



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fín de Grado de Física

**DESARROLLO DE HERRAMIENTAS
TOMOGRAFICAS Y VISUALES
EN FISICA CUANTICA**

Autor
David Benedicto

Director
Manuel Asorey

Facultad de Ciencias
2014/2015

Índice

1. Introducción.	1
2. Objetivos.	3
3. Sistemas y estados cuánticos.	4
3.1. Luz, campo electromagnético y osciladores armónicos.	4
3.2. Estados de la energía o estados de Fock.	5
3.3. Estados coherentes.	6
3.4. Estados coherentes comprimidos.	6
3.5. Superposición de estados y estados mixtos.	7
4. Quasiprobabilidades: La función de Wigner.	8
4.1. Quasiprobabilidades y funciones características.	8
4.2. Función de Wigner y matriz de densidad.	8
4.2.1. Ejemplos.	9
5. Transformada de Radon.	12
6. Detección homodina.	14
6.1. Experimento de detección homodina balanceada	14
7. Tomografía cuántica y ejemplos de reconstrucción.	17
7.1. Reconstrucción tomográfica de estados cuánticos	18
7.1.1. Efecto del error en la reconstrucción	18
7.1.2. Reconstrucción del estado cuántico del vacío	21
8. Conclusiones	22
Bibliografía	23
Anexos	I
A. Representación de funciones de onda	II
B. Cálculo de las funciones de Wigner	V
C. Ejemplos de reconstrucción de estados	IX

1. Introducción.

¿Es posible determinar mediante experimentos el estado de un sistema cuántico? Esta pregunta se formuló en los inicios de la historia de la mecánica cuántica [1], y la posibilidad de determinar dichos estados ha sido un rompecabezas para los físicos desde mitades del S.XX, iniciado con el artículo en el que Fano explicaba los fundamentos del problema de la reconstrucción de estados [2]. Hubo que esperar hasta finales de siglo para observar un ‘boom’ en el estudio de los problemas de reconstrucción de los estados cuánticos [3], donde los trabajos teóricos de Vogel y Risken [4] permitieron a Smithy, Beck, Raymer y Faridani, en 1993, realizar el primer experimento de reconstrucción en el campo de la óptica [5].

Antes de continuar necesitamos definir qué entendemos, en general, por estado cuántico. Según la definición dada por Leonhardt [6], conocer un estado significa conocer la mayor información estadística posible sobre todas las cantidades físicas de un objeto físico. En general, cuando hablamos de la “mayor información estadística posible” nos referimos a las distribuciones de probabilidad. Por lo tanto, conocer el estado de un sistema significa conocer las distribuciones de probabilidad correspondientes a las mediciones de cualquier posible observable perteneciente a dicho sistema. Expresado en términos matemáticos, una de las diferencias clave entre la física clásica y la cuántica se observa claramente dado que, mientras que clásicamente un sistema viene caracterizado como un punto en el espacio de fases, un sistema cuántico está descrito por un vector normalizado $|\Psi\rangle$ en el espacio de Hilbert o, más generalmente, por el operador densidad $\rho = \sum_i p_i |\Psi\rangle\langle\Psi|$, un operador hermítico no-negativo de traza unidad en el espacio de Hilbert.

De todas maneras, es posible representar probabilidades de densidad de estados cuánticos en el espacio de fases, siendo la función de Wigner una de las más conocidas [7]. La función de Wigner proporciona una descripción precisa para ciertas mediciones realizadas en sistemas cuánticos, pero a costa de ser potencialmente negativa. Por ello, la función de Wigner no puede ser interpretada como una distribución de probabilidad en el sentido estricto, y nos referimos a ella como distribución de quasi-probabilidad. A pesar de que el concepto de probabilidad negativa pueda parecer que carece de sentido físico, esta posibilidad ha sido estudiada por grandes físicos como Dirac [8] y Feynman [9]. Aceptando esta posibilidad, la mecánica cuántica en su conjunto puede ser reformulada en términos de la dinámica de la función de Wigner en el espacio de fases [10].

Si conocer un estado significa conocer toda la información estadística del sistema, ¿podemos seguir el camino en la otra dirección? Es decir, si conociésemos toda la información estadística de un sistema, ¿podríamos conocer el estado cuántico del sistema? Como un experimento real no puede obtener toda la información estadística posible, una pregunta más práctica sería: ¿podemos obtener razonablemente bien el estado cuántico del sistema midiendo información estadística correspondiente a un número finito de observables? Por el momento está claramente establecido que no es posible determinar el estado de un sistema individual [11, 12]; debido a que con una única medida de un observable se obtiene un valor, correspondiente a la proyección del estado original en el vector propio. Este hecho, aparte de no revelar mucha información, perturba el sistema objeto de la medida provocando que, tras esta, nos encontremos con un sistema diferente al que deseamos determinar. De todas maneras, es posible medir un conjunto de sistemas previamente preparados para que sean idénticos. En este caso cada sistema es preparado en un estado mediante el mismo procedimiento y medido una única vez. Por tanto, se pueden realizar múltiples medidas de sistemas preparados en el mismo estado sin preocuparse de que

la medida perturbe el sistema a estudiar [11, 12]. La medida final obtenida, tras aplicarle una transformación matemática a los datos estadísticos, es el estado del conjunto de sistemas y, por tanto, el de cualquier sistema individual del conjunto.

Ahora bien, ¿cuántos observables son necesarios para caracterizar estadísticamente un estado? En general el número de observables necesarios será proporcional a la complejidad del sistema, y como mínimo se necesitan dos observables que no conmuten [11, 12]. Esta pregunta esta relacionada con “la pregunta de Pauli”. W. Pauli, en 1933, escribió lo siguiente: “The mathematical problem, as to whether for given functions $W(x)$ and $W(p)$, the wave function $|\Psi\rangle$, if such function exists, is always uniquely determined, has still not been investigated in all its generality” [13]. Pauli se refería a las funciones $W(x) = |\Psi(x)|^2$ y $W(p) = |\Psi(p)|^2$ como las distribuciones de probabilidad de la posición y el momento de una partícula, respectivamente. En tres dimensiones la respuesta a dicha pregunta es no. Para estados puros en una dimensión, el conocimiento de ambas distribuciones es suficiente para reconstruir la función de onda excepto por el signo de la fase compleja [14, 15, 16]. Aun así, en el caso de estados mixtos, se necesitan más de dos distribuciones de probabilidad para reconstruir un estado.

Debido a que varios de los primeros trabajos experimentales sobre medidas de estados cuánticos analizaba la colección de datos estadísticos usando una técnica matemática (la transformada de Radon, que veremos más adelante en detalle) muy similar a la usada en imagen médica, un nombre generalmente aceptado para designar a las medidas de los estados cuánticos es la Tomografía Cuántica (QST, de las siglas en inglés de Quantum State Tomography, o Quantum Tomography)¹. Tras el trabajo pionero del grupo de Raymer, en la rama de la óptica cuántica, se puede ver como la tomografía cuántica ha tomado fuerza experimentalmente. Algunos de los sistemas que se han medido son estados del momento angular de los electrones [17], el campo [5, 18, 19, 20] y la polarización [21] de los estados de pares de fotones, vibraciones moleculares [22], haces de átomos [23] y espines nucleares [24].

En la óptica cuántica, la tomografía cuántica ha sido aplicada experimentalmente para reconstruir los estados cuánticos de la luz. Y es en esta rama de la física en la que más está evolucionando. Pero, ¿por qué la luz y no otros objetos cuánticos? Los láseres pueden generar luz de excelente calidad, existen dispositivos ópticos capaces de procesar la luz con gran precisión, y hay disponibles detectores de gran calidad capaces de medir propiedades cuánticas de la luz. Y no solo esto, sino que la óptica clásica es una teoría bien establecida, por lo que podemos centrarnos en los efectos cuánticos. Además, a diferencia de la mecánica cuántica de las partículas, en la óptica cuántica existe la oportunidad de medir todas las posibles combinaciones lineales de la posición Q y el momento P de un oscilador armónico, representado por un modo individual del campo electromagnético. Una mayor comprensión de la luz permitiría avanzar ramas de la tecnología tan importantes como las comunicaciones, o ganar un mayor conocimiento sobre el comportamiento de la materia.

¹Tomografía es el procesamiento de imágenes por secciones. Un aparato usado en tomografía es llamado tomógrafo, mientras que la imagen producida es un tomograma. En la mayoría de los casos se basa en un procedimiento matemático llamado reconstrucción tomográfica.

2. Objetivos.

El hecho de no poder ver objetos físicos en toda su complejidad es una de las características fundamentales de la mecánica cuántica. El principio de incertidumbre de Heisenberg, introducido en 1927, es uno de los ejemplos más famosos, según el cual, cuanto más conocemos la posición de una partícula, menos podemos determinar su momento, y viceversa [25]. No obstante, no hay grandes obstáculos que nos impidan observar aspectos complementarios en una serie de experimentos diferentes sobre objetos cuánticos iguales.

La principal motivación de este trabajo es comprender cómo podemos determinar mediante experimentos cantidades físicas de objetos cuánticos. La apariencia de la mecánica cuántica como algo abstracto, incluso lejano a la realidad, es una idea extendida. No hay que buscar demasiado para encontrar citas al respecto, como la de Richard Feynman: “Si usted piensa que entiende a la mecánica cuántica... entonces usted no entiende la mecánica cuántica” [26]. El hecho de desenredar las ideas en torno a la posibilidad o no de determinar estados cuánticos me parece algo de gran importancia para obtener una visión más amplia sobre esta teoría. A lo largo de este trabajo, estudiaremos la reconstrucción de estados cuánticos de la mano de la tomografía cuántica.

En el capítulo 3 introduciremos el objeto cuántico a tratar: la luz; sin duda uno de los objetos físicos más fascinantes e importantes. En esta sección se incluye también información sobre distintos estados cuánticos del oscilador electromagnético. En el capítulo 4 presentamos la primera pieza del rompecabezas, la distribución de Wigner, así como su relación con las distribuciones de cuasiprobabilidad y la física cuántica. La sección 5 está dedicada a la transformada de Radon, una de las herramientas fundamentales para la reconstrucción tomográfica de imágenes. No es hasta el apartado 6 donde se explica la parte experimental de la reconstrucción. Finalmente, en el capítulo 7, juntamos todas las piezas para la reconstrucción tomográfica de los estados cuánticos.

Una parte importante de este proyecto se centra en el uso de herramientas visuales para una mejor comprensión del problema. Por tanto, gracias a programas como Matlab, Wolfram Mathematica o GNUplot, representaremos las funciones de onda y las distribuciones de Wigner de diferentes estados, el funcionamiento de la transformada de Radon así como el proceso de reconstrucción de diferentes estados paso a paso hasta llegar a la matriz de densidad. Confiamos en que un buen uso de figuras e imágenes permita obtener una visión más amplia sobre los temas tratados y una mayor comprensión sobre estos.

3. Sistemas y estados cuánticos.

3.1. Luz, campo electromagnético y osciladores armónicos.

En una serie de experimentos llevados a cabo a finales de 1845 Michael Faraday demostró el efecto ahora conocido como rotación de Faraday, la primera evidencia de que la luz estaba relacionada con el electromagnetismo. Faraday tenía la intuición de que había una relación muy estrecha entre los fenómenos de la luz, la electricidad y el magnetismo y, pese a que no pudo formular sus ideas matemáticamente, su trabajo inspiró los estudios de James Clerk Maxwell sobre el electromagnetismo y la luz. Maxwell descubrió que cualquier onda electromagnética en el vacío viaja a la velocidad de la luz, y concluyó con que la luz es un tipo de onda electromagnética publicando, en 1873, ‘A treatise on Electricity and Magnetism’, en donde daba una descripción matemática completa sobre el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos, conocida como ecuaciones de Maxwell. Poco después, Heinrich Hertz lo confirmó experimentalmente. Ya en 1900, Max Planck sugirió que, pese a que la luz fuera una onda, esta podría ganar o perder energía solo en cantidades finitas relacionadas con su frecuencia. En 1905, Albert Einstein usó esta idea para explicar el efecto fotoeléctrico, y en 1923 Arthur Holly Compton demostró que el efecto Compton podía explicarse con una teoría de partículas de la luz pero no con una teoría ondulatoria. Fue en 1926 cuando Gilbert N. Lewis nombró estas partículas de luz como fotones [27].

El estado cuántico de un fotón $|\mathbf{k}, \mu\rangle$ perteneciente al modo (\mathbf{k}, μ) posee las siguientes propiedades:

- Un fotón no tiene masa: $m_{foton} = 0$.
- La energía de un fotón es $h\nu$ con $\nu = c|\mathbf{k}|$, siendo \mathbf{k} el vector de ondas y c la velocidad de la luz; $H|\mathbf{k}, \mu\rangle = h\nu|\mathbf{k}, \mu\rangle$ con $\nu = c|\mathbf{k}|$.
- El momento electromagnético del fotón es $\hbar|\mathbf{k}|$, con $\hbar = h/2\pi$; $P_{EM}|\mathbf{k}, \mu\rangle = \hbar\mathbf{k}|\mathbf{k}, \mu\rangle$.
- La polarización $\mu = +1, -1$ es el valor propio de la componente z del espín del fotón, $S_z|\mathbf{k}, \mu\rangle = \mu|\mathbf{k}, \mu\rangle$.

El hamiltoniano del campo electromagnético viene dado por la siguiente expresión:

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \mu} \hbar\omega \left(a^{\dagger(\mu)}(\mathbf{k})a^{(\mu)}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

Si miramos el hamiltoniano del oscilador armónico cuántico, podemos ver que su hamiltoniano es similar al del campo electromagnético

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

Donde $\omega = 2\pi\nu$; es la frecuencia fundamental del oscilador y $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. El estado de mínima energía del oscilador viene designado por $|0\rangle$ y se le conoce como el estado de vacío cuántico. Los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} son los operadores creación y aniquilación respectivamente.

Suponemos que tenemos un número de osciladores armónicos no interactuantes en una dimensión, cada uno de ellos con su frecuencia fundamental w_i . Como son independientes, el hamiltoniano es una suma y, sustituyendo $i \rightarrow (\mathbf{k}, \mu)$ en (3) obtenemos la expresión del hamiltoniano del campo electromagnético (1).

$$H = \sum_i \hbar\omega_i \left(a^\dagger(i)a(i) + \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

Resumiendo este apartado; nuestro sistema cuántico a estudiar es la luz, tratándose esta de un rango de longitudes de onda del espectro electromagnético. Podemos estudiar estas ondas electromagnéticas como si se tratasen de una suma de osciladores armónicos no interactuantes. De aquí en adelante nuestro sistema pasa a ser el oscilador armónico en una dimensión, también conocido en este caso como oscilador electromagnético, y procedemos a estudiar diversos de sus estados como el del vacío cuántico, los estados de Fock, coherentes y comprimidos, así como la superposición y mezcla de estados. Podemos ver representadas las funciones de onda de alguno de estos estados en el apéndice A.

3.2. Estados de la energía o estados de Fock.

Una base viene dada por el conjunto de vectores propios $|n\rangle$ del hamiltoniano del sistema, obtenidos resolviendo la ecuación de Schrödinger para los valores propios.

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

Dichos estados son ortogonales y forman una base completa. Mediante la acción de los operadores creación y aniquilación podemos obtener una relación (4) que conecta el estado $|n\rangle$ con el del vacío $|0\rangle$.

$$\begin{aligned} a|0\rangle &\propto 0 \\ a^\dagger|n\rangle &= |n+1\rangle\sqrt{n+1} \\ a|n\rangle &= |n-1\rangle\sqrt{n} \\ |n\rangle &= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

El valor propio correspondiente a la energía de cada uno de estos estados es $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Como las energías son equidistantes, $|n\rangle$ puede ser visto como un estado que contenga n partículas de energía $h\nu$. Dichos estados, en el caso en el que las partículas sean fotones, son conocidos como estados de Fock.

Podemos representar los operadores creación y aniquilación, y el estado de Fock (5) en la representación de coordenadas. Siendo \hat{x} y \hat{p} los operadores correspondientes a la posición y al momento lineal respectivamente.

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \\ \psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \cdot H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

3.3. Estados coherentes.

Los estados coherentes fueron estudiados por Schrödinger en 1926, y redescubiertos por Klauder, Glauber y Sudarshan a principios de 1960. El término coherente tiene su origen en la terminología usada en óptica cuántica[28], donde se refiere a estados del campo electromagnético que describen una coherencia máxima y un tipo de comportamiento clásico. Se tratan de estados de mínima incertidumbre, con la desviación estándar igual para el momento y la posición.

Matemáticamente, un estado coherente $|\alpha\rangle$ está definido como el único vector propio del operador aniquilación a^\dagger asociado al valor propio α .

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

Dado que a^\dagger no es hermítico, α es, en general, complejo, y puede ser representado como $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$.

El estado del vacío cuántico visto previamente minimiza el principio de incertidumbre (6), mientras que el resto de estados de Fock no. Una de las propiedades más importantes de los estados coherentes es que también minimizan el principio de incertidumbre.

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (6)$$

En el caso del oscilador armónico, los estados coherentes vienen dados por el operador unitario de desplazamiento $D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ actuando sobre el estado del vacío.

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$$

Usando la representación de la base de los estados de Fock podemos representar los estados coherentes como,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle$$

La función de ondas en la representación de coordenadas viene dada por la ecuación

$$\psi^{(\alpha)}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Re[\alpha]\right)^2 + i\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\Im[\alpha]x} \quad (7)$$

3.4. Estados coherentes comprimidos.

Un estado coherente comprimido es cualquier estado cuántico del espacio de Hilbert que minimice el principio de incertidumbre. El caso más simple es el del vacío cuántico, y el siguiente es el estado coherente. Normalmente nos referimos a estado comprimido para cualquier caso en el que $\Delta x \neq \Delta p$. La idea es que el círculo que denota a un estado coherente en el espacio de fases ha sido “comprimido” formando una elipse. [28]

En el caso del oscilador armónico, la forma general de un estado coherente comprimido viene dada en términos del operador de desplazamiento y el operador de compresión $S(\xi) = \exp[\frac{1}{2}(\xi^*\hat{a}^2 - \xi\hat{a}^{\dagger 2})]$ actuando sobre el estado del vacío. Siendo $\xi = re^{i\theta}$, y r conocido como parámetro de compresión.

$$|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle$$

Para ver la relación con el principio de incertidumbre, necesitamos ver la acción del operador de compresión en los operadores de creación y aniquilación.

$$\hat{b} = \hat{S}^\dagger(z)\hat{a}\hat{S}(z) = \hat{a} \cosh r - e^{i\theta}\hat{a}^\dagger \sinh r$$

$$\hat{b}^\dagger = \hat{S}^\dagger(z)\hat{a}^\dagger\hat{S}(z) = \hat{a}^\dagger \cosh r - e^{-i\theta}\hat{a} \sinh r$$

Sabiendo como cambian estos operadores podemos calcular la varianza, teniendo en cuenta la definición de los operadores cuadratura $\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ y $\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$. Si, por simplificar para ver mejor el efecto, tomamos $\theta = 0$, y el estado el del vacío cuántico $|\psi_s\rangle = S(\xi)|0\rangle$, tenemos que [29]:

$$\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle = \langle\hat{X}_1^2\rangle - \langle\hat{X}_1\rangle^2 = \langle\psi_s|\hat{X}_1^2|\psi_s\rangle - \langle\psi_s|\hat{X}_1|\psi_s\rangle^2 = \frac{1}{4}e^{-2r}$$

$$\langle(\Delta\hat{X}_2)^2\rangle = \langle\hat{X}_2^2\rangle - \langle\hat{X}_2\rangle^2 = \langle\psi_s|\hat{X}_2^2|\psi_s\rangle - \langle\psi_s|\hat{X}_2|\psi_s\rangle^2 = \frac{1}{4}e^{2r}$$

Se puede observar como se mantiene el mínimo de incertidumbre $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle\langle(\Delta\hat{X}_2)^2\rangle = \frac{1}{4}$, pero $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle \neq \langle(\Delta\hat{X}_2)^2\rangle$. Es evidente que la compresión se da en la cuadratura X_1 , aunque en el caso en el que $\theta = \pi$, la compresión pasa a la cuadratura X_2 . De hecho, la compresión se da en la dirección $\frac{\theta}{2}$.

Podemos descomponer el estado en la base de los estados de Fock, obteniendo la siguiente expresión [29].

$$|\alpha, \xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} e^{[-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}\alpha^* e^{i\theta} \tanh(r)]} \frac{[\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh(r)]^{n/2}}{\sqrt{n!}} H_n[\gamma(e^{i\theta} \tanh(2r))^{1/2}]$$

3.5. Superposición de estados y estados mixtos.

Un estado puro de un sistema cuántico viene denotado por un vector unitario en el espacio de Hilbert. Previamente, a este vector lo hemos denominado estado, pero ahora introducimos la notación de estado ‘puro’ para distinguirlo de un tipo de estados cuánticos más generales. Recordando que podemos expresar un estado físico $|\Psi\rangle$ mediante una única matriz de densidad en la forma $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$; podemos definir los estados mixtos, o mezclas de estados puros, mediante una matriz de densidad con la forma:

$$\rho = \sum_i^N p_i |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Los números p_i deben de satisfacer las relaciones $0 < p_i < 1$ y $\sum_i^N p_i = 1$. Debe de quedar claro que una superposición de estados es diferente de una mezcla de estados. Podemos ver clara la diferencia con el ejemplo siguiente.

Superposición de dos estados $|\Psi\rangle_A$ y $|\Psi\rangle_B$:

$$\rho = (|\Psi\rangle_A + |\Psi\rangle_B)(\langle\Psi|_A + \langle\Psi|_B)$$

Mezcla de dos estados $|\Psi\rangle_A$ y $|\Psi\rangle_B$:

$$\rho = |\Psi\rangle_A\langle\Psi|_A + |\Psi\rangle_B\langle\Psi|_B$$

En el caso en el cual la superposición se da entre dos estado coherentes de signo opuesto el estado resultante es conocido como el estado del gato de Schrödinger.

$$|\Psi\rangle_{\text{Gato Schrödinger}} = |\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$$

4. Quasiprobabilidades: La función de Wigner.

4.1. Quasiprobabilidades y funciones características.

Una distribución de quasiprobabilidad es un objeto matemático similar a la distribución de probabilidad pero que no cumple todos los axiomas de Kolmogorov. Pese a que las quasiprobabilidades comparten muchas de las propiedades de las probabilidades, todas violan el tercer axioma de Kolmogorov, y algunas tienen regiones de probabilidad negativa, contradiciendo por tanto el primer axioma. Las distribuciones de quasiprobabilidad aparecen de forma natural en la formulación en el espacio de fases de la mecánica cuántica y son comúnmente usadas en óptica cuántica. [30]

La descripción estadística de un sistema microscópico se suele formular en términos del operador densidad ρ . La expresión para la media estadística de medidas de un observable microscópico F es la traza del producto de los operadores ρ y F ,

$$\langle F \rangle = Tr[\rho F]$$

Una práctica común es transferir la información estadística del operador densidad a una función de ponderación $\omega(\alpha)$ referida a un operador y cuyo argumento α representa un punto en el espacio de fases.

$$\langle F \rangle = \int \omega(\alpha) f(\alpha) d^2\alpha$$

En lugar de empezar por la distribución de Wigner vamos a partir de la distribución de probabilidad parametrizada en 's' introducida por Cahill y Glauber [31]. La función característica [32] de orden 's' viene definida por la relación

$$\chi(\xi, s) = Tr[\rho D(\xi, s)] = e^{s|\xi|^{1/2}} \chi(\xi) \quad (8)$$

Donde la función $\chi(\xi)$ viene dada por $\chi(\xi) = Tr[\rho D(\xi)]$, que es el valor esperado del operador desplazamiento $D(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}$. La función $\chi(\xi, s)$ es una función continua de ξ y entera de s . La transformada de Fourier de dicha función es la distribución de quasiprobabilidad que buscamos,

$$W(\alpha, s) = \frac{1}{\pi} \int e^{\alpha \xi^* - \alpha^* \xi} \chi(\xi, s) d^2\xi \quad (9)$$

Como se explica detalladamente en el artículo de Cahill y Glauber $\chi(\xi, 1)$ es la función P de Glauber-Sudarshan, $\chi(\xi, 0)$ es la función de Wigner y $\chi(\xi, -1) = \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ es la función Q; tres de las distribuciones de quasiprobabilidad más importantes en óptica cuántica. Las funciones características están relacionadas entre sí mediante el teorema de Baker-Hausdorff, por lo que las distintas distribuciones también están relacionadas entre sí. La función de Wigner de Cahill y Glauber solo se diferencia en la normalización respecto a la función introducida por Wigner [7] como el análogo cuántico de la distribución del espacio de fases de la mecánica estadística clásica.

4.2. Función de Wigner y matriz de densidad.

La función de Wigner es una función real y normalizada para operadores ρ hermíticos y normalizados. Si sustituimos $s = 0$ en (9) obtenemos la función de Wigner:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int e^{\alpha \xi^* - \alpha^* \xi} \chi(\xi) d^2\xi \quad (10)$$

A la hora de calcular la función de Wigner de diferentes estados nos interesa tenerla en función de p y q . Partiendo de la ecuación anterior y siguiendo los pasos del libro de Leonhardt [6] capítulo 3 (con un cambio de normalización de un factor $\frac{1}{\pi}$, la función de Wigner viene dada por:

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q - \frac{x}{2} | \hat{\rho} | q + \frac{x}{2} \rangle e^{ipx} dx \quad (11)$$

Teniendo en cuenta que cualquier estado puede representarse como una función compleja $|\Psi\rangle = \int |q\rangle \Psi(q) dq$, de manera similar, cualquier estado mixto puede expresarse en forma de matriz de densidad tal que $\hat{\rho} = \int \rho(q_1, q_2) |q_1\rangle \langle q_2|$. En este caso general la función de Wigner queda en la forma

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \rho(q - \frac{x}{2}, q + \frac{x}{2}) e^{ipx} dx \quad (12)$$

Mientras que para un estado cuántico puro la expresión pasa a ser,

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \Psi^*(q - \frac{x}{2}) \Psi(q + \frac{x}{2}) e^{ipx} dx \quad (13)$$

Dado que esta relación es una transformada de Fourier [33] podemos invertirla para obtener la matriz de densidad en términos de la función de Wigner

$$\rho(x_1, x_2) = \int W(\frac{x_1 + x_2}{2}, p) e^{-ip(x_2 - x_1)} dp \quad (14)$$

4.2.1. Ejemplos.

En este apartado se exponen las funciones de Wigner de los estados presentados en el tema 3. Los cálculos detallados se encuentran en el apéndice B. Aprovechamos también para representar gráficamente alguna de estas funciones.

Vacío cuántico:

$$W_0(q, p) = \frac{1}{2\pi} e^{-(q^2 + p^2)} \quad (15)$$

Estado de Fock 'n'

$$W_n(q, p) = \frac{(-1)^n}{2\pi} e^{-(q^2 + p^2)} L_n(2[q^2 + p^2]) \quad (16)$$

Estado coherente $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle q \rangle + i\langle p \rangle)$

$$W_\alpha(q, p) = \frac{1}{2\pi} e^{-(q - \langle q \rangle_\alpha)^2 - (p - \langle p \rangle_\alpha)^2} \quad (17)$$

Vacío cuántico comprimido $\xi = r e^{i\theta}$; $\theta = 0$;

$$W_\xi(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(e^{-2r} q^2 + e^{+2r} p^2)} \quad (18)$$

Estados coherentes mixtos $\hat{\rho} = p_\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| + p_\beta |\beta\rangle \langle \beta|$.

$$W_{\hat{\rho}}(q, p) = p_\alpha W_\alpha(q, p) + p_\beta W_\beta(q, p) \quad (19)$$

Superposición de estados coherentes $|\Psi\rangle = |\alpha\rangle \pm |\beta\rangle$

$$W_{|\alpha\rangle \pm |\beta\rangle}(q, p) = \frac{1}{2} W_\alpha(q, p) \pm \frac{1}{2} W_{\alpha\beta}(q, p) \pm \frac{1}{2} W_{\beta\alpha}(q, p) + \frac{1}{2} W_\beta(q, p) \quad (20)$$

Estado gato de Schrödinger $|\Psi\rangle = |\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$

$$W_{|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle}(q, p) = \frac{1}{2} W_\alpha(q, p) + \frac{1}{2} W_{-\alpha}(q, p) \pm \frac{1}{2\pi} e^{-(q^2 + p^2)} \times \cos(2[\langle q \rangle q - \langle p \rangle p]) \quad (21)$$

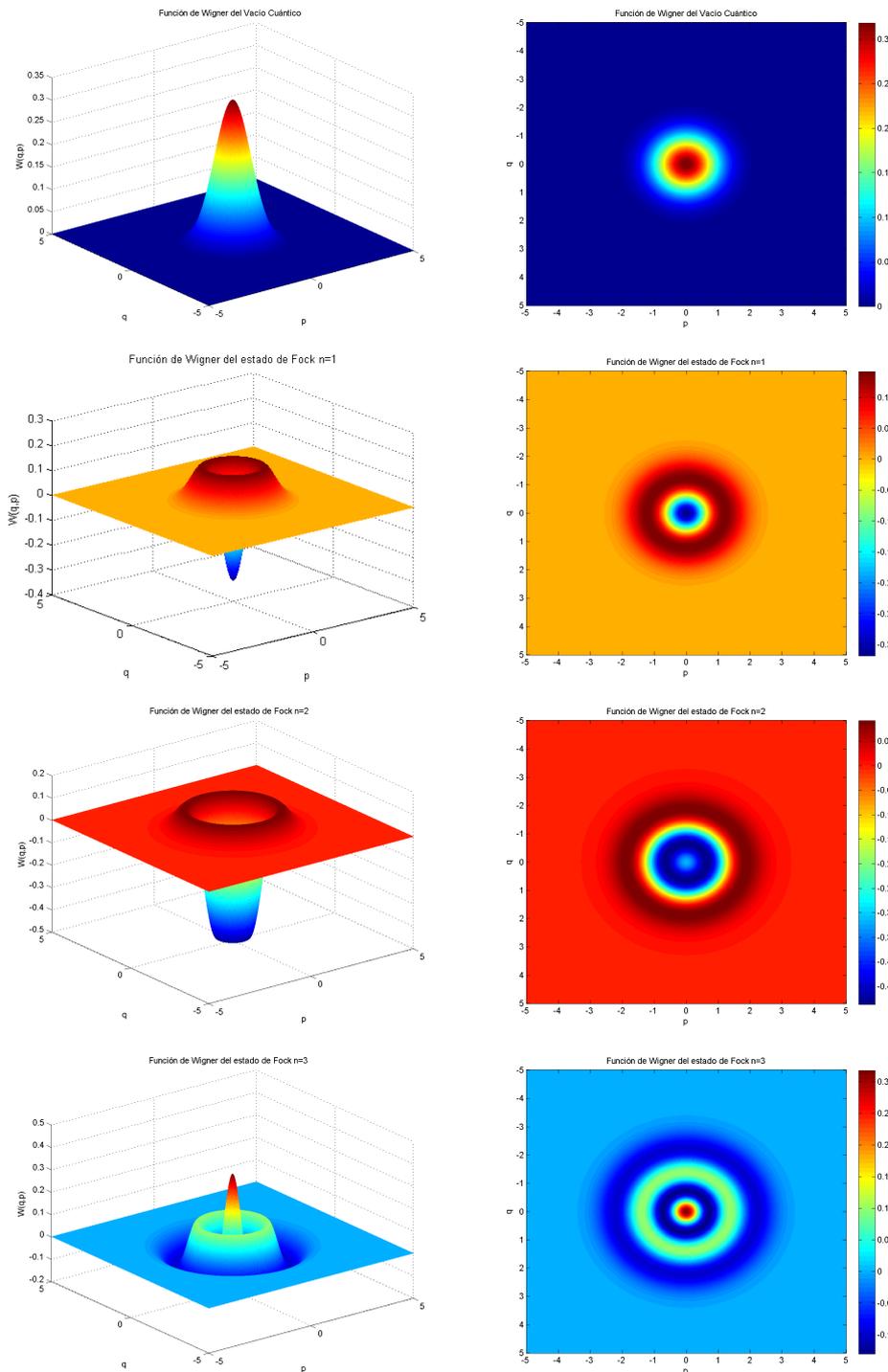


Figura 1: Funciones de Wigner del vacío cuántico y tres primeros estados de Fock

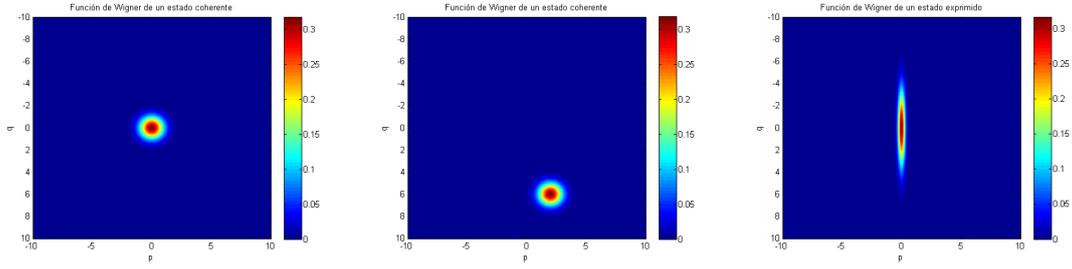


Figura 2: Acción del vector desplazamiento ($\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(6 - 2i)$, segunda imagen) y del vector compresión ($\xi = 1,2$, tercera imagen) sobre el vacío cuántico (primera imagen)

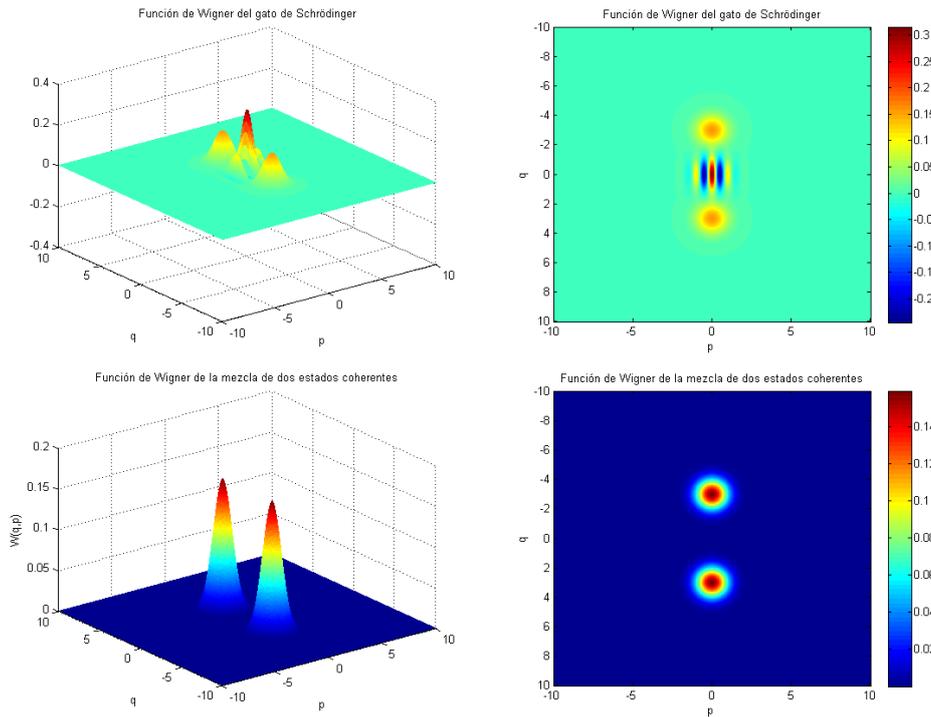


Figura 3: Diferencia entre la superposición de estados coherentes (en este caso de tipo gato de Schrödinger por ser estados iguales de signo opuesto): $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha = 3\rangle + |\alpha = -3\rangle)$ y la mezcla de estados coherentes: $\hat{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha = 3\rangle\langle\alpha = 3| + |\alpha = -3\rangle\langle\alpha = -3|)$ respectivamente.

5. Transformada de Radon.

Johann Radon demostró en 1917 que una función diferenciable en \mathbb{R}^3 puede ser determinada explícitamente por medio de sus integrales sobre planos en \mathbb{R}^3 [34]². Radon se centró en los espacios \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , y el mayor trabajo a la hora de llevar la transformada integral de Radon a \mathbb{R}^n fue llevado a cabo por John [36] (1934) y Mader [37] (1927).

Si f es una función definida en un espacio Euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n , la transformada de Radon de f viene determinada integrando f sobre todos los hiperplanos de dimensión $n - 1$. Por tanto, si la función está definida en \mathbb{R}^2 , f viene determinada por las integrales de línea de f .

Nos centramos en el espacio \mathbb{R}^2 , siendo (x, y) las coordenadas de los puntos en el plano y considerando una función definida en un dominio D de \mathbb{R}^2 . Si L es una línea en el plano, entonces la función definida por la integral de línea de f sobre todas las posibles líneas L es la transformada de Radon bidimensional de f , siempre y cuando la integral exista. Explícitamente,

$$\tilde{f} = \mathfrak{R}(f) = \int_L f(x, y) ds \quad (22)$$

La línea L puede escribirse en función de los valores p y Φ en la forma $p = x \cos \Phi + y \sin \Phi$. Si $\tilde{f}(p, \Phi)$ es conocida para todo p y Φ , entonces $\tilde{f}(p, \Phi)$ es la transformada de Radon bidimensional de $f(x, y)$.

$$\tilde{f}(p, \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(p - x \cos \Phi - y \sin \Phi) dx dy$$

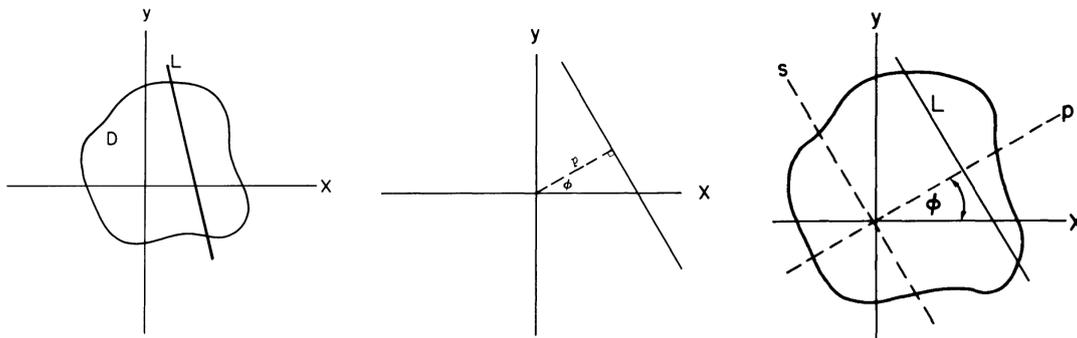


Figura 4: Línea L en el dominio D y coordenadas para describirla respecto al sistema de coordenadas original y al nuevo sistema rotado [35]

Si introducimos un nuevo sistema de coordenadas con los ejes rotados un ángulo Φ , nombrando los ejes p y s como en la figura 5 entonces,

$$x = p \cos \Phi - s \sin \Phi$$

$$y = p \sin \Phi + s \cos \Phi$$

Y obtenemos una definición más explícita de la transformación

$$\tilde{f}(p, \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \Phi - s \sin \Phi, p \sin \Phi + s \cos \Phi) ds \quad (23)$$

²Una traducción del artículo de Radon, escrito originalmente en alemán, puede encontrarse en el apéndice A del libro 'The Radon Transform and Some of its Applications' [35].

Para la reconstrucción tomográfica, que veremos más adelante, lo que nos interesa no es la transformada de Radon, sino su transformada inversa. Es decir, teniendo la transformada de Radon, queremos recuperar su función correspondiente. La fórmula de la inversión de la transformada de Radon es diferente dependiendo de si la dimensión n del espacio \mathbb{R}^n es par o impar [35], aunque también existe una fórmula que las unifica [40]. En el lenguaje MATLAB existe un comando [39] que nos permite calcular la transformada de Radon de las funciones en dos dimensiones, y otro para la transformada inversa [41]³. Este es el programa que se ha utilizado para todos los cálculos a lo largo del trabajo.

A continuación podemos ver una serie de figuras 5 y sus correspondientes transformadas de Radon. Vemos como en el caso de la circunferencia la distancia máxima es el radio (la función de Matlab toma el origen de las distancias en el punto $(0,0)$), y es simétrico respecto de los ángulos. En el caso en el que solo nos encontramos media circunferencia vemos como cuando la recta es horizontal ($\theta = 90^\circ$) la transformada es cero para distancias negativas dado que dicha recta no pasa por ningún punto de la circunferencia. Con el cuadrado podemos observar los máximos correspondientes a las diagonales del cuadrado, es decir, a las líneas que pasan por el origen con ángulos de $\theta = 45^\circ$ y $\theta = 135^\circ$, obteniendo a su vez en dichos ángulos la máxima distancia posible, la diagonal. Finalmente, si el cubo es hueco, vemos una menor intensidad en la transformada, y al desplazarlo se desplaza también la distancia.

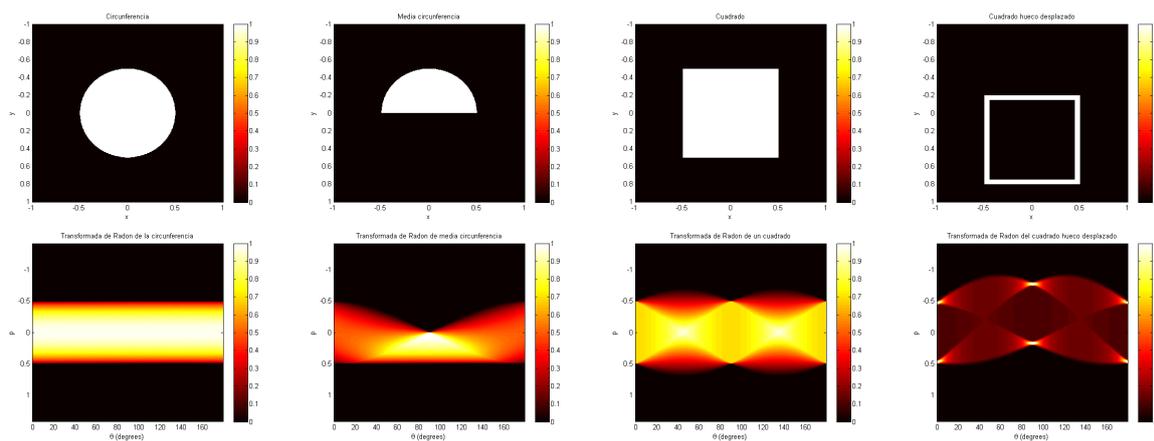


Figura 5: Ejemplos de transformadas de Radon de varias figuras realizadas con Matlab. En las imágenes superiores encontramos diferentes figuras en el sistema de ejes ‘x’, ‘y’; y en la parte inferior sus correspondientes transformadas de Radon normalizadas en el sistema de ejes ‘p’, ‘ θ ’ con $\theta = 0^\circ, \dots, 180^\circ$.

³La función ‘iradon’, utilizada en Matlab para el calculo de la transformada de Radon inversa, permite la configuración de ciertos parámetros. En este trabajo he usado el parámetro de interpolación ‘v5cubic’ y el filtro por defecto ‘Ram-Lak’. Esta decisión se ha tomado en base a obtener los mejores resultados para las funciones tratadas.

6. Detección homodina.

El detector homodino es un dispositivo fundamental para medir propiedades de campos ópticos sensibles a la fase. Su sensibilidad a la fase es debida a que se mezcla la señal con un oscilador local que actúa como referencia. En la interferometría óptica, homodino significa que la radiación de referencia, es decir el oscilador local, viene de la misma fuente que la señal antes del proceso de modulación.

Como hemos visto, cuando se discute la teoría cuántica de la luz, es común usar un oscilador electromagnético como referencia, que describe la oscilación del campo eléctrico. Como el campo magnético es proporcional a la velocidad de cambio del campo eléctrico, ambos oscilan, y dicha oscilación describe a la luz. El vector complejo $u(x, t)$ describe un solo modo del oscilador electromagnético, que es aislado del resto de sistema y examinado. El ejemplo más simple es el de la onda plana $u(x, t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$, donde u_0 es el vector polarización, y k es el vector de ondas. Cuando cuantizamos el oscilador, este pasa a estar descrito por los operadores creación \hat{a}^\dagger y aniquilación \hat{a} , y las cantidades físicas, como el campo eléctrico, pasan a estar descritas por operadores cuánticos. Suponemos que el campo eléctrico viene dado por

$$\hat{E} = u^*(x, t)\hat{a}^\dagger + u(x, t)\hat{a}$$

Cuyo hamiltoniano es el de la ecuación 2, donde el operador \hat{n} da cuenta de el número de fotones en el modo espacial-temporal u . Los operadores

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

$$\hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

se llaman cuadraturas, y representan la parte real e imaginaria de la amplitud compleja \hat{a} . Como hemos visto en el caso del vector desplazamiento, es posible definir operadores que muevan estados coherentes en el espacio de fases. Otro de estos operadores es el de cambio de fase $\hat{U}(\theta) = e^{-i\theta\hat{n}}$, que actúa sobre estados coherentes rotándolos un ángulo θ . Este operador actuando sobre la amplitud \hat{a} le proporciona un cambio de fase θ [6]:

$$\hat{U}(\theta)^\dagger \hat{a} \hat{U}(\theta) = \hat{a} e^{-i\theta}$$

El operador cambio de fase rota las cuadraturas de tal manera que podemos cambiar de la representación en posición a la representación en momento por medio de cambios de fase $\theta = \pi/2$.

$$q_\theta \equiv \hat{U}(\theta)^\dagger \hat{q} \hat{U}(\theta) = \hat{q} \cos(\theta) + \hat{p} \sin(\theta) \quad (24)$$

A este operador lo denominamos cuadratura de fase, y es de gran importancia en la reconstrucción de estados cuánticos.

6.1. Experimento de detección homodina balanceada

En 1983 Yuen y Chan [45] propusieron la detección homodina balanceada, siendo esta demostrada por Abbas, Chan y Yee [46]. La versión balanceada de la detección homodina tiene la ventaja de cancelar el ruido y la inestabilidades clásicas del campo de referencia.

Este dispositivo puede considerarse como un detector ideal de cuadraturas de fase (24) bajo la necesidad de que el oscilador local pueda ser considerado como clásico.

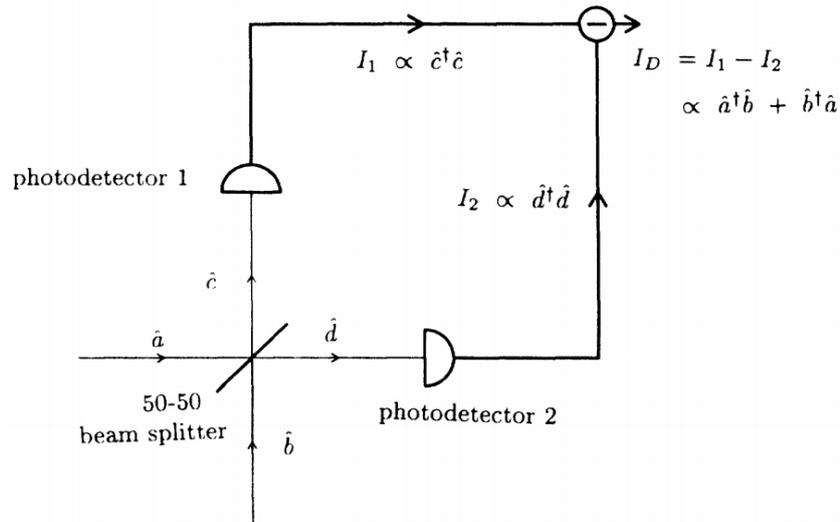


Figura 6: Esquema de un detector homodino balanceado [44]

El esquema del detector homodino balanceado se muestra en la figura 6.1. La señal \hat{a} interfiere con un haz coherente de luz láser \hat{b} de manera bien balanceada 50:50 en un divisor de haz ⁴. El haz de láser es el oscilador local, que proporciona el cambio de fase θ para la medición de la cuadratura. Suponemos que la señal y el oscilador local tienen una relación fija de cambio de fase, como es en la mayoría de los casos de detección homodina, porque ambos campos vienen generados por un láser común. El oscilador local ha de ser intenso con respecto a la señal de entrada para proporcionar una referencia precisa. Vamos a asumir que el oscilador local es suficientemente potente como para tratarlo clásicamente, es decir, despreciando sus fluctuaciones cuánticas.

Una vez que la señal de entrada y el oscilador local se mezclan, se obtienen dos haces de salida correspondientes a la de suma y diferencia de las amplitudes $\hat{c} = (\hat{a} + \hat{b})/\sqrt{2}$ y $\hat{d} = (\hat{a} - \hat{b})/\sqrt{2}$. Estos haces inciden en un par de fotodetectores ⁵ ideales que proporcionan una corriente proporcional al número de cuantos detectados en cada intervalo de tiempo. Las corrientes son medidas, procesadas electrónicamente y, finalmente, se obtiene su diferencia, que es la cantidad de interés dado que contiene el término de interferencia del oscilador local y la señal. Asumimos, por simplicidad, que las corrientes medidas I_1 e I_2 son proporcionales al número de fotones \hat{n}_1 y \hat{n}_2 de los haces que llegan a los detectores, es decir,

$$I_1 \propto \hat{n}_1 = \hat{c}^\dagger \hat{c}$$

$$I_2 \propto \hat{n}_2 = \hat{d}^\dagger \hat{d}$$

Expresando la diferencia de intensidades $I_D = I_1 - I_2 \propto \hat{n}_{21}$ en términos de la señal de entrada y del oscilador local, obtenemos la siguiente expresión.

$$I_D \propto \hat{n}_{21} = \hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{b} \quad (25)$$

⁴Un divisor de haz (o beam splitter en inglés) es un instrumento óptico que divide un rayo de luz en dos. Es una parte fundamental de la mayoría de los interferómetros.

⁵Normalmente, los fotodetectores usados en este experimento son fotodiodos de respuesta lineal [6].

Como estamos considerando el oscilador local dentro de la óptica clásica, el operador \hat{b} será simplemente un número complejo $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, y por lo tanto la expresión anterior queda,

$$I_D \propto \hat{n}_{21} = |\alpha|(\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) \quad (26)$$

Expresando el operador \hat{a} en términos de sus cuadraturas, encontramos una relación entre la diferencia del número de fotones y el operador cuadratura de fase (24).

$$\hat{n}_{21} = \sqrt{2}|\alpha|(\hat{q} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta) = \sqrt{2}|\alpha|q_\theta \quad (27)$$

Un detector homodino balanceado mide el operador cuadratura generalizado q_θ . La referencia de la fase se varía mediante el oscilador local utilizando, por ejemplo, un espejo piezoeléctrico móvil. Un método experimental para encontrar la escala de la cuadratura consiste en medir también la suma de las corrientes dado que la suma de I_1 e I_2 es proporcional a $|\alpha|^2$. Esto puede ser importante experimentalmente dado que la intensidad del oscilador local suele ser una variable desconocida.

Pese a que el modelo teórico de la medida es un híbrido entre la mecánica cuántica y la física clásica, el resultado final (27) es correcto y ha sido verificado por teorías más sofisticadas de detección homodina [44, 48, 52, 53].

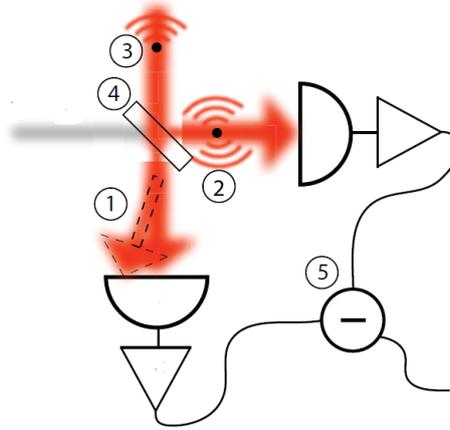


Figura 7: Esquema de problemas de medida del montaje de detección homodina balanceada. 1-Precisión del haz. 2-Pérdida por dispersión. 3-Interferencia por dispersión. 4-Exactitud en la división del haz. 5-Diferencia de las intensidades. [51]

7. Tomografía cuántica y ejemplos de reconstrucción.

En este punto tenemos todas las piezas del rompecabezas con el que empezábamos la introducción, pero aun tenemos que unirlos. Fueron Vogel y Risken [4] en 1989 los que descubrieron que la distribución de probabilidad de la cuadratura de fase puede ser expresada en términos de cuasiprobabilidades, y que también se puede recorrer ese camino en sentido opuesto, es decir, si conocemos la probabilidad de distribución de la cuadratura de fase para todo θ podemos obtener la distribución de cuasiprobabilidad.

La distribución de probabilidad (8)

$$\chi(\xi, s) = Tr[\exp(\xi \hat{a}^\dagger - \xi^* \hat{a} + s|\xi|^{1/2})\rho] \quad (28)$$

es decir,

$$W(\alpha, s) = \frac{1}{\pi} \int \chi(\xi, s) \exp(\alpha \xi^* - \alpha^* \xi) d^2 \xi \quad (29)$$

La información para calcular cualquier valor de la cuadratura de fase viene dado por su probabilidad de distribución. Como hemos visto, dicha distribución puede ser definida como la transformada de Fourier de su función característica,

$$\kappa(\eta, \theta) = Tr[e^{i\eta q_\theta} \rho] \quad (30)$$

es decir,

$$\omega(x, \theta) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\eta, s) e^{(-i\eta x)} d^2 \eta \quad (31)$$

El objetivo de Vogel y Risken era establecer una relación de correspondencia entre la distribución de cuasiprobabilidad $W(\alpha, s)$ y la distribución de probabilidad $\omega(q, \theta)$. En su artículo [4], obtienen la siguiente expresión.

$$\kappa(\eta, \theta) = \chi(i\eta e^{i\theta}/2, s) e^{-s\eta^2/8} \quad (32)$$

Esto significa que, si conocemos $\kappa(\eta, \theta)$ para todos los valores de η en el rango $-\infty < \eta < +\infty$ y para todos los valores de θ en el rango $0 \leq \theta < \pi$, la función característica $\chi(\xi, s)$ es conocida en todo el plano complejo ξ . Por tanto, existe una relación de correspondencia uno a uno entre las funciones características (30) y (28) y, por tanto, tenemos también una relación de correspondencia entre la distribución de probabilidad (31) y la de cuasiprobabilidad (29). Usando la transformada de Fourier sobre la relación (32) Vogel y Risken obtienen la relación entre las distribuciones. En el caso de la función de Wigner ($s = 1$) dicha expresión toma la siguiente forma (expresada en notación real $\xi = \xi_r + i\xi_i$; $\chi(\xi, s) = \chi(\xi_r, \xi_i, s)$).

$$\omega(x, \theta) = \int W(x \cos \theta - v \sin \theta, x \sin \theta + v \cos \theta, 0) dv \quad (33)$$

Si comparamos esta expresión con la definición de la transformada de Radon (23) podemos ver que la distribución de probabilidad es la transformada de Radon de la distribución de cuasiprobabilidad. Por tanto, podemos obtener la función de cuasiprobabilidad mediante la transformada de Radon inversa de la distribución de probabilidad del operador cuadratura de fase.

7.1. Reconstrucción tomográfica de estados cuánticos

A modo de resumen: Mediante un detector homodino balanceado podemos medir la cuadratura rotada en función de la fase (27) de una cierta señal de entrada, es decir, de un cierto estado cuántico del oscilador electromagnético. Dicha medición resulta ser la transformada de Radon inversa de la distribución de cuasiprobabilidad de Wigner (10). Una vez obtenida la función de Wigner, podemos obtener la matriz de densidad (14) de dicho estado. Una vez hemos llegado aquí, hemos reconstruido el estado de nuestro sistema cuántico a medir, la luz. Y, ¿Para qué nos sirve conocer el estado cuántico? Una vez que conocemos el estado podemos calcular distribuciones o momentos de cantidades incluso aunque no sea posible medirlos directamente. De hecho, podemos calcular cantidades que no corresponden a ningún operador hermítico y que no se pueden medir directamente. En la figura 10 se muestra la reconstrucción del estado de vacío cuántico. Además, en el apéndice C se encuentran las figuras de reconstrucción para diferentes estados cuánticos.

7.1.1. Efecto del error en la reconstrucción

Para simular la medida se tienen en cuenta distintos tipos de error. Por una parte se restringe el número de valores de salida $p(m, \theta)$, así como los valores que pueden tomar las variables m y θ . El objetivo de estos errores es simular la resolución de los aparatos de medida. Para el error estándar ⁶ se han restringido los valores de θ a 60 posibles entre 0° y 180° , y los valores de m a una resolución de tres unidades de distancia. Además, los valores de la probabilidad solo pueden tomar 80 posibles valores. Para elegir estos parámetros nos basamos en el artículo de Braverman [54].

Los errores existentes debidos a la dispersión del haz, bien resulte en pérdida de información o en interferencia parásita, así como a la desviación del haz de fotones con respecto al fotodiodo, los simulamos mediante la adición de ruido aleatorio, de fondo, proporcional a cada valor y en puntos aleatorios. En el caso del error estándar, por una parte añadimos un ruido aleatorio de fondo a toda la probabilidad con un valor máximo de 0.1 sobre la medición normalizada. Además, en cada punto existe un error aleatorio del 10%. Finalmente, provocamos interferencias en un 5% de los puntos creando en estos picos de error de máximo 0.1 sobre la señal normalizada.

En la figura 8 se exponen resultados para diferentes simulaciones de error con respecto a la resolución en la reconstrucción de un estado cuántico tipo gato de Schrödinger. En la figura 9 se estudia el efecto de error aleatorio en la medida de un autoestado de la energía. En ambos casos se puede observar como, pese a la intensidad del ruido, es posible identificar la matriz de densidad. De todas maneras hay que mencionar que todos estos ruidos son simétricos, pseudoaleatorios (en el caso de simular aleatoriedad) y muy concretos; por lo que puede ser que no aproximen bien los resultados medidos bajo ciertas condiciones.

⁶Definimos el error estándar como el error utilizado para simular la medida de la distribución de probabilidad de la cuadratura de fase en la reconstrucción de los estados de la sección 7.1.

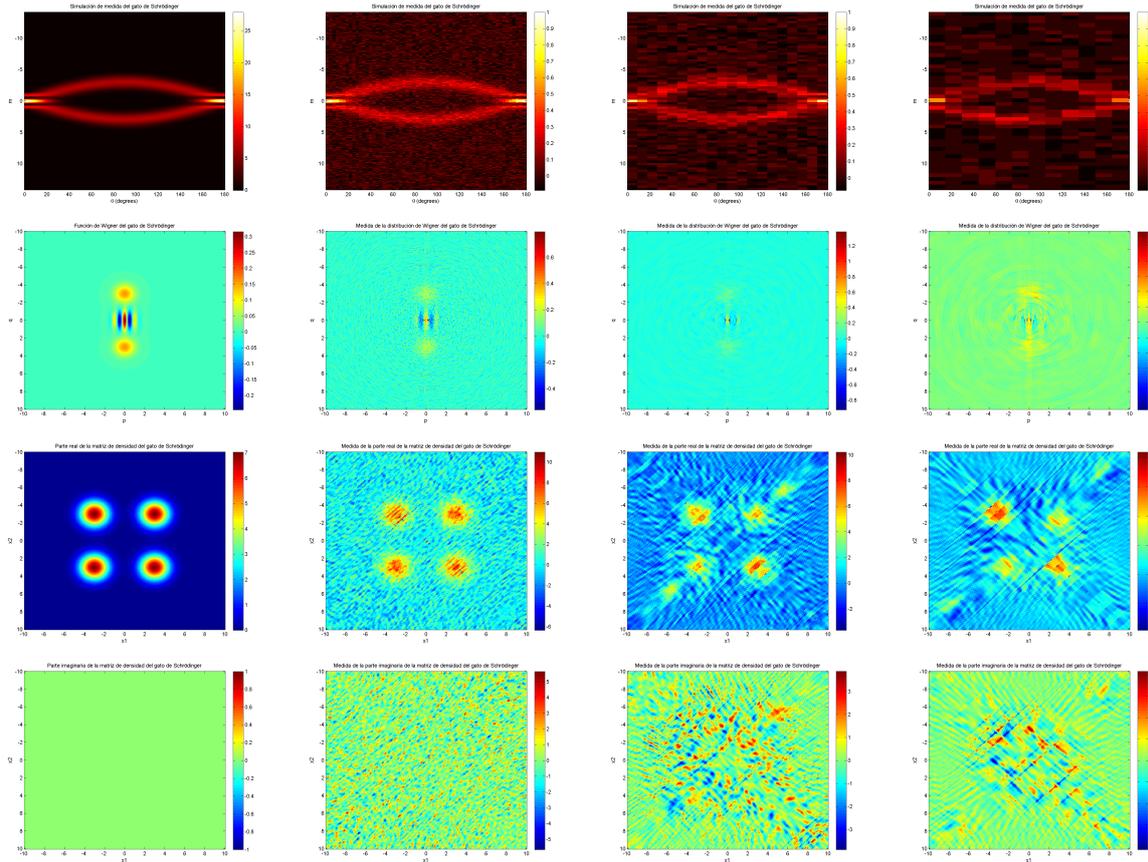


Figura 8: Efecto de la simulación de la resolución en la reconstrucción del estado del gato de Schrödinger $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha = 3\rangle + |\alpha = -3\rangle)$. En la primera columna se muestran los resultados sin simulación de error. En la segunda columna se muestra la simulación con el error estándar. En la tercera columna la resolución se divide en un factor 3. En la última columna se reduce la resolución en un factor 5 respecto al estándar. De arriba a abajo encontramos: simulación de la medida, transformada inversa de Radon para obtener la función de Wigner, parte real e imaginaria de la matriz de densidad respectivamente.

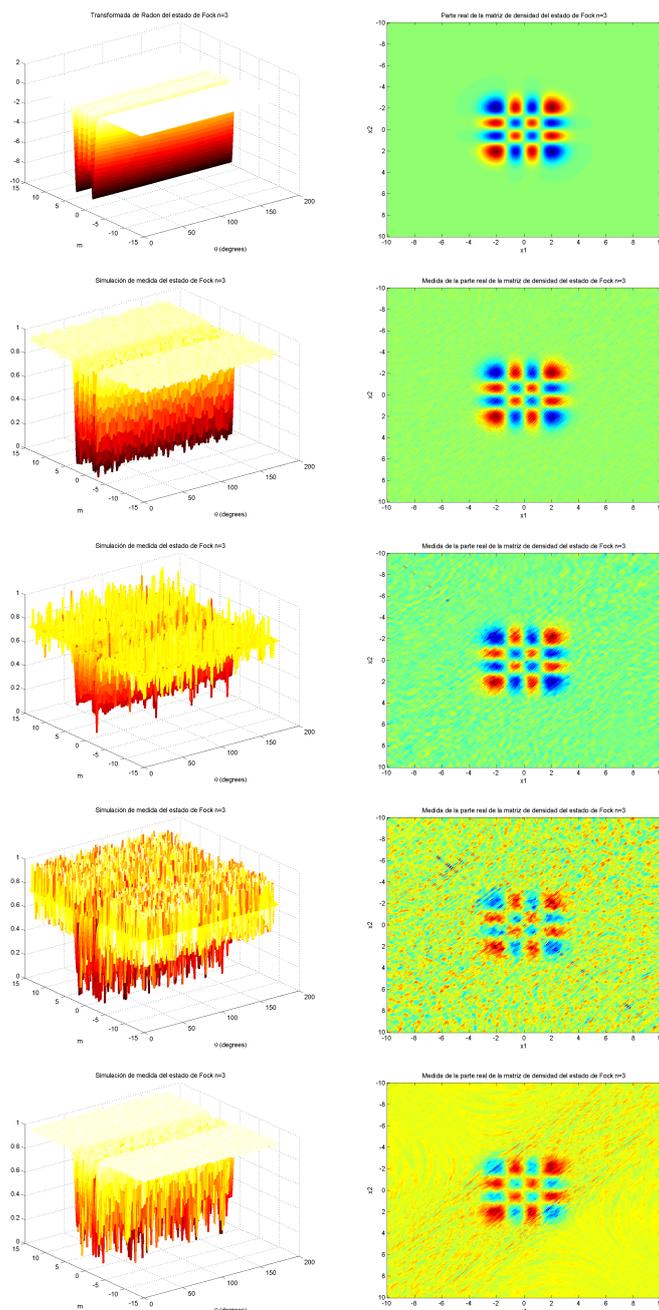


Figura 9: Efecto de la simulación de ruido aleatorio en la reconstrucción del estado de Fock $n = 3$. A la izquierda encontramos la simulación de la medida y a la derecha la parte real de la matriz de densidad. En la primera fila tenemos la representación teórica, sin simulación de ruido. En la segunda fila está representada la simulación con el ruido estándar. En la tercera fila aumentamos en un orden de magnitud el error producido en puntos aleatorios. En la cuarta fila aumentamos en un orden de magnitud el error aleatorio de fondo de todos los puntos. En la última fila aumentamos en un orden de magnitud el error aleatorio proporcional a cada punto.

7.1.2. Reconstrucción del estado cuántico del vacío

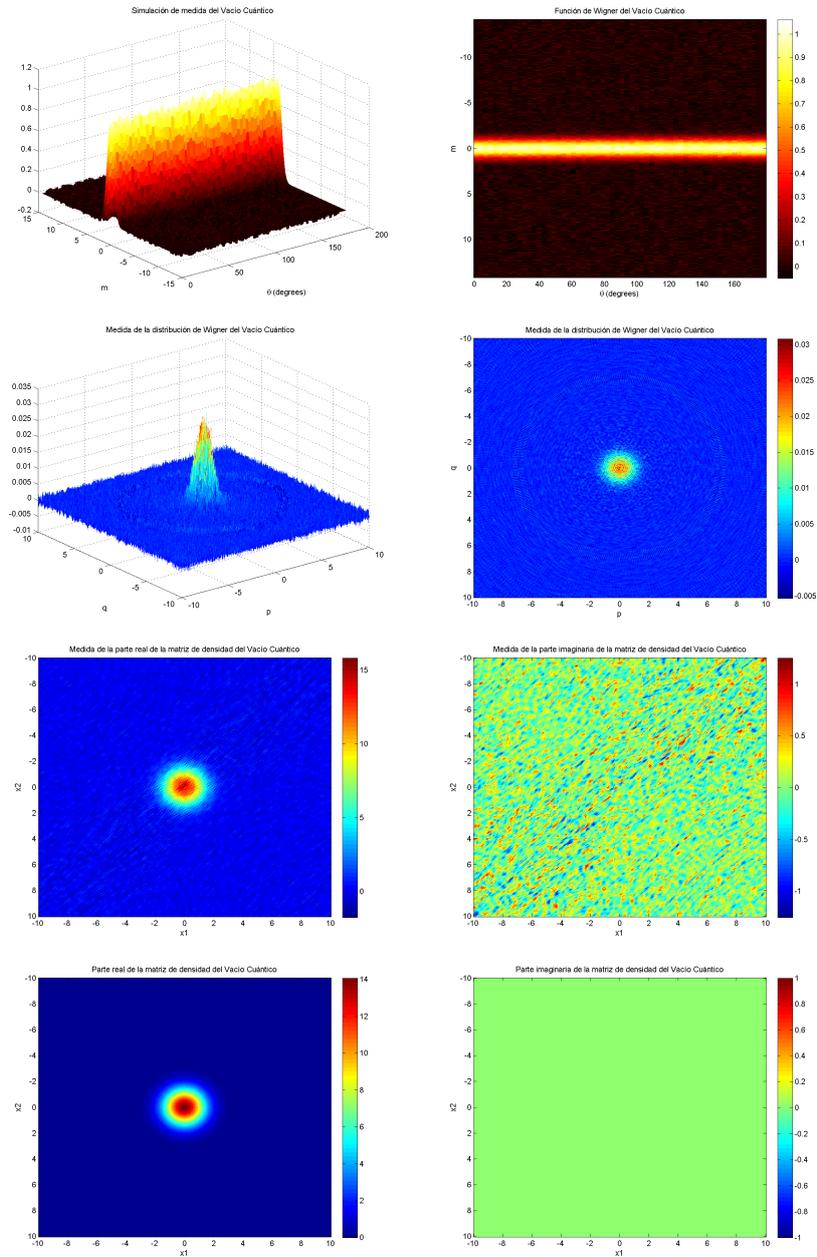


Figura 10: Reconstrucción del estado de vacío cuántico. En la primera línea se representa la simulación de la medida de la distribución de probabilidad de la cuadratura de fase. En la segunda línea la cuasidistribución de Wigner obtenida mediante la transformada de Radon inversa. En la tercera línea se puede ver la parte real e imaginaria de la matriz de densidad obtenida de la función de Wigner previa. En la cuarta línea se representan la parte real e imaginaria de la matriz de densidad correspondiente al vacío cuántico para comparar la simulación de la medida con el resultado teórico exacto.

8. Conclusiones

La medición de los estados cuánticos de la luz ha sido el tema que nos ha guiado a lo largo del trabajo. Hemos empezado con ciertas consideraciones sobre la mecánica cuántica y se ha presentado brevemente la teoría cuántica de la luz, de la mano del oscilador electromagnético. Otro de los capítulos ha estado dedicado a las distribuciones de cuasiprobabilidad, dejando entrever la idea del espacio de fases en la mecánica cuántica, principalmente la representación de Wigner. Estudiando el esquema de detección homodina balanceada se puede ver la eficiencia de dicho detector para medir propiedades cuánticas de la luz. Estos temas, junto con la transformada de Radon, nos han servido de preparación para acercarnos a la tomografía cuántica.

Con herramientas que se encuentran a nuestro alcance podemos simular la medida de la cuadratura de la fase. En un programa como Matlab tenemos incluida una herramienta para calcular transformadas de Radon y sus inversas, y también se podría implementar el algoritmo en un código sencillo sin necesidad de usar Matlab. Diversos programas de cálculo matemático y de representación gráfica nos permiten representar estados cuánticos en el espacio de fases y poder observar, de modo más visual, el efecto de los operadores desplazamiento o compresión, así como la superposición y la mezcla de estados. Estas herramientas son sencillas de usar pero con resultados muy ilustrativos que permiten una mayor comprensión de los temas a estudiar.

Para finalizar, de la mano de las mencionadas herramientas de representación se ha podido seguir el proceso de reconstrucción de estados cuánticos gracias a la tomografía cuántica. Este campo ha crecido de manera significativa durante los últimos 25 años, debido al creciente conocimiento de la naturaleza cuántica de la luz y de la creación de fuentes de luz altamente no clásicas; y es un campo que sigue desarrollándose y diversificándose. Encontramos lecturas más detalladas y amplias sobre este campo en diversos artículos y libros; como ejemplos se citan: [6, 55, 56].

Referencias

- [1] W. Pauli, in *Handbuch der Physik*, eds. H. Geiger and K. Scheel (Springer, Berlin, 1933).
- [2] Fano U., *Rev. Mod. Phys.*, 29 (1957) 74.
- [3] D.G. Welsch, W. Vogel, and T.Opatrny, in *Progress in Optics*, edited by E. Wolf (Elsevier Science, Amsterdam, 1999), Vol. 39, pp 63-211.
- [4] K. Vogel and H. Risken, *Phys. Rev. A* 40, 2847 (1989).
- [5] D.T. Smithey, M. Beck, M.G. Raymer, and A. Faridani, *Phys. Rev. Lett* 70, 1244 (1993).
- [6] U. Leonhardt: *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997).
- [7] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40:749-759, Jun 1932.
- [8] P. A. M. Dirac. Bakerian lecture. the physical interpretation of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 180(980):1-40, March 1942.
- [9] Marlan O. Scully, Herbert Walther, and Wolfgang Schleich. Feynman's approach to negative probability in quantum mechanics. *Phys. Rev. A*, 49:1562-1566, Mar 1994.
- [10] Cosmas K. Zachos, David B. Fairlie, and Thomas L. Curtright. *Quantum Mechanics in Phase Space*. World Scientific, 2005.
- [11] A. Royer, *Found. Phys.* 19, 3 (1989).
- [12] L. E. Ballentine: *Quantum Mechanics: a Modern Development* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [13] Pauli W., *Encyclopedia of Physics*, (Springer, Berlin) 1958, Vol. V, p. 17.
- [14] R. W. Gerchberg and W. O. Saxon: *Optik* 35, 237 (1972).
- [15] A. M. J. Huiser, A. J. J. Drenth, and H. A. Ferwerda: *Optik* 45, 303 (1976). 7 Experimental Quantum State Tomography 291.
- [16] A. Orłowski and H. Paul: *Phys. Rev. A* 50, R921 (1994).
- [17] J. R. Ashburn, R. A. Cline, P. J. M. van der Burgt, W. B. Westerveld, and J. S. Risley: *Phys. Rev. A* 41, 2407 (1990).
- [18] G. Breitenbach, S. Schiller, and J. Mlynek: *Nature* 387, 471 (1997).
- [19] K. Banaszek, C. Radzewicz, K. Wodkiewicz, and J. S. Krasinski: *Phys. Rev. A* 60, 674 (1999).
- [20] A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek, and S. Schiller: *Phys. Rev. Lett.* 87, 050402 (2001).

- [21] A. G. White, D. F. V. James, P. H. Eberhard, and P. G. Kwiat: Phys. Rev.Lett. 83, 3103 (1999).
- [22] T. J. Dunn, I. A. Walmsley, and S. Mukamel: Phys. Rev. Lett. 74, 884 (1995).
- [23] C. Kurtsiefer, T. Pfau, and J. Mlynek: Nature 386, 150 (1997).
- [24] I. L. Chuang, N. Gershenfeld, M. G. Kubinec, and D. W. Leung: Proc. R. Soc.London A 454, 447 (1998).
- [25] Heisenberg, W. (1927), "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", Zeitschrift für Physik
- [26] El espejismo de Dios, Richard Dawkins.
- [27] Longair, Malcolm (2003). Theoretical Concepts in Physics. p. 87.
- [28] Gazeau, Jean-Pierre: Coherent States in Quantum Physics (Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2009)
- [29] C. Gerry, P. Knight: Introductory Quantum Optics (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2005)
- [30] Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Quasiprobability_distribution
- [31] K. E. Cahill and R. J. Glauber, Phys. Rev. 177, 1882 (1969).
- [32] William Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications (John Wiley & sons, Inc, New York, 1970)
- [33] Boris Braverman: The Wigner function and quantum state tomography (2012)
- [34] Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. Nat. Kl. 69 (1917), 262-277.
- [35] Stanley Roderick Deans: The Radon Transform and Some of its Applications
- [36] John, F. "Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse annigfaltigkeiten," Math. Ann., 109, 488-520. (1934)
- [37] Mader, Ph. (1927). Über die Darstellung von Punktfunktionen im w-dimensionalen euklidischen Raum durch Ebenenintegrale," Math. Z., 26, 646-652.
- [38] M Asorey, P Facchi, VI Man'ko, G Marmo, S Pascazio, ECG Sudarshan. Physica Scripta 85 (6), 065001 (2012)
- [39] Soporte de Matlab <http://es.mathworks.com/help/images/ref/radon.html>
- [40] Helgason, S. (1980). The Radon Transform, Birkhauser, Boston, Basel, Stuttgart.
- [41] Soporte de Matlab <http://es.mathworks.com/help/images/ref/iradon.html>
- [42] M Asorey, P Facchi, G Florio, VI Man'ko, G Marmo, S Pascazio. Physics Letters A 375 (5), 861-866 (2011)

- [43] M Asorey, P Facchi, VI Man'ko, G Marmo, S Pascazio, ECG Sudarshan. *Physica Scripta* 90, 065101 (2015)
- [44] L. Braunstein, Samuel: *Phys. Rev. A* 42, 474 (1990)
- [45] Yuen, H.E, and Chan, V.W.S. (1983), *Opt. Lett.* 8, 177.
- [46] Abbas, G.L., Chan, V.W.S., and Yee, T.K. (1983), *Opt. Lett.* 8, 419.
- [47] Werner Vogel and Jens Grabow: *Phys. Rev. A* 47, 4227 (1992)
- [48] Raymer, M.G., Cooper, J., Carmichael, H.J., Beck, M., and Smithey, D.T. (1995), *J. Opt. Soc. Am. B* 12, 1801.
- [49] B. Yurke and D. Stoler: *Phys. Rev. A* 36, 1955 (1987)
- [50] G. M. D'Ariano, L. Maccone, and M. F. Sacchi: Homodyne tomography and the reconstruction of quantum states of light (2005)
- [51] M. S. Stefszky, C. M. Mow-Lowry, S. S. Y. Chua, D. A. Shaddock, B. C. Buchler, H. Vahlbruch, A. Khalaidovski, R. Schnabel, P. K. Lam, and D. E. McClelland: Balanced Homodyne Detection of Optical Quantum States at Audio-Band Frequencies and Below
- [52] Carmichael, H.J. (1987), *J. Opt. Soc. Am. B* 4, 1588.
- [53] Ou, Z.Y., and Kimble, H.J. (1995), *Phys. Rev. A* 52, 3126.
- [54] Boris Braverman: The Wigner function and quantum state tomography (MIT, Massachusetts, USA, 2012)
- [55] A. I. Lvovsky y M. G. Raymer: *Reviews of Modern Physics*, 81, 2009
- [56] G. Mauro D'Ariano, Matteo G.A. Paris, and Massimiliano F. Sacchi. Quantum tomography. In Peter W. Hawkes, editor, *Advances in Imaging and Electron Physics*, volume 128, pages 205–308. Elsevier, 2003.
- [57] M Asorey, A Ibort, G Marmo, F Ventriglia: Quantum Tomography twenty years later, *Physica Scripta* 90 (7), 074031 (2015)
- [58] Jin-Sheng Peng y Gao-Xiang Li: *Introduction to Modern Quantum Optics*, World Scientific (1998)
- [59] Marian O. Scully y M. Suhail Zubairy: *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1997.
- [60] D. F. Walls y G. J. Milburn: *Quantum Optics*, Springer, 1997.
- [61] Hagai Eisenberg: Wigner representation and homodyne detection course, Quantum optic seminar by Amir Leshem, Racah Institute of Physics, Hebrew University.
- [62] Werner Vogel y Dirk-Gunnar Welsch: *Quantum Optics*, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006

Material suplementario

A. Representación de funciones de onda

En este apéndice se representan las funciones de onda de algunos de los estados cuánticos mencionados. La superficie de color azul es el área que recorre la función de ondas en su evolución temporal. La línea verde es la función de ondas en un determinado momento (cuyo valor no es relevante, sino que se escoge aquel que ayuda visualmente a la comprensión de la figura). Un eje viene determinado por la variable x , mientras que los otros dos ejes son la parte real y la parte imaginaria de la función de ondas.

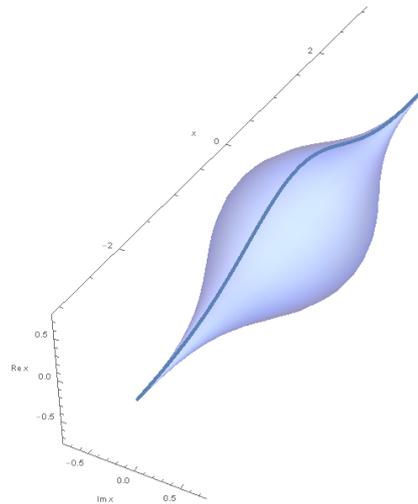


Figura 11: Función de ondas del vacío cuántico.

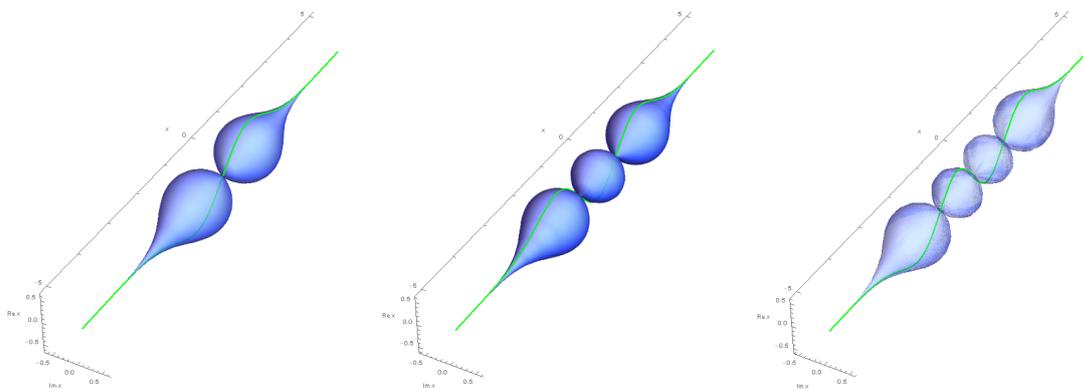


Figura 12: Función de ondas de los tres primeros estados de Fock ($n=1,2,3$).

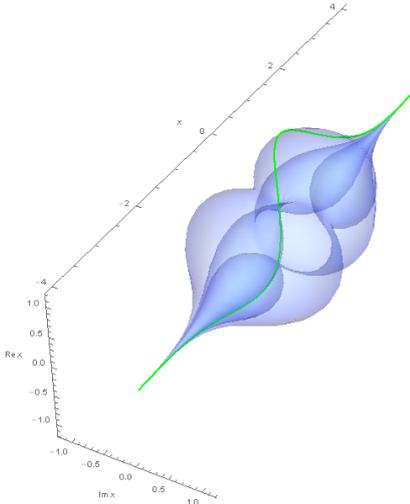


Figura 13: Función de ondas de la superposición del vacío cuántico con el primer estado de Fock ($n=1$).

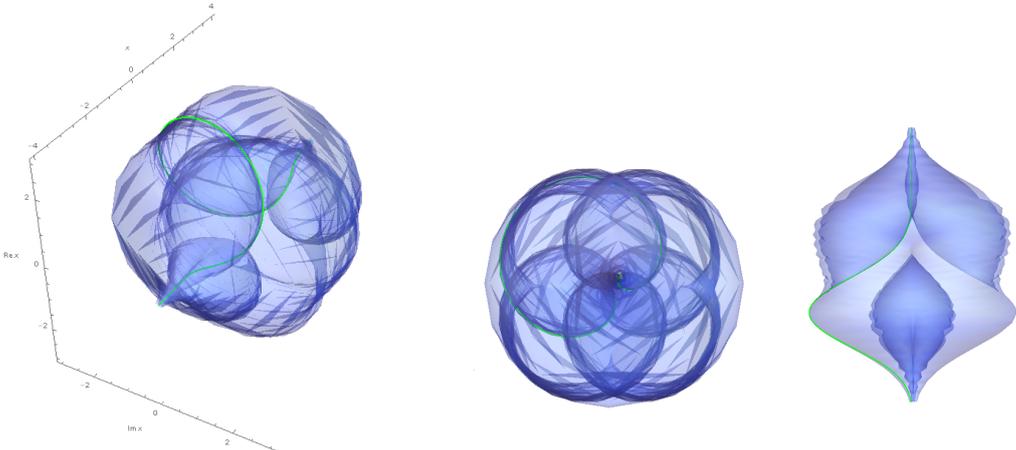


Figura 14: Función de ondas de un estado coherente ($\alpha = 1$) vista desde diferentes posiciones.

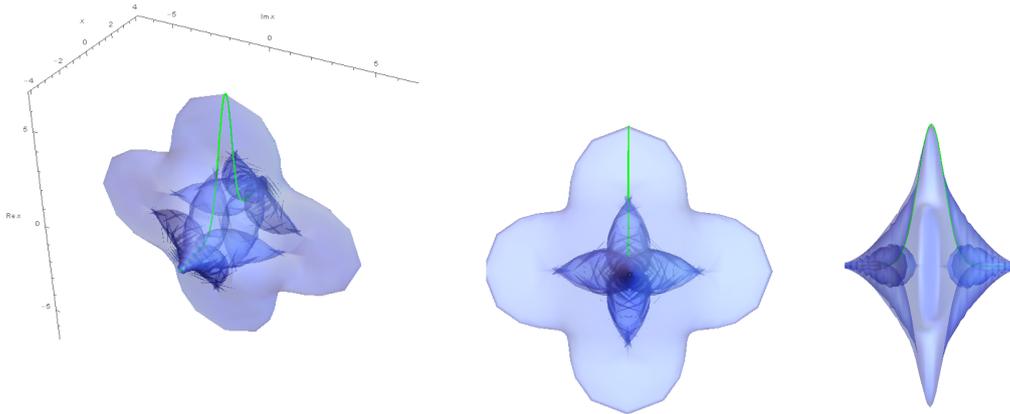


Figura 15: Función de ondas de un estado comprimido ($\xi = 1,3$) vista desde diferentes posiciones.

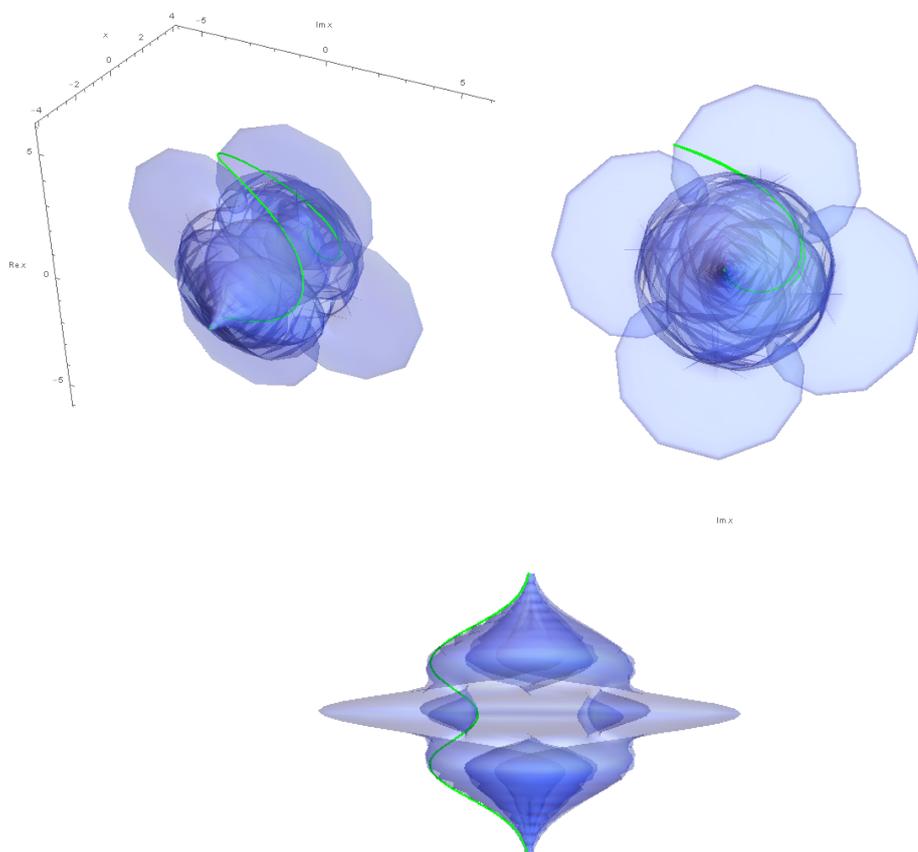


Figura 16: Función de ondas de una superposición de estados coherentes tipo gato de Schrödinger ($|1\rangle + |-1\rangle$) vista desde diferentes posiciones.

B. Cálculo de las funciones de Wigner

En este apéndice se calculan paso a paso las distribuciones de de Wigner de los diferentes estados. Conociendo la función de ondas de cada uno de los estados, calculamos la función de Wigner con la siguiente expresión:

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \Psi^*(q - \frac{x}{2}) \Psi(q + \frac{x}{2}) e^{ipx} dx \quad (34)$$

A la hora de calcular las funciones de Wigner, suponemos unidades tal que $\hbar = 1$ y $m\omega = 1$.

Función de Wigner del vacío cuántico

La función de ondas del vacío cuántico en una dimensión e independiente del tiempo es:

$$\Psi_0 = \pi^{-1/4} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (35)$$

Calculamos la función de Wigner,

$$\begin{aligned} W_0(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int \Psi_0^*(q - \frac{y}{2}) \Psi_0(q + \frac{y}{2}) e^{ipy} dy = \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} \int e^{\frac{1}{2}(q-y/2)^2 - \frac{1}{2}(q+y/2)^2 + ipy} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} \int e^{-q^2 - (y/2)^2 + ipy} dy = \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} e^{-q^2} \int e^{-\frac{1}{4}(y-2ip)^2 - p^2} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} e^{-(q^2+p^2)} \int e^{-b^2} db = \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} e^{-(q^2+p^2)} \sqrt{\pi} = \pi^{-1/2} e^{-(q^2+p^2)} \end{aligned}$$

con $b = \frac{y-2ip}{2}$, por tanto,

$$W_0(q, p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(q^2+p^2)} \quad (36)$$

Función de Wigner de los estados de Fock

La función de ondas de un estado de Fock general en función de n viene dada por,

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_n(x) \quad (37)$$

Donde H_n es el polinomio de Hermite de grado n .

La función de Wigner del estado de Fock n es [61]

$$W_n(q, p) = \frac{(-1)^n}{2\pi} e^{-(q^2+p^2)} L_n(2[q^2 + p^2]) \quad (38)$$

Función de Wigner de los estados coherentes

La función de ondas de un estado coherente viene dada por,

$$\psi_\alpha(q, p) = \pi^{-1/4} e^{i\langle p \rangle_\alpha q - \frac{1}{2}(q - \langle q \rangle_\alpha)^2} \quad (39)$$

Calculamos la función de Wigner,

$$\begin{aligned}
W_\alpha(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int \Psi_\alpha^*(q - \frac{y}{2}) \Psi_\alpha(q + \frac{y}{2}) e^{ipy} dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} \int e^{[-i\langle p \rangle_\alpha (q-y/2) - \frac{1}{2}(q-y/2 - \langle q \rangle_\alpha)^2]} e^{[i\langle p \rangle_\alpha (q+y/2) - \frac{1}{2}(q+y/2 - \langle q \rangle_\alpha)^2]} e^{ipy} dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} e^{-(q - \langle q \rangle_\alpha)^2} \int e^{i\langle p \rangle_\alpha y - \frac{1}{4}y^2 + ipy} dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} e^{-(q - \langle q \rangle_\alpha)^2} \int e^{-\frac{1}{4}(y - 2i[p + \langle p \rangle_\alpha])^2 - (p + \langle p \rangle_\alpha)^2} dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} e^{-(q - \langle q \rangle_\alpha)^2 - (p + \langle p \rangle_\alpha)^2} 2 \int e^{-b^2} db = \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} e^{-(q - \langle q \rangle_\alpha)^2 - (p + \langle p \rangle_\alpha)^2} 2\pi
\end{aligned}$$

con $b = \frac{y - 2i(p + \langle p \rangle_\alpha)}{2}$, por tanto,

$$W_\alpha(q, p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-([q - \langle q \rangle_\alpha]^2 + [p + \langle p \rangle_\alpha]^2)} \quad (40)$$

Función de Wigner de los estados comprimidos

El operador de compresión modifica las amplitudes de la siguiente manera [62],

$$\hat{a}' = \hat{S}^\dagger(z) \hat{a} \hat{S}(z) = \hat{a} \cosh r - e^{i\theta} \hat{a}^\dagger \sinh r$$

$$\hat{a}'^\dagger = \hat{S}^\dagger(z) \hat{a}^\dagger \hat{S}(z) = \hat{a}^\dagger \cosh r - e^{-i\theta} \hat{a} \sinh r$$

Siendo el factor de compresión $\xi = r e^{i\theta}$. Teniendo en cuenta que $q = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}$ y $p = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}$, podemos ver como se modifican los operadores de momento y posición,

$$\hat{q}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(r) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(r) (\hat{a} e^{i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{-i\theta}) = \hat{q} (\cosh(r) - \cos(\theta) \sinh(r)) + \hat{p} \sin(\theta) \sinh(r)$$

$$\hat{p}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(r) (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(r) (\hat{a} e^{i\theta} - \hat{a}^\dagger e^{-i\theta}) = \hat{p} (\cosh(r) + \cos(\theta) \sinh(r)) - \hat{q} \sin(\theta) \sinh(r)$$

Sabiendo como cambian los operadores de posición y de momento al actuar sobre ellos el vector de compresión, podemos saber como cambian la posición x y el momento p proyectando estos operadores sobre cualquier estado, teniendo en cuenta que $\hat{q}|\psi\rangle = q|\psi\rangle$ y $\hat{p}|\psi\rangle = p|\psi\rangle$. Conocido x' y p' podemos calcular la función de Wigner de los estados comprimidos mediante la función de Wigner del vacío, simplemente sustituyendo en esta la posición y el momento debidos a la compresión. Suponiendo $\xi = r$, es decir, $\theta = 0$, podemos calcular la suma de los cuadrados

$$q'^2 + p'^2 = q^2 e^{2r} + p^2 e^{-2r}$$

Y usando la función de Wigner del vacío (36) tenemos que,

$$W_\xi(q, p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(q^2 e^{2r} + p^2 e^{-2r})} \quad (41)$$

Función de Wigner de la mezcla de estados

La matriz de densidad de la mezcla de dos estados viene dada por

$$\rho = p_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| + p_\beta |\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta| \quad (42)$$

Y la función de Wigner en el caso general de una matriz de densidad toma la forma,

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \rho(q - x/2, q + x/2) e^{ipx} dx \quad (43)$$

Podemos expresar esta expresión en términos de funciones de Wigner conocidas,

$$\begin{aligned} W_\rho(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int (p_\alpha \psi_\alpha^*(q - x/2) \psi_\alpha(q + x/2) + p_\beta \psi_\beta^*(q - x/2) \psi_\beta(q + x/2)) e^{ipx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} p_\alpha \int \psi_\alpha^*(q - x/2) \psi_\alpha(q + x/2) e^{ipx} dx + \frac{1}{2\pi} p_\beta \int \psi_\beta^*(q - x/2) \psi_\beta(q + x/2) e^{ipx} dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos ver que

$$W_\rho(q, p) = p_\alpha W_\alpha(q, p) + p_\beta W_\beta(q, p) \quad (44)$$

Pese a que en el trabajo no tenemos en cuenta mezclas de más de dos estados, se puede ver como para una matriz de densidad en general tal que $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ obtenemos una función de Wigner $W_\rho(q, p) = \sum_i p_i W_i(q, p)$.

Función de Wigner de la superposición de estados

Suponemos la superposición de dos estados coherentes tal que

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle \pm |\beta\rangle) \quad (45)$$

Podemos expresar esta expresión en términos de funciones de Wigner conocidas, y de un nuevo término a calcular

$$\begin{aligned} W_{\alpha+\beta}(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int \rho(q - x/2, q + x/2) e^{ipx} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int [\psi_\alpha(q - x/2) \pm \psi_\beta(q - x/2)]^* [\psi_\alpha(q + x/2) \pm \psi_\beta(q + x/2)] e^{ipx} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int [\psi_\alpha^*(q - x/2) \psi_\alpha(q + x/2) e^{ipx} dx \pm \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int \psi_\alpha^*(q - x/2) \psi_\beta(q + x/2) e^{ipx} dx \pm \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int \psi_\beta^*(q - x/2) \psi_\alpha(q + x/2) e^{ipx} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int \psi_\beta^*(q - x/2) \psi_\beta(q + x/2) e^{ipx} dx \end{aligned}$$

Es decir

$$W_{\alpha+\beta}(q, p) = W_\alpha(q, p) \pm W_{\alpha\beta}(q, p) \pm W_{\beta\alpha}(q, p) + W_\beta(q, p) \quad (46)$$

Con,

$$W_{\alpha\beta}(q, p) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int \psi_\alpha^*(q - x/2) \psi_\beta(q + x/2) e^{ipx} dx \quad (47)$$

Procediendo a calcular dicha expresión, obtenemos

$$W_{\alpha\beta}(q, p) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int \psi_\alpha^*(q - x/2) \psi_\beta(q + x/2) e^{ipx} dx =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-i\langle p \rangle_\alpha (q-x/2) - \frac{1}{2}(q-x/2 - \langle q \rangle_\alpha)^2} + e^{i\langle p \rangle_\beta (q+x/2) - \frac{1}{2}(q+x/2 - \langle q \rangle_\beta)^2} e^{ipx} dx = \\
& = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{iq(\langle p \rangle_\beta - \langle p \rangle_\alpha)} e^{-\frac{1}{2}([q - \langle q \rangle_\alpha]^2 + [q - \langle q \rangle_\beta]^2)} \int e^{[i(p + \frac{\langle p \rangle_\alpha + \langle p \rangle_\beta}{2}) - \frac{1}{2}(\langle q \rangle_\alpha - \langle q \rangle_\beta)]x - \frac{x^2}{4}} dx = \\
& = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{iq(\langle p \rangle_\beta - \langle p \rangle_\alpha)} e^{-\frac{1}{2}([q - \langle q \rangle_\alpha]^2 + [q - \langle q \rangle_\beta]^2)} I
\end{aligned}$$

En donde por I denotamos la integral de la forma

$$I = \int e^{-ax^2 + bx} dx$$

Con $a = \frac{1}{4}$ y $b = [i(p + \frac{\langle p \rangle_\alpha + \langle p \rangle_\beta}{2}) - \frac{1}{2}(\langle q \rangle_\alpha - \langle q \rangle_\beta)]$. Esta integral se puede expresar en forma de una gaussiana teniendo en cuenta que $-ax^2 + bx = -a(x - \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2}{4a}$, y efectuando el cambio de variable $z = \sqrt{a}(x - \frac{b}{2a})$, tal que

$$I = \int e^{-ax^2 + bx} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \int e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Donde hemos tenido en cuenta que la integral de la gaussiana es $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$.

Juntando todo esto nuestra expresión queda en la forma,

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta}(q, p) & = \frac{1}{2\pi} e^{iq(\langle p \rangle_\beta - \langle p \rangle_\alpha) - \frac{1}{2}([q - \langle q \rangle_\alpha]^2 + [q - \langle q \rangle_\beta]^2) + \frac{b^2}{4a}} = \\
& = \frac{1}{2\pi} e^{iq(\langle p \rangle_\beta - \langle p \rangle_\alpha) - \frac{1}{2}([q - \langle q \rangle_\alpha]^2 + [q - \langle q \rangle_\beta]^2) - (p + \frac{\langle p \rangle_\beta + \langle p \rangle_\alpha}{2})^2 + \frac{1}{4}(\langle q \rangle_\beta - \langle q \rangle_\alpha)^2 - i(p + \frac{\langle p \rangle_\beta + \langle p \rangle_\alpha}{2})(\langle q \rangle_\alpha - \langle q \rangle_\beta)}
\end{aligned}$$

El término $W_{\beta\alpha}(q, p)$ tendrá una expresión similar a $W_{\alpha\beta}(q, p)$ pero intercambiando los valores medios de α por los valores medios de β , es decir, $W_{\beta\alpha}(q, p) =$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{iq(\langle p \rangle_\alpha - \langle p \rangle_\beta) - \frac{1}{2}([q - \langle q \rangle_\beta]^2 + [q - \langle q \rangle_\alpha]^2) - (p + \frac{\langle p \rangle_\alpha + \langle p \rangle_\beta}{2})^2 + \frac{1}{4}(\langle q \rangle_\alpha - \langle q \rangle_\beta)^2 - i(p + \frac{\langle p \rangle_\alpha + \langle p \rangle_\beta}{2})(\langle q \rangle_\beta - \langle q \rangle_\alpha)}$$

Sumando ambos términos sacando el factor común obtenemos la expresión

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta}(q, p) + W_{\beta\alpha}(q, p) & = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}([q - \langle q \rangle_\beta]^2 + [q - \langle q \rangle_\alpha]^2) - (p + \frac{\langle p \rangle_\alpha + \langle p \rangle_\beta}{2})^2 + \frac{1}{4}(\langle q \rangle_\alpha - \langle q \rangle_\beta)^2} \times \\
& \times (e^{iq(\langle p \rangle_\beta - \langle p \rangle_\alpha) - i(p + \frac{\langle p \rangle_\beta + \langle p \rangle_\alpha}{2})(\langle q \rangle_\alpha - \langle q \rangle_\beta)} + e^{iq(\langle p \rangle_\alpha - \langle p \rangle_\beta) - i(p + \frac{\langle p \rangle_\alpha + \langle p \rangle_\beta}{2})(\langle q \rangle_\beta - \langle q \rangle_\alpha)})
\end{aligned}$$

Donde el término de la suma de exponenciales complejas puede expresarse en forma de coseno. Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta}(q, p) + W_{\beta\alpha}(q, p) & = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}([q - \langle q \rangle_\beta]^2 + [q - \langle q \rangle_\alpha]^2) - (p + \frac{\langle p \rangle_\alpha + \langle p \rangle_\beta}{2})^2 + \frac{1}{4}(\langle q \rangle_\alpha - \langle q \rangle_\beta)^2} \times \\
& \times \cos [(\langle p \rangle_\alpha - \langle p \rangle_\beta)q + (p + \frac{\langle p \rangle_\beta + \langle p \rangle_\alpha}{2})(\langle q \rangle_\alpha - \langle q \rangle_\beta)]
\end{aligned} \tag{48}$$

Función de Wigner de la superposición de estados tipo gato de Schrödinger

Para el caso específico en el que $\beta = -\alpha$, la expresión del apartado anterior se simplifica del siguiente modo

$$W_{\alpha, -\alpha}(q, p) + W_{-\alpha, \alpha}(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - p^2} \times \cos(2[\langle p \rangle q - \langle q \rangle p]) \tag{49}$$

C. Ejemplos de reconstrucción de estados

Reconstrucción de un estado cuántico de Fock

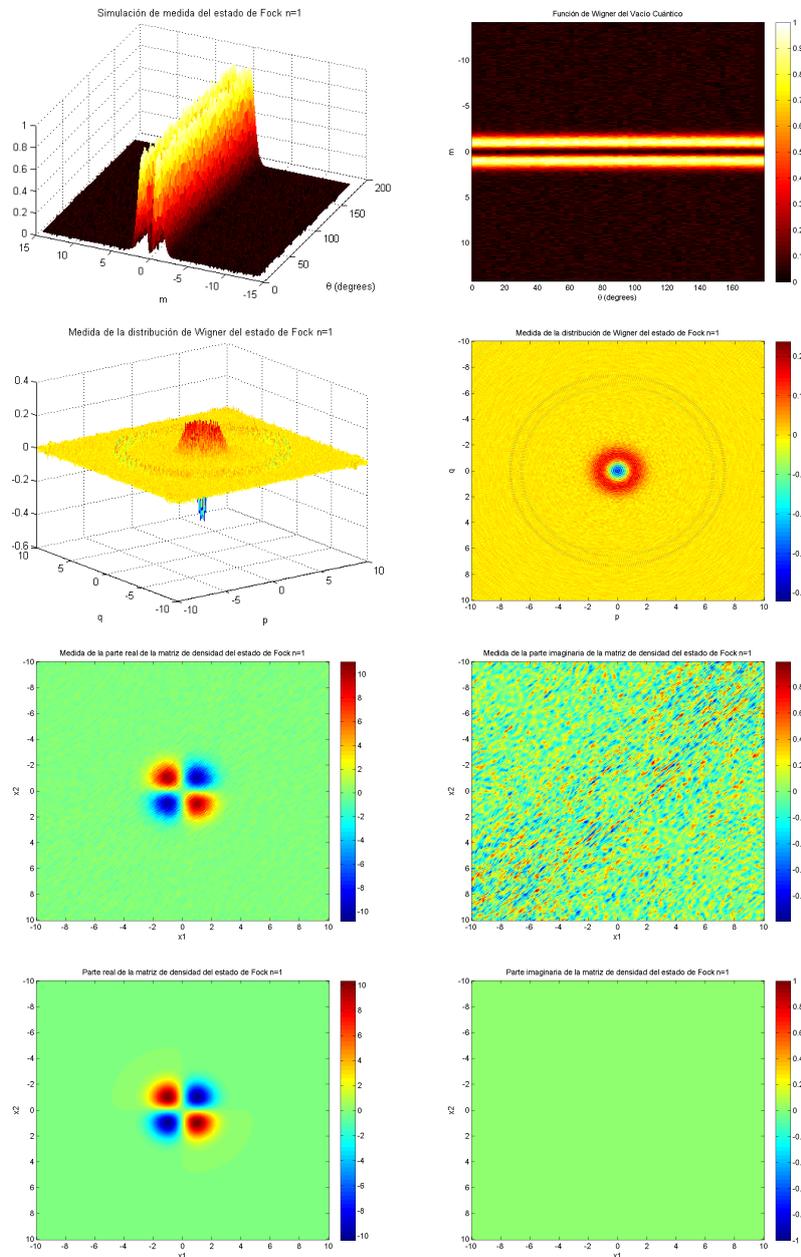


Figura 17: Reconstrucción del estado de Fock del primer nivel de energía $n=1$. En la primera línea se representa la simulación de la medida de la distribución de probabilidad de la cuadratura de fase. En la segunda línea la cuasidistribución de Wigner obtenida mediante la transformada de Radon inversa. En la tercera línea se puede ver la parte real e imaginaria de la matriz de densidad obtenida de la función de Wigner previa. En la cuarta línea se representan la parte real e imaginaria de la matriz de densidad correspondiente al estado de Fock correspondiente para comparar la simulación de la medida con el resultado teórico exacto.

Reconstrucción de un estado cuántico coherente

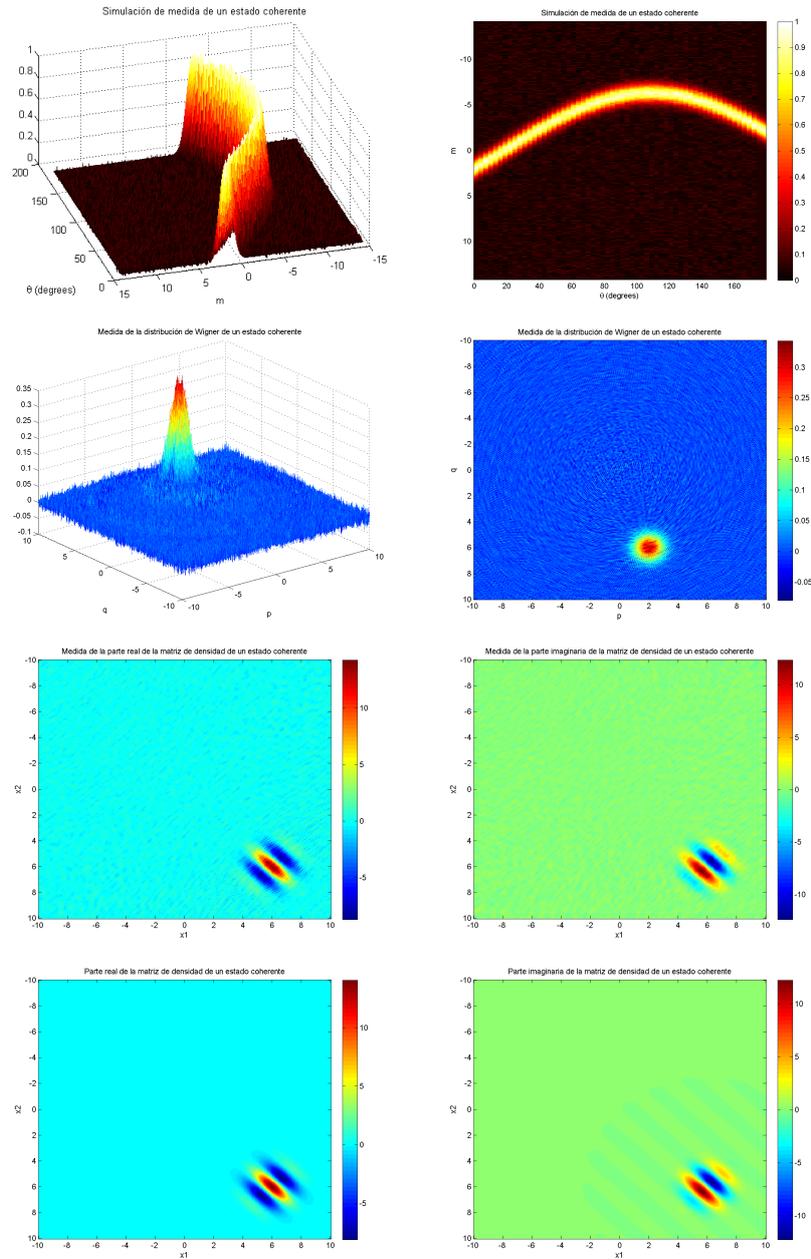


Figura 18: Reconstrucción del estado coherente $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(6 - 2i)$. En la primera línea se representa la simulación de la medida de la distribución de probabilidad de la cuadratura de fase. En la segunda línea la cuasidistribución de Wigner obtenida mediante la transformada de Radon inversa. En la tercera línea se puede ver la parte real e imaginaria de la matriz de densidad obtenida de la función de Wigner previa. En la cuarta línea se representan la parte real e imaginaria de la matriz de densidad correspondiente a dicho estado coherente para comparar la simulación de la medida con el resultado teórico exacto.

Reconstrucción de un estado cuántico comprimido

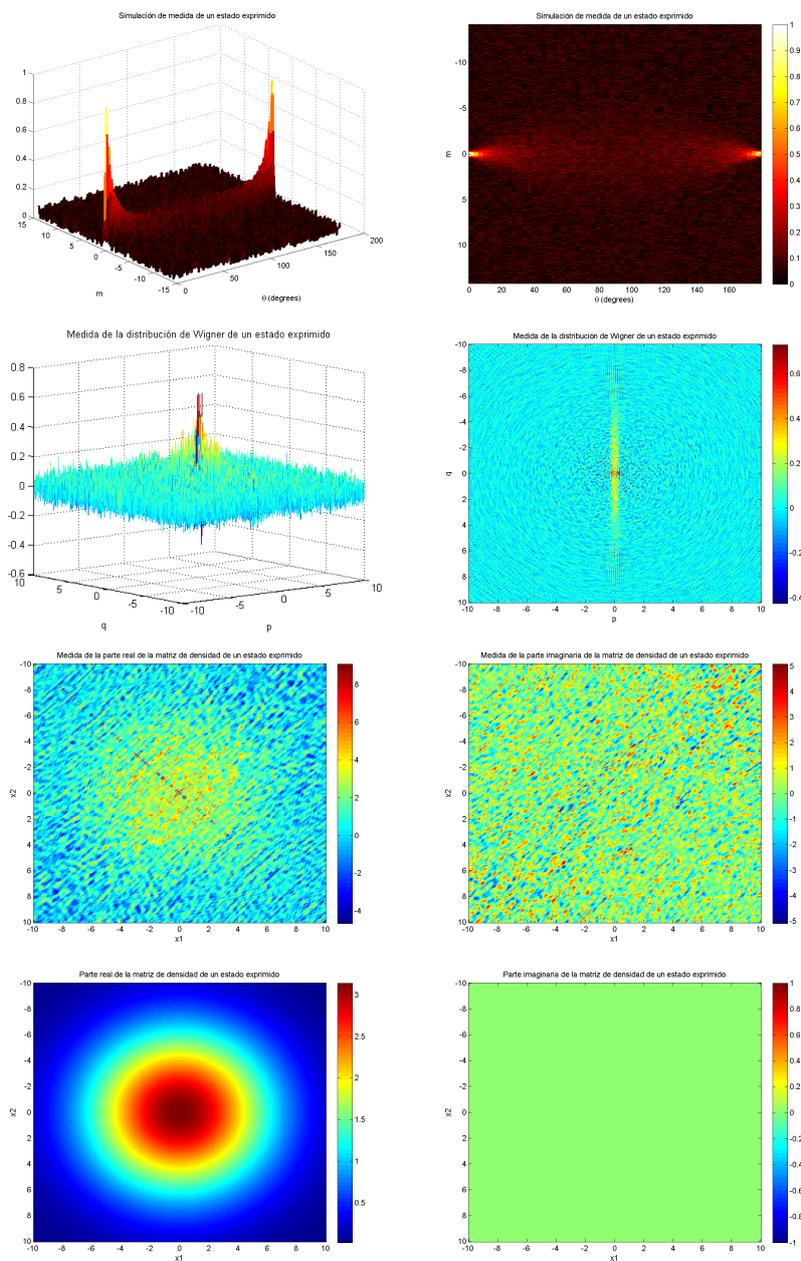


Figura 19: Reconstrucción del estado del vacío comprimido, con valor de compresión: $\xi = 1,2$. En la primera línea se representa la simulación de la medida de la distribución de probabilidad de la cuadratura de fase. En la segunda línea la cuasidistribución de Wigner obtenida mediante la transformada de Radon inversa. En la tercera línea se puede ver la parte real e imaginaria de la matriz de densidad obtenida de la función de Wigner previa. En la cuarta línea se representan la parte real e imaginaria de la matriz de densidad de este estado comprimido para comparar la simulación de la medida con el resultado teórico exacto.

Reconstrucción de una mezcla de estados cuánticos

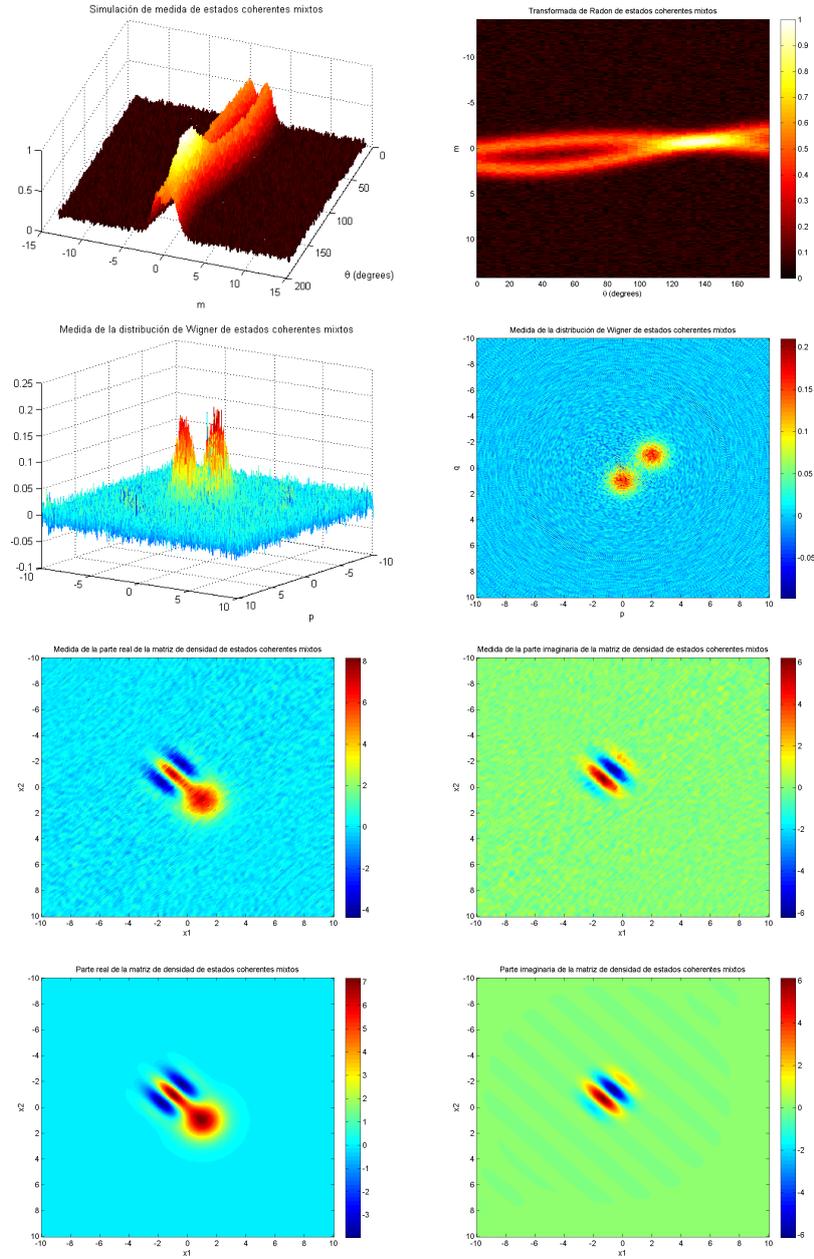


Figura 20: Reconstrucción de una mezcla de dos estados cuánticos con matriz de densidad $\hat{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha = 1\rangle\langle\alpha = 1| + |\alpha = -1 + 2i\rangle\langle\alpha = -1 + 2i|)$. En la primera línea se representa la simulación de la medida de la distribución de probabilidad de la cuadratura de fase. En la segunda línea la cuasidistribución de Wigner obtenida mediante la transformada de Radon inversa. En la tercera línea se puede ver la parte real e imaginaria de la matriz de densidad obtenida de la función de Wigner previa. En la cuarta línea se representan la parte real e imaginaria de la matriz de densidad de la mezcla de estados cuánticos para comparar la simulación de la medida con el resultado teórico exacto.

Reconstrucción de una superposición de estados cuánticos

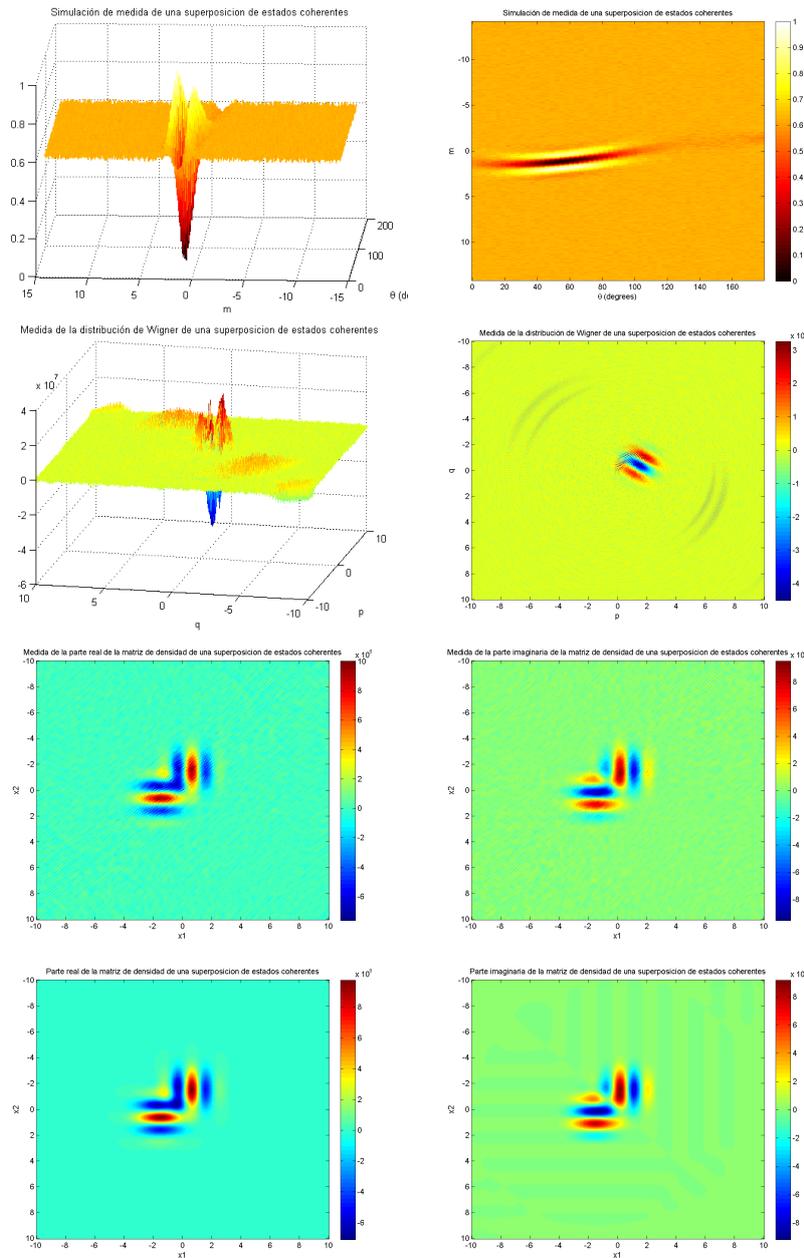


Figura 21: Reconstrucción de una superposición de los dos estados cuánticos coherentes $|\alpha = 2 - 2i\rangle$ y $|\alpha = -3 + i\rangle$. En la primera línea se representa la simulación de la medida de la distribución de probabilidad de la cuadratura de fase. En la segunda línea la cuasidistribución de Wigner obtenida mediante la transformada de Radon inversa. En la tercera línea se puede ver la parte real e imaginaria de la matriz de densidad obtenida de la función de Wigner previa. En la cuarta línea se representan la parte real e imaginaria de la matriz de densidad de la superposición de estos dos estados cuánticos para comparar la simulación de la medida con el resultado teórico exacto.

Reconstrucción de un gato de Schrödinger

Damos por finalizados los ejemplos de reconstrucción con un caso particular de superposición de dos estados coherentes, siendo los estados a superponer iguales pero de signo opuesto.

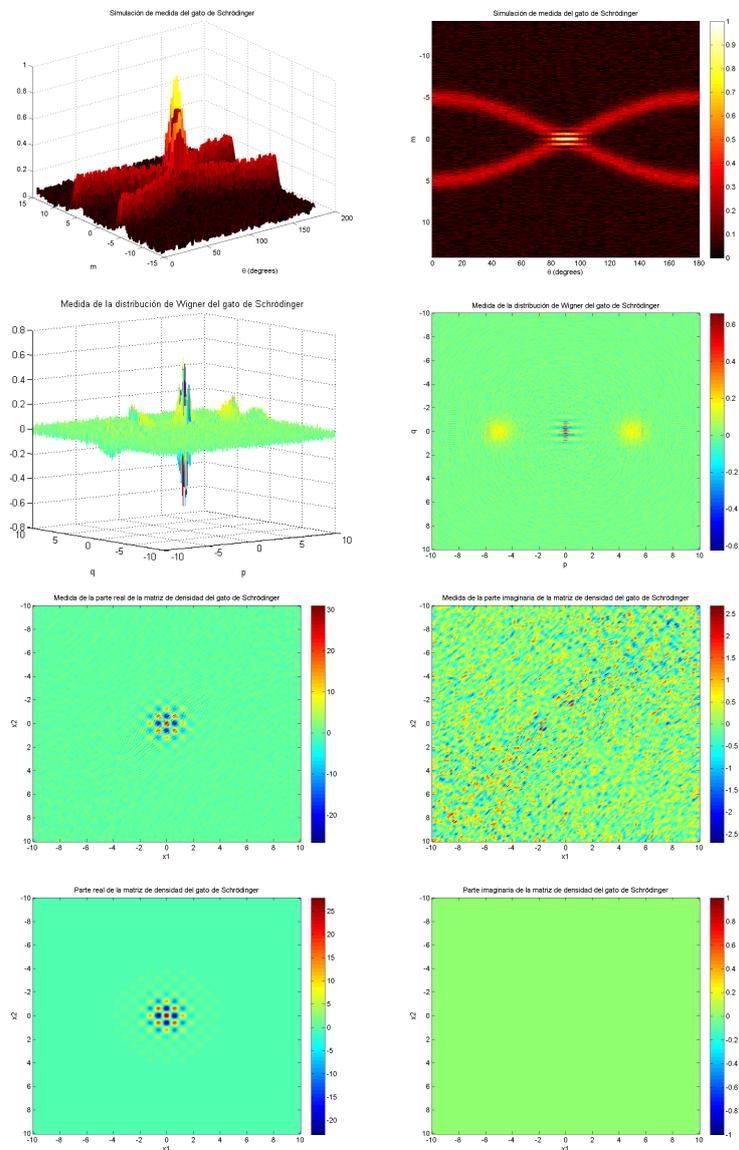


Figura 22: Reconstrucción de una superposición de dos estados cuánticos coherentes de signo opuesto formando el denominado gato de Schrödinger $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|5i\rangle + |-5i\rangle)$. En la primera línea se representa la simulación de la medida de la distribución de probabilidad de la cuadratura de fase. En la segunda línea la cuasidistribución de Wigner obtenida mediante la transformada de Radon inversa. En la tercera línea se puede ver la parte real e imaginaria de la matriz de densidad obtenida de la función de Wigner previa. En la cuarta línea se representan la parte real e imaginaria de la matriz de densidad de la superposición de estos dos estados cuánticos para comparar la simulación de la medida con el resultado teórico exacto.