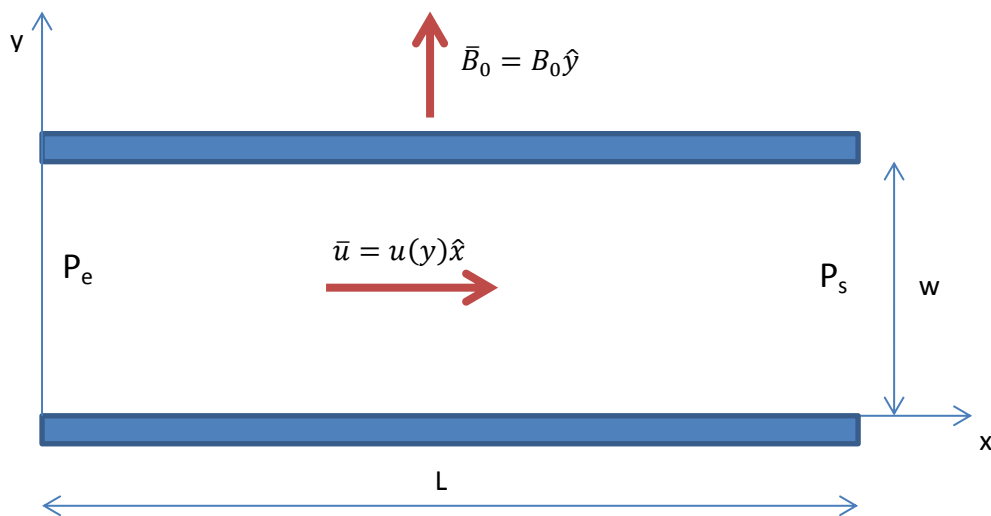
$$dQ = \bar{u} \cdot d\bar{S} = u(y)dydz \Rightarrow q = \frac{dQ}{dz} = \int_0^w u(y)dy$$

$$q = \int_0^w u_0 \hat{u} \left(1 - \frac{y}{w}\right) \frac{y}{w} dy = \frac{u_0 \hat{u}}{w^2} \left[w \int_0^w y dy - \int_0^w y^2 dy \right] = \frac{u_0 \hat{u}}{w^2} \left[w \frac{y^2}{2} \Big|_0^w - \frac{y^3}{3} \Big|_0^w \right]$$

$$q = \frac{u_0 w}{12} = \frac{q_0}{12} = q_0 \hat{u}^n \quad \text{donde} \quad n = 2 + \frac{\ln 3}{\ln 2} \quad (\text{III.1.4})$$

En la ecuación III.1.4 se describe otro término q_0 , denominado “Escala de Caudal” y que proviene del producto de la escala de velocidad por la anchura del canal. Por consiguiente, el caudal “q” está relacionada con la caída de presión “K” a través de la escala del caudal.

III.2 Presencia de un campo magnético, sin la contribución de fenómenos de inducción magnética.



Para este caso, se realizan las mismas hipótesis anteriores: de flujo completamente estacionario ($\partial/\partial t = 0$), propiedades físicas constantes, se desprecia la gravedad, las paredes no se mueven, un campo magnético externo constante que baña todo el canal, y por último la velocidad del fluido varía a lo largo de la anchura del canal.

1) Perfil de velocidad

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \text{Flujo Desarrollado}$$

$$\rho(\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \bar{u} + \sigma \underbrace{(\bar{u} \cdot \bar{B})}_{=0} \bar{B} - \sigma B^2 \bar{u}$$

$$\rho u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sigma B_0^2 u$$

$$\eta \frac{d^2 u}{dy^2} - \sigma B_0^2 u = \frac{dP}{dx}$$

Atendiendo a la definición de “numero de Hartmann” como el ratio de las fuerzas magnéticas frente a las fuerzas viscosas ($Ha^2 = \frac{\sigma B_0^2 w^2}{\eta}$), se puede simplificar la ecuación anterior para dejarlo en función de Hartmann. La ecuación obtenida es una ecuación diferencial de 2º orden no homogénea, y por lo tanto la solución general es la suma de una solución particular y una solución homogénea ($u(y) = u_h(y) + u_p$). Aplicando las condiciones de contorno obtenemos el perfil de velocidad (ecuación III.2.1).

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{u} - \left(\frac{Ha}{w}\right)^2 u = \frac{-K}{\eta} \\ u(y=0) = 0 \\ u(y=w) = 0 \end{array} \right\} \text{Ecuación de ondas no homogénea}$$

* Solución a la particular

$$\underbrace{\left[\ddot{u}_h - \left(\frac{Ha}{w}\right)^2 u_h \right]}_{=0} - \left(\frac{Ha}{w}\right)^2 u_p = \frac{-K}{\eta}$$

$$u_p = \frac{Kw^2}{\eta} \frac{1}{Ha^2} = u_0 \hat{u}$$

* Solución a la homogénea

$$\ddot{u}_h - \left(\frac{Ha}{w}\right)^2 u_h = 0$$

$$u_h(y) = C_1 \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) + C_2 \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right)$$

Ecuación general: $u(y) = C_1 \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) + C_2 \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) + u_0 \hat{u}$

$$\left. \begin{array}{l} u(y=0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \sinh(0) + C_2 \cosh(0) + u_0 \hat{u} \Rightarrow C_2 = -u_0 \hat{u} \\ u(y=w) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \sinh(Ha) - u_0 \hat{u} \cosh(Ha) + u_0 \hat{u} \Rightarrow C_1 = u_0 \hat{u} \frac{\cosh(Ha) - 1}{\sinh(Ha)} \end{array} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$u(y) = u_0 \hat{u} \left[\frac{\cosh(Ha) - 1}{\sinh(Ha)} \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) + 1 \right] \quad \text{(III.2.1)}$$

Conviene resaltar el hecho de que si la ecuación III.2.1 se toma límites para Hartmann para un caso en el que no existe la presencia de campos magnéticos externos en el seno del fluido ($Ha \rightarrow 0$), se recupera el perfil parabólico descrito en la ecuación III.1.2.

$$\begin{aligned}
 u(y) &= u_0 \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{1}{Ha^2} \left[\frac{\cosh(Ha) - 1}{\sinh(Ha)} \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) + 1 \right] \\
 &\quad \downarrow \\
 \sinh X &\equiv \frac{e^X - e^{-X}}{2} ; \quad \cosh X \equiv \frac{e^X + e^{-X}}{2} \\
 &\quad \downarrow \\
 u(y) &= u_0 \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{\frac{(e^{Ha} - 1)e^{Ha \frac{y}{w}}}{2(e^{Ha} + 1)} + \frac{e^{-Ha \frac{y}{w}}(1 - e^{Ha})}{2(e^{Ha} + 1)} - \frac{e^{Ha \frac{y}{w}}}{2} - \frac{e^{-Ha \frac{y}{w}}}{2} + 1}{Ha^2} = \frac{0}{0} \text{ Ind} \\
 &\quad \downarrow \\
 u(y) &= u_0 \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{Ha(1-\frac{y}{w})} \left(\frac{y}{w}(e^{Ha} + 1) - 1\right)}{(e^{Ha} + 1)^2} - \frac{e^{Ha \frac{y}{w}} \left(e^{Ha} \left(\frac{y}{w} - 1\right) + \frac{y}{w}\right)}{(e^{Ha} + 1)^2}}{2Ha} = \frac{0}{0} \text{ Ind} \\
 &\quad \downarrow \\
 u(y) &= u_0 \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{Ha \frac{y}{w}} \left(e^{2Ha} \left(\frac{y}{w} - 1\right)^2 + e^{Ha} \left(2 \left(\frac{y}{w}\right)^2 - 2 \frac{y}{w} - 1\right) + \left(\frac{y}{w}\right)^2\right)}{(e^{Ha} + 1)^3} - \frac{e^{Ha(1-\frac{y}{w})} \left(\left(\frac{y}{w}\right)^2 (e^{2Ha} + 1) + e^{Ha} \left(2 \left(\frac{y}{w}\right)^2 - 2 \frac{y}{w} - 1\right) - 2 \frac{y}{w} + 1\right)}{(e^{Ha} + 1)^3}}{2} \\
 &\quad \downarrow \\
 u(y) &= u_0 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y}{w}\right) \frac{y}{w}
 \end{aligned}$$

2) Velocidad máxima

La velocidad máxima se encontrará en el centro de la anchura del canal ($y = \frac{w}{2}$). También, conviene analizar el caso límite de Hartmann igual a cero.

$$u_{max} = u\left(y = \frac{w}{2}\right) = u_0 \hat{u} \left[\frac{\cosh(Ha) - 1}{\sinh(Ha)} \sinh\left(\frac{Ha}{2}\right) - \cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) + 1 \right]$$

$$\frac{\sinh\left(\frac{Ha}{2}\right)}{\sinh(Ha)} = \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{Ha}{2}\right)} ; \quad 2 \cosh^2\left(\frac{Ha}{2}\right) = \cosh(Ha) + 1$$

$$u_{max} = u_0 \hat{u} \frac{\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) - 1}{\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right)} \quad (\text{III.2.2})$$

$$u_{max} = \lim_{Ha \rightarrow 0} u_0 \hat{u} \frac{\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) - 1}{\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right)} = u_0 \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{1}{Ha^2} \frac{\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) - 1}{\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right)} = \frac{0}{0} \text{ Ind}$$

$$u_{max} = u_0 \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{\sinh\left(\frac{Ha}{2}\right) \frac{1}{2}}{2Ha \cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) + Ha^2 \sinh\left(\frac{Ha}{2}\right) \frac{1}{2}} = \frac{0}{0} \text{ Ind}$$

$$u_{max} = u_0 \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{\cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) \frac{1}{4}}{2 \cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) + 2Ha \sinh\left(\frac{Ha}{2}\right) \frac{1}{2} + 2Ha \sinh\left(\frac{Ha}{2}\right) \frac{1}{2} + Ha^2 \cosh\left(\frac{Ha}{2}\right) \frac{1}{4}} = \frac{u_0}{8}$$

3) Relación caudal-caída de presión

Para el cálculo del caudal (q), integrando el perfil de velocidades en “ y ” se podrá obtener la relación entre el caudal y la caída de presión (K).

$$q = \frac{dQ}{dz} = \int_0^w u(y)dy$$

$$q = \int_0^w u_0 \hat{u} \left[\frac{\cosh(Ha) - 1}{\sinh(Ha)} \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) + 1 \right] dy$$

$$q = u_0 \hat{u} \left[\frac{\cosh(Ha) - 1}{\sinh(Ha)} \int_0^w \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) dy - \int_0^w \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) dy + \int_0^w dy \right]$$

$$q = u_0 \hat{u} \left[\frac{\cosh(Ha) - 1}{\sinh(Ha)} \frac{w}{Ha} (\cosh(Ha) - 1) - \frac{w}{Ha} \sinh(Ha) + w \right]$$

$$q = u_0 w \hat{u} \left[2 \frac{1 - \cosh(Ha)}{Ha \sinh(Ha)} + 1 \right] = q_0 \hat{u} \left[2 \frac{1 - \cosh(Ha)}{Ha \sinh(Ha)} + 1 \right] \quad (\text{III.2.3})$$

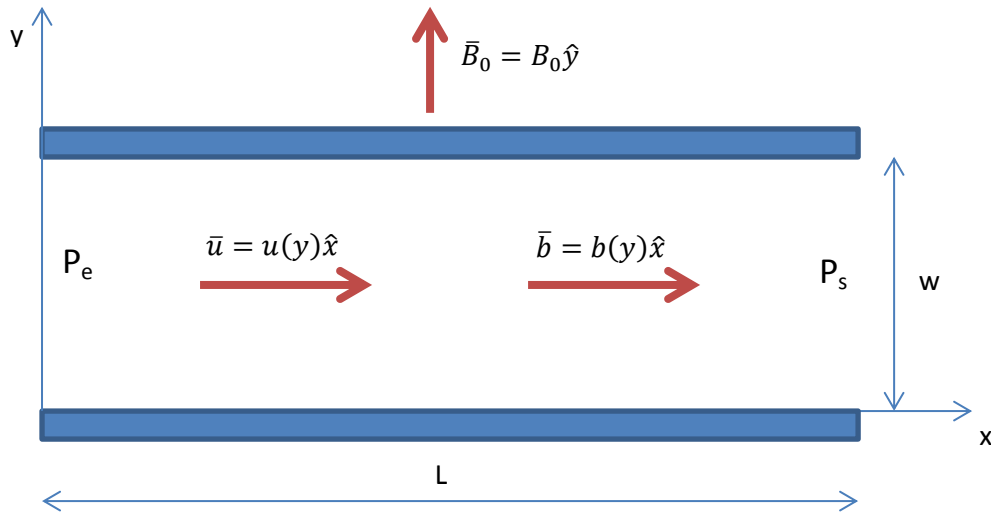
De la misma manera, es conveniente el análisis de la ecuación III.2.3 para el caso límite cuando no existe la presencia de campos magnéticos. A pesar de que en anteriores desarrollos del límite no se ha tenido ningún problema en solventarlos, el inconveniente de esta ecuación, ha sido unas indeterminaciones imposibles de resolver mediante la aplicación de la Regla de L'Hospital. Por consiguiente, conviene utilizar expansiones de Taylor para resolver las indeterminaciones.

$$q = \lim_{Ha \rightarrow 0} q_0 \hat{u} \left[2 \frac{1 - \cosh(Ha)}{Ha \sinh(Ha)} + 1 \right] = q_0 \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{1}{Ha^2} \left[2 \frac{1 - \cosh(Ha)}{Ha \sinh(Ha)} + 1 \right] = q_0 \frac{1}{0} \left[2 \frac{0}{0} + 1 \right] \quad \text{Ind}$$

$$\text{Serie de Taylor (en torno a } x_0): f(x + x_0) = f(x_0) + \frac{x}{1!} f^{(1)}(x_0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \dots$$

$$q \approx q_0 \left[\frac{1}{12} - \frac{Ha^2}{120} + \frac{17Ha^4}{20160} + O(Ha^6) \right] \Rightarrow q \approx q_0 \lim_{Ha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{12} - \frac{Ha^2}{120} + \frac{17Ha^4}{20160} + O(Ha^6) \right] = \frac{q_0}{12}$$

III.3 Presencia de un campo magnético, con la contribución de fenómenos de inducción magnética.



Las hipótesis serán las mismas que en casos anteriores. Además, la nueva variable (el campo magnético inducido, \$b\$) también se supondrá que solo varía a lo largo de la anchura del canal. La nueva condición de contorno para \$b\$ se supondrá para un caso general donde el ratio de la conductividad de la pared “\$c\$”. Si \$c\$ fuese igual a cero se estaría en unas condiciones de contorno en la pared del tipo aislantes eléctricas. Por otro lado si \$c\$ tiende a un valor muy grande, las placas actuarían como conductoras perfectas de la electricidad. Por último, para valores de \$c\$ distinto de cero y no muy grande, las condiciones en las paredes serían para un caso de placas conductoras eléctricas.

1) Perfil de velocidad

Ahora al necesitar obtener dos variables, la velocidad y el campo magnético inducido, será necesario resolver un sistema diferencial. Para ello se deberá simplificar tanto la ecuación de la conservación de un fluido, como la ecuación de inducción magnética.

$$\bar{B}(y) = b(y)\hat{x} + B_0\hat{y} \Rightarrow B^2 = b^2 + B_0^2$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \bar{u} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \text{Flujo Desarrollado} \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \Rightarrow \text{Campo magnético Desarrollado} \end{aligned} \right\}$$

$$* \text{ Presión magnética: } \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) = \nabla \left(\frac{b^2}{2\mu} \right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b^2}{2\mu} \right)}_{=0} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b^2}{2\mu} \right) \hat{y}$$

* Tensor de tensiones magnéticas: $\bar{B} \otimes \bar{B} = \begin{pmatrix} b^2 & bB_0 & 0 \\ bB_0 & B_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\bar{B} \otimes \bar{B}}{\mu} \right) = \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b^2}{\mu} \right)}_{=0} + \frac{B_0}{\mu} \frac{\partial b}{\partial y} \right) \hat{x} + \underbrace{\frac{B_0}{\mu} \frac{\partial b}{\partial x}}_{=0} \hat{y}$$

$$\rho(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \bar{u} + \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\bar{B} \otimes \bar{B}}{\mu} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{B_0}{\mu} \frac{\partial b}{\partial y}$$

$$\bar{u} \times \bar{B}_0 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = uB_0 \hat{z} \Rightarrow \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}_0) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & uB_0 \end{vmatrix} = B_0 \frac{\partial u}{\partial y} \hat{x} - B_0 \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} \hat{y}$$

$$(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{b} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \bar{b} + (\bar{b} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \times (\bar{u} \times \bar{B}_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\rho u \frac{\partial b}{\partial x}}_{=0} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\mu\sigma} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right) + B_0 \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{B_0}{\mu\eta} \frac{db}{dy} = -\frac{K}{\eta} \\ \frac{d^2 b}{dy^2} + \mu\sigma B_0 \frac{du}{dy} = 0 \\ u(y=0; w) = 0 \\ \frac{db}{dy} - \frac{1}{c} b = 0 \text{ en } y=0; w \end{array} \right\} \text{ Sistema diferencial de 2º Orden no homogéneo}$$

Para resolver este sistema diferencial existen diferentes formas de resolución. Como el sistema es lineal, el método de la reducción del orden será por tanto un buen método para su resolución. Además, al ser el sistema no homogéneo la solución general será la suma de una solución particular y una solución homogénea ($\bar{\varphi}(y) = \bar{\varphi}_h(y) + \bar{\varphi}_p$).

$$\phi = \frac{du}{dy} ; \psi = \frac{db}{dy} \Rightarrow \bar{\varphi} = \begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix} : \text{ Vector diferencial}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dy} + \bar{\Lambda} \bar{\varphi} = \bar{S} : \text{ Ec. diferencia vectorial de 1º orden no homogénea}$$

$$\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B_0}{\mu\eta} \\ \mu\sigma B_0 & 0 \end{pmatrix} : \text{ Matriz de constantes}$$

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} -\frac{K}{\eta} \\ 0 \end{pmatrix} : \text{Término independiente}$$

* Solución particular

↓

$$\underbrace{\left[\frac{d\bar{\varphi}_h}{dy} + \bar{\Lambda}\bar{\varphi}_h \right]}_{=0} - \bar{\Lambda}\bar{\varphi}_p = \bar{S}$$

$$\bar{\varphi}_p = \bar{\Lambda}^{-1}\bar{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{K}{\eta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu K}{B_0} \end{pmatrix}$$

* Solución homogénea

↓

$$\frac{d\bar{\varphi}_h}{dy} + \bar{\Lambda}\bar{\varphi}_h = 0$$

↓

$$\bar{\varphi}_h = \bar{D}e^{-\bar{\Lambda}y} \text{ donde } \bar{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} : \text{vector de constantes}$$

Ahora lo importante será obtener la exponencial de una matriz. Como la matriz es 2x2, se puede aplicar un método matemático rápido para obtener la nueva matriz.

$$e^{\bar{X}} \text{ donde } \bar{X} = -\bar{\Lambda}y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{B_0 y}{\mu\eta} \\ -\mu\sigma B_0 y & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \tau(\bar{X}) = \frac{tr(\bar{X})}{2} = 0 \\ \xi(\bar{X}) = \tau^2(\bar{X}) - det(\bar{X}) = -Ha^2 \left(\frac{y}{w}\right)^2 < 0 \end{cases}$$

↓

$$e^{\bar{X}} = e^{\tau(\bar{X})} \left[\cosh\left(\sqrt{-\xi(\bar{X})}\right) \bar{I} + \sinh\left(\sqrt{-\xi(\bar{X})}\right) \begin{pmatrix} \bar{X} - \tau(\bar{X})\bar{I} \\ \sqrt{-\xi(\bar{X})} \end{pmatrix} \right]$$

↓

$$\bar{\varphi}_h = \begin{pmatrix} D_1 \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \frac{D_2}{\mu\sqrt{\sigma\eta}} \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) \\ D_2 \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - D_1 \mu\sqrt{\sigma\eta} \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) \end{pmatrix}$$

Sumando las soluciones de la homogénea y la particular, e integrando dichas soluciones, se pueden obtener los campos de velocidad y campo magnético inducido. De la ecuación de $b(y)$ se puede obtener una nueva escala denominada "escala de campo magnético inducido" b_0 .

$$Ecs. generales \begin{cases} u(y) = D_1 \frac{w}{Ha} \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \frac{D_2}{\mu\sqrt{\sigma\eta}} \frac{w}{Ha} \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) + D_3 \\ b(y) = D_2 \frac{w}{Ha} \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - D_1 \mu\sqrt{\sigma\eta} \frac{w}{Ha} \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \underbrace{\frac{Kw^2}{\eta} \mu\sqrt{\sigma\eta} \frac{1}{Ha} \frac{y}{w}}_{=b_0} + D_4 \end{cases}$$

Para el cálculo de las constantes D_1, D_2, D_3, D_4 será necesario aplicar las correspondientes condiciones de contorno. Si se calculan las Condiciones de Contorno para el campo de la velocidad, se obtiene lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} u(y) &= D_3 \left[\frac{\cosh(Ha)-1}{\sinh(Ha)} \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) + 1 \right] \\ b(y) &= D_3 \mu \sqrt{\sigma \eta} \left[\sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \frac{\cosh(Ha)-1}{\sinh(Ha)} \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) \right] - \frac{b_0 y}{Ha w} + D_4 \end{aligned} \right\}$$

Por un lado, la constante D_3 tiene dimensiones de velocidad, y si se compara con anteriores operaciones realizadas, dicha constante se puede poner en función del producto de la escala de velocidad y de la variable adimensional ($D_3 = u_0 \hat{u}$). Por otro lado, la función $b(y)$ deberá ser antisimétrica en torno al punto central de la anchura del canal. Esto es debido al origen de las corrientes eléctricas que hemos impuesto (ley de Ampère), que hará que el campo magnético inducido tienda a rotar en torno a dicho punto. Por ello solo quedará encontrar la forma de la magnitud de la velocidad dependiendo de las Condiciones de Contorno aplicadas ahora, al campo del campo magnético inducido.

$$b(y) \text{ antisimétrica} \Rightarrow b\left(y + \frac{w}{2}\right) = -b\left(-y + \frac{w}{2}\right) \Rightarrow D_4 = \frac{b_0}{2Ha}$$

$$\left. \begin{aligned} u(y) &= u_0 \hat{u} \left[\frac{\cosh(Ha)-1}{\sinh(Ha)} \sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) + 1 \right] \\ b(y) &= b_0 \left\{ \frac{1}{2Ha} - \frac{1}{Ha w} y + \hat{u} \left[\sinh\left(Ha \frac{y}{w}\right) - \frac{\cosh(Ha)-1}{\sinh(Ha)} \cosh\left(Ha \frac{y}{w}\right) \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} * \text{ Caso Aislante } (c = 0) &\Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{Ha} \frac{\sinh(Ha)}{2(\cosh(Ha)-1)} \\ * \text{ Caso Conductor Perfecto } (c \rightarrow \infty) &\Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{Ha^2} \\ * \text{ Caso Conductor } (c \neq 0) &\Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{Ha} \frac{c+1}{cHa + 2 \frac{\cosh(Ha)-1}{\sinh(Ha)}} \end{aligned} \right.$$

Cabe comentar que el perfil de velocidad tiene la misma forma matemática que en el caso anterior. Por consiguiente, las fórmulas de la velocidad máxima y la relación caudal-caída de presión se obtendrían de forma similar.

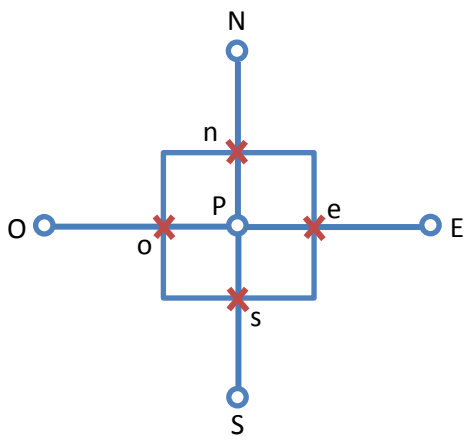
ANEXO II

Desarrollo Numérico

Nomenclatura

\bar{S}_ϕ	Vector término fuente
u_x	Velocidad en la componente x (m/s)
u_y	Velocidad en la componente y (m/s)
B_x	Campo magnético en la componente x (T)
B_y	Campo magnético en la componente y (T)

Esquema de un volumen finito genérico



I. Términos fuente de la ecuación de la conservación de un fluido.

I.1 Fuerza magnética con origen la ley de Ohm generalizada

$$\left. \begin{array}{l} \bar{S}_\phi = \bar{J} \times \bar{B} \\ \bar{J} = \sigma(\bar{u} \times \bar{B}) \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{S}_\phi = \sigma(\bar{u} \cdot \bar{B})\bar{B} - \sigma B^2 \bar{u}$$

$$\bar{S}_\phi = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fuente de } u \\ \text{Fuente de } v \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma(u_x B_x + u_y B_y) B_x - \sigma(B_x^2 + B_y^2) u_x \\ \sigma(u_x B_x + u_y B_y) B_y - \sigma(B_x^2 + B_y^2) u_y \end{array} \right\}$$

1) Discretización de la componente de la velocidad u

$$\int_s^n \int_o^e \sigma(u_x B_x + u_y B_y) B_x dx dy - \int_s^n \int_o^e \sigma(B_x^2 + B_y^2) u_x dx dy$$

$$\sigma(u_x B_x + u_y B_y) B_x \Delta x \Delta y - \sigma(B_x^2 + B_y^2) u_x \Delta x \Delta y$$

2) Discretización de la componente de la velocidad v

$$\int_s^n \int_o^e \sigma(u_x B_x + u_y B_y) B_y dx dy - \int_s^n \int_o^e \sigma(B_x^2 + B_y^2) u_y dx dy$$

$$\sigma(u_x B_x + u_y B_y) B_y \Delta x \Delta y - \sigma(B_x^2 + B_y^2) u_y \Delta x \Delta y$$

I.2 Fuerza magnética con origen la ley de Ampère

$$\left. \begin{array}{l} \bar{S}_\phi = \bar{J} \times \bar{B} \\ \bar{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{S}_\phi = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\bar{B} \otimes \bar{B}}{\mu} \right)$$

$$\bar{S}_\phi = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fuente de } u \\ \text{Fuente de } v \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_x B_x}{\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_x B_y}{\mu} \right) \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_x B_y}{\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_y B_y}{\mu} \right) \end{array} \right\}$$

1) Discretización de la componente de la velocidad u

$$\int_s^n \int_o^e -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) dx dy = - \left[\frac{B^2}{2\mu} \right]_e - \left[\frac{B^2}{2\mu} \right]_o \Delta y$$

$$\int_s^n \int_o^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_x B_x}{\mu} \right) dx dy + \int_o^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_x B_y}{\mu} \right) dy dx = \left[\frac{B_x B_x}{\mu} \right]_e - \left[\frac{B_x B_x}{\mu} \right]_o \Delta y + \left[\frac{B_x B_y}{\mu} \right]_n - \left[\frac{B_x B_y}{\mu} \right]_s \Delta x$$

2) Discretización de la componente de la velocidad v

$$\int_0^e \int_s^n -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) dy dx = - \left[\frac{B^2}{2\mu} \Big|_n - \frac{B^2}{2\mu} \Big|_s \right] \Delta x$$

$$\int_s^n \int_0^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_x B_y}{\mu} \right) dx dy + \int_0^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_y B_y}{\mu} \right) dy dx = \left[\frac{B_x B_y}{\mu} \Big|_e - \frac{B_x B_y}{\mu} \Big|_0 \right] \Delta y + \left[\frac{B_y B_y}{\mu} \Big|_n - \frac{B_y B_y}{\mu} \Big|_s \right] \Delta x$$

II. Ecuación de la inducción magnética.

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{B} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \bar{B} + (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{u}$$

$$\downarrow$$

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{1}{\mu\sigma} \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \right) + B_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} &= \frac{1}{\mu\sigma} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} \right) + B_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \equiv \text{Componente } x \\ \equiv \text{Componente } y \end{array}$$

1) Discretización de la componente x del campo magnético

‡ Término convectivo

$$\int_s^n \int_o^e \left(u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy = \int_s^n \int_o^e u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} dx dy + \int_o^e \int_s^n u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} dy dx$$

$$\text{Integración por partes: } \int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

$$\int_s^n \left(u_x B_x \Big|_o^e - \int_o^e B_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dy + \int_o^e \left(u_y B_x \Big|_s^n - \int_s^n B_x \frac{\partial u_y}{\partial x} dy \right) dx$$

$$(u_x B_x \Big|_e - u_x B_x \Big|_o) \Delta y + (u_y B_x \Big|_n - u_y B_x \Big|_s) \Delta x - \underbrace{\int_s^n \int_o^e B_x \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dx dy}_{\substack{=0 \\ \text{Término debido a la} \\ \text{compresibilidad del fluido}}}$$

$$(u_x B_x \Big|_e - u_x B_x \Big|_o) \Delta y + (u_y B_x \Big|_n - u_y B_x \Big|_s) \Delta x$$

‡ Término difusivo

$$\int_s^n \int_o^e \frac{1}{\mu\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \right) dx dy = \int_s^n \int_o^e \frac{1}{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right) dx dy + \int_o^e \int_s^n \frac{1}{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dy dx$$

$$\left(\frac{1}{(\mu\sigma)_e} \frac{B_{xE} - B_{xP}}{\Delta x} - \frac{1}{(\mu\sigma)_o} \frac{B_{xP} - B_{xO}}{\Delta x} \right) \Delta y + \left(\frac{1}{(\mu\sigma)_n} \frac{B_{xN} - B_{xP}}{\Delta y} - \frac{1}{(\mu\sigma)_s} \frac{B_{xP} - B_{xS}}{\Delta y} \right) \Delta x$$

‡ Término fuente

$$\int_s^n \int_o^e \left(B_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy = \int_s^n \int_o^e B_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy + \int_o^e \int_s^n B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} dy dx$$

Integración por partes: $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$

$$\int_s^n \left(u_x B_x|_o^e - \int_o^e u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \right) dy + \int_o^e \left(u_x B_y|_s^n - \int_s^n u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} dy \right) dx$$

$$(u_x B_x|_e - u_x B_x|_o) \Delta y + (u_x B_y|_n - u_x B_y|_s) \Delta x - \underbrace{\int_s^n \int_o^e u_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) dx dy}_{=0}$$

Término debido a las líneas cerradas del campo magnético

$$(u_x B_x|_e - u_x B_x|_o) \Delta y + (u_x B_y|_n - u_x B_y|_s) \Delta x$$

2) Discretización de la componente y del campo magnético

‡ Término convectivo

$$\int_s^n \int_o^e \left(u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\Downarrow$$

$$(u_x B_y|_e - u_x B_y|_o) \Delta y + (u_y B_x|_n - u_y B_x|_s) \Delta x$$

‡ Término difusivo

$$\int_s^n \int_o^e \frac{1}{\mu\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \right) dx dy$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{1}{(\mu\sigma)_e} \frac{B_{yE} - B_{yP}}{\Delta x} - \frac{1}{(\mu\sigma)_o} \frac{B_{yP} - B_{yO}}{\Delta x} \right) \Delta y + \left(\frac{1}{(\mu\sigma)_n} \frac{B_{yN} - B_{yP}}{\Delta y} - \frac{1}{(\mu\sigma)_s} \frac{B_{yP} - B_{yS}}{\Delta y} \right) \Delta x$$

‡ Término fuente

$$\int_s^n \int_o^e \left(B_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\Downarrow$$

$$(u_y B_x|_e - u_y B_x|_o) \Delta y + (u_x B_y|_n - u_x B_y|_s) \Delta x$$

