Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Teorema de Pitágoras: una propuesta didáctica para 2º de ESO

Autor: David Pastor Fernández.

Director: Alberto Arnal.

Noviembre de 2015

FACULTAD DE EDUCACIÓN ZARAGOZA

Universidad Zaragoza 1542

1. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.

1.1. Nombra el objeto matemático a enseñar.
1.2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.
1.3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

1.1. NOMBRE EL OBJETO MATEMÁTICO A TRATAR.

Este Trabajo Fin de Máster está enfocado dentro del Máster de formación en Profesorado de ESO, Bachillerato y Formación Profesional (curso 2014-2015). Seguiremos las pautas básicas seguidas en la guía de recomendación para su elaboración.

El objeto matemático tratado se corresponderá con el asignado al Teorema de Pitágoras y parte de sus aplicaciones, especialmente requeridas en un campo práctico. Asimismo se abordará las consecuencias que dicha Teorema tiene en la semejanza de triángulos, a la hora de resolver campos de ejercicios y problemas. Dicho objeto matemático se abordará, como se ha comentado, tanto desde un punto de vista teórico como práctico, visualizando la presentación de contenidos desde un punto de vista del alumnado de referencia. Se incidirá en la presentación actual que el objeto matemático tiene en el currículo así como la constatación de las posibles deficiencias encontradas a la hora de abordar los resultados, no sólo desde el prisma del currículo sino también desde el punto de vista de los agentes socioeducadores (fundamentalmente alumnado y docente).

1.2. INDICA EL CURSO Y ASIGNATURA EN LA QUE SITÚAS EL OBJETO MATEMÁTICO.

El objeto matemático presentado estará enfocado para el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria (alumnado de edad comprendida entre los trece y los catorce años), dentro de la asignatura de matemáticas, obligatoria para nuestro curso de referencia, según el currículo actual.

1.3. ¿QUÉ CAMPO DE PROBLEMAS, TÉCNICAS Y TECNOLOGÍAS ASOCIADAS AL OBJETO MATEMÁTICO PRETENDES ENSEÑAR?

Vamos a resaltar los principales campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático que se van a abordar a lo largo de este Trabajo Fin de Máster, desde un punto de vista esquemático, para ir profundizando en los mismos durante los apartados correspondientes.

Respecto al campo de problemas, vamos a enumerar los principales puntos que se tratarán a lo largo de esta guía:

- Aplicación del Teorema de Pitágoras en la obtención de longitudes (véase hipotenusa y catetos).
- Construcción de puzles pitagóricos como actividad dinámica y cooperativa.
- Uso de las TIC´s (software Geogebra) que ayuden a tener una visión geométrica de una demostración básica del Teorema de Pitágoras.
- Problemas de cálculo de áreas.
- Aplicación del Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que impliquen figuras planas semejantes.

Respecto a las técnicas utilizadas para la resolución de dichos campos de problemas, podemos resaltar las siguientes (si bien es cierto que, a través de una prueba inicial, de la que se especificará más, según se avance en el TFM, el docente podrá calibrar el estado real del aula y las bases que sustenta el conocimiento del alumno en cuestiones matemáticas de referencia. Esto es, que el docente sea capaz de valorar si el alumno domina – o no – la formación demandada en los currículos de los cursos precedentes a 2º de ESO):

- Operaciones matemáticas básicas (suma, resta, multiplicación y división). Empleo correcto de la regla de signos.
- Conocimiento de lo que representa una ecuación. Saber despejar cada uno de los miembros de una ecuación, de forma correcta. Resolución de sistemas de ecuaciones.
- Potencias y raíces cuadradas.
- Conocimiento algebraico de lo que representa una variable. Sustitución de variables.
- Interpretación de resultados (imposibilidad de que un resultado que se identifique con una longitud arroje una medida negativa, por ejemplo).
- Visión geométrica de los resultados y de los pasos a seguir.
- Conocimiento en el cálculo de áreas de las principales figuras geométricas planas.
- Conocimiento de las unidades de medida en el cálculo de longitudes y áreas.

Respecto a las tecnologías establecidas (teoría que sustenta a la técnica) se incidirá a lo largo de la guía que no se establecerán demostraciones analíticas del Teorema de Pitágoras (si bien sí se abordará el concepto gráfico con la ayuda de las TIC´s) y que la base de toda resolución de nuestro campo de problemas y ejercicios se corresponderá con el resultado teórico que imprime la consecución del Teorema de Pitágoras.

2. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

2.1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?
2.2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?
2.3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

2.1. ¿CÓMO SE JUSTIFICA HABITUALMENTE LA INTRODUCCIÓN ESCOLAR DEL OBJETO MATEMÁTICO?

En este punto, no sólo referiremos la necesidad del estudio de nuestro objeto matemático a tratar en el ámbito de la Norma (currículo BOA Nº 65) sino que acudiremos a distintos enfoques que presentan numerosos autores para conocer el porqué de la necesidad de dicho estudio. La presentación de la justificación de la necesidad de estudio es muy amplia y la perspectiva es muy numerosa por lo que presentaremos, a continuación, diversos enfoques de autores relevantes, a modo de síntesis para conocer la trascendencia del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia educativa. No podemos olvidar, en este punto, la importancia de las TIC´s (Nuevas Tecnologías de la Información y de la Comunicación) ya que parte de las actividades pretendidas en este TFM pasan por su uso (recordemos la actividad con la herramienta *Geogebra* que tendrá su peso específico en la secuenciación de actividades).

A modo de referencia, el estudio del Teorema de Pitágoras, sus aplicaciones y su consecuente uso en la semejanza de triángulos viene recogido de forma expresa en la Normativa Oficial vigente (BOA Nº 65 del 1 de junio de 2007, pp. 8984), donde vemos cómo en el currículo del primer curso de ESO se explicitan conceptos geométricos como la medida de los diversos ángulos, el estudio de los triángulos (perímetro, áreas…), el estudio de los distintos polígonos o de la circunferencia y del círculo.

Referente a los contenidos establecidos en el segundo curso de ESO, que es el que nos ocupa, vemos que aparece de forma expresa, como contenido de dicho curso, el concepto de triángulo, de triángulo rectángulo y el Teorema de Pitágoras, objeto de nuestro estudio. Además, aparece el Teorema de Tales y sus aplicaciones más relevantes. Ambos conceptos aparecen de forma expresa por lo que su estudio y evaluación está englobado dentro de los contenidos mínimos fijados por la Ley.

Así, pues, a continuación, explicitaremos alguna de las conclusiones más relevantes de determinados autores de referencia que apoyan dicha justificación de estudio de nuestro objeto matemático a tratar. Según Sanabria (2014), una de las principales justificaciones a la hora de presentar el Teorema de Pitágoras es la necesidad de resolución de problemas relacionados con distancias. Para esta autora, el objeto matemático que se está tratando tiene conexiones muy profundas con otros resultados como pueden ser la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo, el concepto de número irracional o las constantes aplicaciones en ámbitos como la topología, por ejemplo. Otros autores como González Urbaneja (2013), evocan la trascendencia histórica de dicho Teorema ya que, a su juicio, inicia una inflexión intelectual entre la práctica empírica e inductiva y la argumentación deductivo-demostrativa, tanto en el devenir histórico matemático cultural como en el espacio escolar de la educación matemática. Este autor considera al Teorema de Pitágoras como uno de los principales resultados matemáticos de la Historia y por lo cual, está situado en el umbral de inicio de la práctica deductiva en la matemática escolar actual.

También existe un componente de desarrollo geométrico (y de otros campos) como justificación del aprendizaje de nuestro objeto matemático tal y como defiende Barreto (2009) ya que para este autor el desarrollo de este recurso didáctico hace referencia al desarrollo cognitivo de los alumnos para resolver, por ejemplo, problemas geométricos, y donde se pueden realizar numerosas comprobaciones del Teorema dentro de su acepción geométrica (no sólo con triángulos rectángulos, sino también con semicírculos, triángulos equiláteros y otros polígonos regulares). El autor pone de relieve el ejemplo de la comparación de las diversas áreas. Como ya se ha comentado, el uso de las nuevas tecnologías se antoja capital en el proceso de análisis, aceptación y discusión del objeto matemático tratado. Por ejemplo, Gurrola y Jaúregui (2008) apoyan el hecho de que la introducción escolar del objeto matemático debe realizarse con un alto contenido en el uso de puzles o rompecabezas acompañado del uso del software de geometría para poder construir algunas de las demostraciones existentes del Teorema de Pitágoras. Resulta curioso comprobar cómo la implantación de nuestro objeto matemático se basa en la aplicación del Teorema en un solo sentido cuando autores como Dalcín (2007) defienden que también debe, como justificación habitual de introducción de este recurso matemático, tenerse en cuenta el recíproco del Teorema. A modo de anécdota que apoye su tesis, el autor se remonta a la cultura egipcia donde se utilizaban las ternas pitagóricas para la construcción de ángulos rectos.

También, me gustaría incluir una breve referencia a la autocrítica en la forma que se tiene de justificar el Teorema, que realizan numerosos autores como Ruiz (2000) y que se basan en que la metodología de exposición resulta ineficiente cuando se trata de una metodología enciclopédica, declarativa o repetitiva (en clara contraposición a lo que fija la Norma en las Leyes recurrentes, con un enfoque meramente algorítmico). Se pone de relieve la importancia de conocer la información previa que posee el alumnado para lograr el éxito en la ejecución.

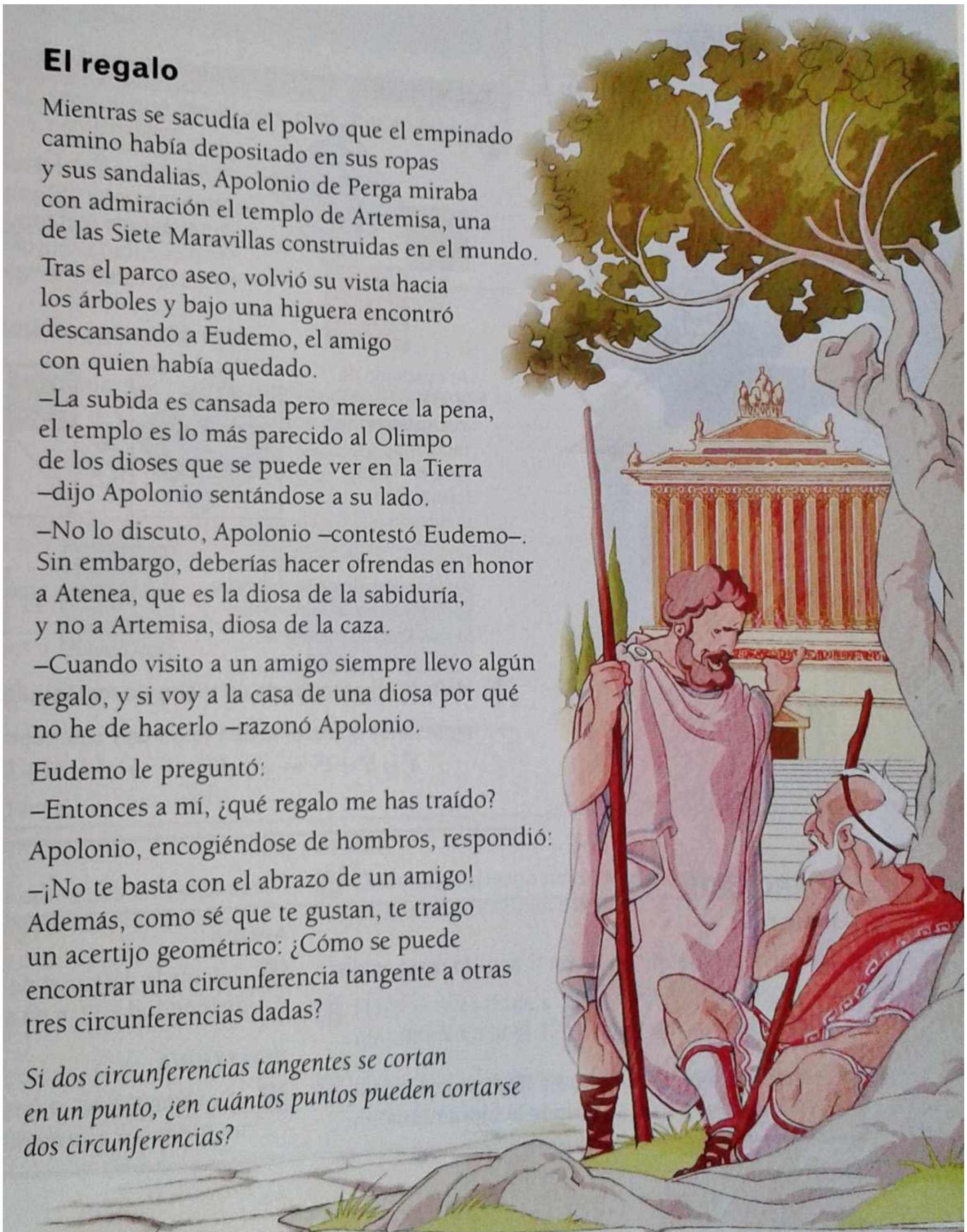
Una vez explicitados algunos de los puntos de vista sobre la justificación escolar de nuestro objeto matemático en la enseñanza, vamos a abordar esta cuestión desde uno de los principales recursos didácticos utilizados por los docentes de nuestro país: el libro de texto. Elegiremos tres libros de texto y analizaremos, de forma somera (ya que este apartado es introductorio a lo que conllevará el desarrollo del Trabajo Fin de Máster) el porqué de su justificación a la inclusión de una unidad didáctica correspondiente al uso del Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones.

Se realizará una comparación entre diferentes libros de texto adaptados a un nivel de 2º ESO donde estudiaremos la presentación teórica (junto con las hipotéticas demostraciones) así como el campo de problemas y ejercicios presentados. Valoraremos, además, la disposición de los alumnos a la hora de aprender dichos contenidos, vía discusión, vía aprendizaje significativo (que el alumno sea capaz de enlazar los conocimientos previos con los nuevos conocimientos adquiridos) o vía descubrimiento, para conocer el paradigma del desarrollo del Teorema de Pitágoras en un ámbito de edad determinado. En el desarrollo de este TFM se incluirán nuevos libros de texto para poder comparar los campos de problemas, técnicas y tecnologías de los mismos, que desarrollaremos en el quinto punto del Trabajo. Este apartado versa sobre un primer acercamiento a lo que nos encontramos en la realidad escolar. Pasaremos a realizar una breve síntesis de lo encontrado en cada uno de los tres libros de texto (ver referencia bibliográfica en el último apartado del TFM) para dicho curso escolar (recogidos en el apartado bibliográfico correspondiente), con especial consideración a conocer si en ellos se recogen la inclusión de algún tipo de demostración del objeto matemático tratado, del uso del Teorema desde una perspectiva inversa en la consecución de resultados o el uso y fomento de las nuevas tecnologías en el desarrollo del mismo.

Libro de texto Nº 1 (Editorial Santillana)

Este libro de texto incluye un total de dieciocho páginas a introducir el objeto matemático tratado sin justificación previa. Como carta de presentación aparece un breve poema (anónimo, ver fotografía 2.1) que justifica la necesidad de conocer la realidad del uso de las circunferencias y de los ángulos en las matemáticas aplicadas a la vida cotidiana. Directamente, este libro de texto aplica el resultado principal al uso de triángulos rectángulos. No aparece como tal el inverso al Teorema de Pitágoras. No aparecen demostraciones analíticas sino que aparece, acompañando al resultado principal, una breve justificación geométrica con la suma de áreas del polígono (cuadrado, en este caso) construido sobre los lados de dicho triángulo rectángulo.

El libro recoge aplicaciones muy concretas, sin justificación previa del porqué de dicha elección en el cálculo de áreas de figuras planas (desde el cálculo de la diagonal de un rectángulo, el cálculo de áreas o de la apotema de un polígono, como reflejamos en la fotografía 2.2). Se realiza un breve recordatorio previo de las diferentes áreas más comunes dentro del contexto de 2º de ESO y la posibilidad de descomponer dichas áreas en diferentes triángulos rectángulos, garante de la aplicación del Teorema. Aparecen apartados expresos en el cálculo de la longitud y el área de una circunferencia así como de una explicación detallada de la tipología de ángulos existentes. Por último, aparece, y quizá sea lo más relevante, un apartado (dos páginas de extensión) donde se propone al alumno una serie de problemas reales (cálculo de terrenos, rutas de aviones…etc.) y de aplicación del objeto matemática como justificación para resolver problemas del día a día. Este libro de texto no recoge ninguna actividad formativa basada en un contexto de las TIC´s ni se busca implantar dicha metodología.


El regalo

Mientras se sacudía el polvo que el empinado camino había depositado en sus ropas y sus sandalias, Apolonio de Perga miraba con admiración el templo de Artemisa, una de las Siete Maravillas construidas en el mundo.

Tras el parco aseo, volvió su vista hacia los árboles y bajo una higuera encontró descansando a Eudemo, el amigo con quien había quedado.

–La subida es cansada pero merece la pena, el templo es lo más parecido al Olimpo de los dioses que se puede ver en la Tierra –dijo Apolonio sentándose a su lado.

–No lo discuto, Apolonio –contestó Eudemo–. Sin embargo, deberías hacer ofrendas en honor a Atenea, que es la diosa de la sabiduría, y no a Artemisa, diosa de la caza.

–Cuando visito a un amigo siempre llevo algún regalo, y si voy a la casa de una diosa por qué no he de hacerlo –razonó Apolonio.

Eudemo le preguntó:

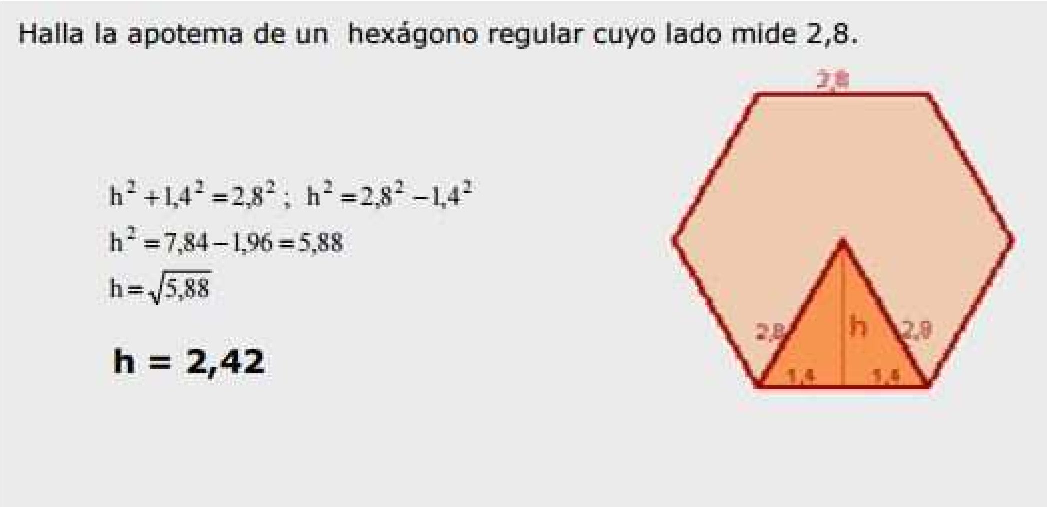
–Entonces a mí, ¿qué regalo me has traído?

Apolonio, encogiéndose de hombros, respondió:

–¡No te basta con el abrazo de un amigo! Además, como sé que te gustan, te traigo un acertijo geométrico: ¿Cómo se puede encontrar una circunferencia tangente a otras tres circunferencias dadas?

Si dos circunferencias tangentes se cortan en un punto, ¿en cuántos puntos pueden cortarse dos circunferencias?

Fotografía 2.1. Introducción del objeto matemático para el libro de texto Nº 1.



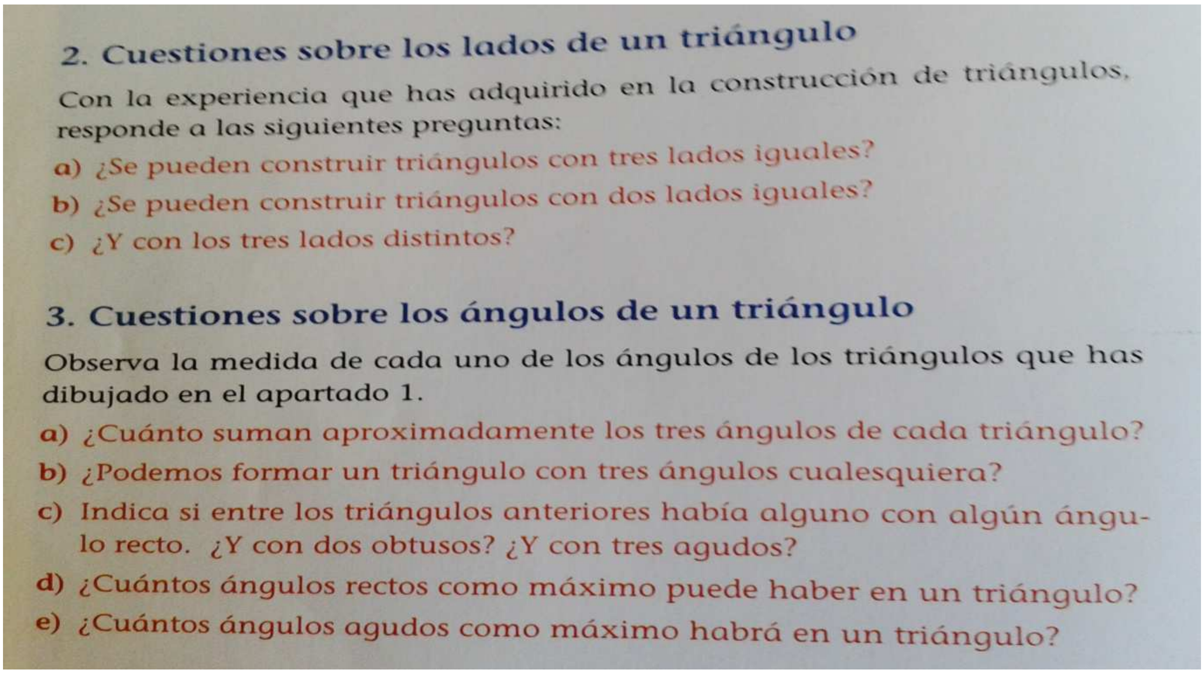
Fotografía 2.2. Ejemplo de campo de problemas y resolución propuesta.

<u>Libro de texto Nº 2 (Editorial Anaya)</u>

Este libro de texto resulta todo un desafío a lo que se ha experimentado con el primer libro. Se ha comprobado que este libro se corresponde con un curso que sigue una Programación Didáctica para un curso de 2º de ESO, completa. No aparece recordatorio alguno del Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones, con lo que no podremos mostrar fotografía alguna.. La presentación del capítulo del campo de ejercicios/problemas relacionados dista mucho del libro anterior. De esta forma, le corresponderá al docente (asumiendo plenamente la institucionalización de las técnicas) realizar un breve inciso sobre la aplicación de nuestro objeto matemático (recordemos que la LOMCE explicita el uso y la aplicación del Teorema de Pitágoras, en el currículo, en un curso de 2º de ESO, sin aparecer en los cursos escolares precedentes, por lo que resulta sorprendente a la luz de lo estudiado). Es por ello, que este libro de texto centra sus esfuerzos en que el alumno domine los conceptos de semejanza (con el Teorema de Tales como herramienta principal) con la idea de aplicar estos resultados en la resolución de problemas de aplicación práctica. La introducción al concepto de semejanza viene abordada por tres problemas prácticos que ponen al alumno en la tesitura de si alumno es capaz de resolverlos mediante la intuición, el descubrimiento o la formación previa (son problemas con varios métodos de resolución para llegar al resultado final).

Se constata que para resolver determinados problemas (o ejercicios) es necesario el conocimiento general que establece el resultado del objeto matemático tratado. El libro de texto (a diferencia con el primero) establece un breve recordatorio de la nomenclatura (fundamentalmente ángulos, vértices y lados) en el uso de triángulos rectángulos. Se explica lo que se considera una figura semejante así como de los principales resultados teóricos. Se habla de planos, maquetas…etc., pero en ningún momento (volvemos a incidir sobre ello) aparece mención alguna al Teorema de

Pitágoras de forma expresa (aunque sí se enlaza a través de una serie de cuestiones previas – mostramos dos de ellas en la fotografía 2.3 -) sino que se considera conocido y que el alumno es capaz de usarlo para completar la formación que refleja este libro de texto. Por último, a modo anecdótico, aparece un apartado dedicado a resolver problemas matemáticos a través de juegos (por ejemplo, con el uso de un *pantógrafo*). Este libro de texto tampoco explicita la enseñanza de los contenidos a través de las nuevas tecnologías.



2. Cuestiones sobre los lados de un triángulo

Con la experiencia que has adquirido en la construcción de triángulos, responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Se pueden construir triángulos con tres lados iguales?

b) ¿Se pueden construir triángulos con dos lados iguales?

c) ¿Y con los tres lados distintos?

3. Cuestiones sobre los ángulos de un triángulo

Observa la medida de cada uno de los ángulos de los triángulos que has dibujado en el apartado 1.

a) ¿Cuánto suman aproximadamente los tres ángulos de cada triángulo?

b) ¿Podemos formar un triángulo con tres ángulos cualesquiera?

c) Indica si entre los triángulos anteriores había alguno con algún ángulo recto. ¿Y con dos obtusos? ¿Y con tres agudos?

d) ¿Cuántos ángulos rectos como máximo puede haber en un triángulo?

e) ¿Cuántos ángulos agudos como máximo habrá en un triángulo?

Fotografía 2.3. Cuestiones previas a la introducción de la unidad didáctica.

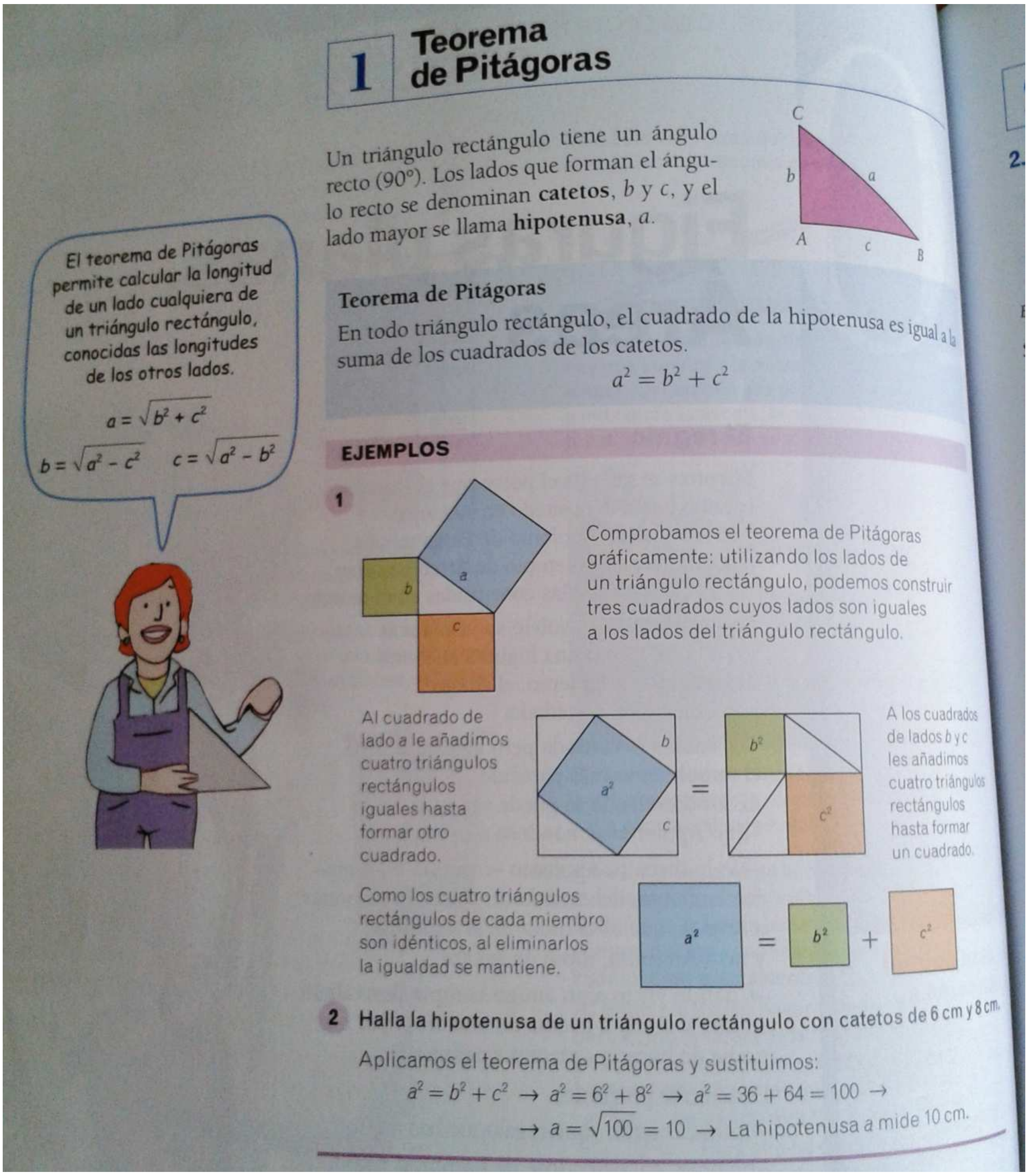
<u>Libro de texto Nº 3 (Editorial Vicens Vives)</u>

Este libro de texto, a mi juicio, es el que mejor representa lo que debería ser la implantación del objeto matemático tratado. Su presentación, que resumiremos a continuación resulta muy completa, aunque se detectan determinadas deficiencias. El tema tratado tiene una extensión de quince páginas. Sí aparece una justificación previa de cara al alumno sobre el porqué se debe estudiar en la Programación Didáctica. En concreto, se pone de relieve las aplicaciones del Teorema en varios aspectos de la actividad humana. Tal y como se explicita: "*el conocimiento del Teorema de Pitágoras ha permitido desde hace milenios la construcción de rectas perpendiculares y, a partir de ellas, de monumentos que siguen impresionando, como las Pirámides de Egipto*" (ver fotografía 2.4). La introducción del tema se acompaña de una fotografía bastante didáctica en la que se pide al alumno resolver tres cuestiones, de carácter intuitivo. Antes de presentar el resultado principal, se busca que el alumno haga especial hincapié en una serie de preguntas previas acerca de la notación y la construcción de los triángulos, a modo de recordatorio. El libro de texto discrimina entre un triángulo, con carácter general, y un triángulo rectángulo, de modo que el alumno sea consciente de que el resultado debe aplicarse para una tipología de triángulo específica (por lo tanto, sí aparece explícito el Teorema inverso).

Fotografía 2.4. Presentación inicial del objeto matemático y actividades previas.

Una vez presentada esta justificación de contenidos previa, el libro presenta el Teorema de forma completa, acompañándose de una demostración gráfica (similar al primer libro de texto y que adjuntaremos con la fotografía 2.5) que haga ver al alumnado la necesidad de aplicar el resultado en triángulos rectángulos. Posteriormente, el libro de texto aborda, de forma similar al primer libro, diversas aplicaciones del Teorema, incluyendo resultados como el Teorema de la altura o el Teorema del cateto, y sus actividades correspondientes. Este libro de texto no aborda aspectos relacionados con la semejanza de triángulos de forma expresa (no aplica *Tales* o no se habla de planos, maquetas y escalas, como en el segundo libro) sino que centra todos sus esfuerzos en que el alumno aprenda el objeto matemático tratado de una forma plena y global. También aparecen las principales clasificaciones de los triángulos. El campo de problemas y ejercicios propuestos no es tan amplio como en el primer libro si bien dicho campo está muy bien escogido con ejercicios básicos, de profundización y de ampliación.

Asimismo, aparece un apartado final correspondiente a una breve investigación sobre la temática tratada (en este caso, el libro de texto ofrece una ampliación de los que se conoce como *terna pitagórica*) y otro correspondiente a recreaciones (con aplicaciones geométricas del Teorema de Pitágoras). Por último, destacar que, tampoco este tercer libro de texto de referencia para esta breve introducción a los recursos didácticos disponibles fomenta el uso de las TIC´s en la implementación de los contenidos en el aula.



Fotografía 2.5. Introducción y demostración gráfica del Teorema de Pitágoras.

2.2. ¿QUÉ CAMPOS DE PROBLEMAS, TÉCNICAS Y TECNOLOGÍAS SE ENSEÑAN HABITUALMENTE?

A este respecto, lo que vamos a realizar es una disposición general de los libros de texto consultados (siete libros, referenciados, todos ellos, en el último apartado correspondiente a la bibliografía). Se buscará, en este apartado una enumeración general de lo que estos libros buscan en el alumno, ya que, como se ha dicho anteriormente, el libro de texto sigue siendo uno de los recursos didácticos más empleados por los docentes en el contexto de la etapa educativa que nos ocupa.

Así pues, se sigue un patrón básico de presentación, que presentamos a continuación. A modo de referencia, seguiremos la clasificación que el autor Blanco (1993) hace de los diferentes campos de problemas (ocho, en total) que aparecen en nuestro contexto de referencia y que detallamos a continuación. Esta clasificación tendrá <u>carácter general</u>, dentro del ámbito de una asignatura de *matemáticas*. En el quinto apartado de este TFM se ejemplificará cada uno de los problemas previstos en esta clasificación con alguno de los ejemplos propuestos en el campo de problemas correspondiente:

- Campo de problemas de reconocimiento (análisis previo del objeto matemático a tratar).
- Campos de problemas que responden al ámbito algorítmico o de repetición.
- Campo de problemas relativos a la traducción del contexto matemático a la aplicación de las matemáticas en el mundo real.
- Campo de problemas de procesos (mezcla de los diversos campos de problemas existentes).
- Campo de problemas de situaciones reales (este campo pertenece a aquellos enunciados en los que el alumno debe identificar un contexto real para dar un resultado real y aplicado a dicho contexto).
- Campo de problemas relativo a la investigación matemática. Estos problemas se identifican por enunciados en los que aparecen expresiones como "probar que…" o "encontrar todos los…".
- Campo de problemas referente a puzles, es decir, aquellos problemas que fomenten la creatividad vs la dificultad matemática inherente a dicho problema.
- Campo de problemas histórico (fomento de la Historia de las Matemáticas).

En los libros de texto consultados, así como en las demás herramientas didácticas aparecen todos y cada uno de los ocho campos de problemas, si bien, quizá por la fecha de publicación de dicha clasificación (el autor estableció dicha categorización a principios de la década de los noventa) falte un apartado correspondiente a la resolución de problemas a través de herramientas digitales (software específico, como la herramienta *Geogebra*) que ayude al alumno a visualizar la disposición a entender, plantear y resolver el problema solicitado). Los campos de problemas específicos, así como las técnicas y tecnologías aplicadas serán explicados convenientemente en los apartados correspondientes del Trabajo Fin de Máster (fundamentalmente, quinto apartado). Como se ha ido introduciendo anteriormente, el principal campo de problemas encontrado se corresponde con el campo relativo a la repetición de los *ejercicios tipo* que logren establecer una metodología específica para con su resolución, por parte del alumnado.

Algunas de las técnicas aplicadas para lograr resolver ese campo de problemas (si bien se podría categorizar mejor en un campo de ejercicios) pueden ser las siguientes:

- Operar de forma básica (suma, resta, multiplicación y división). Emplear correctamente la regla de los signos.
- Conocer lo que representa una ecuación. Saber despejar cada uno de los miembros de una ecuación, de forma correcta. Resolver sistemas de ecuaciones (fundamentalmente dos ecuaciones y dos incógnitas).
- Conocer lo que representa la simbología de igualdad y desigualdad en una ecuación.
- Usar potencias y raíces cuadradas.
- Conocer algebraicamente lo que representa una variable. Sustituir variables.
- Saber interpretar resultados (imposibilidad de que un resultado que se identifique con una longitud arroje una medida negativa, por ejemplo).
- Tener visión geométrica de los resultados y de los pasos a seguir.
- Conocer cómo se realiza el cálculo de áreas de las principales figuras geométricas planas.
- Conocer las unidades de medida en el cálculo de longitudes y áreas.

Las tecnologías aplicadas serán debidamente detalladas en su apartado correspondiente ya que este segundo apartado del TFM es meramente introductorio al contexto que nos ocupa.

2.3. ¿QUÉ EFECTOS PRODUCE DICHA ENSEÑANZA SOBRE EL APRENDIZAJE DEL ALUMNO?

El principal efecto que se busca con la inclusión del *campo de problemas tradicional* es la fijación del concepto teórico y la búsqueda de un *problema típico* a solucionar. Podemos tener un supuesto problema de falta creatividad por parte del alumno si el método de enseñanza-aprendizaje se basa en la repetitividad de determinados *ejercicios base*.

Así pues, los **efectos que se pretenden conseguir** (y que el docente podrá evaluar una vez finalizada la propuesta de este TFM) serán:

- Fijación del concepto teórico.
- Conocimiento de la nomenclatura y posicionamiento en un ámbito geométrico.
- Creación de expectativas y búsqueda de soluciones alternativas.
- Aplicación del campo de problemas a un contexto de la vida real.
- Motivación extrínseca e intrínseca.
- Resolución analítica y geométrica.
- Aprendizaje autónomo, con tareas específicas a realizar fuera del aula.
- Creación de propuestas e interactividad en el aula.
- Uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de dicho campo de problemas.

Evidentemente, una de las mayores deficiencias encontradas a este respecto es la no aparición del uso de las nuevas tecnologías como herramienta de choque con la metodología tradicional recurrente en los libros de texto y material bibliográfico consultado. La necesidad de erradicar la falta de creatividad puede basarse en el uso de estas potentes herramientas como fuente de descubrimiento y de afianzamiento por parte del alumno del objeto matemático tratado. También puede ser usado como un elemento motivador para lograr establecer un vínculo entre lo aprendido y lo utilizado en la perspectiva de la cultura matemática en la vida cotidiana. Fundamentalmente, la metodología propuesta en los libros de texto de referencia nos hace pensar que se acude principalmente a elementos de discusión algebraicos, perdiendo así el valor geométrico.

Quizá por ello, se constata la poca flexibilidad en los libros de texto a cambiar el tratamiento utilizado durante los cursos precedentes. Los contenidos se ciñen con bastante similitud a lo que establece el currículo implantado por la Normativa. La metodología basada en la repetitividad de los contenidos teóricos así como de los campos de problemas aportados pueden provocar un efecto contraproducente en el alumno por lo que la vinculación entre el alumno y el docente durante el proceso de enseñanza-aprendizaje debe ser bastante amplio para que se pueda extraer un resultado positivo en la implantación de este tipo de metodología.

3. Sobre los conocimientos previos del alumno.

3.1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?
3.2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?
3.3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

3.1. ¿QUÉ CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESITA EL ALUMNO PARA AFRONTAR EL APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO?

Llegados a este punto una posible solución corresponderá a la de acudir a la Norma para especificar qué necesita el alumnado para hacer frente al objeto matemático a tratar para un curso de 2º de ESO. Por lo tanto, acudiremos al BOA nº 65 (1/06/2007) donde a partir de la página pp. 8987 se establecen los principales contenidos que debe adquirir un alumno en el curso precedente al que nos ocupa.

Enumeraremos, a continuación los principales conocimientos previos que debe poseer el alumno para poder desarrollar una explicación del Teorema de Pitágoras y sus derivados en cuestiones de contenidos comunes, números, álgebra y geometría. Son, priorizando los más importantes, los que se presentan a continuación:

- Análisis de enunciados, tanto desde un punto de vista lingüístico como matemático.
- Valoración de medidas y de dimensiones de objetos cotidianos.
- Empleo de herramientas informáticas en un contexto de aula y de trabajo autónomo (calculadoras, Internet, software informático).
- Empleo de números naturales y del sistema decimal. Números racionales positivos.
- Operaciones con números (fracciones y números decimales).
- Jerarquía en las operaciones. Distintos órdenes de magnitud.
- Potencias de base y exponente natural. Raíces cuadradas exactas.
- Divisibilidad (múltiplos y divisores).
- Estimación en la medida de las distintas magnitudes presentes.
- Razón y proporción. Concepto inicial de semejanza.
- Reconocimiento de los números negativos.
- Empleo de letras para simbolizar números y cantidades de magnitud inicialmente desconocidas y sin concretar.
- Lectura y escritura de fórmulas simples.
- Valor numérico de expresiones. Presentación lógica de resultados.
- Elementos básicos de la geometría del plano (punto, recta y segmento).

- Medida de ángulos. Perpendicularidad.
- Uso y conocimiento del elemento triángulo: descripción, elementos que lo componen, nomenclatura, construcción, clasificación y propiedades. Perímetro y área: concepto y cálculo. De igual forma, se extenderá este uso y conocimiento a otros polígonos, regulares o no.
- Circunferencia y círculo: descripción y construcción.
- Cálculo básico de áreas mediante formulación, triangulación y cuadriculación.

3.2. LA ENSEÑANZA ANTERIOR, ¿HA PROPICIADO QUE EL ALUMNO ADQUIERA ESOS CONOCIMIENTOS PREVIOS?

Analizando diversos libros de texto de cursos anteriores previos al curso de referencia, se puede constatar cómo aparece toda la estructura demandada anteriormente establecida. Evidentemente, resultaría pretencioso generalizar sobre si el alumno posee o no estos conocimientos previos sin haber realizado un período de observación por parte del docente o haber realizado alguna prueba evaluativa que constate que, efectivamente, la retención y asimilación de los contenidos se haya producido de una forma satisfactoria.

El currículo establecido por la Norma trata de garantizar unas competencias básicas mínimas que hagan avanzar al alumno en sus diferentes etapas educativas, con lo que, queda estructurado dependiendo del nivel en el que se encuentre. A priori, analizando la Ley, se constata que las necesidades del alumno de cara a la adquisición de los conocimientos previos para afrontar el objeto matemático a tratar, están cubiertas.

Sería recomendable, por parte del docente, realizar un especial hincapié en los puntos enumerados anteriormente ya que el alumno podría necesitar actividades de refuerzo o de redescubrimiento de los resultados pretendidos, tal y como vamos a explicar en el siguiente punto.

3.3. ¿MEDIANTE QUÉ ACTIVIDADES VAS A TRATAR DE ASEGURAR QUE LOS ALUMNOS POSEAN ESOS CONOCIMIENTOS PREVIOS?

Como ya se ha comentado, resulta imprescindible realizar una breve observación (directa en el aula o indirecta a través de una breve encuesta o prueba de nivel). En este caso, se realizará una breve prueba inicial con una duración de treinta minutos en la que se va a demandar al alumno la inclusión de los puntos más importantes para poder avanzar en el contenido matemático, en cuestión. La prueba no tendrá un carácter punitivo sino todo lo contrario: será una prueba que, pese a no ser anónima, ayudará al docente a calibrar el nivel real del aula y así poder realizar un especial énfasis en los puntos que considere que queden peor cubiertos. Posteriormente a la realización de la prueba, dentro de la misma jornada lectiva, se procederá a la realización de la corrección de la misma, en un ámbito cooperativo y de respuesta grupal, con objeto de crear un mejor clima social de aula, dentro del grupo.

Asimismo, podría ser una buena idea la realización de un pequeño taller dinámico (bien en el aula de referencia, bien en el aula de informática), dividiendo a los alumnos en grupos y estableciendo diversas preguntas, relacionadas con la prueba inicial que inciten a los mismos a la fijación de los conceptos requeridos, si bien, esto debería estar regulado dentro de un gasto temporal asignado por la Programación Didáctica a cumplir del curso y podría no ser realizable por dicha limitación de las sesiones disponibles.

También se puede realizar durante las dos o tres primeras sesiones de explicación de los contenidos a la realización, por parte del docente, de un breve recordatorio (que no tendrá una duración superior a los cinco minutos) de los aspectos previos fundamentales para que el alumno tenga claro lo que se requiere del mismo.

La prueba inicial en cuestión, y que será utilizado por el docente para medir el grado de fijación de los conceptos previos, será la que se presenta a continuación. No tendrá carácter anónimo puesto que el docente necesita conocer las limitaciones personales según la tipología de cada alumno (en un ámbito de educación personalizada) aunque las principales conclusiones se extraerán dentro de un formato grupal. Nótese que también se realiza un especial énfasis (dentro de la primera pregunta) a las nociones históricas que el alumno pueda poseer sobre la temática. Una buena forma de presentar el objeto matemático a tratar podría ser una brevísima descripción del porqué histórico de su uso, anecdotario incluido, como veremos en el siguiente apartado de este Trabajo Fin de Máster.

Nombre y apellidos: <u>Curso 2º ESO</u>

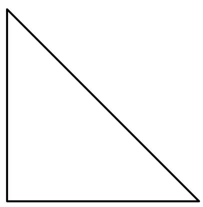
1. A lo largo de la Historia aparecen grandes nombres de científicos y pensadores que abordaron distintos conceptos matemáticos. Uno de los más importantes es **Pitágoras**. ¿Conoces algo de él y del trabajo que realizó?
2. Dado el siguiente triángulo, de lados y vértices desconocidos, ¿Podrías colocarlos en la figura? ¿Cuál sería el área de este triángulo?

Vértices: A, B, C.

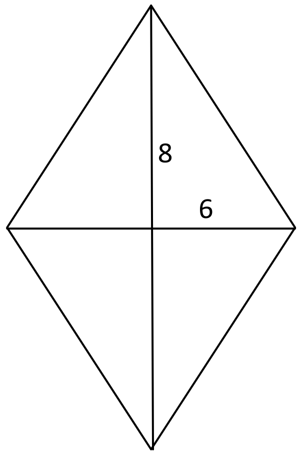
Ángulos: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Lados: a, b, c.

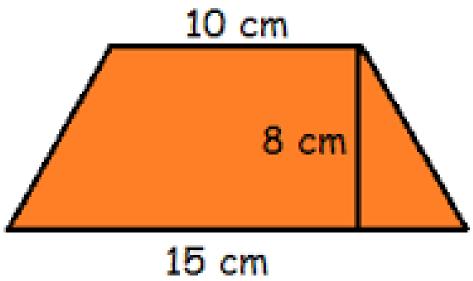
¿Cuál sería el **área**?



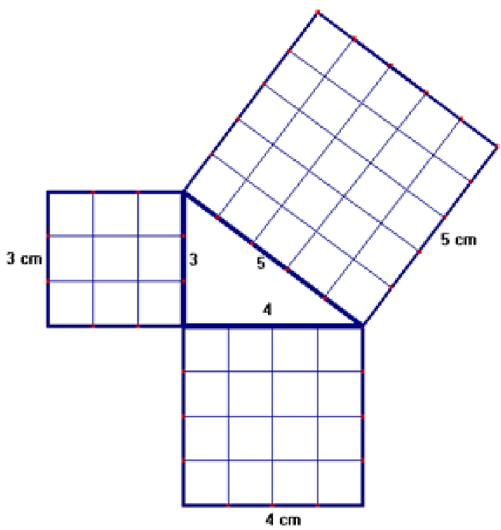
3. Ejercicio de cálculo de áreas. Calcula el **área** (en cm^2) de la siguiente figura (**rombo**), donde la diagonal mayor mide 16 cm y la diagonal menor mide 12 cm.



4. Ejercicio de cálculo de áreas. Calcula el **área** de la siguiente figura (**trapecio**).



5. **Dibuja** un triángulo que sea **rectángulo**, otro **isósceles**, otro **obtusángulo** y, por último, uno que sea **escaleno**.
6. ¿Crees que el **área del cuadrado** más **grande** es **igual** a la **suma** de las **áreas** de los **cuadrados** más **pequeños**? ¿Podrías **calcular** dichas **áreas**?



4. Sobre las razones de ser del objeto matemático.

4.1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?
4.2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?
4.3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.
4.4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

4.1. ¿CUÁL ES LA RAZÓN O RAZONES DE SER QUE VAS A TENER EN CUENTA EN LA INTRODUCCIÓN ESCOLAR DEL OBJETO MATEMÁTICO?

En este caso, no sólo debemos ceñirnos a la Normativa para justificar el porqué de la introducción del objeto matemático tratado en el contexto de aula. Efectivamente, el Teorema de Pitágoras junto con sus aplicaciones aparece explicitado en el currículo escolar dentro de un curso de 2º de ESO pero sería recomendable, de cara al alumno, poder ofrecerle otras garantías, junto con una perspectiva histórica de lo demandado, en cuanto a la necesidad de abordarlo, ya que, de lo contrario, se incurriría en una falta de flexibilidad y en la rigidez mostrada por la Ley o la Programación Didáctica consecuente de lo articulado.

Así pues, las principales razones de ser se corresponderán con las que se enumerarán a continuación:

- Razones de ser de índole histórico. Se ofrecerá al alumno una perspectiva temporal del uso del objeto matemático. Nacimiento del mismo e implicaciones reales de los resultados a lo largo de las diferentes culturas universales. Presentación (punto 3) de un problema histórico que no pueda ser resuelto sin tener en cuenta dicha razón de ser.
- Aprovechamiento de diversos comentarios que puedan (o no – si éste fuera el caso, se buscaría uno-) aparecer en el libro de texto donde se manifiesta la aplicación del objeto matemático en un contexto real de aplicación de las matemáticas en la vida cotidiana. Podría resultar que el alumno no sea capaz de medir la trascendencia, en el momento inicial de la presentación, de las implicaciones que esta herramienta posee, por lo que resultaría necesario, una vez finalizada la unidad didáctica, de volver a este punto inicial para dar sentido y comprensión a lo pretendido en un primer momento.
- Fomento de la capacidad crítica y reflexiva del alumno, como demanda la propia competencia matemática, con la inclusión de un contraejemplo, donde se vea que, con la aplicación de un problema práctico, el Teorema de Pitágoras no tiene cabida y no puede ser desarrollado ni ajustado a las exigencias de

resolución de dicho problema (básicamente a través del método del contraejemplo). Como ya se ha comentado anteriormente, se puede buscar –ya que no existe por regla general en los libros de texto de las diversas editoriales de referencia- la aplicación al inverso del Teorema de Pitágoras.

- Discriminación entre el Teorema de Pitágoras y sus implicaciones en el desarrollo de los diversos campos matemáticos (aritmético, algebraico y/o geométrico), especialmente en el ámbito de la semejanza de figuras planas regulares (fundamentalmente triángulos).
- Conocimiento del trabajo que diversos matemáticos han venido llevado a cabo a lo largo del tiempo (poniendo de relieve por ejemplo, el gran número de demostraciones que engloba el objeto matemático) con sus resultados fundamentales.
- Presentación y resolución de los diversos campos de ejercicios y problemas existentes que puedan englobarse dentro de la unidad didáctica correspondiente.
- Como razón de ser principal, volvemos a insistir en la necesidad de que el alumnado vea una conexión explícita entre lo que se quiere presentar y la aplicabilidad de los resultados teórico-prácticos referidos a un contexto de la actividad matemática en la vida cotidiana actual. No sólo se presente el Teorema de Pitágoras como un hecho histórico sino que el docente tiene que ser capaz de hacer ver al alumno que este resultado tiene implicaciones en diferentes ámbitos en la actualidad. Se pone de relieve la necesidad de implementar los contenidos con el aprovechamiento que se puede hacer de las TIC´s dando forma, como se verán en la secuencia cronológica del desarrollo del objeto matemático, a una sesión interactiva (que palie, en cierta medida, la no inclusión de demostraciones en la implantación de esta unidad didáctica).

4.2. ¿COINCIDEN CON LAS RAZONES DE SER HISTÓRICAS QUE DIERON ORIGEN AL OBJETO?

Aquí, buscaremos, las principales razones de ser históricas en el uso y aplicación del objeto matemático referenciado. Buscaremos el nexo de unión entre el resultado teórico y la aplicación del Teorema en las diferentes culturas (llegando hasta la actualidad) donde su uso ha tenido un componente eminentemente práctico en la resolución de situaciones cotidianas. Existen numerosos estudios al respecto y autores que han trabajado sobre ello. En este Trabajo Fin de Máster se elegirán varios artículos ("*La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática*" y "*El Teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años*") de uno de los principales autores de referencia: Pedro Miguel González Urbaneja.

En ello se pone de manifiesto la progresión que ha tenido el Teorema a lo largo de la Historia, en diferentes culturas. Aquí se especificarán, brevemente, cinco: cultura babilónica, cultura griega, cultura india, cultura china y cultura griega. En todas ellas se pone de manifiesto el uso del Teorema, si bien es cierto que no se establece con la notación asignada al matemático griego hasta culturas más avanzadas en el tiempo. Se utiliza el resultado, de forma independiente por cada una de las mismas. Hay que resaltar, además, la importancia que el autor da a la barrera idiomática enfocada a las culturas más orientales como pilar fundamental en el hecho de que no hayan aparecido más estudios sobre el uso del objeto matemático en dichas civilizaciones.

Aparecen numerosos ejemplos al respecto (desde la construcción de las pirámides en el Antiguo Egipto hasta las transacciones de los mercaderes en India) que pueden hacer, dentro de una explicación acorde al grupo de edad de referencia en un curso de 2º de ESO, ver al alumnado la implicación práctica del resultado teórico con objeto de acercar las matemáticas a la vida cotidiana, no sólo actualmente, sino también en la Antigüedad, es decir, acordar una razón de ser histórica.

A modo de anécdota, vamos a comentar brevemente aquellos puntos de unión de la aplicación del Teorema de Pitágoras, como resultado, en cada una de las cinco culturas: la tablilla Plimpton en la cultura babilónica, el triángulo sagrado en el Antiguo Egipto, el triángulo indio en India, el tratado Chui-Suang en China y por ejemplo el Libro de los Elementos de Euclides en Grecia.

Respecto a la cultura babilónica, hay que hacer especial hincapié en el hecho de lo conservado hasta la fecha en forma de tablillas de arcilla (método de transmisión del conocimiento y de la información de la época). En concreto, nos referiremos a la tablilla Plimpton 322 (que consta de cuatro columnas de números distribuidos en quince filas horizontales y concordantes con el sistema decimal actual y la proporcionalidad de longitudes en diversos triángulos rectángulos de referencia) que se conserva en la Universidad de Columbia, y que se considera el documento matemático más importante en la Antigua Babilonia (con fecha oscilante entre el año 1900 y 1600 a.C., más de mil años antes al nacimiento del propio Pitágoras). En dicha tablilla aparecen reflejados registros simples de operaciones comerciales, pero numerosos historiadores (como Sachs o Neugebauer) apuestan por ver una descripción empírica de números pitagóricos (incluso de tablas trigonométricas).

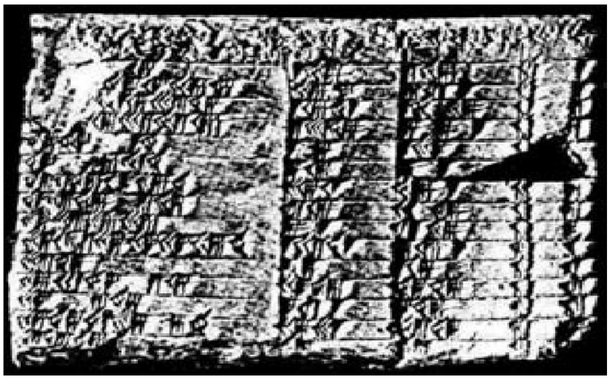


Figura 4.1. Tablilla Plimpton

Referente a la cultura egipcia, verdadero eje vertebrador de la metodología de implantación de las razones de ser históricas en el aula, se obtienen numerosos estudios al respecto. La principal conclusión resulta ser que los egipcios ya conocían y aplicaban los resultados del Teorema puesto que ya obtenían métodos de obtención de rectas perpendiculares (a modo de ejemplo de aplicación práctica se puede reflejar el aprovechamiento de las crecidas del Río Nilo en los cultivos, con la creación de parcelas medidas para la ocasión en base al trazo de rectas perpendiculares basadas en este método). Tal es la generalidad en la aplicación que aparece un triángulo específico y recurrente, llamado *triángulo egipcio*, *sagrado* o *de Isis*, con lados 3, 4 y 5.

A modo de anécdota, todas las pirámides (salvo la de Keops) construidas se hacían eco de este triángulo sagrado ya que es el único triángulo de lados enteros consecutivos, y por lo tanto, la construcción se obtiene por proporcionalidad de los lados en una progresión geométrica.

Tal era la aplicación del Teorema, que la aplicación del resultado en la agricultura, apareció la profesión de *arpedonapta* (tendedor de cuerda, tal y como refleja la fotografía interior), los cuales, utilizaban las medidas del *triángulo sagrado* para usarlo a modo de escuadra con el objetivo de trazar líneas perpendiculares.

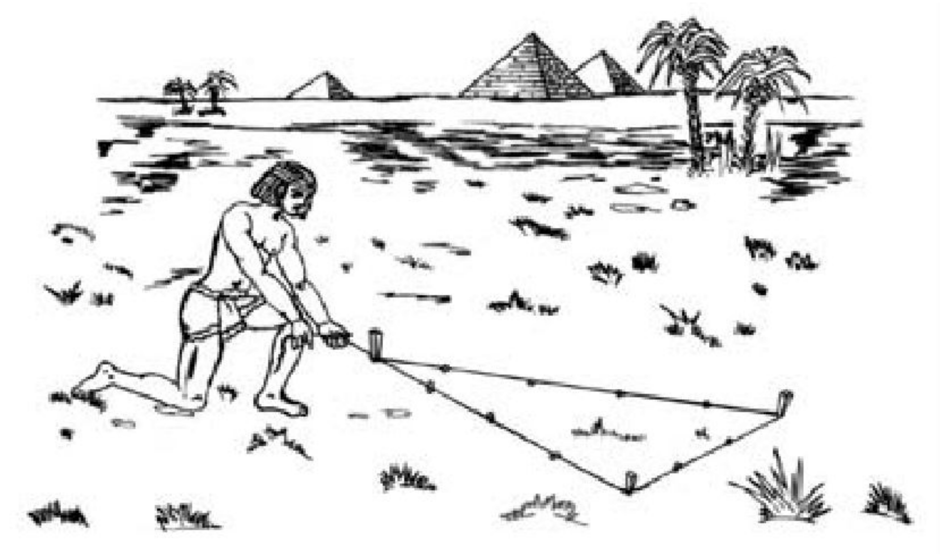


Figura 4.2. Aplicación del Teorema de Pitágoras en el Antiguo Egipto

En la cultura hindú, aparecen también los denominados "*tensadores de cuerdas*" al igual que en la cultura egipcia. También tenemos, de forma similar, un *triángulo hindú* de lados 3, 4 y 5. Llama la atención la similitud entre culturas cuando realmente, en el caso de haber realizado alguna influencia sobre la cultura india, ésta hubiera sido realizado por las reglas babilónicas imperantes. Recordemos que, en este caso, nos estamos movimiento en una etapa cronológica que oscila entre los siglos octavo y segundo a.C. Asimismo, se pone de relieve la utilización de las denominadas *ternas pitagóricas* en la construcción de templos y altares de la época.

Por último, antes de llegar a la cultura griega, realizaremos un breve comentario sobre la inclusión de nuestro objeto matemático en la cultura china. Para esta cultura, la principal conexión con el objeto matemático que nos ocupa viene reflejada en un Tratado denominado Chui-Suang (250 a.C.) donde aparecen resultados numéricos concretos. Este Tratado consta de 246 problemas, con 24 referidos de forma explícita al uso de triángulos rectángulos. Uno de esos problemas será el que se propondrá al alumno en el tercer apartado del capítulo, fomentando la razón de ser propia del objeto matemático con la razón de ser histórica del mismo.

Finalmente, llegamos a la cultura griega, a la pertenece Pitágoras. La tradición más persistente (en la que participan autores universales como Plutarco, Vitrubio, Diógenes o Proclo) atribuye el *Teorema de Pitágoras* al propio Pitágoras de Samos. La creencia generalizada es asignar a que Pitágoras fue el primero que proporcionó una demostración lógica del Teorema, lo cual justifica que lleve su nombre.

El análisis histórico de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo se puede dividir en tres estadios de desarrollo matemático. En el estadio inicial, puramente aritmético y empírico práctico, se obtienen resultados numéricos concretos para los lados del triángulo. En el estadio siguiente, aritmético geométrico, se obtienen leyes generales de formación de los lados. Finalmente se penetra en la profundidad del pensamiento matemático investigando las demostraciones de los resultados generales de los estadios precedentes. Las dos primeras etapas corresponden a las civilizaciones orientales aludidas anteriormente, mientras que a la tercera etapa sólo contribuyeron los griegos, particularmente Pitágoras y Euclides (con una mención especial a la obra de este último autor, su "*Libro I de los Elementos de Euclides*", con su aplicación en el Teorema inverso –recíproco- del Teorema de Pitágoras, no tan demandado). También se quiere poner de manifiesto la multitud de cantidad de demostraciones posteriores a la inicial del Teorema de Pitágoras, siendo éste el Teorema con mayor número de demostraciones a lo largo del avance matemático. A destacar, por ejemplo, las demostraciones (ordenadas cronológicamente) dadas por Pappus (aprox. 300 d.C.), Bhaskara (aprox. 1150), Leonardo Da Vinci (aprox. 1500), Anaricio-Göpel (1824) ó Perigal (1830).

4.3. DISEÑA UNO O VARIOS PROBLEMAS QUE SE CONSTITUYAN EN RAZONES DE SER DE LOS DISTINTOS ASPECTOS DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR.

Como ya se ha comentado anteriormente, se ha optado por proponer el siguiente problema al grupo de alumnos de referencia, que conjuga la razón de ser práctica del Teorema con la razón histórica del mismo, ya que este problema está planteado dentro del *Tratado Chui-Suang*.

El enunciado del mismo será el siguiente:

"***Hay un bambú*** (se aprovechará para hacer algún comentario al respecto sobre lo que es, anécdota de carácter lúdico incluida para buscar la atracción del alumno hacia el problema) ***de diez pies de altura*** (de forma similar, se realizará un breve comentario sobre las distintas unidades de medida empleadas por las diversas culturas), ***que se ha roto de tal forma que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura del bambú***".

El docente realizará un pequeño esquema gráfico que ayude a interpretar el enunciado al alumno. Tal y como se presume, la resolución del problema pasa por resolver la siguiente ecuación cuadrática:

$$\boldsymbol{x^2 + 3^2 = (10 - x)^2}$$

Evidentemente, el alumno, para nuestro curso escolar de referencia, desconoce el cómo resolver ecuaciones cuadráticas, y por lo tanto, al no tener las herramientas adecuadas, el docente experimentará una estrategia de *ensayo-error* con diversas longitudes (medidas en pies) que hagan ver que es posible que encajen (o no) con la resolución del problema. Se podrán asignar por ejemplo, diferentes valores y comprobar a través de una tabla, qué ternas son las adecuadas en la búsqueda de la solución.

Este primer problema está caracterizado por ser un problema de índole algebraica. Podría ser de gran ayuda el hecho de incluir en este punto un segundo problema que constituya la razón de ser del objeto matemático y que imprima un valor geométrico. Recurriremos en este punto a la última pregunta de la prueba inicial estipulada para este TFM donde el alumno dispone de un puzle pitagórico para decidir si la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños es igual al área del cuadrado más grande, y que por lo tanto, se produce el cumplimiento del Teorema de Pitágoras al estar disponiendo de un triángulo rectángulo.

Así pues se facilitará al alumno una plantilla cuadriculada con diversas figuras geométricas planas regulares (o semicírculos) a recortar. En este caso, el alumno deberá componer el área de las dos figuras más pequeñas en el área más grande para comprobar la igualdad de áreas, antes especificado y comprobar el inverso del Teorema, en este caso. Al considerar a este ejercicio como un ejercicio introductorio en la materia, podemos empezar por la disposición de cuadrados de diferentes áreas (de forma que cada alumno tenga una terna de áreas cuadráticas diferentes a la de su compañero y mediante la composición de cuadrículas se puede comprobar geométricamente si se cumple el Teorema (o no) y qué tipo de triángulo, obtenemos, por lo tanto. La dinámica será similar a lo mostrado en la figura 4.3.

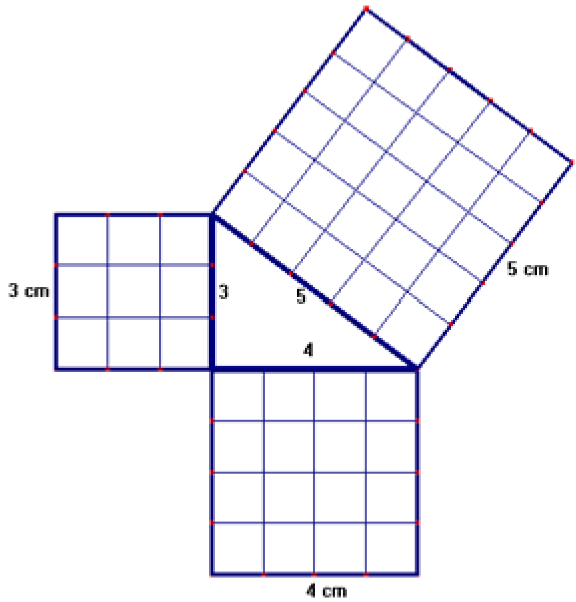


Figura 4.3. Puzle pitagórico.

4.4. INDICA LA METODOLOGÍA A SEGUIR EN SU IMPLANTACIÓN EN EL AULA.

La implantación de las razones de ser del objeto matemático estará supeditada a la descripción oral de los principales hitos históricos comentados anteriormente, junto con el acompañamiento gráfico de dicha descripción. Podría ser adecuado la implementación a través del software matemático actual de alguna de las demostraciones existentes del Teorema de Pitágoras (por ejemplo, con la herramienta *Geogebra*) para que el alumno, aprovechando la interactividad de estas herramientas, sea capaz de visualizar la necesidad de aplicar el objeto matemático en triángulos rectángulos. Queda patente en la secuenciación de actividades.

Esta breve introducción histórica junto con el planteamiento (y resolución del problema del tercer punto) no tendrá una duración superior a los treinta minutos, y se realizará en las sesiones posteriores al primer acercamiento al resultado general del Teorema, así como de la nomenclatura principal necesaria. Para el planteamiento del problema, el docente se apoyará en varias fases que se presentan a continuación:

- ✓ Fase de lectura del enunciado.
- ✓ Fase de discusión del mismo, entendiendo lo que se pide y los elementos que componen el texto.
- ✓ Generación de debate (*brain-storming*) por parte del grupo de alumnos sobre cómo plantear el problema.
- ✓ Representación gráfica del docente y transcripción del problema a la pizarra.
- ✓ Elección de la incógnita y resolución de la ecuación.
- ✓ Búsqueda de soluciones y presentación final de un resultado adecuado. Discusión sobre el resultado obtenido y su coherencia con los datos del enunciado. Solución de dudas generadas.

5. Sobre el campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas.

5.1. Problemas de tipo aritmético.
5.2. Problemas de tipo algebraico.
5.3. Problemas de tipo geométrico.
5.4. Problemas de tipo tecnológico (competencia digital).

Vamos a crear tres grupos de problemas a presentar en el aula durante las nueve sesiones que se tienen programadas para conseguir un efecto positivo en la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático tratado.

Principalmente, estableceremos las categorías de:

- Problemas de tipo aritmético (3 subcampos).
- Problemas de tipo algebraico (6 subcampos)
- Problemas de tipo geométrico (3 subcampos).
- Problemas de tipo tecnológico (uso de las TIC´s, con 4 subcampos previstos).

Una vez realizada esta clasificación general, vamos a dividir cada categoría en subcampos donde podremos concretar cada problema en cuestión. Seguiremos la clasificación, además, que establece el autor Blanco (1993) para conocer en todo momento sobre cuál de las ocho categorías encaja cada uno de los problemas y/o ejercicios presentados. Asimismo, en este mismo apartado lo que se realizará será la presentación del campo de problemas, de las técnicas y de las tecnologías asociadas a estas técnicas de forma conjunta, para cada problema específico. No se abordará cada punto por separado, puesto que la consideración del tratamiento de la información de esta forma puede resultar óptima de cara a una visión general de lo pretendido en este TFM.

Así pues, seguiremos el siguiente esquema para cada uno de los ejercicios y/o problemas que se van a presentar:

I. Enunciado y planteamiento del problema.
II. Resolución del problema, desde el punto de vista del docente.
III. Posibles modificaciones en la resolución del problema planteado. Modificación de la técnica inicial.
IV. Categorización del ejercicio y/o problema.
V. Técnicas empleadas en la resolución. Ejercitación de dichas técnicas.
VI. Adecuación de las técnicas a la resolución del ejercicio y/o problema. Formación y experiencia previa del alumno.
VII. Institucionalización en la aplicación de las técnicas.
VIII. Metodología de implantación.

Para facilitar la lectura del texto, sin que llegue a ser extremadamente repetitivo, se establecerá una nomenclatura para las posibles técnicas a utilizar y que expondremos a continuación:

Técnica 1	Aplicar operaciones matemáticas básicas (suma, resta, multiplicación y división).
Técnica 2	Saber reconocer las características básicas de los triángulos. Clasificación y nomenclatura de los mismos.
Técnica 3	Valorar lo que representa una ecuación. Saber despejar, de forma correcta, los términos de una ecuación. Resolver sistemas de ecuaciones.
Técnica 4	Valorar lo que representa una desigualdad. Operar con los operadores matemáticos mayor y menor.
Técnica 5	Realizar potencias y raíces cuadradas.
Técnica 6	Modelizar algebraicamente un problema. Representar variables. Sustituir valores en variables. Saber operar con parámetros.
Técnica 7	Saber interpretar los resultados. Buscar coherencia en los mismos ante resultados negativos.
Técnica 8	Tener una visión geométrica en la resolución del problema.
Técnica 9	Discriminar el área de las principales figuras planas. Ser capaz de triangular un área preconcebida (método de triangulación).
Técnica 10	Disponer y manejar las unidades de medida en el cálculo de longitudes y áreas.
Técnica 11	Usar y manejar las TIC´s como herramienta complementaria.

Tabla 5.1. Principales técnicas utilizadas en la resolución de problemas

5.1. PROBLEMAS DE TIPO ARITMÉTICO.

5.1.1. Subcampo de problemas sobre la clasificación de triángulos no rectángulos: Implicación del inverso del Teorema de Pitágoras.

Inicialmente, el alumno desconocerá el resultado ofrecido por el Teorema de Pitágoras. La idea de crear este subcampo de problemas es conseguir que el alumno, mediante la **exploración** y el **descubrimiento** sea capaz de decir qué ocurre, conocidas tres longitudes de los tres lados de un triángulo, de qué tipo de triángulo tenemos. Además, la idea principal se establecerá no sólo para los lados del triángulo conocidos sino también sobre las áreas de polígonos regulares construidas sobre dichas longitudes (fundamentalmente cuadrados). Evidentemente, la categorización de este ejercicio (con categoría de problema puesto que se fomenta en el ámbito del descubrimiento y de la exploración) en el ámbito aritmético no impide que hubiera podido ser incluido en otro subcampo (por ejemplo en el campo geométrico, como se verá más adelante, ya que combina ambas modalidades).

Si no se cumpliera la igualdad de la suma de los cuadrados de los catetos con el cuadrado de la hipotenusa significaría que no se puede aplicar el objeto matemático – que todavía no se ha estudiado - ya que se tiene un triángulo que no es rectángulo, dentro de este apartado. El alumno tendrá que ver qué ocurre durante la formación del triángulo con las áreas o longitudes dadas. Evidentemente el alumno sí deberá estar en disposición de conocer qué significa disponer de un triángulo rectángulo, acutángulo u obtusángulo (es decir, dominar la segunda técnica de la tabla 5.1). Para esta actividad se necesitaría una regla de medición y una serie de hojas cuadriculadas.

El enunciado de tres posibles ejercicios asociados a este subcampo (ya que el ejercicio tiene como raíz el dato numérico del valor de la longitud o el área y no se parte de una descripción gráfica al uso) podría ser el siguiente (resolveremos el tercer ejercicio, a modo de ejemplo):

Ejercicio 5.1.1.1 "**Se tienen tres cuadrados de áreas 100, 225 y 400 cm^2, respectivamente. Recorta dichos cuadrados con esas medidas en un papel e intenta formar un puzle de forma que entre los tres cuadrados se forme un triángulo en su interior. ¿De qué tipo de triángulo estamos hablando?**".

Ejercicio 5.1.1.2 "**Se tienen tres longitudes que representa el lado de un cuadrado, de valores 10, 15 y 15 cm, respectivamente. Construye tres cuadrados con esas medidas e intenta encajar dichos cuadrados de forma que quede un triángulo en su interior, ¿De qué tipo de triángulo estamos hablando?**".

Una vez introducida la teoría correspondiente al Teorema de Pitágoras (se introducirá a partir de la cuarta sesión de nuestra secuencia didáctica), se puede, de forma puramente aritmética, discriminar cuál es la tipología del triángulo requerido, ya que el alumno conoce las implicaciones del resultado en la caracterización de triángulos, es decir, no va a hacer falta recortar los cuadrados sino que se calculará la suma del cuadrado de las dos longitudes menores del triángulo (o bien hallar el lado del cuadrado que se forma sobre dicha longitud, coincidentes, en función del área dada) para realizar una comparativa con el cuadrado de la longitud mayor, de dicho triángulo, como vemos en el tercer ejercicio propuesto, a continuación. También, sería interesante comentar que el ángulo del triángulo que caracteriza a éste como acutángulo u obtusángulo no sea mucho mayor (o menor) de 90º para que no resulte tan evidente, al recortar las áreas, con qué tipo de triángulo se está trabajando.

Ejercicio 5.1.1.3 "***Sabiendo que un triángulo tiene lados de longitud 3, 4 y 4 cm, respectivamente, di si se corresponde o no, con un triángulo rectángulo***".

La resolución es inequívoca y versará en comprobar que se cumple el Teorema de Pitágoras para afirmar que el triángulo obtenido es un triángulo rectángulo.

Así pues, en la resolución que realizará el docente, se considerará uno de los lados de 4 cm como hipotenusa y aplicaremos el teorema:

$$4^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow 16 \neq 9 + 16$$

Y por lo tanto, al no cumplirse el Teorema, se obtiene que no se dispone de un triángulo rectángulo.

Las principales técnicas asociadas a la resolución de este subcampo de ejercicios (no llegan a la categoría de problema al no ser más que un mero transmisor de aplicación de la información disponible) son las siguientes (ver tabla 5.1.): Números 1, 2, 4, 5, 7 y 10..

El docente asumirá, en concordancia con el alumno, la institucionalización en la aplicación de las técnicas, como ocurre en el subcampo de problemas anterior. La metodología será similar a la establecida en dicho subcampo.

5.1.2. Subcampo de problemas de clasificación de triángulos rectángulos.

De la misma forma que se explicó anteriormente, el alumno realizará otra terna de ejercicios de forma que esta vez no se obtenga bien triángulos acutángulos, bien obtusángulos. En este caso, este subcampo es específico en la formación de triángulos rectángulos, y el alumno será capaz de verlo, como antes, a través del descubrimiento y la exploración en el manejo de áreas y longitudes. Volvemos a tener la componente intrínseca del factor geométrica en la resolución del problema. Para esta actividad sería, como antes, recomendable de tener una regla de medición y una serie de hojas cuadriculadas. Así pues, plantearemos la siguiente terna de ejercicios, al igual que se realizó anteriormente:

Ejercicio 5.1.2.1 "**Se tienen tres cuadrados de áreas 100, 576 y 676 cm^2, respectivamente. Recorta dichos cuadrados con esas medidas en un papel e intenta formar un puzle de forma que entre los tres cuadrados se forme un triángulo en su interior. ¿De qué tipo de triángulo estamos hablando?**".

Ejercicio 5.1.2.2 "**Se tienen tres longitudes que representa el lado de un cuadrado, de valores 5, 12 y 13 cm, respectivamente. Construye tres cuadrados con esas**

medidas e intenta encajar dichos cuadrados de forma que quede un triángulo en su interior, ¿De qué tipo de triángulo estamos hablando?”.

Ejercicio 5.1.2.3 “***Visto la experiencia de los dos ejercicios anteriores y conocidos los lados de un triángulo que sabemos que es rectángulo, con longitudes de 3, 4 y 5 cm, ¿Qué relación cumplen el cuadrado de dichas longitudes?¿Siempre ocurre esto para este tipo de triángulos?***”

La resolución de este ejercicio consistirá en identificar el lado mayor del triángulo, en este caso 5 cm, con la hipotenusa del mismo, siendo los lados de longitud 3 y 4 cm, los catetos. Así pues, el alumno deberá comprender que la igualdad ofrecida en el Teorema de Pitágoras (que en el momento del ejercicio desconocerá porque, precisamente, lo que se busca con el mismo es que el alumno sea capaz de ver qye la suma de los cuadrados de las longitudes más pequeñas es igual que el cuadrado de la hipotenusa o longitud mayor del triángulo) sólo se cumple para triángulos rectángulos.

En la resolución del ejercicio no se tiene en cuenta ni componentes algebraicos ni geométricos (aunque sí aparecen implícitos), por lo que podemos categorizarlo en este subcampo.

La solución correcta del ejercicio se expone a continuación:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

Es decir, como 25 = 9 + 16, el alumno sabrá que el triángulo que se ha presentado se corresponde con un triángulo rectángulo, es decir, que el ángulo que forman los dos catetos es igual a 90 grados. Se buscará el debate del alumno y que sea capaz de encontrar la relación y que sea capaz de afirmar un resultado general cuando esto ocurra.

La estructura de resolución pasa por una buena identificación de la hipotenusa como lado mayor del triángulo, siendo los catetos las longitudes menores. Al disponer de la propiedad asociativa y conmutativa de la suma, será indistinto identificar como primer cateto aquel que mida 3 ó 4 cm.

La resolución de este ejercicio tiene una búsqueda de operatividad fundamentalmente aritmética, si bien es cierto que se puede resolver desde un punto de vista geométrico.

Categorizaremos este ejercicio como, precisamente, un ejercicio, ya que su resolución es una aplicación directa del objeto matemático tratado y no trasluce ninguna pretensión novedosa ni creativa por parte del alumno en la consecución del resultado. Como establece Blanco (1993) este ejercicio estará enmarcado dentro de las siguientes categorías: problemas de reconocimiento y categoría de repetición.

Las técnicas empleadas para la resolución de este ejercicio serán las siguientes: técnicas números 1, 2, 4, 5, 7 y 10. Al final de este capítulo, quedará reflejada en forma de tabla, los distintos problemas con sus técnicas de resolución asociadas.

Las técnicas presentadas están justificadas en el conocimiento previo del alumno ya que se consideran básicas en el currículo previo de un curso de 1º de ESO, salvo, quizá, la décima técnica, donde se busca la triangulación de las principales figuras planas con objeto de poder aplicar el Teorema de Pitágoras y así resolver el problema, en cuestión. El enfoque práctico de esta técnica se antoja fundamental para poder formar el cimiento necesario de cara al alumno y a la resolución de esta tipología de ejercicios.

Así pues, la adecuación de las técnicas a la capacidad del alumnado para poder resolver con éxito este subcampo de problemas es correcta, dado el precedente existente. No obstante, el docente, mediante técnicas de observación en el aula, será capaz de detectar los puntos potencialmente débiles que haga necesaria una reestructuración de los contenidos y de su aplicación.

Otros ejercicios que se pueden plantear en el aula, dentro de este contexto aritmético (y más generales al haber introducido el subcampo 5.1.1), podrían ser los siguientes:

- *Conocidos los lados de un triángulo, con medidas 10, 8 y 6 cm, respectivamente, clasificar si el triángulo propuesto resulta ser rectángulo, acutángulo u obtusángulo*.
- *Conocidos los lados de un triángulo, con medidas 9, 8 y 6 cm, respectivamente, clasificar si se trata de un triángulo rectángulo, acutángulo u obtusángulo*.

La institucionalización de las técnicas empleadas para este subcampo de problemas recaerá en partes iguales entre el docente y el alumno, debido a que el alumno, una vez superado el curso precedente, se le presupone capacitado para dominar las mismas. El docente, por su parte, tendrá la misión de *refrescar* los conceptos e *hilar* los nuevos (recordemos la novedad que conlleva la novena técnica) con las técnicas aprendidas anteriormente, con objeto de llevar el proceso de enseñanza-aprendizaje a un nivel de aprendizaje autónomo y reflexivo, y especialmente, constructivo.

La metodología de implantación de este tipo de problemas versará en un enfoque participativo, de forma que el docente pueda evaluar mediante observación, la formación previa del alumno y sus principales carencias, si las hubiera, en el manejo de las técnicas. Se planteará el enunciado correspondiente que el alumno copiará en su cuaderno de trabajo. Posteriormente, se incidirá sobre la clasificación de los tres tipos de triángulos, representación gráfica incluida, de forma general. Se recordará el resultado principal del Teorema de Pitágoras, una vez cumplida la dinámica de experimentación, destacando su uso en el empleo de triángulos rectángulos. Se incidirá en la definición de hipotenusa, cateto y nomenclatura correspondiente. Se preguntará al grupo de alumnos, sin personalizar, sobre la resolución del mismo, dentro de un contexto de *brain-storming* o *lluvia de ideas*.

El docente irá anotando en la pizarra todas las propuestas realizadas por el alumno, de cara a ir analizando una a una su idoneidad. Se buscará el debate en cuanto a la necesidad de homogeneizar las unidades de medida de las longitudes dadas en el enunciado. Finalmente, el profesor resolverá el ejercicio y discutirá son el grupo de alumnos de referencia sobre la solución encontrada. Los dos ejercicios propuestos dentro de este apartado pueden servir como ejercicios de refuerzo, utilizándolos como trabajo autónomo para realizar como tarea fuera del aula.

5.1.3 Subcampo de problemas de aplicación en un contexto histórico matemático.

En este caso, vamos a abordar un subcampo de problemas de tipo aritmético que conjugue la aplicación del Teorema con componentes de índole histórico. Fundamentalmente se ha creado este apartado para dar a conocer, entre el alumnado, lo que se conoce como *ternas pitagóricas*.

Así pues, se explicará que una terna pitagórica está constituida por tres números naturales, que son los lados de un triángulo rectángulo, es decir, que satisfacen la relación del teorema de Pitágoras. De este modo, tres números naturales que cumplen que el mayor al cuadrado es igual que la suma de los cuadrados de los otros dos es una terna pitagórica. Como ya se ha comentado en otros apartados del TFM, la TP (terna pitagórica) más famosa es la compuesta por las unidades de longitud 3, 4 y 5.

Un enunciado de un posible ejercicio (aquí quizá sí puede categorizarse como problema dado que se induce a la investigación y a la introducción de un elemento matemático desconocido hasta la fecha, presuntamente) sería el correspondiente:

<u>Ejercicio 5.1.3.1.</u> "***Elige una terna pitagórica cualquiera (a elección del alumno). Si a dicha terna se le multiplica por dos, ¿Se obtiene otra TP?¿Y si se multiplica por tres?***"

La resolución a este problema, desde la perspectiva aritmética, pasa por la comprobación de que los tres números naturales (o sus múltiplos) cumplen la igualdad derivada del objeto matemático tratado.

Este mismo subcampo podría derivarse de un campo de problemas algebraico si la pregunta hubiera sido realizada como resultado de multiplicara la TP por un mismo número cualquiera d.

Así pues, en este caso, de manera general, la resolución sería la siguiente:

Tenemos tres números naturales a, b y c (con a el número mayor) que forman una TP con lo que se obtiene la siguiente igualdad:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Si se pretende multiplicar a la TP por un mismo número, desconocido, d, tendríamos que los tres términos de la ecuación pasarían a ser: $d \times a$, $d \times b$ y $d \times c$.

Así pues, sustituyendo y sacando factor común a la ecuación, se obtiene lo siguiente:

$$d^2 \times a^2 = d^2 \times (b^2 + c^2)$$

Y así pues, podemos eliminar el término d^2, comprobando que se sigue manteniendo el concepto de terna pitagórica, a pesar de haber multiplicado a los términos por d.

Las técnicas empleadas para la resolución de este tipo de problemas, desde el punto de vista aritmético, serán las siguientes: técnicas número 1, 3, 5, 7 y 10.

Será competencia del profesor la búsqueda de un precedente histórico para dar comienzo a la explicación previa y a la iniciación en la introducción de los que representa una TP, usadas desde la Antigüedad, a modo de ejemplo, por la cultura egipcia o hindú, y sus triángulos sagrados, de lados 3, 4 y 5.

La metodología a implantar para este subcampo de problemas podría basarse en una dinámica de grupos donde cada uno de los mismos plantee una TP diferente y responda a las preguntas planteadas anteriormente.

5.2. PROBLEMAS DE TIPO ALGEBRAICO.

5.2.1. *Posicionamiento de nomenclatura de un triángulo cualquiera*.

Este subcampo está derivado de uno de los ejercicios demandados por parte del docente hacia el alumno en la prueba inicial sobre los conocimientos previos disponibles, ya que, junto con las respuestas propuestas y la observación de campo en el aula, el docente será capaz de argumentar su inclusión (o no) en la propuesta didáctica que se está llevando a cabo.

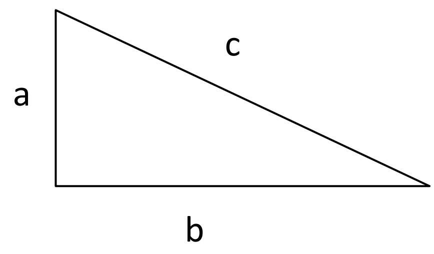
El ejercicio se caracterizará por la siguiente tipología: el docente dibujará un triángulo cualquiera en la pizarra, de forma que se preguntará por la colocación de la siguiente nomenclatura: lados, vértices y ángulos (interiores y exteriores) con su simbología correspondiente (letras y números). El triángulo no tiene por qué ser rectángulo, ya que se pretende, además, categorizar qué tipo de triángulos, en función de los lados y de los ángulos se pueden llegar a obtener y en qué clasificación encajan los mismos.

Se realizará un especial hincapié en aquellas carencias que el profesor detecte puesto que resulta trascendental que el alumno sea capaz de identificar cada uno de los elementos de un triángulo de cara a la progresión de la unidad didáctica. En este caso se fomentará la justificación de las técnicas número 2, 6, 8 y 9, ya que además del posicionamiento de la simbología, también se recordará qué se entiende por perímetro y área de un triángulo cualquiera.

5.2.2. *Subcampo de problemas asociado a la demostración algebraica del Teorema de Pitágoras*.

En este apartado, se buscará, desde el punto de vista algebraico, la necesidad de que el alumno responda a la siguiente pregunta: *"¿Se cumple el Teorema de Pitágoras para un triángulo que no sea rectángulo?"*. De esta forma, el alumno será consciente de la posibilidad que ofrece el Teorema inverso y que no todo cualquier resultado o enunciado es válido para aplicar, directamente, el objeto matemático tratado. Podemos proponer la siguiente demostración algebraica, que se muestra a continuación.

El docente dibujará un triángulo rectángulo de esta forma:



De forma que lo que se especifica es que el triángulo rectángulo disponible tendrá por catetos aquellos cuya longitud marque a y b mientras que la hipotenusa (lado con mayor longitud del triángulo) se caracterizará por la componente c. La raíz de la demostración parte de la figura 4.3, del apartado anterior, sin ninguna longitud predeterminada sino con longitudes a, b y c.

El docente, a continuación dibujará el siguiente diagrama, con objeto de iniciar la demostración algebraica para lados a, b y c del triángulo, cualesquiera y alternando la componente verbal y algebraica dando lugar al siguiente desarrollo:

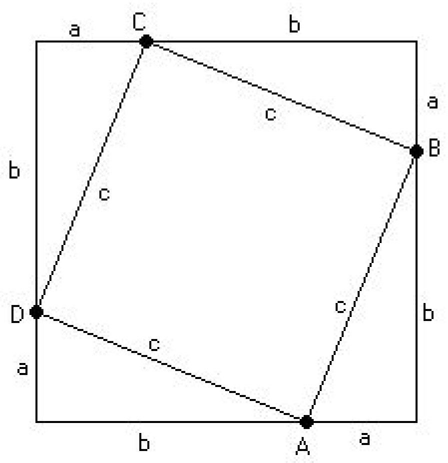


Figura 5.1. Diagrama demostrativo

Así pues, cada lado del cuadrado más grande mide $(a+b)$, y por lo tanto el área de dicho cuadrado será $(a+b) \times (a+b)$. Ahora se sumarán las áreas de los elementos internos que conforman el área total del cuadrado, es decir, el cuadrado pequeño de área c^2 y cada uno de los cuatro triángulos, idénticos, de área $\frac{1}{2}\ (a \times b)$

Resumiendo, el área total de la figura será $c^2 + \frac{1}{2}(a \times b) \times 4$. Reduciendo la expresión se obtiene lo siguiente: $c^2 +\ 2 \times a \times b$

El área del cuadrado grande es igual que el área del cuadrado inclinado más el área que forman los cuatros triángulos, de forma que escribimos lo siguiente:

$$(a+b) \times (a+b) =\ c^2 +\ 2 \times a \times b$$

Vamos, a continuación, a ver si se cumple el Teorema de Pitágoras (referente al Teorema inverso se puede utilizar la misma mecánica para aquellos triángulos que no sean rectángulos y que por lo tanto, no formen un cuadrado en el proceso de demostración). Desarrollamos las expresiones:

$$a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = c^2 + 2 \times a \times b$$

Si se resta de la ecuación el término $2 \times a \times b$ se obtiene el cumplimiento del Teorema de Pitágoras, esto es, $a^2 + b^2 = c^2$ y por lo tanto queda demostrado. Resultaría conveniente comentar el gran número de demostraciones existentes acerca del Teorema y que lo llevado a cado, simplemente, es una de tantas demostraciones. Podría proponerse al alumno la posibilidad de que éste investigue hacia otras demostraciones ya existentes, de cualquier tipología, tanto algebraica como geométrica, si bien es cierto que durante el campo de problemas geométrico se incidirá hacia algunas de las más recurrentes.

Respecto a la metodología de implantación de este tipo de subcampo de problemas (si bien no tendrá cabida, dentro del aula tradicional aunque sí durante la simulación informática, en nuestra programación cronológica de las sesiones debido a la restricción temporal) el profesor proyectará la figura 5.1, de forma que el alumno tenga presente durante toda la proyección de la demostración la referencia principal.

Evidentemente, este subcampo de problemas está englobado dentro del campo de problemas algebraico (ya que no se especifica en ningún momento el valor de las incógnitas) si bien tiene un componente geométrico específico, necesario para la interpretación de los resultados, y que por lo tanto, podría categorizarse dentro del siguiente campo de problemas que explicaremos más delante (geométrico).

Este ejercicio tendrá la categoría de problema por el grado de dificultad implícito en lo que representa una demostración, por su carácter creativo y por la necesidad de unificar diferentes conocimientos previos en el logro de su entendimiento. Así pues, la institucionalización del problema recaerá con un alto porcentaje en el docente, debido a que el alumno necesita una guía a seguir en la implantación del contenido.

Las técnicas utilizadas (ver tabla 5.1.) en este subcampo de problemas se corresponden con las técnicas número 1, 2, 3, 4, 5 (si se quiere probar el Teorema inverso), 6, 7, 8, 9 y 10, con lo que el problema adquiere una proyección muy completa.

5.2.3. *Subcampo de problemas asociado al cálculo de la longitud de la hipotenusa y de los catetos en triángulos rectángulos*.

Este tipo de ejercicios (mera transcripción aplicación del resultado teórico del Teorema) serán considerados ejercicios de apoyo de cara al entendimiento satisfactorio de las connotaciones del objeto matemático.

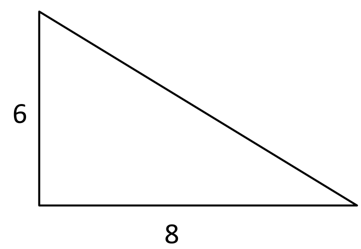
Elaboraremos dos *ejercicios tipo* al respecto, de implantación en el aula siguiendo una metodología de desarrollo del contenido por parte del docente (plena institucionalización en la aplicación de las técnicas desarrolladas). A continuación, mostraremos estos dos ejercicios que consideraremos aplicación directa del Teorema:

Ejercicio 5.2.3.1. “***Si los catetos miden 6 y 8 cm, respectivamente, en un triángulo rectángulo, ¿Cuál sería la medida de la hipotenusa?***”

Ejercicio 5.2.3.2. “***Si, en un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 15 cm y un cateto 9 cm, ¿Cuánto mide el otro cateto?***”

Vamos a resolver sendos ejercicios para mostrar tanto la resolución como la posibilidad de introducir la modificación de las técnicas empleadas.

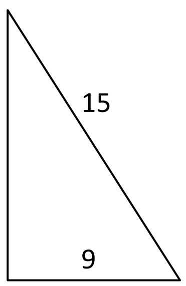
Respecto al ejercicio 5.2.3.1, la resolución sería la siguiente teniendo el siguiente rectángulo:



Aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene la siguiente igualdad:

$$hipotenusa^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow hipotenusa^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow hipotenusa = \sqrt{100} = 10\ cm$$

Respecto al ejercicio 5.2.3.2, la resolución se plantearía de la siguiente forma:



De esta forma, volvemos a aplicar el resultado principal del Teorema de Pitágoras, obteniendo lo siguiente:

$$15^2 = \ cateto^2 + 9^2 \rightarrow 225 = \ cateto^2 + 81 \rightarrow cateto^2 = 144 \rightarrow cateto = \sqrt{144} = 12\ cm.$$

Estas dos resoluciones planteadas de sendos ejercicios de aplicación son las planteadas por el docente y no existe un gran margen de modificación de resolución si bien el alumno puede alterar la prioridad de las operaciones, dada la propiedad asociativa y conmutativa de la suma de términos, bien despejando en la ecuación y realizar la potenciación o bien realizando primero la operación de potenciación y posteriormente el despeje en la ecuación tal y como se ha mostrado anteriormente.

No podemos asociar estos contenidos con la categoría de problema ya que se tratan de ejercicios de aplicación directa del objeto matemático tratado. Como se ha especificado en los subcampos previos, estableceremos otros ejercicios de apoyo que estén englobados dentro de este subcampo y que pertenezcan al mismo. Se corresponderán con los siguientes enunciados:

- *La base de una escalera se encuentra a 2 m. de la pared sobre la que se apoya. Si la escalera alcanza una altura de 3 m., ¿Qué longitud tiene la escalera?*
- *Hallar la altura de un triángulo equilátero de 18 cm. de perímetro (nótese que la altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos idénticos).*

Las técnicas asociadas para la resolución de este subcampo de ejercicios se corresponderán, según la tabla 5.1 con las números 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, y 10.

Cada vez que se avanza en la presentación de los diferentes subcampos se tiene que la institucionalización de las técnicas van a pasar a ser compartidas entre el docente y el alumno ya que el alumno está presupuesto a adquirir unas destrezas y estrategias que le permitan identificar el objeto matemático estudiado con la resolución de los diferentes ejercicios y problemas que se demande.

En cuanto a la metodología de implementación, este tipo de ejercicios tendrá una componente inequívoca de participación por parte del alumno, de forma que el docente pueda lanzar preguntas abiertas sobre aquello que considere oportuno. Se volverá a incidir en la necesidad de aplicar el Teorema en situaciones de contexto de triángulos rectángulos.

5.2.4. *Subcampo de problemas asociado al cálculo de áreas de las principales figuras planas de referencia.*

En este punto, será importante dejar reflejado el paso que existirá entre el paso del componente algebraico al componente geométrico ya que se demandará una visión espacial por parte del alumno para el logro de resolución de este subcampo de problemas. Sí se podrá considerar categoría de problema ya que queda patente la creatividad y las distintas metodologías de resolución de cada uno de los ejercicios puesto que el alumno puede entender la composición de cada una de las piezas de forma distinta que las de un compañero (es decir, fomentar la estrategia de triangulación que haga dividir un cuadrado en dos triángulos rectángulos idénticos o el área de un trapecio isósceles como la suma de dos triángulos rectángulos y un rectángulo).

De esta forma, visualizando los diferentes subcampos de problemas se constata que el componente algebraico de los mismos toma ventaja frente a los componentes geométricos y que las demostraciones algebraicas específicas en la resolución de los diferentes problemas cobran especial protagonismo.

Se entenderán como figuras planas principales aquellas que, junto con la circunferencia y círculo (y que no pasaremos a detallar puesto que se presupone al alumno con la capacidad de saber calcular el área de un círculo, o de un semicírculo, por ejemplo, cuando se aborde la extensión del Teorema desde un punto de vista geométrico – ver figura 5.7 - con la creación de puzles pitagóricos o bien mediante el software *Geogebra*), conforman los principales paralelogramos, amén del triángulo, eje vertebrador del objeto matemático tratado.

Así pues, destacaremos con especial relevancia el cálculo de áreas (y de otras propiedades como el valor del perímetro de dichas figuras) de las siguientes formas:

- Triángulos.
- Cuadrados.
- Rectángulos.
- Rombos.
- Trapecios.

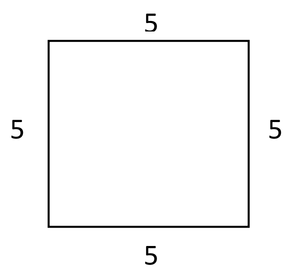
Esto enlaza con los contenidos del currículo de un curso de 1º de ESO donde se especifica su uso y la necesidad de conocer qué representa cada figura y sus principales características. Como venimos haciendo a lo largo del desarrollo de cada uno de los apartados, se propondrán dos *ejercicios base* de lo que será la metodología en la enseñanza-aprendizaje del cálculo de figuras planas, desde un punto de vista algebraico. Se tendrá un especial cuidado en discriminar entre la perspectiva geométrica, con la representación gráfica de la figura en cuestión, del punto de vista algebraico. Nótese la importancia que se deriva del conocimiento de la nomenclatura para un buen entendimiento de la figura así como el paso del álgebra a la geometría, para trabajar sobre la figura y llegado el caso, poder triangular la misma de cara a calcular el área total como composición de otras más pequeñas.

Así pues, nuestros dos ejercicios serán los siguientes:

<u>Ejercicio 5.2.4.1.</u> "***El perímetro de un cuadrado mide 20 cm. Calcula la diagonal***"

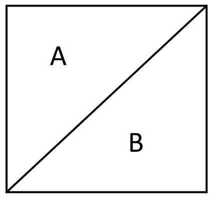
La resolución de este ejercicio tendrá, como en la mayoría de los mismos, dentro de esta tipología, el paso del componente algebraico a geométrico como herramienta fundamental para la realización exitosa del mismo.

Así pues, con los datos del enunciado (que en ningún momento dispone de una figura geométrica que lo acompañe) pasaremos al plano gráfico que facilite la comprensión sobre la tarea a realizar:

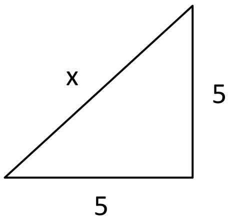


Como ya conocemos, el cuadrado se caracteriza por tener los cuatro lados iguales por lo que si el perímetro asciende a una cantidad de 20 cm, cada lado medirá 5 cm. El alumno procederá a la triangulación de dicho cuadrado con objeto de encontrar triángulos rectángulos que hagan posible la aplicabilidad del Teorema de Pitágoras.

Así pues, el cuadrado quedará dividido en dos triángulos rectángulos idénticos, que llamaremos A y B.



Elegiremos, por ejemplo, el triángulo B, para poder aplicar el Teorema de Pitágoras (el resultado sería similar si hubiéramos elegido el triángulo A) sobre B, triángulo rectángulo resultante. De esta forma se obtiene los siguiente:



Así pues, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras ya que tenemos un triángulo rectángulo. Nuestra hipotenusa será nuestra incógnita x, equivalente a la diagonal del cuadrado, que es lo que se nos pide en el ejercicio.

Así pues, resolveremos la siguiente ecuación:

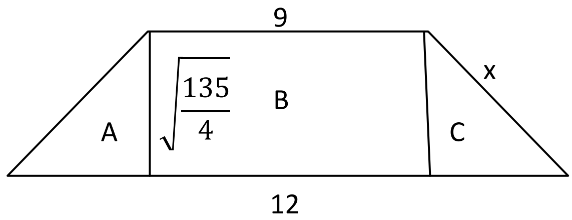
$x^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \rightarrow x = \sqrt{50}\, cm.$

Advertimos que el resultado sólo puede darse como una cantidad positiva, ya que no tiene sentido advertir una hipotética cantidad negativa (por el sentido físico de la magnitud). No existe posibilidad alguna de modificar la técnica inicial para resolver el ejercicio de una forma diferente a la que expondría el docente y que se ha mostrado anteriormente. Las técnicas utilizadas se corresponden con las siguientes, siguiendo la tabla 5.1: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 y 10. La adecuación de las técnicas y de las tecnologías está justificada por ser una aplicación directa del objeto matemático.

Ejercicio 5.2.4.2. "***Hallar el perímetro y el área de un trapecio isósceles de base menor 9 cm, base mayor 12 cm y altura con valor*** $\sqrt{\frac{135}{4}}$ ***cm***"

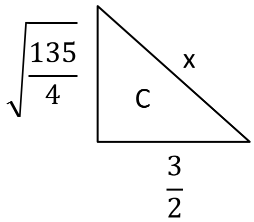
Volvemos a tener un enunciado puramente textual, con lo que el paso de dicho lenguaje al gráfico implica que el alumno va a ser capaz de identificar qué significa que un trapecio sea isósceles y colocar en el mismo sus bases así como su altura.

Dibujando el trapecio se obtiene la siguiente representación gráfica:



La búsqueda de este ejercicio concreto también está destinada a que el alumno sea capaz de ver la necesidad de que no todas las magnitudes dadas estén dispuestas con números naturales ni con cálculos que arrojen resultados exactos. Se potencia de esta forma la técnica número seis de la tabla 5.1.

Resolviendo este ejercicio, obtenemos que lo que tenemos que calcular para hallar el perímetro de la figura es la incógnita x. De esta forma el perímetro será la suma de x + x + 9 + 12 (medido en cm). Tanto los triángulos A y C (idénticos) son triángulos idénticos. Así pues, escogiendo, por ejemplo, el triángulo C tenemos esta figura:



De esta forma, aplicando Pitágoras tenemos que $x^2 = \frac{135}{4} + \frac{9}{4} = \frac{144}{4} = 36 \rightarrow x = 6\ cm$

Llegando a esta conclusión el perímetro se corresponderá con una longitud de 6 + 6 + 9 + 12 = 33 cm. Y en cuanto el área, aquí sí vamos a poder discriminar entre dos posibles técnicas a seguir, de forma que para este ejercicio sí existe modificación de la técnica. Podemos resolverlo bien aplicando directamente la fórmula del área de un trapecio (isósceles o no) o bien realizando un sumatorio de las áreas A, B y C de nuestra figura (dos triángulos idénticos y un rectángulo).

La primera opción muestra que el área de un trapecio es:

$$A = (\frac{Base\ mayor + \ Base\ menor}{2})xaltura$$

Y, consecuentemente $A = \frac{12+9}{2} \times \sqrt{\frac{135}{4}} = \ \frac{21\times 3}{2\times 2} \times \sqrt{15} = \frac{63}{4} \times \sqrt{15}\, cm$

Triangulando la figura y calculando el área como suma de las áreas que la componen tendremos lo siguiente:

$Atriángulo = \frac{1}{2} \times (base\ \times altura) = \frac{1}{2} \times (\frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{135}{4}}) \rightarrow Atriángulo = \frac{3}{8} \times \sqrt{135}\ cm^2$

Así, el área formada por los triángulos será $At = 2 \times Atriángulo = (\frac{3}{4} \times \sqrt{135})cm^2$

El área del rectángulo B será $Arectángulo = 9 \times \sqrt{\frac{135}{4}} = \frac{9}{2} \times \sqrt{135}cm^2$

Sumando las áreas obtendremos el área final que será la misma que la calculada a través de la formulación.

$$A\ total = \sqrt{135} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{2}\right) = \frac{63}{4} \times \sqrt{15}cm^2$$

Este ejercicio tendrá categoría de ejercicio respecto a la primera opción de resolución y categoría de problema respecto a la resolución para la segunda opción puesto que exige al alumno una triangulación de la figura propuesta, siendo esta técnica considerada como novedosa en el currículo de 2º de ESO.

Las técnicas empleadas en la resolución de este segundo ejercicio se corresponderán con los números 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 y 10. El docente quedará predispuesto a enseñar al alumno distintas destrezas de cómo tener la visión suficiente para poder despiezar las distintas áreas de una figura más compleja donde no sea evidente la partición de la misma en diferentes triángulos rectángulos, con lo que la institucionalización de la técnica será asumida por el mismo.

Otros ejercicios propuestos dentro de este subcampo (y que serán usados como ejercicios en la sesión número ocho de nuestra secuenciación didáctica fomentando el trabajo cooperativo en el aula) podrían ser los siguientes (con sus dibujos correspondientes):

- *Halla el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su lado desigual 9 cm.*
- *Determina el área de un rectángulo de base 7 cm y perímetro 24 cm.*
- *Calcula la medida de una de las diagonales de un rombo de área 30,1 cm^2, sabiendo que la otra diagonal mide 7 cm.*
- *Obtén el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 10 cm y su lado desigual mide cuatro unidades más que los lados iguales.*

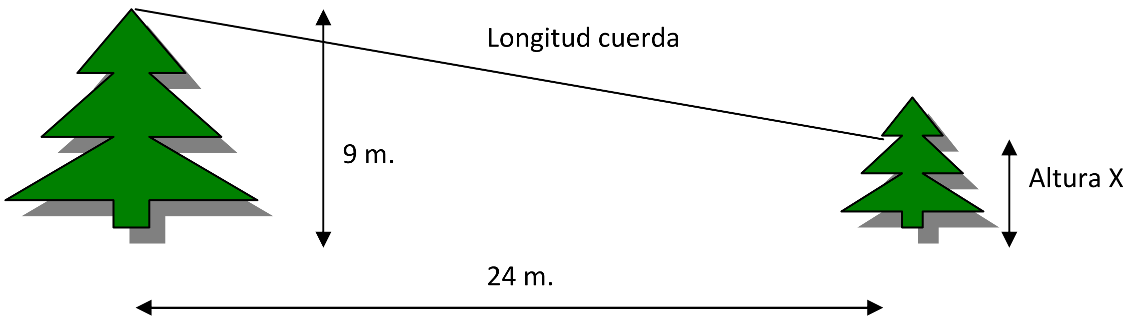
5.2.5. *Subcampo de problemas asociado a problemas de investigación y aplicación de las matemáticas en la vida cotidiana.*

En el desarrollo de las competencias demandadas por la Norma encontramos la necesidad de que el docente acerque la realidad matemática al contexto de aula. Es por ello que este subcampo de problemas se antoje fundamental para llevar a cabo tal efecto. Estos problemas (sí se puede categorizar así a los mismos porque exigen una dosis de creatividad y de lógica no aparente puesto que no son *ejercicios tipo* basados en la aplicación del objeto matemático) tendrán en su enunciado una componente algebraica y en muchas ocasiones vendrán referenciados con un pequeño esbozo gráfico que facilite la comprensión de lo requerido al alumno.

Llegados a este punto vamos a plantear diferentes problemas de esta índole, especialmente que dé pie a la discusión y a la participación del alumno (creación de *feedback* entre alumno y docente) donde se pueda ver un reflejo de cotidianidad, con la búsqueda del valor de una (o varias) variables desconocidas. El problema que resolveremos a continuación encaja en esta situación ya que se pide explícitamente la participación del grupo de referencia.

Ejercicio 5.2.5.1. "***Al alumno X (se busca a un alumno colaborativo en el aula para iniciar el contexto del problema y le preguntamos por su altura real para lograr captar la atención del aula y que el problema denote cierta flexibilidad en función de nuestra variable desconocida – altura del alumno -) le gustan los deportes de riesgo y se quiere tirar por una tirolina entre dos árboles separados 24 m. El alumno X estará atado a 9 m. de altura desde el primer árbol hasta que sus pies toquen el suelo una vez llegue al segundo árbol, ¿Cuánto tiene que medir, al menos, la cuerda que usaremos para lanzar al alumno X?***"

Procederemos a realizar un breve esbozo de la representación del problema.



La resolución será similar, siguiendo la misma metodología que por ejemplo, el ejercicio 5.2.3.1, aplicando de forma directa el Teorema de Pitágoras al triángulo formado por el cateto de longitud 24 metros, el cateto adyacente de longitud 9 menos la altura del alumno (por ejemplo, si el alumno mide 1,70 metros, este cateto medirá 9 -1,70 = 7,30 metros) y la longitud de la cuerda (lo demandado del problema) como hipotenusa de dicho triángulo.

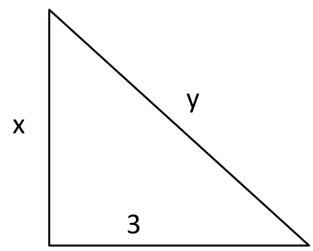
Las técnicas empleadas en la resolución de este tipo de problemas engloban las técnicas número 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, y 10. La institucionalización tendrá una componente de mayor peso en el docente que en el alumno precisamente por estar delante de una categorización de problema y no de ejercicio. La metodología de implantación se basará en una participación, como ya se ha dicho, del alumno en búsqueda de que estos mismos sean capaces de dar respuesta a la incógnita que plantea el problema. Asimismo, dentro de este subcampo y siguiendo las indicaciones de Blanco (1993) aquí se pueden incluir los denominados *problemas de investigación* que se caracterizan por encabezarse por afirmaciones como "Probar que…" ó "Demostrar si…". La diferencia entre el campo de problemas algebraico y geométrico será la inclusión (o no) componente gráfica de lo que se explica en el enunciado, siendo necesario por parte del alumno realizar un mayor esfuerzo, en este sentido.

5.2.6. *Subcampo de problemas asociado a problemas de índole histórica.*

Éste será el último subcampo tratado dentro del campo de problemas algebraico, el más extenso de los cuatro abordados en este TFM. Se abordarán problemas (misma categorización y justificación que el apartado anterior) que tenga componente histórico y que los alumnos puedan asociar a diferentes metodologías que tuvieron, por ejemplo, las civilizaciones Antiguas en el proceso de búsqueda de soluciones a problemas que se les fueran planteando.

Como ya se adelantó el cuarto punto de este TFM se abordará uno de los problemas planteados dentro del Tratado Chui-Suang (Antigua China) y que, aunque su resolución no pueda ser tratada en un contexto de 2º de ESO (al tener que resolver una ecuación cuadrática) sí pueda entenderse la proposición y la problemática planteada. Este problema se enuncia de la siguiente manera:

Ejercicio 5.2.6.1. "***Hay un bambú* (se aprovechará para hacer algún comentario al respecto sobre lo que es, anécdota de carácter lúdico incluida para buscar la atracción del alumno hacia el problema) *de diez pies de altura* (de forma similar, se realizará un breve comentario sobre las distintas unidades de medida empleadas por las diversas culturas), *que se ha roto de tal forma que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura del bambú*. Fíjese en la representación del problema mediante el siguiente gráfico**".



De forma que x+y=10 pies. Tal y como se presume, la resolución del problema pasa por resolver la siguiente ecuación cuadrática:

$$\boldsymbol{x^2 + 3^2 = (10 - x)^2}$$

La metodología en la búsqueda de solución de este ejercicio será paralela a la presentada en el ejercicio 5.2.3.1. Evidentemente, el alumno, como se ha comentado anteriormente, para nuestro curso escolar de referencia, desconoce el cómo resolver ecuaciones cuadráticas, y por lo tanto, al no tener las herramientas adecuadas, el docente experimentará una estrategia de *ensayo-error* con diversas longitudes (medidas en pies) que hagan ver que es posible que encajen (o no) con la resolución del problema. Se podrán asignar por ejemplo, diferentes valores y comprobar a través de una tabla, qué ternas son las adecuadas en la búsqueda de la solución. Las técnicas empleadas en la resolución de este ejercicio (siguiente, como de costumbre, la tabla de referencia 5.1.) son las siguientes: números 1, 2, 3, 4, 5 (durante el método de ensayo-error de búsqueda de soluciones nos encontraremos con posibles soluciones que al no cumplir la igualdad, lo encontrado se corresponderá con patrones de desigualdad), 6, 7, 8, y 10. Toda la institucionalización de las técnicas aplicadas corresponderá al docente debido a la novedad de lo presentado.

Otra posibilidad de acercar al alumno a la Antigüedad (en este caso correspondiente a la cultura egipcia) y a la repercusión del objeto matemático sobre la misma puede llevarse a cabo mediante el planteamiento del siguiente problema:

- *La altura de la gran pirámide egipcia de Keops es de 146,7 m (el docente puede proyectar una fotografía de la misma e incluso realizar una comparativa con otros edificios actuales para reflejar su importancia como monumento universal de referencia) y el lado del cuadrado de su base es de 230,4 metros. Calcula la diagonal del cuadrado de la base y la arista de la pirámide, representada en la fotografía 5.1.*

Fotografía 5.1. Pirámide de Keops.

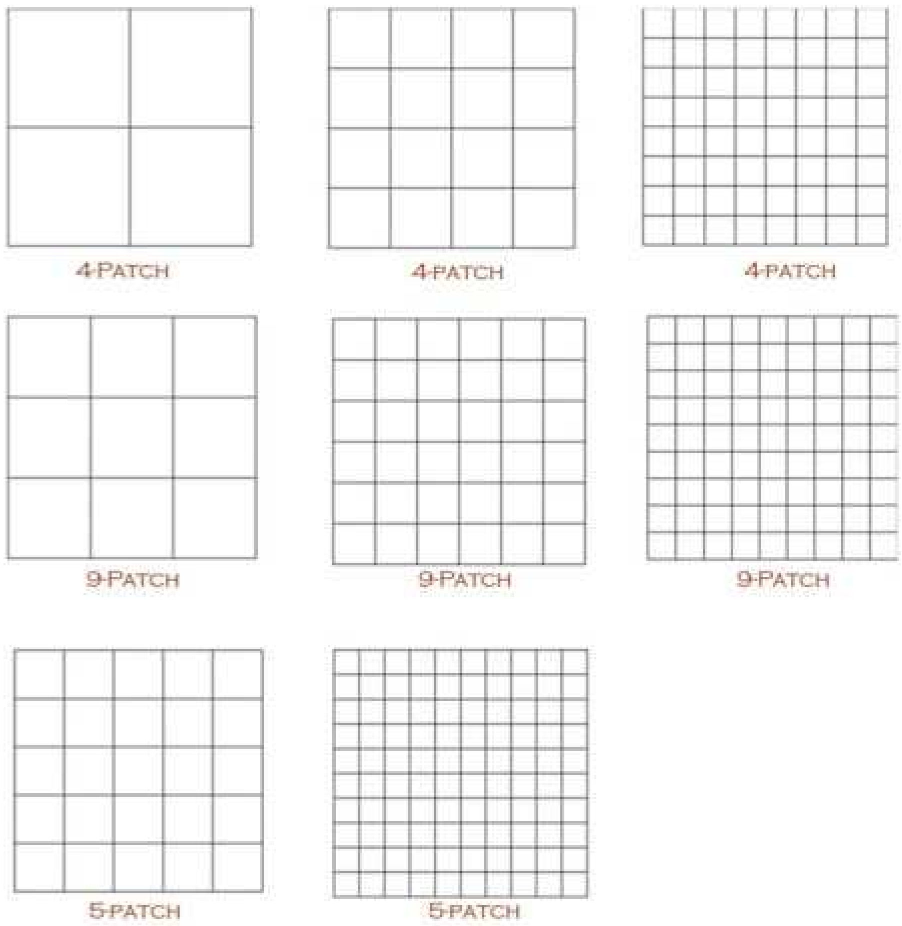
5.3. PROBLEMAS DE TIPO GEOMÉTRICO.

5.3.1. Subcampo de problemas de aplicación del objeto matemático en la creación de puzles pitagóricos.

Estamos ante un nuevo campo de problemas que centran sus esfuerzos en plantear determinados subcampos del mismo donde resulta necesario realizar una transcripción gráfica del problema planteado y que sin esa visión geométrica, dichos problemas no pueden ser abordados dentro de un contexto aritmético o algebraico.

En este subcampo, vamos a detallar la posibilidad de que el alumno realice un **puzle pitagórico** donde se constate la comprobación gráfica del Teorema así como la aplicación del inverso del Teorema para interiorizar el rango de aplicación del objeto matemático. Evidentemente, en este subcampo, el alumno trabajará con **áreas preconcebidas** ya que la raíz debe corresponderse con el valor geométrico.

Para ello el problema en cuestión consistirá en facilitar al alumno dos hojas cuadriculadas, como la que se adjunta en la fotografía 5.2.

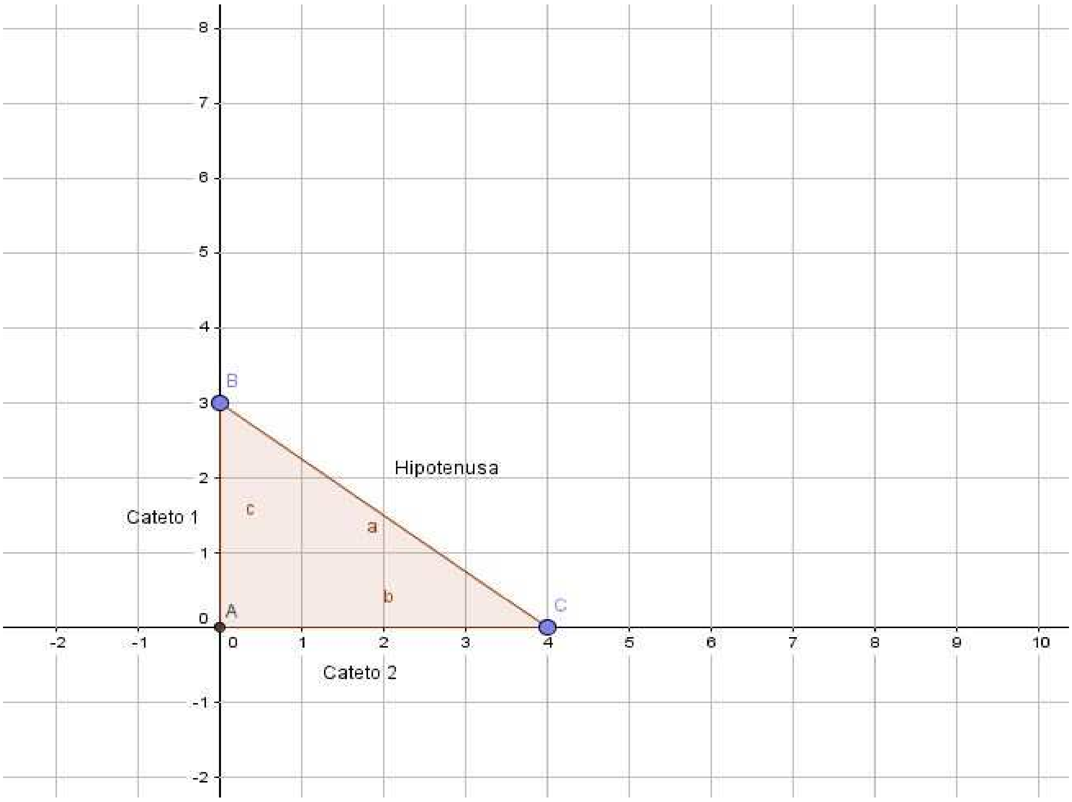


Fotografía 5.2. Diferentes plantillas para la creación de puzles pitagóricos.

Ejercicio 5.3.1.1. "**Con una de las plantillas de la fotografía 5.2, compón tres cuadrados que formen un triángulo rectángulo mediante lo que has aprendido sobre el Teorema de Pitágoras**"*.*

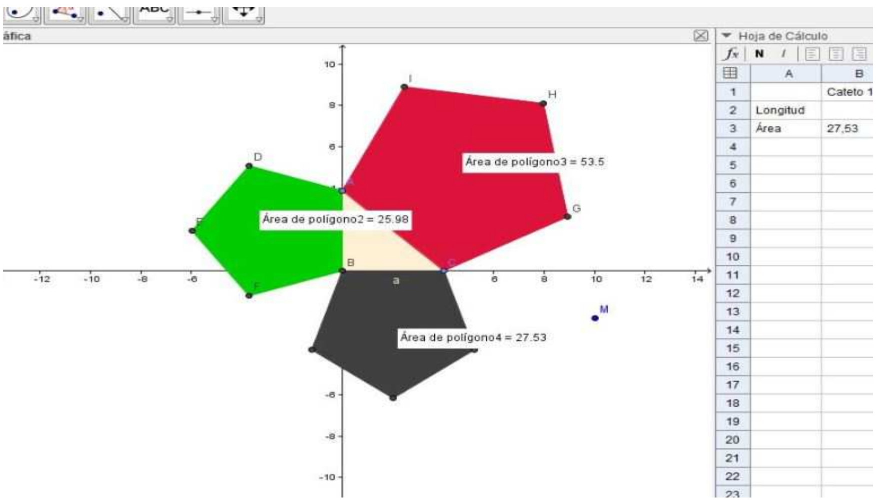
Ejercicio 5.3.1.2. Para el docente: "***El alumno, dadas tres áreas de polígonos regulares (incluyendo figuras semicirculares), aportadas de forma cualitativa, que se han construido previamente – sobre sendos catetos e hipotenusa – será capaz de discriminar, con esas áreas, la tipología del triángulo sobre el que se han construido (el resultado, por lo tanto, puede ser, o no, un triángulo rectángulo)***"*.*

Como se ha comentado, el docente aportará al alumno dos materiales de trabajo para realizar esta actividad. Respecto a la primera construcción, la regla de medición va a ser una herramienta imprescindible para realizar la actividad. Mostraremos, a continuación en formato fotográfico, una posible implementación de esta actividad. Nótese que se demandará al alumno la construcción de una figura regular respetando catetos e hipotenusas. Una posible modificación de la técnica inicial es que en lugar de que el alumno recorte las cuadrículas y que éstos hagan encajar, sobre los lados del triángulo, las mismas, de cara a construir las áreas geométricas y que la comprobación se realice en función de un análisis cuantitativo (esto es, medir la cuadrícula en lugar de utilizarla como componente puramente geométrico).



Fotografía 5.3. Estado inicial en la creación de un puzle pitagórico sobre una hoja cuadriculada

De esta forma, podremos tener resultados parecidos a este tipo de implementación como se muestra a continuación, donde la elección de la figura poligonal regular es indiferente de cara a la comprobación gráfica del Teorema (en este caso, se ha elegido construir pentágonos sobre las longitudes de los catetos y de la hipotenusa):



Fotografía 5.4. Ejemplo de puzle pitagórico (extensión)

De esta forma, como ya hemos comentado, tendremos dos formas de comprobar la veracidad del Teorema de Pitágoras en triángulos rectángulos, bien calculando numéricamente el área construida y viendo que la suma de las dos más pequeñas equivalen a la superior o bien calculándolo desde el punto de vista geométrico, con la inclusión de cuadrículas recordables y viendo que la suma de las cuadrículas que componen las dos áreas más pequeñas equivalen a la composición del mismo número y tamaño para el área más grande construida. Así, de esta forma, tenemos dos modificaciones de la técnica inicial, en aras de fomentar la creatividad y especialmente la investigación ante uno de los subcampos menos rígidos de los que se disponen.

Por último, como alternativa a este primer problema planteado y como medida auxiliar en la modificación de las técnicas, podemos plantear un puzle pitagórico específico, de fácil comprensión y con una clara vocación de comprobación gráfica directa y simple. El puzle pitagórico a formar será el que se representa en la siguiente fotografía.

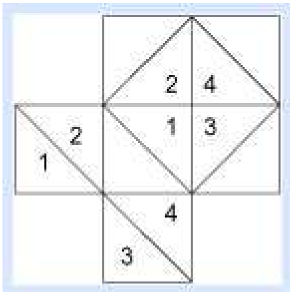


Figura 5.2. Puzle pitagórico

De esta forma el alumno identificará cada área de cada cuadrado construido sobre su lado con la composición de 2 ó 4 triángulos rectángulos que verificarán que la suma de las áreas de los cuatro que componen sendos cuadrados construidos sobre los catetos es igual que la suma de los cuatro que componen el cuadrado construido sobre la hipotenusa (triángulos 1, 2, 3 y 4).

Respecto al segundo problema planteado dentro de este primer subcampo geométrico, podemos añadir que tendremos dos posibles modificaciones de la técnica inicial de aplicación del Teorema inverso para hacer notar al alumno la no posibilidad de incluir otra tipología de triángulo que no sea rectángulo en el resultado. La primera modificación es aportar al alumno un valor numérico de área con lo que éste será capaz de, conocido el polígono regular, poder obtener el lado del mismo y poder identificar dicho lado con la proyección en el triángulo de comprobación (recordemos los primeros ejercicios planteados en el primer subcampo de problemas de tipo aritmético donde el alumno, conocidos los lados de un triángulo, podía clasificar al mismo en función de su tipología). La segunda modificación es la aportación, por parte del docente (único vertebrador en la institucionalización de la técnica) de determinadas figuras geométricas planas regulares proyectadas sobre una plantilla de forma que el alumno (es decir que no se da el área sino lo que se da es la construcción gráfica de la figura, de forma explícita) pueda calcular su área realizando mediciones sobre el papel y encajar dichas figuras en un hipotético triángulo rectángulo, para su comprobación. La inclusión de figuras básicas como triángulos equiláteros, semicírculos, pentágonos o hexágonos dará facilidad en el cálculo de áreas. Estas figuras serán recortables para que el alumno establezca las triangulaciones que considere oportuno en el logro de encajar las figuras y probar la suma de áreas requerida. Evidentemente, se crearán grupos de trabajo dependiendo de la flexibilidad del aula y habrá casos en los que el Teorema inverso se cumpla y otros en los que no, con el objetivo de crear un debate en el aula sobre la conveniencia en el uso y aplicación del objeto matemático tratado.

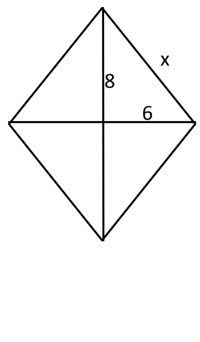
La metodología de implantación para ambos problemas será la creación de grupos de trabajo, en formato dinámico, que fomente la discusión y el trabajo grupal del grupo de alumnos. El profesor irá recorriendo los diferentes espacios de trabajo para coordinar la actividad y responder a las dudas solicitadas. Este subcampo de problemas fomentará la estrategia de resolución de los mismos usando las técnicas números 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 y 10, de las especificadas en la tabla 5.1.

5.3.2. Subcampo de problemas asociado al cálculo de áreas en figuras planas. Herramientas de triangulación.

Este subcampo de problemas (más bien de ejercicios) tiene una similitud muy fuerte con el subcampo 5.2.4, ya que la única novedad explícita se corresponde con que el enunciado no está extraído de un contexto sintáctico sino gráfico, requiriendo el mismo resultado: el cálculo de las principales características de las figuras planas de referencia.

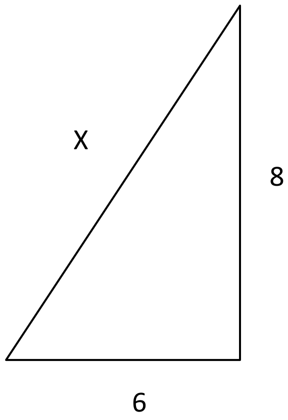
A modo de ejemplo, se propondrá el siguiente ejercicio a realizar en el aula:

Ejercicio 5.3.2.1. "***Calcula el área y el perímetro del siguiente rombo de la figura, conociendo las longitudes especificadas en la figura, mediante las diferentes técnicas que conozcas***".



Tenemos diferentes técnicas de resolución de este ejercicio. Conocida la diagonal mayor (16 cm) y diagonal menor (12 cm) el alumno podría hacer uso de la fórmula (conocida según el contexto que especifica el currículo de 1º de ESO) donde se puede hallar el área simplemente realizando operaciones matemáticas básicas (multiplicar sendas diagonales y dividirlo todo ello por dos). Evidentemente, la modificación requerida de esta técnica pasará por realizar una triangulación del rombo de forma que dividamos a éste en cuatro triángulos rectángulos idénticos sobre los que es posible hallar el valor de la incógnita x, y de esta forma poder hallar el perímetro de la figura.

Así pues, tenemos cuatro triángulos rectángulos similares que se corresponden con la siguiente figura representada:



Aplicamos el Teorema de Pitágoras para conocer el valor de la hipotenusa, usando la misma metodología que, por ejemplo, en el ejercicio 5.2.3.1, obteniendo un valor de $X = 10\ cm$. De esta forma el perímetro se corresponderá con $4 \times X = 40\ cm$.

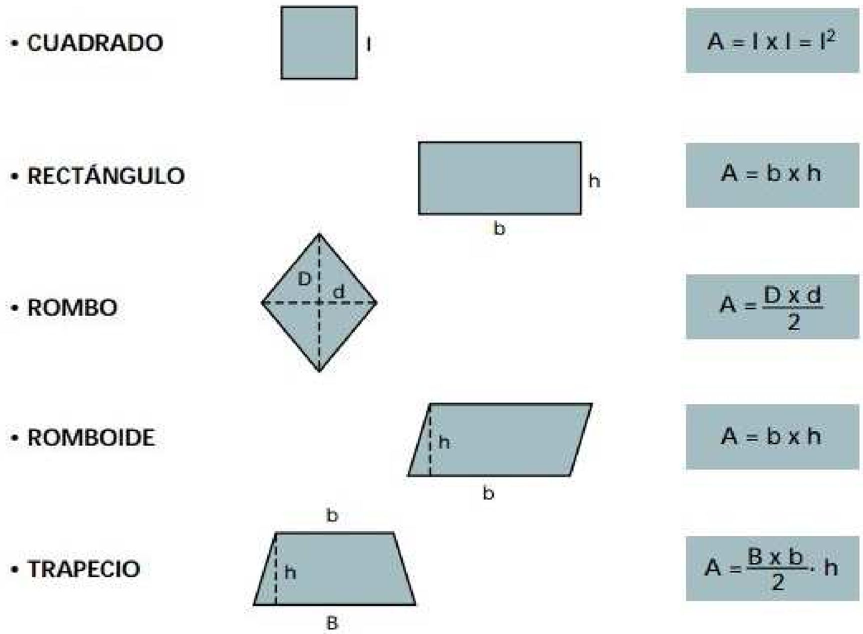
El área se corresponderá con multiplicar por 4 al área de cada uno de los triángulos rectángulos como el presentado arriba. Así pues:

$$Área\ triángulo = \frac{1}{2} \times base \times altura$$

Y de esta forma, $Área\ total = 4 \times Área\ triángulo = 4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 96\ cm^2$

Tal y como hemos visto aquí, lo que se ha seguido es una estrategia de triangulación, es decir, una descomposición de una figura más compleja en otras que se correspondan, de una forma más o menos fácil, con triángulos y así poder trabajar sobre los mismos el objeto matemático de referencia.

Se propondrán a los alumnos otro ejercicio de la misma tipología y metodología de resolución, aunque también convendría recordar (ya se hizo durante la sesión previa a la introducción del Teorema en el aula, como se ha explicado en este TFM) las principales áreas de las figuras planas de referencia. Básicamente, lo representaremos en la siguiente tabla esquemática.



Fotografía 5.5. Principales áreas de las figuras planas de referencia

El ejercicio complementario propuesto será el siguiente:

- *Calcular la altura del siguiente triángulo de la figura 5.3. sabiendo que sus lados miden a = 8 cm, b = 6 cm y c = 10 cm.*

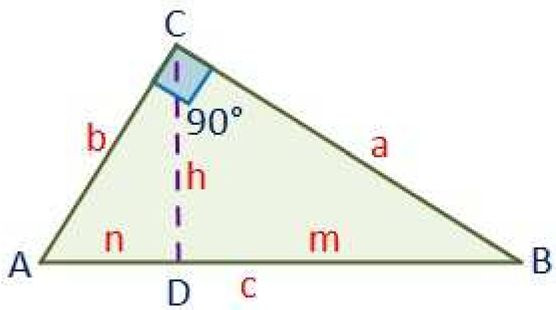


Figura 5.3.

La institucionalización y justificación de las técnicas estarán compartidas por el docente y el alumno, ya que se le considera con la suficiente destreza y capacidad de poder abordar este subcampo de problemas (de ejercicios) al disponer de la suficiente capacidad espacial y de las herramientas correspondientes para valorar la metodología de resolución. Las principales técnicas abordadas a la hora de resolver esta tipología de ejercicios serán las correspondientes a los números 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 (especialmente), 10 y 11.

5.3.3. Subcampo de problemas de índole histórico y de aplicación a las matemáticas de la vida real.

Realmente en este caso, tendremos una analogía con el subcampo de problemas 5.2.5 ya que la diferencia más notable será aquella en la que el enunciado del problema tendrá una componente geométrica que estudiar, y por lo tanto, se demandará por parte del alumno un mayor esfuerzo de interpretación..

Así pues, en este caso, vamos a ofrecer un problema de índole realista y que pueda ser utilizado por el docente para acercar las matemáticas del día a día, donde su utilidad quede plasmada y que pueda ser aprovechada como herramienta interdisciplinar entre asignaturas. El problema será el siguiente:

Ejercicio 5.3.3.1. "**Una persona se quería escapar desde lo alto de la Torre inclinada de Pisa con una cuerda de longitud 60 metros. Cuando tocó el suelo, esta persona se encontraba a 5 metros de la base de la torre. ¿Cuánto mide la pared de la Torre?**"*.*

La resolución de este ejercicio será similar a que se ha realizado en el ejercicio 5.2.3.1, de forma similar, sin posibilidad de utilizar otras técnicas ya que, por ejemplo, se considera desconocido, para este problema en concreto, el ángulo que mide la pared lateral con la perpendicular desde el punto más alto de la misma. La metodología correspondiente a la resolución de este tipo de problemas puede, como hemos comentado, hacer que el alumno se acerque a ciertos contextos reales que puedan fomentar su imaginación, motivación y sentido hacia lo que se está resolviendo. La justificación e institucionalización de las técnicas resulta similar a lo especificado en el anterior punto, siendo las técnicas estratégicas en la resolución de este tipo de problemas las asociadas con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

Otros problemas que pueden incluirse en este subcampo de problemas y que sería conveniente, bien a través del trabajo dentro del aula o bien como tareas programadas de trabajo autónomo en casa serán los siguientes que se proponen a continuación:

- *Se pretende colocar cableado navideño en una calle porticada de una ciudad. Si los postes sobre los que se sustenta ese alumbrado navideño miden 6 metros y están separados diez metros, y la estrella decorativa que se quiere colocar en el medio del cable suspendido mide un metro de diámetro, ¿Podrá pasar por debajo una carroza de cuatro metros de altura?*
- *Sobre una pared vertical de 16 metros de altura se coloca inclinada una escalera de 20 metros de longitud, ¿A qué distancia de la pared se encuentra la base de la escalera?*
- *Ana tiene un jardín rectangular, de 500 metros de largo y 300 metros de ancho, respectivamente. Se quiere hacer una piscina de forma circular de 100 metros de radio, ¿Cuánto terreno le queda para plantar césped?*
- *Dos aviones despegan de un aeropuerto al mismo tiempo y con direcciones perpendiculares. El primero lleva una velocidad de 600 km/h y el segundo de 800 km/h. ¿Qué distancia les separará pasadas dos horas? Si el alcance de su radio es de 500 km, ¿Podrán ponerse en contacto al cabo de media hora?*

5.4. PROBLEMAS DE TIPO TECNOLÓGICO (COMPONENTE DIGITAL).

El docente buscará el desarrollo de la competencia digital en el alumnado, tal y como muestra la LOMCE, debido a que se demanda un acercamiento al contexto de *metodología tradicional* al contexto de las nuevas tecnologías. Elaboraremos cuatro subcampos de problemas, en este sentido, cuya base será el manejo e implementación del *software Geogebra*. Se presupone que existen los recursos necesarios para poder llevar a cabo esta práctica, bien por el conocimiento del docente en estos sistemas digitales, bien porque se tienen aulas de referencia donde se dispone del material necesario para la incursión de este proyecto, y que, en el caso de este TFM, habrá una proposición en la secuencia didáctica de dos sesiones de cincuenta minutos donde se desarrollarán cada uno de estos cuatros subcampos de problemas que expondremos a continuación. Tendremos presente, a lo largo de este campo general de problemas al autor Manuel Sada (2008) ya que ha sido uno de los principales articuladores del uso y aplicabilidad de esta herramienta en el contexto de aula, destacando numerosas aportaciones en diversos ámbitos de las matemáticas como puedan ser problemas de optimización, trigonométricos, cónicas, fractales o el objeto matemático que nos ocupa, por ejemplo.

De hecho, el uso de este software y las dos sesiones programadas con los alumnos serán usadas para la elaboración de una de las preguntas requeridas en la prueba evaluativa final, destacando así su importancia dentro de la Programación Didáctica y de los contenidos que desarrollen la nueva competencia digital en el currículo escolar.

La metodología de implantación de los contenidos a seguir en los cuatro subcampos será similar para cada uno de ellos. El alumno recibirá una breve exposición por parte del docente en el manejo y en el recordatorio del resultado principal que arroja el Teorema de forma que la institucionalización de las técnicas quedará, en un primer momento supeditado a lo ofrecido por el profesor para, gradualmente, pasar al ámbito del alumnado ya que se fomentará, en este sentido, discusiones sobre qué es necesario para que funcione el objeto matemático (o no, resaltando el Teorema inverso) o qué cortes, por ejemplo, de las figuras formadas con la herramienta serán necesarios para realizar la demostración, como veremos en el punto 4.3.

El profesor aportará toda la ayuda necesaria para dar respuesta a los inquietudes de los alumnos, dejando, como se ha dicho, espacio para la creatividad, la investigación y el aprendizaje por descubrimiento. Las técnicas empleadas en la resolución de cada uno de los subcampos serán globales, de forma que se van a utilizar las doce propuestas en la tabla 5.1, siendo, por lo tanto, este campo de problemas uno de los más completos y a tener especialmente en cuenta a la hora de diseñar las sesiones didácticas correspondientes a nuestro objeto matemático (de ahí la necesidad de inclusión de un contenido específico como pregunta de examen, por ejemplo, preguntando mediante la inclusión de diferentes capturas de áreas cuadráticas realizadas con la herramienta *Geogebra* (software matemático informático libre creado por Markus Hohenwarter en 2001) ver qué tipo de triángulo se dispone en relación a esas áreas presentadas).

5.4.1. Subcampo de problemas asociados a la ***comprobación*** *del Teorema de Pitágoras utilizando la herramienta informática Geogebra.*

En este ámbito, se ofrecerá al alumno la posibilidad de comprobar (con una clara distinción entre lo que pueda ser una animación – o demostraciones dinámicas - y una comprobación) el cumplimiento del Teorema. En este caso, se procederá a explicar cada una de las comprobaciones aportadas que nos van a introducir en la idea de demostrar de forma más rigurosa el resultado. Las animaciones, ya realizadas, pueden ser muy interactivas y didácticas aunque pierden la creatividad y el componente intrínseco de investigación que el docente (y el alumno) puede llegar a demandar por lo que el libre manejo de la aplicación se antoja fundamental aún con el riesgo de cometer algún error en su uso, debido a la falta de soltura previa.

Aquí el docente realizará la siguiente pregunta al alumno para favorecer la discusión y el *feedback* entre alumno y profesor. No estableceremos relación sobre las posibles respuestas esperadas en cada uno de los casos debido a la amplitud de las respuestas y a que se trata de dar una visión general de lo que se podría requerir.

Ejercicio 5.4.1.1. “***¿Qué relación cumplen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo de la figura 5.4?¿Cómo es ese triángulo?***”.

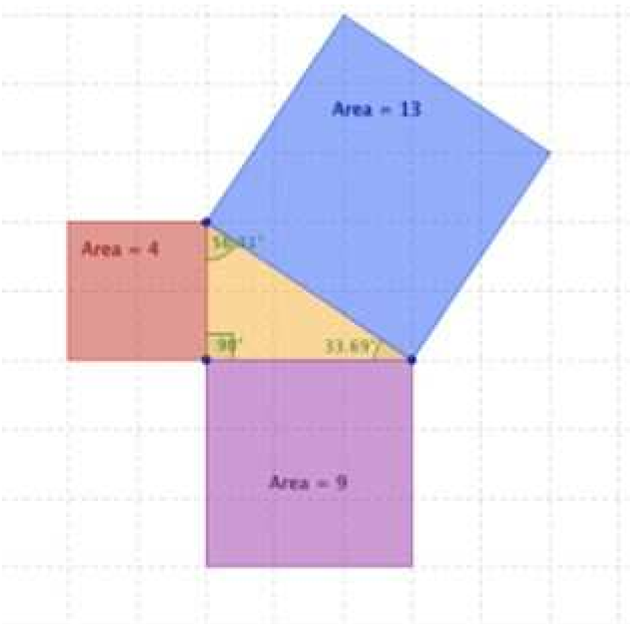


Figura 5.4.

Los alumnos deberán manejar con soltura las técnicas especificadas en la Tabla 5.1 para poder dar respuesta a lo preguntado. De esta forma, su conocimiento será pleno y la visión general que ofrece esta herramienta podrá ser utilizada con toda su amplitud, *5.4.2. Subcampo de problemas asociados a la no aplicabilidad del Teorema de Pitágoras utilizando la herramienta informática Geogebra.* ***Inverso del Teorema****.*

Es posible encontrar numerosas animaciones en las que comprobamos el funcionamiento del objeto matemático que nos ocupa pero, para lograr una mayor amplitud en los casos específicos donde se puede usar, lanzaremos al alumno estas preguntas, que se muestran a continuación en forma de ejercicio, para que puedan responder a las mismas y conocer que el resultado general no es válido para triángulos que no sean rectángulos (es decir, acutángulos u obtusángulos).

Ejercicio 5.4.2.1. *"**Enlazando con la pregunta anterior, ¿Qué ocurriría si el triángulo que se tiene no fuera rectángulo, como el mostrado en la figura 5.5?, ¿Podrías sumar las áreas que aparecen en dicha figura? Investiga de qué depende que el cuadrado del área verde sea mayor, menor o igual que la suma de las áreas de los otros dos cuadrados más pequeños**".*

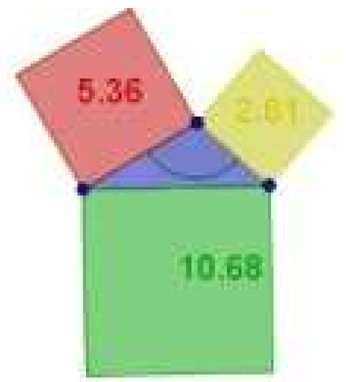
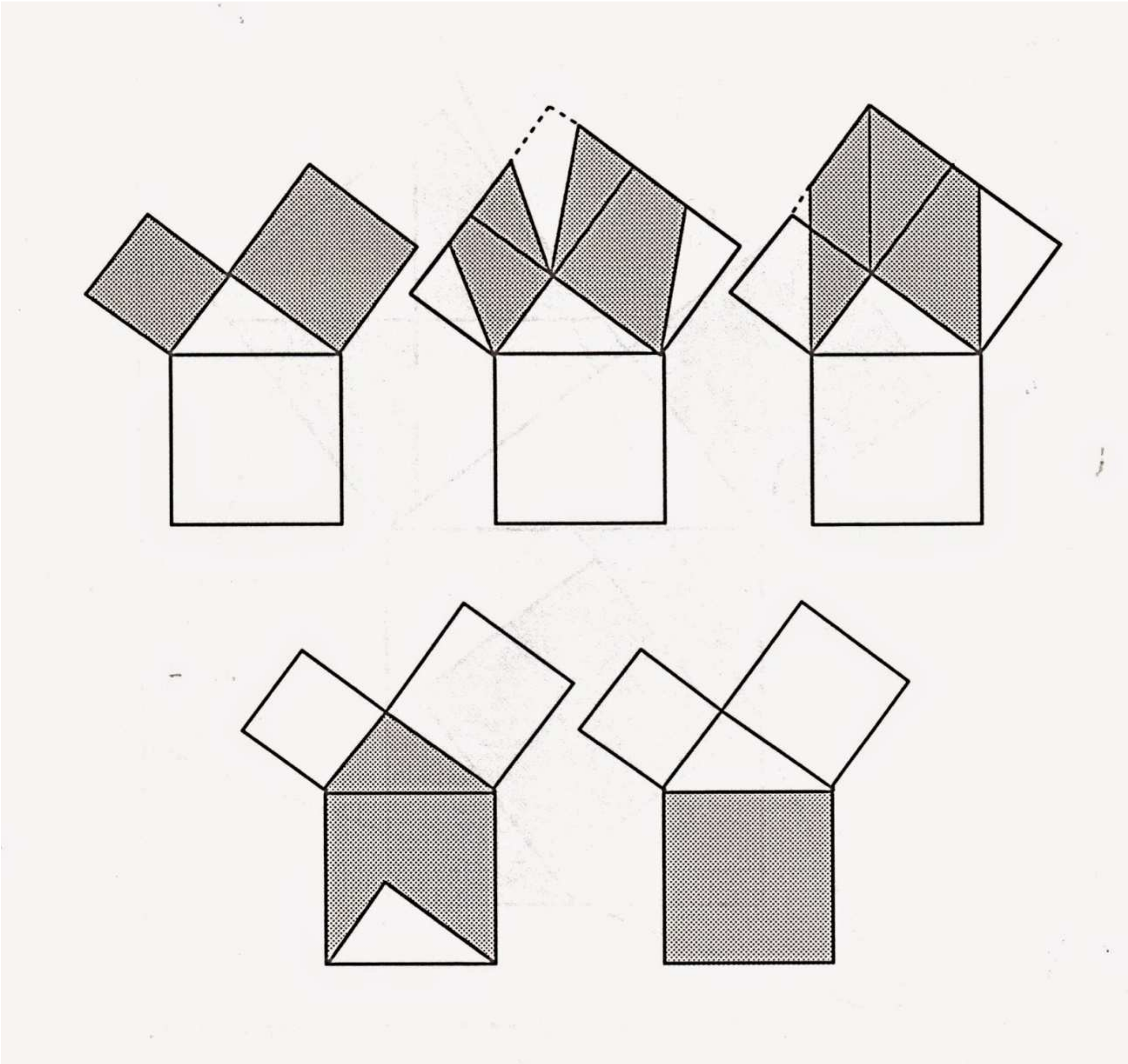


Figura 5.5.

El alumno responderá a esas preguntas con el afán de que sea capaz, de forma autónoma de ver que cuando la suma de las áreas no equivale al área mayor es porque el ángulo formado por los catetos no forma 90º. Gracias a la precisión de la herramienta se puede llegar a ángulos muy próximos al ángulo recto pero aún así, por ínfima que sea la cantidad que haga que no se cumpla el Teorema, el alumno será capaz de ver esta evidencia.

5.4.3. Subcampo de problemas asociados a la **demostración** *del Teorema de Pitágoras.*

Como ya hemos comentado en apartados precedentes, el Teorema de Pitágoras resulta ser el Teorema con más demostraciones a lo largo de la Historia de las Matemáticas. Se ha hablado de diversas demostraciones con nombre propio pero se elegirá en este caso la demostración de **Pappus** para realizar mediante una animación correspondiente el requerimiento del alumno de que investigue, moviendo la animación a su antojo (vía *punto cursor*) y razone qué se puede decir de los diferentes cuadriláteros que van apareciendo durante el uso de la interacción (esto podría llegar a ser catalogado como ejercicio 5.4.3.1) y de los diferentes cortes que aparecen a lo largo del manejo viendo qué es necesario que se cumpla para darlo forma.



Fotografía 5.6. Diferentes pasos a seguir en la Demostración de Pappus.

*5.4.4. Subcampo de problemas asociados a la **extensión** del Teorema de Pitágoras.*

En este caso, como ya se ha visto durante el campo de problemas geométrico, se probará la aplicabilidad del Teorema para diversas figuras planas que no sean siempre cuadrados. Con ello se pretende que el alumno conozca otras vertientes y la flexibilidad que se ofrece a la hora de probar el resultado final. En este caso, se trabajará siempre sobre triángulos rectángulos. Se elegirán dos tipologías de figuras planas para extender el Teorema: pentágonos regulares y semicírculos, de forma que plantearemos sendas preguntas a nuestro grupo de referencia de 2º de ESO:

Ejercicio 5.4.4.1. "***Investiga de qué depende que el área del pentágono rojo de la figura 5.6 sea mayor, menor o igual a la suma de las áreas de los otros dos. ¿Encuentras alguna relación entre la figura y el Teorema de Pitágoras?***".

Ejercicio 5.4.4.2. "***¿Y en la figura siguiente (Figura 5.7) podrías decir lo mismo?***

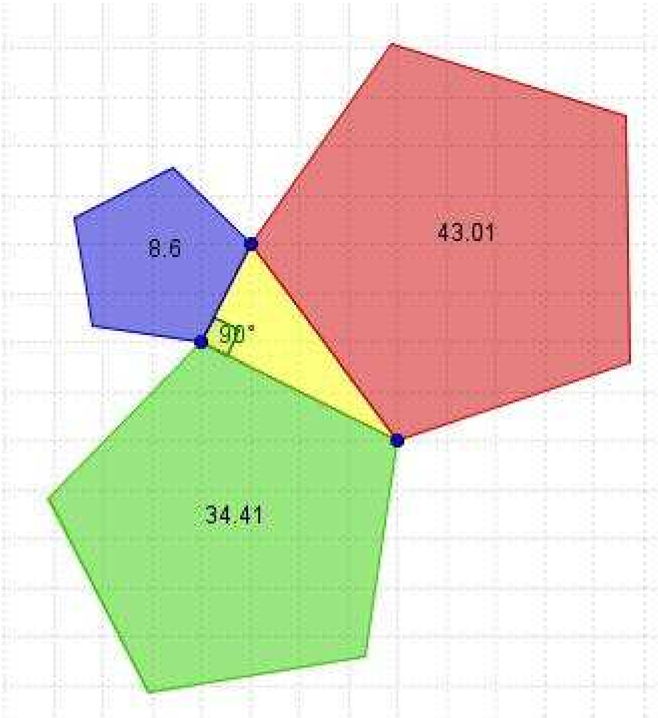


Figura 5.6. Extensión del Teorema de Pitágoras

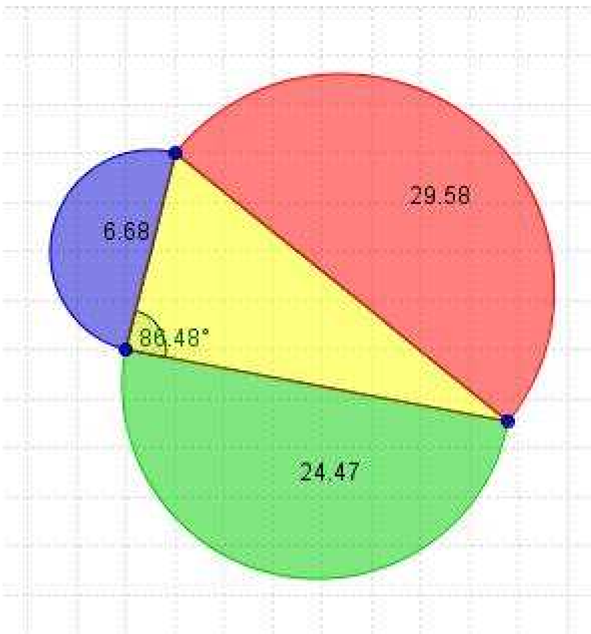


Figura 5.7. Extensión del Tº Pitágoras

Así pues, el alumno podrá caer en la cuenta de que la comprobación del Teorema no es propiedad exclusiva de áreas cuadráticas y, evidentemente, al conocer las connotaciones del Teorema inverso, es posible generalizar la figura triangular en toda su amplitud para que el alumno investigue sobre la conveniencia o no de la aplicación del objeto matemático que nos ocupa.

Una vez finalizando el estudio de los diferentes campos de problemas encontrados a lo largo de un curso de matemáticas de 2º ESO en el desarrollo y aplicación del Teorema de Pitágoras, podemos resaltar que en numerosas ocasiones se tiende hacia una componente algebraica, perdiendo la componente geométrica en lugar de compatibilizarla con la anterior.

También me gustaría comentar que para lograr una fijación real de los conceptos adquiridos y de las destrezas requeridas es necesario reforzar el trabajo de aula con tareas específicas de cada uno de los subcampos de trabajo como herramienta de trabajo autónomo del alumno en casa. Es por ello que se han añadido ejercicios y/o problemas auxiliares a lo largo de este quinto apartado del TFM con esa intención.

La implementación del objeto matemático, como se ha comentado, con la incorporación de las TIC´s puede lograr un efecto enriquecedor a la vez que motivador del alumno en el aula ya que su práctica puede resultar novedosa para romper con la metodología tradicional *de tiza y pizarra*.

Por último, antes de incluir una breve tabla descriptiva que aglutine el resumen de lo establecido en esta quinto apartado de forma resumida, pasaremos a concluir que la descripción de los cuatro campos de problemas planteados tienen cabida en la clasificación realizada por Blanco (1993) sobre los diferentes campos de problemas que aparecen (ocho en total), en general, dentro de una asignatura de matemáticas.

Es por ello que, por ejemplo, aparecen problemas de **reconocimiento** (con la demanda del docente acerca de la nomenclatura de las principales características de un triángulo), problemas de **repetición** (como todos los referenciados por similitud al ejercicio 5.2.3.1), de **traducción** del contexto matemático a las matemáticas de la vida real (uso de las *ternas pitagóricas* como herramienta de apoyo en problemas actuales), problemas de **mezclas** (aquellos que conjugan la componente algebraica y geométrica), problemas relativos a **investigación matemática** (probar por ejemplo, que el Teorema de Pitágoras es válido para cualquier triángulo), problemas derivados de **situaciones reales** (problema de la *tirolina*), problemas relativos a **puzles** (creación de un puzle pitagórico, de forma *manua*l o a través de *Geogebra*) y problemas con **componentes históricos** (problema del bambú en la Antigua China).

A continuación, pasaremos a mostrar en formato de tabla la relación existente entre los campos de problemas planteados, los subcampos de problemas asociados a los mismos, los ejercicios propuestos y las técnicas a utilizar en cada uno de los mismos (siguiendo como referencia aquellas técnicas mostradas en la tabla 5.1).

CAMPO PROBLEMAS	SUBCAMPO	EJERCICIO	TÉCNICAS
1	5.1.1	5.1.1.1	1,2,4,5,7,10
1	5.1.1	5.1.1.2	1,2,4,5,7,10
1	5.1.1	5.1.1.3	1,2,4,5,7,10
1	5.1.2	5.1.2.1	1,2,4,5,7,10
1	5.1.2	5.1.2.2	1,2,4,5,7,10
1	5.1.2	5.1.2.3	1,2,4,5,7,10
1	5.1.3	5.1.3.1	1,3,5,7,10
2	5.2.1	GENERAL	2,6,8,9
2	5.2.2	GENERAL	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
2	5.2.3	5.2.3.1	1,2,3,5,6,7,8,10
2	5.2.3	5.2.3.2	1,2,3,5,6,7,8,10
2	5.2.4	5.2.4.1	1,2,3,5,6,7,8,9,10
2	5.2.4	5.2.4.2	1,2,3,5,6,7,8,9,10
2	5.2.5	5.2.5.1	1,2,3,5,6,7,8,10
2	5.2.6	5.2.6.1	1,2,3,4,5,6,7,8,10
3	5.3.1	5.3.1.1	1,2,3,4,5,7,8,9,10
3	5.3.1	5.3.1.2	1,2,3,4,5,7,8,9,10
3	5.3.2	5.3.2.1	1,2,3,5,6,7,8,10
3	5.3.3	5.3.3.1	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
4	5.4.1	5.4.1.1	TODAS
4	5.4.2	5.4.2.1	TODAS
4	5.4.3	5.4.3.1	TODAS
4	5.4.4	5.4.4.1	TODAS
4	5.4.4	5.4.4.2	TODAS

Tabla 5.2. Cuadro-resumen campo problemas y técnicas establecidas

6. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma.

6.1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.
6.2. Establece una duración temporal aproximada.

6.1. INDICA LA SECUENCIACIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS EN LOS APARTADOS ANTERIORES.

En este apartado acudimos a la Norma para conocer qué tipo de finalidad se persigue, desde el punto de vista del currículo, con el campo de problemas y ejercicios para un curso de 2º de ESO. El currículo expresa, de forma directa, que las actividades que se buscan tienen que tener tres finalidades: una <u>formativa</u> (donde el alumno desarrolle capacidades de carácter general, como clasificar, generalizar, estimar, abstraer o argumentar) con un desarrollo explícito de las capacidades de razonamiento lógico, deductivo, analítico o analógico; otra <u>funcional</u>, dando una respuesta de las matemáticas a situaciones de la vida cotidiana y por último, una finalidad <u>instrumental</u>, con un desarrollo y formalización de ciencias experimentales, tecnológicas y sociales.

Así pues, la mayor parte de las secuencias de actividades propuestas en este apartado tendrán un marcado carácter formativo (aunque en este sentido se puede generalizar ya que cualquier actividad tendrá intrínseco dicho carácter), si bien existirá un grupo de problemas y/o ejercicios que marquen el espíritu funcional (análisis de problemas reales, que podemos encontrarnos en nuestro día a día). El ámbito instrumental estará representado, por ejemplo, con las dos sesiones llevadas a cabo mediante el software matemático (herramienta *Geogebra*) que facilite la comprensión y el espíritu crítico del alumno.

Así pues, vamos a establecer una secuencia concreta de actividades, valorada en **nueve** sesiones de trabajo, en el desarrollo de nuestro objeto matemático a tratar, que explicaremos a continuación, para posteriormente realizar una tabla-resumen donde queden especificados tanto la duración como los contenidos asociados a cada sesión y que enlazan con el apartado anterior relativo al campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas:

- **Sesión Nº 1**: *Prueba inicial de contenidos. Corrección. Recordatorio de la nomenclatura durante la propuesta didáctica.*

  Como se ha especificado, no ocupará toda la sesión de trabajo ya que, una vez finalizada ésta se procederá a la corrección de la misma, con especial hincapié en la nomenclatura a realizar, teniendo unos minutos específicos para recordar esta tarea. Se requerirá por parte del alumno (trabajo de observación de cara al docente) qué puntos de la prueba han sido de especial dificultad para el grupo de referencia. El docente tendrá libertad para reestructurar los contenidos si así fuera necesario, por causa de fuerza mayor ante una falta de base sólida de contenidos. Vamos a presuponer que esta carencia no aparece, por lo tanto.

- **Sesión Nº 2**: *Creación de puzles pitagóricos. Composición de áreas cuadráticas en la formación de triángulos. Clasificación de triángulos.*

  Durante esta sesión el alumno dispondrá de herramientas gráficas, en el aula de referencia, que le ayudarán en la construcción de puzles pitagóricos según el campo de problemas 5.3 (subcampo 5.3.1). Esta primera aproximación se realizará de forma geométrica puesto que puede resultar más fácil en cuanto a la visualización de lo demandado. Se usará una plantilla cuadriculada recortable y una regla de medición. No todos los alumnos dispondrán de las mismas figuras a implementar sino que se puede reorganizar la clase en grupos de *alumnos expertos* que trabajen sobre una figura concreta y determinada. Así algunos resultados coincidirán y otros no, con el objetivo de generar un **debate** y una **puesta en común** sobre lo acontecido ya que no se conoce el resultado teórico de lo que ocurre, todavía. La metodología a llevar a cabo se realizará mediante una explicación oral del docente, con la participación del alumno cuando éste lo considere oportuno, con objeto de mejorar el *clima social* del aula (ya que, con este tipo de sesiones se busca una estrategia de choque frente a la *metodología tradicional*) y a favor de la lucha contra la posible falta de interés del grupo de referencia. Esta tónica será general a lo largo de todas las sesiones. Como ya se ha especificado en el campo de problemas, los alumnos realzarán un puzle pitagórico, durante esta sesión, de forma manual, con los recursos ofrecidos por el docente y que conllevará la comprobación del Teorema, así como del Teorema inverso, sin que el alumno sea consciente de que lo que realmente está aplicando es el resultado teórico que conocerá de forma expresa en la cuarta sesión. El docente puede realizar alguna breve introducción de la representación llevada a cabo por el alumno.

- **Sesión Nº 3**: *Manejo del software informático Geogebra. Comprobación digital de lo realizado de forma manual en la segunda sesión. Comprobación de los contenidos. Visualización de animaciones.*

  Con esta sesión, buscamos una mayor interactividad por parte del alumno. Se creará un espacio de trabajo en el aula de informática en el Centro Educativo de referencia. Se utilizará el software *Geogebra*, de fácil manejo, para fijar lo aprendido hasta la fecha y unir la competencia matemática y digital, demandadas por el currículo escolar, utilizando y manejando las TIC´s. Con esta actividad lo que se realizará será la creación de un puzle pitagórico, de la misma forma que se realizó durante la sesión previa (se intentará fomentar el uso de figuras cuadráticas sobre los lados de los triángulos obtenidos ya que la extensión del Teorema se tratará en la sesión número siete). Los alumnos se sentarán por parejas frente a un ordenador, si la disponibilidad del aula lo permite, y trabajarán realizando un puzle pitagórico y un contraejemplo para fomentar el inverso del Teorema (obteniendo triángulos acutángulos y obtusángulos), sin que el alumno sea consciente de que está aplicando el objeto matemático que nos ocupa sino que tome esta dinámica como un juego de descubrimiento y exploración inicial. El alumno podrá corroborar, de forma personal, grupal e interactiva, la solución de la sexta pregunta de la prueba inicial llevada a cabo durante la primera sesión. Se busca esta primera sesión informática para extender lo discutido sobre el papel, en la segunda sesión.

Sesión Nº 4: *Introducción teórica (formal) del Teorema de Pitágoras. Clasificación del triángulo en función de la longitud de sus lados. Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, conocidos los catetos.*

Durante esta sesión, el alumno tendrá la posibilidad de conocer el resultado teórico del Teorema. Se propondrá una serie de ejercicios del campo de problemas aritmético de forma que el alumno sea capaz de realizar de forma cuantitativa lo que comprobó gráficamente sobre el papel (bien a través de figuras cuadráticas o bien a través de otra serie de figuras poligonales regulares planas caracterizadas por una determinada longitud o área. Para finalizar la sesión, se propondrá un ejercicio de aplicación directa del objeto matemático que consistirá en introducir uno de los lados del triángulo (en este caso la hipotenusa) como variable para trabajar con incógnitas.

- **Sesiones Nº 5**: *Introducción histórica del Teorema (Teoría). Aplicación de problemas de índole histórica y de aplicación de las matemáticas a la vida cotidiana.*

  Durante esta sesión, el docente elaborará un breve discurso histórico que haga ver al alumno las connotaciones que el Teorema de Pitágoras ha tenido a lo largo del tiempo, resaltando las principales Antiguas Civilizaciones que han hecho uso del mismo. Se desarrollará el ejercicio 5.2.6.1 catalogado como ejercicio de componente histórico por aparecer en antiguos Tratados de la cultura china, como se comentó en el apartado correspondiente. Asimismo, se abordarán tanto el campo de problemas algebraico y geométrico en la implantación de los contenidos, y que acerque el contexto de las matemáticas a la vida real, como se especificará en la Tabla 6.1. Se propondrá una batería de ejercicios de cara al trabajo autónomo en este sentido y para sendos subcampos de problemas que el docente escogerá entre los planteados dentro del apartado anterior.

- **Sesión Nº 6**: *Recordatorio de la formulación de las principales áreas de las figuras planas. Herramientas de triangulación. Cálculo de áreas de figuras planas basándose en el Teorema de Pitágoras.*

  En esta sesión se calculará, mediante métodos de triangulación, el área y perímetro de las principales figuras geométricas planas (incluyendo una breve explicación previa, inicial y teórica, a modo de recordatorio, sobre la circunferencia y el círculo, ya que se usará en el contexto de la extensión del

Teorema). Además de introducir las fórmulas explícitas correspondientes, se fomentará la originalidad y la creatividad por parte del alumno en la búsqueda de alternativas a la hora de encontrar la solución, basadas en la aplicación de la triangulación como herramienta y estrategia para resolver problemas. Se tendrá un especial énfasis en las figuras geométricas del *rombo* y del *trapecio*, como se refleja en los ejercicios seleccionados para esta sesión. Se incidirá en el acompañamiento de las unidades de medida para cada resultado obtenido.

- **Sesión Nº 7**: *Segunda sesión con el software informático Geogebra. Demostración y extensión del Teorema de Pitágoras.*

  Durante esta sesión, el alumno avanzará en los contenidos que ofrece esta herramienta digital. Mediante una animación (resulta especialmente interesante la dicotomía entre la demostración y la comprobación) interactiva el alumno va a poder manejar la demostración seleccionada por el docente, de las múltiples que existen. En principio, el alumno abordará la *demostración de Pappus*, tal y como se vio en el campo de problemas correspondiente. Asimismo, el alumno extenderá el resultado del Teorema de Pitágoras a otras figuras planas, estableciendo, varios grupos de trabajo para que cada grupo trabaje con una figura determinada (fundamentalmente polígonos regulares y/o semicírculos) aunque el docente quedará abierto a cualquier proposición y sugerencia por parte del alumno.

- **Sesión Nº 8**: *Actividad de trabajo colaborativo. Cálculo de áreas de figuras planas utilizando, exclusivamente, el Teorema de Pitágoras. Competición.*

  Esta sesión, justo con las dos sesiones en el aula de informática, se corresponderá con la sesión más interactiva de las llevadas a cabo a lo largo de las nueve sesiones de trabajo**.** Se destinará a realizar una actividad de trabajo cooperativo con una pequeña competición entre grupos de trabajo con la idea de trabajar lo aprendido durante la sesión número seis en el cálculo de áreas de figuras planas.

La metodología de actuación se recoge a continuación, referente a esta **actividad colaborativa.** Se busca realizar una pequeña competición en parejas que fomente el espíritu crítico, el diseño de un buen trabajo, la colaboración entre compañeros, la mejora del clima social y la gestión del tiempo (fundamental en esta actividad ya que uno de los principales problemas que se puede detectar, a priori, en el alumnado es la ansiedad creada ante una tarea que esté acotada temporalmente, es decir, fundamentalmente, un examen).

La actividad durará **50 minutos**, como se especificará en la tabla-resumen posteriormente añadida, y se establecerán **grupos de trabajo** asociados por **parejas** que deben ir elaborando el desarrollo de los ejercicios cuyo enunciado se plantee en la pizarra. Cada grupo de alumnos dispone de **siete minutos** para resolver cada uno de los problemas (cálculo de áreas). El protocolo de actuación es el siguiente: el profesor expone y redacta el enunciado en la pizarra; Una vez aclaradas todas las dudas surgidas, se pone el cronómetro en marcha y se da paso al trabajo colaborativo de **cada pareja**; Los grupos van levantando la mano cuando consideran que han resuelto completamente el ejercicio; El profesor se acerca a la mesa y constata y si efectivamente está desarrollado en su totalidad y forma exitosa; El profesor establecerá un ranking con las parejas que más rápidamente han resuelto cada uno de los ejercicios. A los siete minutos el profesor, en la pizarra, borra el enunciado precedente y se comienza un nuevo ejercicio. Para la realización de la actividad se valorará, de forma vinculante, el hecho de que la pareja trabaje de forma coordinada y que sendos miembros realicen aportaciones. El hecho de establecer los grupos de trabajo, previamente, puede llegar a crear un **buen clima de trabajo** ya que el alumno se encuentra cómodo con su pareja de trabajo.

Esta tarea (o en definitiva, *juego*) se basa en el cálculo de áreas desarrollando de algún modo la implantación del Teorema de Pitágoras (no la aplicación directa de la fórmula de resolución, como comentamos en el encabezado). Ejercicios como el cálculo del área de un **triángulo escaleno**, el cálculo del área y el perímetro de un **cuadrado** conocida su diagonal, el área y perímetro de un **rombo** o el cálculo del área y el perímetro de un **trapecio isósceles** estarán presentes durante la dinámica, aunque la elección de estas figuras geométricas quedará supeditado a lo observado por el docente en el aula durante la sesión previa (número seis) a ésta, pudiendo variar dicha elección en función de las dificultades encontradas a lo largo de la explicación de los contenidos en la sesión número seis, previa a ésta. Se elegirán aquellas figuras propuestas en el campo de problemas correspondiente especificado en el apartado anterior.

- **Sesión Nº 9:** *Prueba evaluativa final. Examen.*

Los efectos (*soluciones teóricas esperadas*) que se buscan, y que el docente tendrá que evaluar al final de la implantación de este conjunto de sesiones, en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras son los siguientes:

- Fijación del **concepto teórico**.
- Conocimiento de la **nomenclatura** y posicionamiento en un ámbito geométrico.
- Creación de expectativas y búsqueda de soluciones **alternativas**.
- Aplicación del campo de problemas a un contexto de la **vida real**.
- **Motivación** extrínseca e intrínseca.
- Resolución **analítica** y **geométrica**.
- Aprendizaje **significativo** y autónomo.
- Creación de **propuestas** e interactividad en el aula.
- Uso de las **nuevas tecnologías** en el desarrollo de dicho campo de problemas.

6.2. ESTABLECE UNA DURACIÓN TEMPORAL APROXIMADA.

La secuencia didáctica planteada tendrá una duración de nueve sesiones de cincuenta minutos cada una. De forma más concreta, pasaremos a concretar cada una de las mismas, en forma de tabla-resumen que clarifique cómo va a ser este reparto temporalmente. Asimismo, conjugaremos los ejercicios y/o problemas del apartado anterior relativo al campo de problemas, técnicas y tecnologías, respetando la numeración y la clasificación adquirida. Por lo tanto, la tabla quedará establecida con la siguiente forma:

SESIÓN	CONTENIDO	EJERCICIO PROPUESTO	DURACIÓN
1	Prueba inicial	Conocimientos previos	30 min.
1	Prueba inicial	Corrección de la prueba	15 min.
1	CP 5.2 SCP 5.2.1	Teoría nomenclatura	5 min.
2	CP 5.3 SCP 5.3.1	E 5.3.1.1	20 min.
2	CP 5.3 SCP 5.3.1	E 5.3.1.2	30 min.
3	CP 5.4 SCP 5.4.1	E 5.4.1.1	25 min.
3	CP 5.4 SCP 5.4.2	E 5.4.2.1	25 min.
4	Teoría	Introducción Teorema de Pitágoras	10 min.
4	CP 5.1 SCP 5.1.1	E 5.1.1.1	10 min.
4	CP 5.1 SCP 5.1.1	E 5.1.1.3	10 min.
4	CP 5.1 SCP 5.1.2	E 5.1.2.1	10 min.
4	CP 5.1 SCP 5.1.2	E 5.1.2.3	5 min.
4	CP 5.2. SCP 5.2.3	E 5.2.3.1	5 min.
5	Teoría	Introducción histórica	10 min.
5	CP 5.2 SCP 5.2.6	E 5.2.6.1	15 min.
5	CP 5.2 SCP 5.2.5	E 5.2.5.1	10 min.
5	CP 5.3 SCP 5.3.3	E 5.3.3.1	15 min.
6	Teoría	Recordatorio área figuras planas	10 min.
6	CP 5.2 SCP 5.2.4	E 5.2.4.1	10 min.
6	CP 5.2 SCP 5.2.4	E 5.2.4.2	20 min.
6	CP 5.3 SCP 5.3.2	E 5.3.2.1	10 min.
7	CP 5.4 SCP 5.4.3	E 5.4.3.1	25 min.
7	CP 5.4 SCP 5.4.4	E 5.4.4.1	25 min.
8	CP 5.2	Trabajo cooperativo	25 min.
8	CP 5.3	Trabajo cooperativo	25 min.
9	Examen final	Prueba teórico-práctica	50 min.

Tabla 6.1. Cuadro-resumen cronología secuenciación (Leyenda*: CP = CAMPO DE PROBLEMAS, SCP = SUBCAMPO DE PROBLEMAS y E = EJERCICIO).*

Por último, me gustaría resaltar la creación de una bolsa de tiempo dedicado al trabajo autónomo en casa, despúes de cada sesión de trabajo, con objeto de asimilar lo aprendido y de ser usado como actividad de refuerzo.

Se elaborará una lista, que no se presentará a continuación debido a la flexibilidad del grupo de alumnos que el docente puede encontrarse durante la implantación de las sesiones de trabajo. Quedará a su juicio el grado de dificultad de los ejercicios demandados para este trabajo autónomo, estableciendo un objetivo realista y acorde con lo observado en el aula. De esta forma, a los 450 minutos de trabajo presencial establecidos en este apartado (nueve sesiones de cincuenta minutos cada uno) se estima la suma de 30 minutos por cada jornada de trabajo autónomo (esto es 150 minutos totales, a razón de cinco actividades propuestas) por lo que la suma total de lo propuesto en esta guía se corresponde con un total de 600 minutos, es decir, diez horas de trabajo..

Nótese, para finalizar, que el docente quedará abierto a cualquier proposición del alumno, bien durante el trabajo de aula o bien durante el proceso de tutorización del mismo.

7. Sobre la evaluación del contenido.

7.1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

7.2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

7.3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

7.4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Contendrá los siguientes apartados:

1. **Diseño** de una prueba escrita.
2. Aspectos del **conocimiento** sobre el **objeto matemático** de referencia.
3. **Presunción** en las **respuestas** dadas por el alumno.
4. **Criterios** de **calificación**.
5. **Gestión** de los **resultados** y **calificaciones** obtenidas.

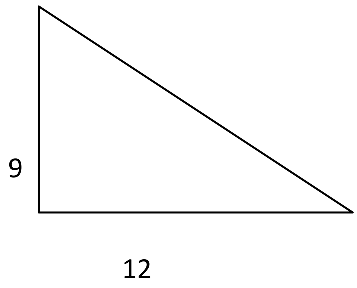
Así pues, iremos desarrollando punto a punto cada uno de estos aspectos, bajo el prisma de nuestro objeto matemático de referencia: **Teorema de Pitágoras** y **aplicaciones** en el **cálculo de áreas** dentro de un contexto de **2º de Educación Secundaria Obligatoria**.

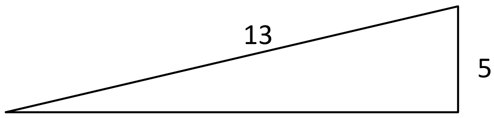
7.1. DISEÑA UNA PRUEBA ESCRITA (DE UNA DURACIÓN APROXIMADA DE UNA HORA) QUE EVALÚE EL APRENDIZAJE REALIZADO POR LOS ALUMNOS EN LA PROPUESTA DIDÁCTICA DEL TFM.

La prueba tendrá una duración de <u>cincuenta minutos</u> (duración se una sesión real en un Centro Educativo de referencia) y las preguntas de la misma se presentan a continuación, *acompañados de su puntuación* (sobre diez) correspondiente.

Finalmente no se ha optado por incluir un ejercicio relativo a la actividad llevada a cabo con la herramienta informática *Geogebra*:

<u>Problema 1</u> (2 puntos). Halla la **longitud** de los **lados desconocidos** (en centímetros) de los siguientes **triángulos rectángulos**:

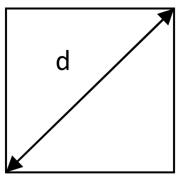




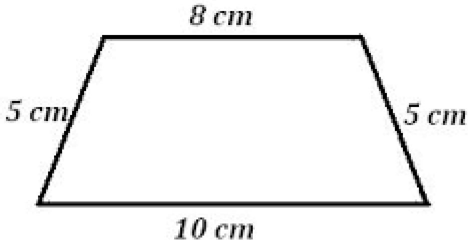
<u>Problema 2</u> (1,5 puntos). Determina si los siguientes triángulos, **conocidos los lados**, son **rectángulos**, **acutángulos** u **obtusángulos**:

a) a = 15 cm, b = 17 cm y c = 8 cm.
b) a = 10 dm, b = 8 dm y c = 5 dm.
c) a = 5 m, b = 10 m y c = 9 m.

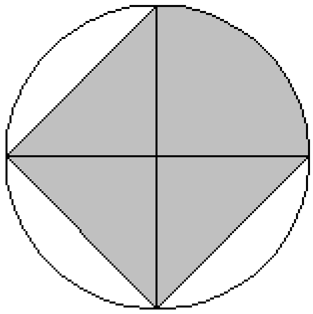
<u>Problema 3</u> (1,5 puntos). Calcular el **área** y el **perímetro** de un **cuadrado**, conociendo que su **diagonal** tiene un valor de d = 18 cm.



<u>Problema 4</u> (2 puntos). Conocido el siguiente **trapecio isósceles** de la figura, calcular el **perímetro** y el **área** del mismo.



<u>Problema 5</u> (3 puntos). Calcula el **área** y el **perímetro** de la parte sombreada, sabiendo que la **circunferencia** tiene un **radio** de 18 cm.



7.2. ¿QUÉ ASPECTOS DEL CONOCIMIENTO DE LOS ALUMNOS SOBRE EL OBJETO MATEMÁTICO PRETENDES EVALUAR CON CADA UNA DE LAS PREGUNTAS DE DICHA PRUEBA?

Entre otros aspectos:

- Señala los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías que evalúa cada pregunta.

- Señala cuales son las tareas principales objeto de la evaluación de cada pregunta, así como las tareas auxiliares específicas y generales.

- Señala con qué estándares de aprendizaje de la LOMCE se podrían relacionar cada pregunta de la prueba.

Así pues, respecto a esta apartado se tiene que explicar qué se ha pretendido con cada una de las preguntas. Evidentemente, se tratan de **ejercicios prácticos** que conlleven una aplicación del resultado teórico del Teorema de Pitágoras. Buscamos establecer una prueba que presente los contenidos de la misma *desde* un aspecto *más específico* (de aplicación directa) *a uno más general*.

Como se ha presentado, tenemos un **campo de problemas** (si bien sería más conveniente referirse a un **campo de ejercicios**, salvo la pregunta número cinco) donde queda patente lo explicado durante las sesiones teórico-prácticas de nuestro objeto matemático. Con la primera pregunta, *buscamos hallar* la hipotenusa y el cateto de sendos triángulos rectángulos; Con la segunda pregunta, buscamos clasificar los triángulos según su tipología en función de sus tres lados (pregunta de aplicación directa de los contenidos matemáticos establecidos para un curso de 2º ESO según el **BOA** nº 65); Con la tercera y cuarta pregunta buscamos calcular áreas de *dos figuras planas tipo* y con la quinta se busca demandar al alumno una **mayor originalidad** a la hora de resolver un nuevo problema de cálculo de áreas.

Respecto al campo de problemas (tareas), técnicas y tecnologías a tratar en cada pregunta, tenemos que las dos primeras tienen que ver con el **enfoque práctico** de las matemáticas mientras que las tecnologías se basan en el **discurso matemático** que interpreta a dicha práctica.

Vamos desarrollando pregunta a pregunta la explicación a lo demandado:

- **Pregunta Nº 1**:

La tarea consistirá en la resolución de una aplicación directa del Teorema de Pitágoras: hallar la hipotenusa conocidos los catetos y hallar la longitud de un cateto conocida la hipotenusa y el otro cateto, en sendos triángulos rectángulos. La técnica utilizada consistirá en aplicar el resultado del Teorema de Pitágoras (ya que se trata de triángulos rectángulos) así como de las *operaciones elementales* (sumas, restas, potencias y raíces cuadradas) y resolver ecuaciones de segundo grado. La tecnología utilizada será el propio de Teorema de Pitágoras como base teórica en la resolución del ejercicio.

- **Pregunta Nº 2**:

La tarea que aparece será la <u>clasificación de triángulos</u> en función de la longitud de sus lados (triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos). Como técnica, nuevamente volvemos a aplicar los resultados del teorema de Pitágoras así como de las operaciones básicas anteriormente presentadas (aunque aquí aparece el concepto de igualdad y desigualdad de ecuaciones). La tecnología utilizada será la teoría expuesta durante las sesiones teórico-prácticas de la asignatura de clasificación de triángulos, tanto desde el punto de vista geométrico como analítico, y que establece el currículo escolar para un curso de 2º ESO (precedente al curso en el que nos encontramos). Se asocia a la posibilidad de aplicar el inverso del Teorema.

- **Pregunta Nº 3**:

Nos encontramos con un ejercicio de aplicación práctica. La tarea consiste en buscar el área y el perímetro de un <u>cuadrado</u> conocida su diagonal. Evidentemente la técnica utilizada varía con respecto a las preguntas anteriores ya que este ejercicio (no puede considerarse problema) demanda un **análisis gráfico** en el cálculo de áreas. El alumno buscará triángulos rectángulos en la figura de forma que pueda calcular el lado del cuadrado y por ende, lo preguntado. La tecnología utilizada combinará el Teorema de Pitágoras (aunque la resolución a esta pregunta puede realizarse sin aplicar el objeto matemático, si bien se requerirá al alumno su uso) con el conocimiento del alumno de lo que implica la diagonal de un cuadrado así como el cálculo de su área y perímetro.

- **Pregunta Nº 4**:

En esta pregunta, similar a la tercera, el alumno se enfrenta a la tarea de calcular el área y el perímetro de un <u>trapecio isósceles</u> en un intento de llevar la teoría implícita en el Teorema de Pitágoras a la práctica. Las técnicas utilizadas conllevarán la necesidad de discriminar el área global de la figura en un sumatorio de áreas que el alumno sea capaz de calcular geométricamente el cálculo de dichas áreas y el empleo de operaciones básicas. La tecnología puede (y debe) corresponderse con la aplicación del resultado del Teorema de Pitágoras para conocer la altura del trapecio y el cálculo de áreas en rectángulos y triángulos o bien la aplicación del cálculo de área de un trapecio, si el alumno lo considera oportuno (no se penalizará la resolución del ejercicio según la metodología a resolver).

- **Pregunta Nº 5**:

Esta pregunta se corresponde con la pregunta *más abierta* de la prueba. La tarea consiste en calcular el área y el perímetro de la figura sombreada, conocido el radio de la circunferencia que la contiene. La técnica utilizada vuelve a englobar una **parte geométrica** y una **parte analítica** y tendremos que tener especial cuidado con el manejo de las operaciones elementales que implica la resolución de este problema. Nuevamente las tecnologías que acompañan al discurso matemático son el Teorema de Pitágoras y su aplicación en el cálculo de áreas en figuras planas, ángulos de la circunferencia así como los principales puntos y rectas *notables* de las circunferencias, junto con el área y perímetro de las mismas.

Señalaremos, a continuación, las **tareas principales** de referencia así como de las principales **tareas auxiliares específicas** y **generales** para cada una de las preguntas, si bien es cierto que muchas de ellas muestran *tareas similares* por el propio contexto de la pregunta:

Recordemos, brevemente, antes de analizar pregunta a pregunta lo que representa, una tarea principal y una auxiliar. Como **tarea principal**, entenderemos aquella que constituye claramente el objetivo principal de la calificación, es decir, la comprensión del alumno sobre el contenido matemático propio de un curso de 2º ESO. Respecto a las tareas auxiliares, éstas se clasifican en dos: **tareas auxiliares específicas** (las que juegan un papel instrumental para alcanzar la solución de un problema) y **auxiliares generales** (todo tipo de tareas matemáticas que el alumno ha realizado en los cursos precedentes, es decir, nuestra base será la experiencia y el currículo escolar). Estas tareas auxiliares generales pueden clasificarse en tareas de tipo algebraico, aritmético, geométrico, gráfico y/o de representación.

i. **Pregunta Nº 1**: La tarea principal es el cálculo de uno de los lados de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos. La tarea auxiliar específica es la aplicación del resultado del Teorema de Pitágoras y el saber que representa. Las tareas auxiliares generales son el manejo en operaciones elementales de suma, resta, potenciación y cálculo de raíces cuadradas, resolver ecuaciones de segundo grado, así como *elementos de nomenclatura* y gráficos.

ii. **Pregunta Nº 2**: La tarea principal es saber <u>clasificar un triángulo</u> en función de la longitud de sus lados. La tarea auxiliar específica vuelve a ser la aplicación del resultado del Teorema de Pitágoras y el conocimiento de que sólo es aplicable – en su igualdad – para triángulos rectángulos, así como de los resultados específicos para un resultado en triángulos acutángulos y obtusángulos. Las tareas auxiliares generales vuelven a ser las mismas que en la pregunta nº 1 junto con el conocimiento de lo que representa la **desigualdad** en una **ecuación** (aplicación inverso del Teorema).

iii. **Pregunta Nº 3**: La tarea principal es el cálculo del área y el perímetro de un cuadrado conocida su diagonal. Respecto a las tareas auxiliares específicas volvemos a obtener los resultados implícitos en el Teorema de Pitágoras así como su **demanda gráfica** (partición del cuadrado en dos triángulos rectángulos). Las tareas auxiliares generales serán las mismas que en la primera pregunta junto con el reconocimiento geométrico de lo que representa un cuadrado, sus elementos característicos (nomenclatura) y conocer el perímetro y el área de esta figura geométrica.

iv. **Pregunta Nº 4**: La tarea principal se corresponderá a aquella que exige el cálculo del área y el perímetro de un <u>trapecio isósceles</u>. La tarea auxiliar específica será la aplicación de, bien la partición de la figura geométrica en dos triángulos rectángulos más un rectángulo, bien en la aplicación de la fórmula directa del cálculo de área de un trapecio (aunque esta tarea se consideraría auxiliar general ya que dicho cálculo está englobado en un currículo de 1º de ESO). En todo caso, volvemos a tener una aplicabilidad del Teorema de Pitágoras en el cálculo de áreas. Las tareas auxiliares generales volverán a ser las mismas que en la tercera pregunta, especificadas en el conocimiento de lo que es un trapecio y de su clasificación (rectángulo o isósceles, por ejemplo).

v. **Pregunta Nº 5**: Volvemos a tener como tarea principal el cálculo del área y perímetro de **una figura plana**, aunque esta vez no se tiene una *figura al uso* sino un compendio de unas figuras geométricas determinada. La tarea auxiliar específica consistirá en saber aplicar conceptos como la simetría o el conocimiento de las principales características de una circunferencia. Como tareas auxiliares generales volvemos a tener las más relevantes: operatividad en el manejo de cálculos, relación de áreas, reconocimiento geométrico de la figura y categorización de puntos notables.

Por último, vamos a analizar qué **estándares de aprendizaje** de la **LOMCE** vamos a desarrollar con cada una de las preguntas preparadas para la prueba. Para ello, acudimos a la Norma, en concreto al **BOE-A-2015-37** (pp. 244) dentro de un contexto de la asignatura de matemáticas para un curso de 1º y 2º de ESO:

Englobaremos los estándares de evaluación de los contenidos para un contexto global de nuestra prueba de evaluación, dentro del **Bloque 3** (Geometría). Tendremos los siguientes:

1.1 Reconoce y describe las propiedades características de los **polígonos regulares**.

1.2. Define los elementos característicos de los **triángulos**, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos.

1.3. Clasifica los **cuadriláteros** y **paralelogramos** atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.

1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la **circunferencia** y el círculo.

2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, **perímetros**, **superficies** y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

2.2. Calcula la **longitud de la circunferencia**, el **área del círculo**, la longitud de un arco y el **área de un sector circular**, y las aplica para resolver **problemas geométricos**.

3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del **Teorema de Pitágoras** y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.

3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular **longitudes desconocidas** en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos.

5.1. Analiza e identifica las **características** de distintos **cuerpos geométricos**, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.

5.2. Construye **secciones sencillas** de los cuerpos geométricos, a partir de cortes con planos, mentalmente y utilizando los medios tecnológicos adecuados.

5.3. Identifica los **cuerpos geométricos** a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente.

6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el **cálculo de áreas** y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los **lenguajes geométrico** y **algebraico** adecuados.

7.3. ¿QUÉ RESPUESTAS ESPERAS EN CADA UNA DE LAS PREGUNTAS EN FUNCIÓN DEL CONOCIMIENTO DE LOS ALUMNOS?

ENTRE OTROS ASPECTOS:

- Señala las diferentes respuestas correctas posibles que podría emplear un alumno para resolver las preguntas.

- Señala los posibles errores que pueden cometer los alumnos en cada una de las preguntas.

Contestaremos a estas preguntas, especificando para cada uno de los ejercicios propuestos:

- **Ejercicio Nº 1**: En esta pregunta, la aplicación directa del Teorema de Pitágoras es evidente. Para resolverlo, dentro de un contexto de triángulo rectángulo será necesario hacer uso del mismo. La aplicación es **directa**. Los principales errores que pueden aparecer son errores de operación (al elevar al cuadrado, al despejar la longitud del lado por el que se pregunta de la ecuación o al hallar la razón cuadrada para presentar el lado final). Otro error que puede llevarse a cabo es el no establecimiento de las unidades correspondientes en el resultado final (ejemplo, centímetros).

- **Ejercicio Nº 2**: Nuevamente, volvemos a tener un ejemplo de aplicabilidad de los contenidos teóricos presentados durante el curso. La idea es que los alumnos, una vez realizado el recordatorio de lo que representa un triángulo rectángulo, acutángulo y obtusángulo sean capaces de **discriminarlos** en función del conocimiento de los lados de los mismos. El principal error que pudiera aparecer sería el no reconocer como lado mayor como lado correspondiente de la hipotenusa, errores en operaciones (elevación al cuadrado de las magnitudes) o no conocer sobre qué desigualdades en la ecuación se basa el establecimiento de un triángulo acutángulo y obtusángulo. No hay posibilidad de establecer una respuesta correcta alternativa al de realizar una **comparación numérica** (analítica) de los lados presentados, si bien es cierto que podrían realizar una **resolución** (mediante el uso de un compás, por ejemplo) y una construcción geométrica de los triángulos.

- **Ejercicio Nº 3**: Nuevamente se ha pensado en un ejercicio de aplicabilidad del resultado teórico del Teorema de Pitágoras para la tercera pregunta, si bien es cierto que conlleva un alto componente geométrico. La función principal del ejercicio es el cálculo del lado del cuadrado para calcular su área y perímetro. Como posibles respuestas destacaremos la posibilidad de que el alumno **divida el cuadrado** en tantos triángulos rectángulos como estime oportuno (fundamentalmente dos o cuatro) pero el fin siempre será el mismo: la obligación de darse cuenta de que los lados de un cuadrado son iguales (existe el posible error de que el alumno identifique un lado como **X** y otro lado como **Y**, y que de esta forma el ejercicio quede irresoluble al disponer de una ecuación con dos incógnitas y que el alumno no perciba que ambas incógnitas valen lo mismo). Nuevamente podemos tener el error en las operaciones y en la no presentación de los resultados con sus unidades correspondientes (en este caso, unidades lineales y cuadráticas).

- **Ejercicio Nº 4**: Este ejercicio se ha expuesto con la idea de que el alumno pueda establecer una división de áreas y cuyo **sumatorio** dé el resultado final esperado. No se especifica en el planteamiento general del enunciado del ejercicio pero es posible que si el alumno conoce la fórmula del área del trapecio pueda aplicarla. El hecho de necesitar calcular la altura del trapecio resulta vinculante para la realización del ejercicio con éxito. Así pues, nuevamente, el Teorema de Pitágoras y la necesidad de búsqueda de un triángulo rectángulo, al menos, está presente, nuevamente. Los principales errores pueden estar en el cálculo de operaciones, en la posibilidad de confundir a la hipotenusa con el cateto, en un triángulo rectángulo, no entender qué significa un trapecio isósceles o la presentación de los resultados sin sus unidades correspondientes.

- **Ejercicio Nº 5**: Este ejercicio muestra un mayor grado de libertad a la hora de su resolución. Los principales errores que los alumnos pueden cometer en la resolución de este ejercicio son la confusión entre radio y diámetro de una circunferencia, dificultad a la hora de identificar los **ángulos central** e **inscritos**, aunque en este caso no haría falta incorporarlos, de la figura, la posibilidad de identificar cada uno de los triángulos presentados como **equiláteros** o desconocer las principales características de la circunferencia (básicamente perímetro y área). También pueden aparecer errores de no identificación de la **simetría** de la figura, errores en las operaciones y presentación de los resultados con sus unidades correspondientes. Existen diferentes propuestas, todas de **carácter geométrico**.

7.4. ¿QUÉ CRITERIOS DE CALIFICACIÓN VAS A EMPLEAR?

ENTRE OTROS ASPECTOS:

- *Diseña una guía de corrección de la prueba que pueda ser empleada por distintos correctores de manera fiable*.

Los **criterios de calificación** van a corresponderse al criterio de corrección denominado *modelo de tercios*, establecido por los autores Gairín, Muñoz y Oller (2012) en su estudio correspondiente y que busca **reducir la subjetividad** inherente a la evaluación. De forma esquemática se presenta de la siguiente forma:

Figura 7.1. Criterios de evaluación.

Este modelo permite que los errores cometidos en las **tareas auxiliares** *no eclipsen* el conocimiento matemático presente en la resolución, ya que el proceso de calificación debe continuar y el corrector debe estimar en qué grado el alumno ha alcanzado el objetivo principal de la pregunta. Ahora bien, si el error está relacionado con el **objetivo principal**, el corrector puede penalizar el ejercicio hasta con el total de la puntuación otorgada a ese problema. Si la resolución del problema lleva implícitos más de un objetivo principal es necesario asignar puntuaciones independientes a cada objetivo para poder **jerarquizar** las tareas en cada objetivo y aplicar el modelo.

Así pues, **para las cinco** preguntas de nuestra prueba inicial, lo que se busca es que el alumno sea capaz de identificar el uso del Teorema de Pitágoras con los ejercicios presentados. El conocimiento expreso del objeto matemático a tratar hace que su desconocimiento implique que pueda finalizar el proceso de calificación, tal y como muestra el cuadro.

Asimismo, añadiremos un **criterio de calificación de penalización propio** en la presentación de las calificaciones. Aspectos como la falta de orden, la inclusión de faltas ortográficas o el aprovechamiento óptimo de los espacios de trabajo durante la realización de la prueba pueden suponer una penalización máxima del **10%** sobre el **total** de la prueba.

Un punto que resulta especialmente interesante resulta ser aquel en el que se procede a realizar la comunicación de los resultados al alumnado. Con este breve comentario que se extiende a continuación, se busca combatir uno de los capítulos más importantes que se encuentran en el contexto social del aula: la **desmotivación**.

La corrección se realizará de la siguiente forma: un *vistazo general* de la prueba en su conjunto, la corrección como tal y una <u>revisión</u> de la misma. Una vez hecho esto, se procederá a comunicar los resultados de la misma al grupo de alumnos de referencia. Se repartirá el examen **de forma personalizada** para que el alumno sea capaz de valorar su puntuación y los posibles errores que ha cometido (vía *anotación* del docente adjunta a cada respuesta). Evidentemente, los <u>criterios de calificación</u> **quedarán fijados** tanto de forma **escrita** como **oral** en el proceso de impartición de la primera sesión de la asignatura de matemáticas.

Una vez dejado un tiempo razonable para que el alumno repase lo que ha realizado, el profesor recogerá los exámenes y procederá a realizar algún **comentario general** sobre la realización de la prueba, destacando los principales errores que el alumno copiará en su cuaderno de trabajo así como, si procede, la **resolución íntegra** de aquellos ejercicios/problemas que hayan provocado una puntuación más baja, a nivel general. No se personificará a ningún alumno ni positiva ni negativamente, si bien es cierto que durante el reparto de la prueba corregida el profesor valorará realizar **críticas constructivas** a alumnos determinados dada su puntuación. Asimismo, una vez revisado el examen por el grupo de referencia, el profesor requerirá de un pequeño *feedback* donde pueda conocer la opinión del alumnado sobre la complejidad (o no) de la prueba, rescatando sus inquietudes o la problemática encontrada, así como <u>cualquier sugerencia</u> a realizar, especialmente en cuestiones de limitación del tiempo durante la realización de la prueba, la complejidad o no del contexto del campo de problemas o del entendimiento de los enunciados planteados. Evidentemente, el profesor quedará abierto, dentro del habitual **proceso de tutorización** a proceder a realizar una revisión personalizada de la prueba a aquellos alumnos que lo estimen necesario, en otro espacio de trabajo que no sea el aula (véase el Departamento de Matemáticas, por ejemplo) con objeto de que no quede ninguna duda por parte del alumno de los criterios de calificación empleados.

Por último, destacar la necesidad de **incentivar** al alumno con **clases participativas**, **cálidas** y que tengan un reflejo en la **aplicabilidad** de las matemáticas en el **contexto** de la **vida real** de cara a motivar al mismo en un proceso de mejora de las actividades del aprendizaje significativo. La **claridad** en la exposición de los resultados debe entenderse como capital para evitar que aparezcan percepciones erróneas del alumno de cara a posibles favoritismos, por ejemplo. Elaborar un **buen clima social** del aula con una **alta interacción** entre el grupo de alumnos y el docente tiene que ser la **base** de cualquier desarrollo de un **proceso** de **enseñanza-aprendizaje** en un contexto de aula.

8. Sobre la bibliografía y páginas web.

8.1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

8.1. INDICA LOS LIBROS, ARTÍCULOS Y PÁGINAS WEB PARA LA REALIZACIÓN DE ESTE TRABAJO.

Para la realización de este Trabajo Fin de Máster se han consultado varias referencias bibliográficas, entre las que podemos destacar, libros de texto, artículos de referencia, recursos web, documentos oficiales y otras fuentes adicionales, como puedan ser las correspondientes a los apuntes tomados durante el curso de las diversas asignaturas del Máster de formación del profesorado en ESO, Bachillerato y FP. Referenciamos, a continuación, la bibliografía consultada:

- **Libros de referencia**:

- ÁLVAREZ, J.L., CORBALÁN, F., y HANS, J.A. (2003). *Matemáticas 2*. Madrid: Editorial Vicens Vives.
- BOYER, C.B. (1986). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.
- COLERA, J., GARCÍA J.E. y GAZTELU, I. (2000). *Matemáticas 2: Serie Aula Abierta*. Madrid: Editorial Anaya.
- DUNHAM, W. (1995). *El Universo de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Pirámide.
- KLINE, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días: Volumen 1*. Madrid: Editorial Alianza Universidad.
- MIRANDA, A.Y. et al. (2008*). Matemáticas 2: Proyecto La Casa del Saber*. Madrid: Editorial Ediciones Santillana.

- **Artículos de referencia**:

- GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (2008). "El Teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4000 años" en *Revista SIGMA*, nº 32, p.103-130.

- **Referencias electrónicas**:

- BARRETO GARCÍA, J.C. (2009). "Deducción y extensión más general del Teorema de Pitágoras" en *NÚMEROS: Revista Didáctica de las Matemáticas*. <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/75/Articulos_01.pdf> [Consulta: 15 y 16 de octubre de 2015]
- BLANCO, J.L. (1993). "Una clasificación de problemas matemáticos" en *Épsilon*: nº 25, p. 49-60.

http://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/blanco93.pdf [Consulta: 23, 24 y 25 de agosto de 2015]

- DALCÍN, M. (2007). "Recíproco de Pitágoras" en *Revista Digital SOAREM*. <http://www.soarem.org.ar/Documentos/34%20Dalcin.pdf > [Consulta: 17 de octubre de 2015]
- GURROLA, F. y JAÚREGUI, R. (2008). "Didáctica del Teorema de Pitágoras". http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/Gustavo/HPM_Proceddings_Extenso.pdf [Consulta: 16 de octubre de 2015]
- RUÍZ, H. (2000). "¿Cómo y qué se recuerda del Teorema de Pitágoras?" en *Revista Ciencia y Desarrollo*: número 26. <http://www.conacyt.mx/comunicacion/revista/218/Articulos/CyD151mar-abr2000.pdf> [Consulta: 17, 18 y 19 octubre de 2015]
- SANABRIA, A.M. (2014). "Teorema de Pitágoras. Justificación". <http://sanabria-teoremadepitagoras.blogspot.com.es/> [Consulta: 15 de octubre de 2015]

- **Páginas web**:

- *Portal oficial del software Geogebra*, < https://tube.geogebra.org/?lang=es> [Consulta: agosto y septiembre de 2015]
- *Wikipedia: la enciclopedia libre,* < https://es.wikipedia.org> [Consulta: agosto, septiembre y octubre de 2015]
- *Portal oficial del Gobierno de Aragón: Departamento de Educación, Cultura y Deporte,* < http://www.educaragon.org/> [Consulta: agosto y octubre de 2015]

- **Vídeo de Internet**:

- CÁNDIDA, M. (2012). "Geogebra y Pitágoras". Youtube https://www.youtube.com/watch?v=8LR43CMXiLk [Consulta: 3 de septiembre de 2015]
- NAVARRO, A. (2013). "El Teorema de Pitágoras en Geogebra". *Youtube* <https://www.youtube.com/watch?v=tgxoWlPZI4Y> [Consulta: 2 de septiembre de 2015]

- **Legislación y Normas**:

  - España. *BOA*, 9 de mayo del 2007, nº 65, p. 8871-9024.