View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Repositorio Universidad de Zaragoza

Sistemas complejos: Un modelo de mapas logísticos acoplados

Autor: **Mario Asís Cánovas**
Director: **Ricardo López Ruiz**

Trabajo de fin del grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

RESUMEN EN INGLÉS

Autor: Mario Asís Cánovas

Chapter 1

Preliminary concepts and an introduction to the model

In this chapter we will briefly introduce some concepts related to complexity theory and dynamical systems. First, we give a general notion of the terms system and complexity. Secondly, we introduce networks and complex networks, and a short list of relevant kinds of networks. We will also try to connect both networks and dynamical systems through a definition of coupled dynamical systems. Finally we define chaos, when related to dynamical systems, and we describe the dynamics of the logistic map.

1.1 Complex and dynamical systems

Even though they are frequently used in mathematics and computational sciences, the terms *complexity*, *system*, and *complex system* refer to more general concepts. We will give non rigurous definitions.

Definition.

- *A **system** is a set of components and relations between them, acting as a whole.*
- *We say a property of a system is **emergent** if it can not be reduced to the properties of its components.*
- *A **complex system** is a system with non-trivial emergent properties.*

Although the definitions are ambiguous, some general properties are commonly said to be related to complexity, such as **feedback**, **non-linearity**, **self organization**, **pattern formation**, **chaos** and **memory**.

Now we give a mathematical background, introducing *dynamical systems*.

Definition 1.1.1. *We call **dynamical system** to the tuple $(\mathscr{S}, \phi, \mathfrak{T})$ where $\mathscr{S}$ is an arbitrary set, called **phase space**, $\mathfrak{T} = \mathbb{Z} \vee \mathbb{R}$ called **set of times**, and $\phi = \{\phi_t\}$ is a family of maps $\phi_t : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ defined for $t \geq 0$, such that:*

- $\phi_0 = 1_{\mathscr{S}}$
- $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t, \quad \forall t, s \geq 0$

*If the set of times is $\mathbb{Z}$ we say the dynamical system is **discrete**, and if it is $\mathbb{R}$ we say it is **continous**.*

1.2 Complex networks and coupled dynamical systems

Again, the term *complex network* is not well defined, it may make reference to several kinds of networks. We will first remind some general graph theory concepts to give a mathematical background.

Definition 1.2.1. *A **graph** is a tuple $G = (V,E)$ with E and V two sets such that $E \subseteq V \times V$. We call V the set of **vertices** and E the set of **edges** of the graph. We will say that a graph is **undirected** if $(i,j) \in E \iff (j,i) \in E$. A **subgraph** of $G = (V,E)$ is another graph $G_1 = (V_1,E_1)$ such that $V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$.*

Definition 1.2.2. *Set the graph $G = (V,E)$, and $i, j \in V$. A **path** of length **l** from the vertex i to j is a sequence of vertices $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_l)$ such that $i_0 = i$, $i_l = j$ and $(i_{h-1}, i_h) \in E$ for $h = 1,2,\ldots,l$. A graph is said to be **connected** if there exists a paht joining every pair of vertices. A **connected component** of a graph is a connected subgraph.*

Definition 1.2.3. *Given a undirected graph $G = (V,E)$ and a vertex $i \in V$, we call **degree of a vertex** N_i, to the cardinal of its set of **neighbors** or **adjacent vertices**, that is, the vertices in V such that there exists a path of lenght 1 connecting them with i.*

A general definition of *complex network* may be:

Definition. *We say a network is a **complex network** if it has topological properties substantially different from those present on a random graph.*

Therefore, the complexity of a graph is measured using several properties of the network. We understand some natural networks as complex networks, and classify them according to its structure. Some typical networks of interest are **random networks**, ***scale-free*** **networks** and ***small-world*** **networks**.

We end this section by giving a definition of *coupled dynamical systems*. First, we give a definition of *coupled system of equations*:

Definition 1.2.4. *Given a system of k first order ordinary differential equations or a system of recurrences:*

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1,\ldots,x_k,t) \quad or \quad x_{i,n+1} = G_i(x_{1,n},\ldots,x_{k,n},n) \quad with \quad i = 1,\ldots,k$$

With $F_i : \mathscr{S} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{S}$ and $G_i : \mathscr{S} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathscr{S}$ being $\mathscr{S} = \prod \mathscr{S}_i$ a product of k sets where the equation is well defined.

*Set the graph $H = (V,E)$, the **coupling graph**, with $V = \{1,\ldots,k\}$ and the set of edges E with $(i,j) \in E \iff i \in V$ and j is a variable where F_i or G_i, depending on the kind of system, is non trivial (that is, non constant on the component j) and $i \neq j$.*
*A system of equations is **coupled** if the graph H is connected. Otherwise, we will call **coupled components** to the subsystems associated to the connected components of H.*

We can finally define a *coupled dynamical system* as follows:

Definition 1.2.5. *We call **coupled dynamical system** to a dynamical system $(\mathscr{S}, \phi, \mathfrak{T})$ where ϕ is the general solution of a coupled system.*

1.3 Chaos in dynamical systems: The logistic map

From now on we will assume that $\mathscr{S}$ is a metric space. Lets first remind the definition of *orbit* of a point and *orbit of period* τ.

Definition 1.3.1. *Given a dynamical system $(\mathscr{S},\phi,\mathfrak{T})$ and $x\in\mathscr{S}$ we call* ***orbit*** *of x to the set:*

$$\gamma_x=\{\phi_t(x)\mid t\in\mathfrak{T}\}$$

We say that an orbit is a ***periodic orbit with period*** *τ if:*

$$\exists\tau\in\mathfrak{T}\quad \textit{such that}\quad \phi_\tau(y)=y,\ \forall y\in\gamma_x$$

And we say that τ is its minimum period if:

$$\phi_t(y)\neq y,\ \forall t<\tau$$

Lets introduce the definition of chaos.

Definition 1.3.2. *We say a dynamical system $(\mathscr{S},\phi,\mathfrak{T})$ is* ***chaotic*** *if it satisfies:*

- *It is* ***sensible to initial conditions****:*

  $\exists\delta>0$ *such that* $\forall x_0\in\mathscr{S}$ *and* $\forall U_{x_0}$ *nhood of* x_0 *we have that* $\exists y_0\in U_{x_0}$ *and a* $t>0$ *such that:*
  $$d(\phi_t(x_0),\phi_t(y_0))>\delta$$

- *It is* ***topologically transitive*** *in $\mathscr{S}$:*

  $$\textit{Given } U \textit{ and } V \textit{ open in } \mathscr{S},\ \exists x_0\in U\wedge t>0 \ \textit{ such that }\ \phi_t(x_0)\in V$$

- *It has a set of periodic orbits dense in $\mathscr{S}$.*

Now we give a characterization of *chaos*:

Definition 1.3.3. *We call* ***Sarkovskii order*** *to the order of the naturals given as follows:*

$$\begin{array}{cccccccc}
3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \dots & (2n+1)\cdot 2^0 & \dots\\
3\cdot 2^1 & 5\cdot 2^1 & 7\cdot 2^1 & 9\cdot 2^1 & 11\cdot 2^1 & \dots & (2n+1)\cdot 2^1 & \dots\\
3\cdot 2^2 & 5\cdot 2^2 & 7\cdot 2^2 & 9\cdot 2^2 & 11\cdot 2^2 & \dots & (2n+1)\cdot 2^2 & \dots\\
 & \vdots & & & & & \vdots & \\
3\cdot 2^k & 5\cdot 2^k & 7\cdot 2^k & 9\cdot 2^k & 11\cdot 2^k & \dots & (2n+1)\cdot 2^k & \dots\\
 & \vdots & & & & & \vdots & \\
\dots & 2^n & 2^{n-1} & \dots & 2^3 & 2^2 & 2 & 1
\end{array}$$

Theorem 1.3.4. *(Sarkovskii's theorem) Given the dynamical system $(I,\phi,\mathbb{Z})$ with I closed, and denote Sarkovskii's order with $\succ$. $\phi_n: I\longrightarrow I$ a continuous mapping with an orbit of minimum period m . Then, ϕ_n has orbits of minimum period k, $\forall k\prec m$. In particular, if ϕ_n has an orbit of minimum period 3, then it has orbits of minimum period k, $\forall k\in\mathbb{N}$.*

Now we introduce the logistic map:

Definition 1.3.5. *We call* ***logistic map*** *of parameter p, with $p\in(0,4)$ to the dynamical system $([0,1],\lambda,\mathbb{Z})$ where $\lambda=\{\lambda_n\}$ is the family of maps $\lambda_n:\mathscr{S}\longrightarrow\mathscr{S}$ given by:*

$$\lambda_1(x)=px(1-x)\quad \textit{and}\quad \lambda_n(x)=\lambda_1\overset{n}{\cdot\cdot}\lambda_1(x)$$

And now we summarize the dynamics of the system:

1. $\underline{0<p\leq 1}$: All the initial conditions converge to 0.

2. $1 < p \leq 3$: As p gets bigger than 1 the dynamics change. A stable, non-zero fixed point appears:

$$x = \frac{p-1}{p} \tag{1.1}$$

3. $3 < p < 3.57$: Takes place the *period doubling cascade*. The fixed point loses its stability, and the initial conditions tend to oscilate in period 2^n orbits, with n growing to infinity as p gets near the critical value 3.57.

4. $3.57 < p < 3.82$: Chaotic behaviour appears in this range.

5. $3.82 < p < 3.85$: A period 3 orbit appears for $p = 3.82$. We also get a *period doubling cascade* with periods $3 \cdot 2^n$.

6. $3.85 < p < 4$: We get chaotic behavior mixed with periodic obits in this range.

7. $p = 4$: We get chaotic behavior in all $[0, 1]$.

Chapter 2

The model of coupled logistic maps

In this chapter we introduce and study a new system of coupled logistic maps. We also give some notions on stability and define the concept of bistability of a dynamical system. We show that the new model is bistable no matter what coupling network we choose.

2.1 Coupling of two maps

Definition 2.1.1. *Given a dynamical system $(\mathscr{S},\phi,\mathfrak{T})$ a set $J \subseteq \mathscr{S}$ is said to be an **invariant set** if it satisfies:*

$$If \;\; x \in J \Longrightarrow \phi_t(x) \in J, \; \forall t \in \mathfrak{T}$$

Definition 2.1.2. *Let J be an invariant set, we say that J is **stable** (Lyapunov stable) if:*

$$\forall V \text{ open with } J \subset V, \; \exists W \text{ open with } J \subset W \text{ such that } \phi_t(x) \in V, \; \forall t \geq 0 \text{ and } \forall x \in W$$

Definition 2.1.3. *Let J be an invariant set, we say that J is an **attractor** if:*

- *Attracts the dynamics, that is, $\exists V$ open with $J \subset V$, such that $\forall x \in V$ we have that:*

  $$d(\phi_t(x), V) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  *We call V the **basin of attraction** of J.*

- *V is a minimal set, that is, it does not contain any non-empty subset invariant and attracting the dynamics.*

Theorem 2.1.4. *Let $(\mathscr{S},\phi,\mathbb{Z})$ be a discrete dynamical system, y $F = \phi_1$ a differentiable function, such that $\phi_n = F \overset{n}{\cdots} \circ F$. Let $\mathscr{O} = \{p_0,\ldots,p_{\tau-1}\}$ be an orbit of minimum period τ, and consider $B = D\phi_\tau(p_0) = B = DF(p_{\tau-1}) \circ DF(p_{\tau-2}) \circ \cdots \circ DF(p_0)$. Then, denote ρ to the spectral ratio:*

- *If $\rho(B) < 1$, then the periodic orbit is asymptotically stable, (in particular stable).*
- *If $\rho(B) > 1$, then the periodic orbit is unstable.*

Definition 2.1.5. *A dynamical system is said to be **bistable** if it has two stable orbits.*

Now we consider the two vertices coupling, the dynamical system in $[0,1] \times [0,1]$ given by the system of equations:

$$x_{n+1} = p(3y_n + 1)x_n(1 - x_n) \tag{2.1}$$

$$y_{n+1} = p(3x_n + 1)y_n(1 - y_n) \tag{2.2}$$

with $p \in (0,4)$.

2.1.1 Fixed points and dynamics

Lets summarize the dynamics as p changes:

1. $0 < p < 0.75$: The dynamic of the system converge to 0 for all the initial values.
2. $0.75 < p < 0.86$: A sudden change happens. When both initial conditions are chosen in a certain range, both vertices tend to syncrhonize at the fixed point:

$$x_+ = (\alpha_+, \alpha_+) \quad with \quad \alpha_+ = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{4 - \frac{3}{p}})$$

   If the initial values are chosen below or over that certain range both values will eventually converge to 0. Therefore this is the first range where the system presents bistability.

3. $0.86 < p < 0.95$: The fixed point bifurcates in to a period two orbit at $p \sim 0.86$. Both variables oscilate out of phase.
4. $0.95 < p < 1$: The system does no longer converge to a periodic orbit. Quasiperiodic orbits appear in this range. Bistability is still possible.
5. $p > 1$: The system loses its bistability. Chaotic regimes appear for this p.

2.2 Arbitrary coupling

Given a graph $G = (V, E)$ with N vertices, and $i \in V$. We call neighbourhood of i to the set of neighbors of i, and we denote it as v_i. We associate to each i a state in $[0, 1]$, denoted by x_i. We call ***local mean*** to the value:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j \in v_i} x_j \tag{2.3}$$

Therefore, given a graph we can build the system:

$$x_{i,n+1} = p(3\bar{x}_{i,n} + 1)x_{i,n}(1 - x_{i,n}) \quad with \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.4}$$

2.2.1 Dynamics and bistability of an arbitrary coupling

Over the synchronization manifold the equations end up as follows:

$$x_{n+1} = p(3x_n + 1)x_n(1 - x_n) \tag{2.5}$$

So the fixed points over this manifold are:

$$\mathscr{O} = 0, \quad x_\pm = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{4 - \frac{3}{p}}) \tag{2.6}$$

The point $\mathscr{O}$ is stable for $0 < p < 1$ and $x_\pm$ appear when $p > 0.75$. Therefore we will only study bistability for $p \in (0, 1)$. Here, x_+ is stable if $0.75 < p \leq 1$, but x_- is not, and so we have bistability in the synchronization manifold. We will say that $\mathscr{O}$ is the **Off** state and x_+ is the **On** state.

Stability over the synchronization manifold does not imply global stability. Lets study how a perturbation affects the system. Let $\varphi x_{i,n}$ represent the evolution of an initial perturbation. Then we have:

$$x_{i,n} = \theta + \varphi x_{i,n} \quad con \quad \theta = \mathscr{O} \vee x_+ \tag{2.7}$$

with θ being one of the synchronized stable states. Now lets define the local mean perturbation:

$$\varphi\bar{x}_{i,n} = \frac{3}{N_i}\sum_{j\in v_i}\varphi x_{j,n} \tag{2.8}$$

And so, we can get the following system by substituting this expresions on the main system, giving us the dynamic of the perturbation:

$$\varphi x_{i,n+1} = p(3\theta+1)(1-2\theta)\varphi x_{i,n} + p\theta(1-\theta)\varphi\bar{x}_{i,n} \tag{2.9}$$

And the dynamics of the local mean perturbation:

$$\varphi\bar{x}_{i,n+1} = p(3\theta+1)(1-2\theta)\varphi\bar{x}_{i,n} + 3p\theta(1-\theta)\times\frac{1}{N_i}\sum_{j\in v_i}\varphi\bar{x}_{j,n} \tag{2.10}$$

One can write the local mean perturbation as:

$$\frac{1}{N_i}\sum_{j\in v_i}\varphi\bar{x}_{j,n} = \sigma_{i,n}\varphi\bar{x}_{i,n} \Longrightarrow \sigma_{i,n} = \frac{\frac{1}{N_i}\sum_{j\in v_i}\varphi\bar{x}_{j,n}}{\varphi\bar{x}_{i,n}} \tag{2.11}$$

Considering both systems, one gets the following two dimensional dynamical system for the perturbations:

$$\begin{pmatrix}\varphi x_{i,n+1}\\ \varphi\bar{x}_{i,n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p(3\theta+1)(1-2\theta) & p\theta(1-\theta)\\ 0 & p(3\theta+1)(1-2\theta)+3p\sigma_{i,n}\theta(1-\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi x_{i,n}\\ \varphi\bar{x}_{i,n}\end{pmatrix} \tag{2.12}$$

whose only dependence of the network is captured by $\sigma_{i,n}$. For $\theta = \mathcal{O}$ the eigenvalues of the matrix are $\lambda_1 = \lambda_2 = p$, therefore this state is stable if $0 < p < 1$, and bistability is possible only if $p \leq 1$, and it depends on the stability of x_+. Let now be $\theta = x_+$, and assume $\sigma_{i,n} = \sigma$, then, the eigenvalues of the matrix are:

$$\lambda_1 = 2-2p-p\sqrt{4-\frac{3}{p}} \quad \textit{and} \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\sigma}{3}(3-2p+p\sqrt{4-\frac{3}{p}}) \tag{2.13}$$

The eigenvalue $|\lambda_1| < 1$ if $p < 1$. Therefore, the loss of stability must come from λ_2. We name p_c to the value of p where x_+ becomes unstable. Lets study the stabilty as σ varies:

- $\underline{0 < \sigma < 1}$: Then $\mid \lambda_2 \mid < 1$, therefore the system is bistable for all $p \in (0.75, 1)$.
- $\underline{-1 < \sigma < 0}$: There may be values where x_+ becomes unstable for $p < 1$, thus $p_c < 1$. Bistability stills viable even if x_+ is unstable, but with different dynamics.

Chapter 3

Some new results

The logistic coupling presents lots of different properties, dependent and independent of the chosen network. In this chapter we give some new characteristics of the coupling.

3.1 Fixed points of certain networks

We will check that, for some kinds of networks, the only fixed points of the system lay over the synchronization manifold, but lets give an interesting property that links a pair of states and its local mean.

Proposition 3.1.1. *Let G be an undirected graph of N vertices and $\mathbb{L}$ the logistic coupling associated to G. Let $X = (x_1, \ldots, x_N)$ be a fixed point, and take two vertices, i and j such that $x_i, x_j \neq 0$, being x_i and x_j the states of the vertices on the fixed point $\bar{x}_i$ and $\bar{x}_j$ the local means. Then:*

$$x_i = x_j \iff \bar{x}_i = \bar{x}_j \tag{3.1}$$

The only fixed points of the following networks lay over the synchronization manifold:

1. **Star networks**
2. ***All-to-all* clusters**
3. ***All-to-all* clusters with one vertex disconected from any other vertices on the cluster**

3.2 Computational values of parameters related to the system

Bistability holds for any kind of network on a certain range of values of the parameter p. However, some other properties are dependent of the chosen network. In this section, we will compute some parameters sharing this dependence.

3.2.1 Value of p_c for certain topologies

We call p_c to the first value of the parameter p where the *On* state stops being a fixed point.

We make the computations using the perturbation system:

$$\varphi x_{i,n+1} = p(3\theta + 1)(1 - 2\theta)\varphi x_{i,n} + p\theta(1 - \theta)\varphi \bar{x}_{i,n} \tag{3.2}$$

When the perturbations do not converge to 0 the system do not lock into one of the, once stable, fixed points, θ. Therefore it is enough to approximate the first value of p where this happens. We will only study networks with 100 vertices.

- For a *scale-free* network, $p_c \approx 0.86$, with an error of ± 0.01. We obtain the same p_c for a star graph, that we may consider as a limit case of a *scale-free* network.
- For ring lattices, the values of p_c grow from 0.86 to 1 as they approach to an *all-to-all* network.
- For *all-to-all* networks $p_c \approx 0.99$, computed with an error of ± 0.01.

From this we conclude that, the denser the network is, the wider the region where x_+ is stable, that is, more connections mean a stronger simple bistability.

3.2.2 Value of σ for certain topologies

Now we compute the σ value for some networks, once again with 100 vertices. First, recall that, if x_+ is stable, $\sigma_{i,n}$ is not well defined, since the perturbations become 0. Therefore, σ is computed after x_+ loses its stability, that is, for $p > p_c$.

- A *scale-free* network has $\sigma = -1$, independent of the power law chosen.
- For ring lattices, the value of σ grows similar to p_c, from -1 to 0 as they approach to an *all-to-all* network.
- For an *all-to-all* network $\sigma \approx 0$.

The values of σ and p_c are strongly dependent. In fact, they are close to a linear dependence, here computed by least squares:

$$p_c = 0.998 + 0.135\sigma, \quad \sigma \in [-1, 0] \tag{3.3}$$

3.3 Strategies for breaking the bistability of the system

In this section we try to remove the *On* state from the system.

3.3.1 Random parameter spread

We consider networks with 100 vertices, and we will choose randomly 50 of this vertices. Now we construct the following system, being N_1 the chosen vertices and $N_2 = N \setminus N_1$:

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = p_1(3\bar{x}_{i,n} + 1)x_{i,n}(1 - x_{i,n}) & con \quad i \in N_1 \quad y \quad p_1 \in [0.75, 1) \\ x_{i,n+1} = p_2(3\bar{x}_{i,n} + 1)x_{i,n}(1 - x_{i,n}) & con \quad i \in N_2 \quad y \quad p_2 \in [0, 0.75) \end{cases} \tag{3.4}$$

A random selection implies different behaviours, depending on the importance of the chosen vertices. However, some of this behaviours only depend of the network topology.

Scale-free, simple ring and *all-to-all* networks

We consider a *scale-free* network with $\gamma = 2.5$, an *all-to-all* network and a simple ring network, and we choose 50 vertices randomly. Rings and *scale-free* networks present stronger bistability. The ring is stronger than the *scale-free* network, and the *scale-free* network is stronger than the *all-to-all* network. An interesting property is that they become imposible to shutdown when the parameter p_1 becomes bigger than p_c.

3.3.2 Breaking bistability through a border effect

We take pairs of identic graphs of 50 vertices of the previosly considered networks, and consider its join:

Definition 3.3.1. *Given two graphs, $G = (V_1, E_1)$ y $H = (V_2, E_2)$, we define the graph join $G + H$ as follows:*

$$G + H = (V_3, E_3) \quad with \quad V_3 = V_1 \cup V_2, \quad E_3 = E_1 \cup E_2 \cup \{(i, j) |\, i \in V_1 \wedge j \in V_2\}$$

We give the first network a parameter $p_1 \in [0.75, 1]$ and $p_2 \in [0.0, 0.75]$ to the second one. *Scale-free* and simple rings happen to be more sensible in this case. We can break bistability for any p_1. The join of two 50 vertices *all-to-all* networks is an *all-to-all* with 100 vertices, therefore we well obtain the same results as before.

Prólogo

La ciencia de sistemas complejos es un campo multidisciplinar que actualmente atrae gran interés por su variedad de aplicaciones. Desde la interacción de las neuronas en un cerebro o la organización social de una colonia de hormigas, hasta la forma en que se distribuyen los recursos de un cierto grupo comercial o su cotización en bolsa a lo largo del tiempo pueden interpretarse como sistemas que presentan propiedades que no pueden ser extrapoladas ni deducidas solo en base al conocimiento del comportamiento de sus componentes. Esto es lo que entendemos por un sistema complejo.

Por otra parte, también podemos hablar de complejidad al referirnos a una red. La teoría de redes complejas estudia las propiedades de una red que permiten caracterizarlas, para simplificar el estudio de redes de gran envergadura que aparecen en fenómenos naturales y sociales y deducir comportamientos comunes, o bien para explicar la aparición de ciertos tipos de estructuras en situaciones concretas. Un ejemplo típico es el juego de los seis grados de separación, que postula que dos personas cualesquiera están separadas, en media, solamente por una cadena de seis "amigos de amigos" y que ilustra que las redes sociales comparten la característica de tener caminos cortos entre sus nodos.

En este trabajo damos una noción básica de lo que entendemos por sistemas y redes complejas, algunas características que suelen asociarse a los sistemas complejos y algunas redes de interés práctico. Daremos un trasfondo matemático introduciendo la definición de sistema dinámico. Describiremos con cierta profundidad la dinámica del mapa logístico, un sistema que sirve de modelo básico para representar la evolución de la población de una especie limitada por el exceso de individuos, con la intención de estudiar a posteriori un modelo en el que varios mapas logísticos interaccionan entre sí de acuerdo a una red subyacente que estructura sus relaciones. Consideraremos una relación cooperativa entre los mapas. En términos del modelo de poblaciones podremos interpretar el nuevo sistema como la acción entrelazada de varias especies que se ayudan mutuamente, que actúan simbióticamente dado un cierto orden. Concretamente estudiaremos la biestabilidad del sistema, esto es, la presencia simultánea de dos estados estables, que nos permite darle al modelo un enfoque neurológico, como representación sencilla de los estados de sueño y vigilia, apagado y encendido. Veremos que esta propiedad esta presente primero en un enlace de dos nodos, y que se preserva al hacer crecer la red, independientemente de la estructura que escojamos.

En el último capítulo se recopilan algunos resultados propios sobre varias propiedades del modelo en red cuyo estudio queda pendiente. En particular se estudian los puntos fijos del sistema en varias topologías. Así como la biestabilidad resultará ser independiente de la red escogida, estudiaremos otras características y parámetros que rigen el sistema que si son dependientes de la red, como el punto en el que la dinámica estable de la red cambia de comportamiento. Finalizaremos estudiando un método para romper la biestabilidad del sistema, partiendo de una red que presente ambos estados y manipulándola hasta que solo quede uno de ellos, hasta que la dinámica del sistema siempre converja al apagado.

Índice general

1. Conceptos previos e introducción al modelo **1**
- 1.1. Sistemas complejos y sistemas dinámicos . . . 1
- 1.2. Redes complejas y acoplado de sistemas dinámicos . . . 3
- 1.3. Caos en sistemas dinámicos: El mapa logístico . . . 5

2. El modelo de acoplado logístico **9**
- 2.1. Acoplo de dos unidades funcionales . . . 9
  - 2.1.1. Dinámica y puntos fijos . . . 10
- 2.2. Acoplado de una red arbitraria . . . 11
  - 2.2.1. Dinámica y biestabilidad del modelo de muchos nodos . . . 12

3. Algunos resultados nuevos **17**
- 3.1. Puntos fijos en ciertas topologías de red . . . 17
  - 3.1.1. Topología en estrella . . . 18
  - 3.1.2. Clústers de tipo all-to-all . . . 19
  - 3.1.3. Desconectado de clústers all-to-all . . . 19
- 3.2. Medidas computacionales de parámetros asociados al sistema . . . 21
  - 3.2.1. Cálculo de p_c en algunas topologías . . . 21
  - 3.2.2. Cálculo de σ en algunas topologías . . . 22
- 3.3. Estrategias para la ruptura de la biestabilidad . . . 23
  - 3.3.1. Por sembrado aleatorio de parámetros . . . 23
  - 3.3.2. Ruptura por efecto frontera . . . 25

Bibliografía **27**

Capítulo 1

Conceptos previos e introducción al modelo

En este capítulo se introducirán brevemente algunos conceptos de teoría de la complejidad y sistemas dinámicos, con objeto de esclarecer los términos y herramientas que después utilizaremos para construir el acoplado de mapas logísticos.

En primer lugar se dan las nociones de sistema y complejidad, así como su relación con los sistemas dinámicos. A continuación se introduce el concepto de red y de red compleja y algunos tipos de redes destacables por su presencia en gran cantidad de sistemas de diversas naturalezas. Además se expone cómo su conjunción con los sistemas dinámicos puede dar lugar a sistemas complejos. En la última sección se define el concepto de caos en un sistema dinámico y se presenta y estudia el mapa logístico, un ejemplo sencillo de sistema con estas características y elemento fundamental del modelo posterior.

1.1. Sistemas complejos y sistemas dinámicos

Aunque se utilizan con frecuencia en matemáticas y ciencias de la computación para referirse a ciertos tipos de modelos y sistemas dinámicos, los conceptos *sistema*, *complejidad* y, en conjunto, *sistema complejo* tienen un origen más bien epistemológico, pues hacen referencia a ideas más generales, que no están necesariamente relacionadas con estas disciplinas. Daremos definiciones que, aunque nada rigurosas, están muy extendidas.

Definición. *Un **sistema** es un conjunto de elementos dotados de relaciones entre ellos y que actúan como un todo.*

El término *sistema* es tan ambiguo que la concepción de *complejidad* es, en muchas ocasiones, definida a partir del mismo. No obstante, la complejidad es un concepto usado en gran variedad de campos de rigor matemático, por tanto existen definiciones concebidas con la intención de servir a propiedades especificas de sus objetos de estudio. Desgraciadamente, en nuestro caso, el término *sistema complejo* y la complejidad a que se refiere no están universalmente perfilados. Un intento de fundamentar estas definiciones en el marco de la *teoría de sistemas* se atribuye a Robert Rosen [R].

En general el concepto *sistema complejo* bebe directamente de la noción epistemológica de *emergencia*. Ambos términos son definidos como sigue.

Definición. ▪ *Diremos que una propiedad de un sistema es **emergente** si no puede ser reducida al comportamiento particular de ninguna de sus componentes. Es decir, es una propiedad que se asocia a las interacciones que tienen lugar entre los mismos, y que es imposible sin dicha interacción.*

- *Un **sistema complejo** es un sistema en el que el conocimiento de los elementos que lo conforman no es suficiente para caracterizar su comportamiento. Es decir, un sistema complejo es aquel que presenta propiedades emergentes no triviales.*

Aunque la terminología es ambigua, hay ciertas características reconocidas como causas o conductas asociadas a la complejidad. Damos a continuación una lista no rigurosa y algunos ejemplos [BY].

- **Retroalimentación**:

  Sistemas cuya evolución depende no solo del estado de sus elementos en un instante, sino también de uno o varios estados anteriores.

  Ejemplo. *Sistemas definidos mediante ecuaciones recursivas.*

- **Dinámica no-lineal**:

  Los sistemas con dinámica lineal son aquellos cuya evolución puede expresarse como suma de componentes más pequeñas. Esto simplifica en gran medida el estudio y por eso no suelen estar asociados a la complejidad.

- **Auto-organización**:

  Sistemas cuyas componentes interaccionan entre sí para dar lugar a un orden particular. Esta organización no depende de elementos externos, sino de las partes del sistema. Por tanto se presenta una propiedad emergente.

- **Formación de patrones**:

  La formación de patrones, fijos, repetitivos o variables es una clara propiedad emergente de algunos sistemas. Ya sean patrones de conducta, o patrones espaciales, esta temática esta fuertemente asociada a la aparición de complejidad.

  Ejemplo. *Autómatas celulares.*

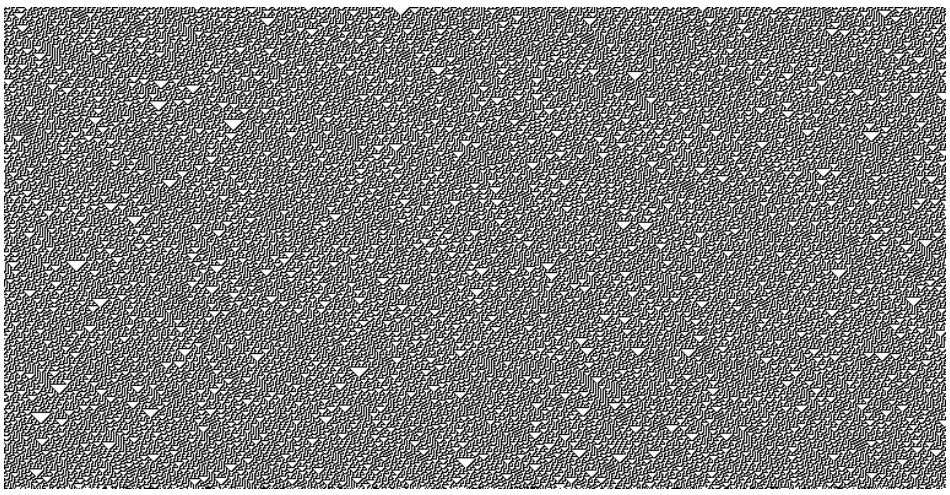


Figura 1.1: Patrones formados por un autómata celular, regla 30.

- **Caos**:

  El término caos al que nos referimos, en sí mismo, implica la imposibilidad de predicción del comportamiento a largo plazo solo en base al conocimiento de la evolución del sistema en condiciones similares. Es por tanto esta incertidumbre la que lo relaciona con la complejidad.

Algunos autores en cambio consideran que la aparición de caos rompe la complejidad, pues exigen que el término sea utilizado exclusivamente sobre sistemas cuyo comportamiento es difícil de predecir, no impredecible. De cualquier manera, los sistemas caóticos tienen patrones de comportamiento determinados.

Ejemplo. *Meteorología y dinámica de fluidos.*

- **Memoria**:

  Es posible que algunos sistemas tengan *memoria*, esto es, que la evolución de estos sea diferente en condiciones idénticas en base a cambios producidos en el sistema durante la experiencia previa.

Tras esta introducción a la terminología y a fin de dar un marco y un fundamento sólido que nos permita hacer estudio riguroso de sistemas concretos, así como modelizarlos, definimos lo que es un *sistema dinámico*.

Definición 1.1.1. *Llamamos **sistema dinámico** a la terna $(\mathscr{S}, \phi, \mathfrak{T})$ donde $\mathscr{S}$ es un conjunto arbitrario, al que llamamos **espacio de estados**, $\mathfrak{T} = \mathbb{Z} \vee \mathbb{R}$, y lo llamamos **conjunto de tiempos**, y $\phi = \{\phi_t\}$ es una familia de aplicaciones $\phi_t : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ definida para $t \geq 0$, satisfaciendo:*

- $\phi_0 = 1_{\mathscr{S}}$
- $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t, \quad \forall t, s \geq 0$

*Si el conjunto de tiempos es $\mathbb{Z}$ diremos que el sistema dinámico es **discreto**, y si es $\mathbb{R}$ diremos que es **continuo**.*

1.2. Redes complejas y acoplado de sistemas dinámicos

De nuevo la expresión *red compleja* no hace necesariamente referencia a un objeto matemático concreto, sino que puede englobar distintas clases de redes, en función de lo que entendamos por la complejidad de una red. La teoría de grafos da el marco natural para el estudio matemático riguroso de estos objetos.

Primero recordemos la definición de *red* o *grafo* y de algunos otros términos de teoría de grafos que nos son necesarios.

Definición 1.2.1. *Un **grafo** es un par $G = (V, E)$ con E y V dos conjuntos que satisfacen $E \subseteq V \times V$. Llamamos a V conjunto de **nodos** y a E conjunto de **aristas** del grafo. Decimos que el grafo es **no dirigido** si se tiene que $(i, j) \in E \Longleftrightarrow (j, i) \in E$. Un **subgrafo** de $G = (V, E)$ es otro grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ tal que $V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$.*

Definición 1.2.2. *Sea el grafo $G = (V, E)$, y $i, j \in V$. Un **itinerario** de longitud **l** desde el nodo i al nodo j es una sucesión de nodos $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_l)$ tal que $i_0 = i$, $i_l = j$ y $(i_{h-1}, i_h) \in E$ para $h = 1, 2, \ldots, l$. Un grafo se dice **conexo** si existe un itinerario uniendo dos nodos cualesquiera. Una **componente conexa** de un grafo es un subgrafo conexo.*

Definición 1.2.3. *Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y un nodo $i \in V$, llamamos **grado del nodo** N_i, al cardinal de su conjunto de **vecinos** o **nodos adyacentes**, esto es, los nodos en V tales que existe un itinerario de longitud 1 que los conecta con i.*

Hay consenso a la hora de dar una noción general de red compleja.

Definición. *Decimos que una red es una **red compleja** si posee propiedades topológicas que difieren en gran medida de aquellas presentes en un grafo aleatorio.*

Por tanto, la complejidad de una red depende de las propiedades topológicas que tomamos como marco comparativo (podemos encontrar una compilación detallada de estas propiedades en [B]). Esto da lugar a todo un estudio de las distintas medidas de la complejidad en función de los parámetros escogidos. Así pues, podemos ver diversos tipos de redes que encontramos en la naturaleza (*e.g.* los ciclos moleculares de las células, la estructura neuronal de un cerebro, las relaciones tróficas de un ecosistema...) como redes complejas en función del tipo de topología que presentan. Es de interés conocer y caracterizar bien las redes por su importancia para desentrañar las estructuras implicadas en gran cantidad de procesos. En este sentido, se han estudiado distintos tipos de estructuras de red destacables por aparecer con frecuencia organizando fenómenos sociales y naturales. Resumimos a continuación las tratadas en [S].

1. **Redes aleatorias**:

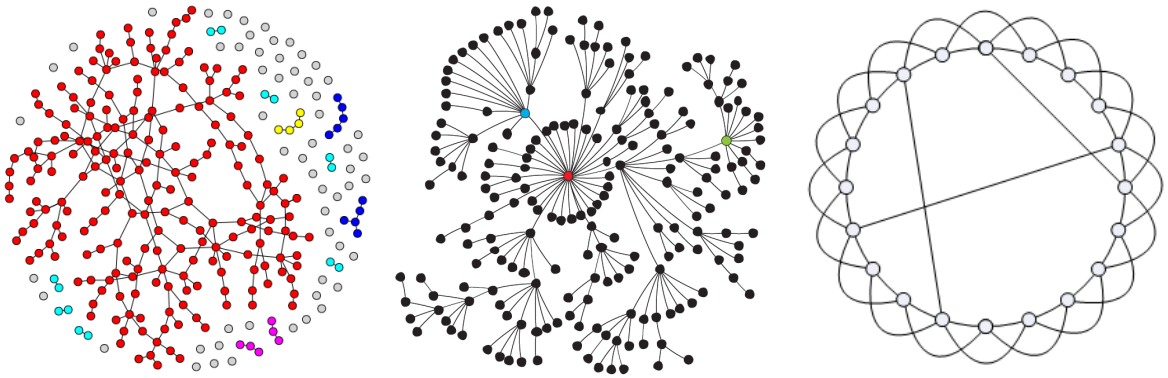
   Estos grafos se construyen de forma sencilla uniendo nodos aleatoriamente. Llamemos m al número de aristas que añadimos a un conjunto de n nodos totalmente desconectado. Erdös y Rényi estudiaron como la topología esperada de la red varía en función de m [ER]. Cuando m es pequeño, el grafo tiende a estar fragmentado en muchas agregaciones o *clústeres* con pocos nodos. Conforme aumentamos el valor de m, las componentes crecen en tamaño, primero enlazándose con nodos aislados, y después uniendo entre sí distintos clústeres. Una cambio drástico en la estructura surge cuando $m = n/2$. Muchos de los clústeres comienzan a enlazarse entre sí para formar una única gran componente. Cuando $m > n/2$ la componente contiene del orden de n nodos, esto es, la red esta totalmente conectada. De hecho, los caminos conectando dos nodos son, en cierto sentido, cortos.

2. **Redes *scale-free***

   En muchas redes relacionadas con fenómenos naturales, algunos pocos nodos acumulan la mayoría de enlaces, mientras el resto de nodos se enlazan menos. Cuantificamos este efecto definiendo p_k, donde p_k es el número de nodos con k vértices, es decir, el número de nodos de grado k. La distribución de grados para grafos aleatorios generados de forma sencilla (como hemos descrito en el apartado anterior), sigue una distribución de Poisson. No obstante, muchas redes reales siguen distribuciones que decaen mucho más lentamente que la distribución de Poisson. De hecho, la distribución suele decaer siguiendo una ley potencial, $p_k \sim k^{-\gamma}$, *e.g.* la Web, redes de reacciones metabólicas y la red telefónica tienen exponentes $\gamma \approx 2.1 - 2.4$. Estas redes, con distribución potencial de grados, fueron bautizadas por Barabási y Albert como *scale-free*, que las estudiaron y dieron un método de construcción [BA]. Descubrieron ventajas funcionales de esta topología, que justifican su frecuente presencia. Estas redes son resistentes a fallos aleatorios, ya que la mayoría de los nodos tienen grados pequeños, esto es, el fallo de un nodo afecta normalmente a pocos nodos adyacentes. Por otra parte, son muy vulnerables a ataques deliberados, ya que desconectar un punto fuertemente conectado puede anular la red por completo.

3. **Redes *small-world***

   Las redes *small-world* son redes entre la aleatoriedad y la regularidad, que poseen caminos muy cortos entre sus nodos. Watts y Strogatz estudiaron estas redes y dieron un método para construirlas [WS]. Estas redes también están presentes en gran cantidad de fenómenos naturales, *e.g.* en el cerebro y en redes sociales y de empresas.



(a) Aleatoria de Erdös-Renyi (b) *Scale-free* de Barabási-Albert (c) *Small-world* de Watts-Strogatz

Figura 1.2: Algunos ejemplos de redes

Para terminar, con la intención de estudiar como distintos sistemas pueden interactuar entre ellos, demos una definición de *sistema dinámico acoplado*, de forma que después podamos construir un sistema dinámico en base a un grafo.

Definición 1.2.4. *Dado un sistema de k ecuaciones diferenciales ordinarias o de ecuaciones de recurrencia de primer orden:*

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1,\dots,x_k,t) \quad o\ bien \quad x_{i,n+1} = G_i(x_{1,n},\dots,x_{k,n},n) \quad con \quad i = 1,\dots,k$$

Con $F_i : \mathscr{S}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{S}$ *y* $G_i : \mathscr{S}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathscr{S}$ *siendo* $\mathscr{S} = \prod \mathscr{S}_i$ *un producto de k conjuntos donde la ecuación esté bien definida.*

Sea el grafo $H = (V,E)$*, el* ***grafo de acoplado****, con* $V = \{1,\dots,k\}$ *y el conjunto de aristas E con* $(i,j) \in E \iff i \in V$ *y* j *es una componente en la que la aplicación* F_i *o* G_i*, en función del tipo de sistema considerado, es no trivial (esto es, no son constantes en la componente* j*) y* $i \neq j$*.*
Diremos que un sistema de ecuaciones, diferenciales o de recurrencia, es ***acoplado*** *si el grafo H es conexo. En otro caso, llamaremos* ***componentes acopladas*** *a los subsistemas de ecuaciones asociados a las componentes conexas de H.*

A partir de aquí es fácil hablar de sistemas dinámicos acoplados.

Definición 1.2.5. *Llamamos* ***sistema dinámico acoplado*** *a un sistema dinámico* $(\mathscr{S},\phi,\mathfrak{T})$ *donde* ϕ *es solución de un sistema de ecuaciones acoplado, ya sean diferenciales o de recurrencia.*

1.3. Caos en sistemas dinámicos: El mapa logístico

El caos, en lo que a sistemas dinámicos se refiere, se entiende a efectos prácticos como la imposibilidad de conocer la evolución de un elemento del sistema aun conociendo el comportamiento de elementos arbitrariamente cercanos al mismo. Es por ello que necesitamos definir primero el término *cercanía*.

Recordamos la definición de espacio métrico [W].

Definición 1.3.1. *Un* ***espacio métrico*** *es un par ordenado* (S,d)*, constando de un conjunto S junto con una función* $d : S\times S :\longrightarrow \mathbb{R}$*, a la que llamaremos* ***métrica****, cumpliendo que,* $\forall x,y,z \in S$*:*

1. $d(x,y) \geq 0$

2. $d(x,x) = 0 \quad y \quad d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \quad (desigualdad\ triangular)$

Recordemos también la definición de *órbita* de un punto y de *órbita de periodo* τ.

Definición 1.3.2. *Dado un sistema dinámico* $(\mathscr{S}, \phi, \mathfrak{T})$ *y* $x \in \mathscr{S}$ *llamamos* ***órbita*** *de* x *al conjunto:*

$$\gamma_x = \{\phi_t(x) \mid t \in \mathfrak{T}\}$$

Decimos que una órbita es una ***órbita periódica de periodo*** τ *si:*

$$\exists \tau \in \mathfrak{T} \quad tal\ que \quad \phi_\tau(y) = y,\ \forall y \in \gamma_x$$

Y decimos que τ *es su periodo mínimo si:*

$$\phi_t(y) \neq y,\ \forall t < \tau$$

De ahora en adelante asumiremos que $\mathscr{S}$ es un espacio métrico dotado de la topología inducida por la métrica.

Introduzcamos la noción de caos referida a un sistema dinámico [SN].

Definición 1.3.3. *Diremos que un sistema dinámico* $(\mathscr{S}, \phi, \mathfrak{T})$ *es* ***caótico*** *si satisface:*

- *Es* ***sensible a condiciones iniciales****:*

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x_0 \in \mathscr{S} \text{ y } \forall U_{x_0} \text{ entorno de } x_0 \text{ se tiene que } \exists y_0 \in U_{x_0} \text{ y un } t > 0 \text{ tal que:}$$
$$d(\phi_t(x_0), \phi_t(y_0)) > \delta$$

- *Es* ***topológicamente transitivo*** *en* $\mathscr{S}$*:*

$$Dados\ U\ y\ V\ abiertos\ en\ \mathscr{S},\ \exists x_0 \in U \wedge t > 0\ \ tal\ que\ \ \phi_t(x_0) \in V$$

- *Posee un conjunto de órbitas periódicas denso en* $\mathscr{S}$*.*

A continuación enunciamos un teorema para sistemas dinámicos discretos que da una condición suficiente para la existencia de regímenes caóticos. Una demostración del teorema puede encontrarse en [T]. Primero introducimos el *orden de Sarkovskii*, un orden parcial para $\mathbb{N}$.

Definición 1.3.4. *Llamamos* ***orden de Sarkovskii*** *a la ordenación de los números naturales dada como sigue:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \dots & (2n+1)\cdot 2^0 & \dots \\
3\cdot 2^1 & 5\cdot 2^1 & 7\cdot 2^1 & 9\cdot 2^1 & 11\cdot 2^1 & \dots & (2n+1)\cdot 2^1 & \dots \\
3\cdot 2^2 & 5\cdot 2^2 & 7\cdot 2^2 & 9\cdot 2^2 & 11\cdot 2^2 & \dots & (2n+1)\cdot 2^2 & \dots \\
 & \vdots & & & & & \vdots & \\
3\cdot 2^k & 5\cdot 2^k & 7\cdot 2^k & 9\cdot 2^k & 11\cdot 2^k & \dots & (2n+1)\cdot 2^k & \dots \\
 & \vdots & & & & & \vdots & \\
\dots & 2^n & 2^{n-1} & \dots & 2^3 & 2^2 & 2 & 1
\end{array}$$

Teorema 1.3.5. *(Teorema de Sarkovskii) Sea el sistema dinámico $(I,\phi,\mathbb{Z})$ con I un intervalo cerrado, y denotemos por $\succ$ al orden de Sarkovskii. Sea $\phi_n : I \longrightarrow I$ una función continua con una órbita de periodo m. Entonces, ϕ_n tiene órbitas de periodo mínimo k, $\forall k \prec m$. En particular, si ϕ_n tiene una órbita de periodo mínimo 3, entonces tiene órbitas de periodo mínimo k, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

El mapa logístico es un sistema dinámico que sirve de modelo simple para la dinámica de poblaciones de una especie aislada con recursos limitados. Además, es ejemplo muy sencillo de sistema que presenta regímenes caóticos y el ladrillo fundamental del sistema que estudiaremos después.

Ahora definimos el mapa como sistema dinámico:

Definición 1.3.6. *Llamamos **mapa logístico** de parámetro p, con $p \in (0,4)$ al sistema dinámico dado por la terna $([0,1],\lambda,\mathbb{Z})$ donde $\lambda = \{\lambda_n\}$ es la familia de aplicaciones $\lambda_n : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ dada por:*

$$\lambda_1(x) = px(1-x) \quad y \quad \lambda_n(x) = \lambda_1 \overset{n}{\cdot\cdot} \lambda_1(x)$$

Para simplificar notaciones el mapa logístico suele ser expresado mediante la relación de recurrencia:

$$x_{n+1} = px_n(1-x_n) \tag{1.1}$$

Con esta notación, en términos del modelo de poblaciones, x_n representa la población tras n generaciones. La *expansión* está controlada por el término px_n, proporcional a la población actual x_n y al parámetro p, al que llamamos *ratio de crecimiento*. La limitación de los recursos lleva al sistema a una *contración*, directamente relacionada con la sobrepoblación, expresada con el término $(1-x_n)$. La restricción del parámetro al intervalo $(0,4)$ se toma para garantizar que $x_n \in (0,1)$. En general, la ecuación de recurrencia no tiene una solución cerrada aunque es posible calcularla para valores concretos del parámetro, pero solo estamos interesados en un resumen general de la dinámica, que se puede caracterizar fácilmente mediante simulaciones.

Resumamos la dinámica del mapa logístico en función del valor de p [LF]:

1. $0 < p \leq 1$: El ratio de crecimiento es demasiado pequeño para estabilizar la población. La función es contractiva en todo $[0,1]$ y por el teorema del punto fijo de Banach, el sistema decae a su único punto fijo, 0. La población se extingue.

2. $1 < p \leq 3$: Cuando p se hace mayor que 1 la dinámica cambia drásticamente. Se hace posible la estabilización de una población no-nula. Aparece un punto de equilibrio entre el consumo y la reproducción. Además, la población alcanza este estado independientemente de sus condiciones iniciales. Concretamente, resolviendo la ecuación:

   $$x = px(1-x) \tag{1.2}$$

   Ahora, como estamos interesados en la solución no-nula, podemos considerar:

   $$1 = p(1-x) \Longleftrightarrow x = \frac{p-1}{p} \tag{1.3}$$

3. $3 < p < 3.57$: Comienza la llamada *cascada de doblamiento de periodo*. La población deja de asentarse en un único valor y comienza a oscilar en órbitas de periodo 2^n, con n creciendo progresivamente hacia infinito conforme p se aproxima al valor crítico 3.57.

4. $3.57 < p < 3.82$: Cuando el parámetro se desplaza el sistema alterna comportamientos periódicos de gran periodo en ciertos intervalos y regímenes caóticos para valores no localizados en intervalos (el conjunto de puntos para los que el sistema es caótico no es abierto). La población puede volverse impredecible a pesar del determinismo del sistema.

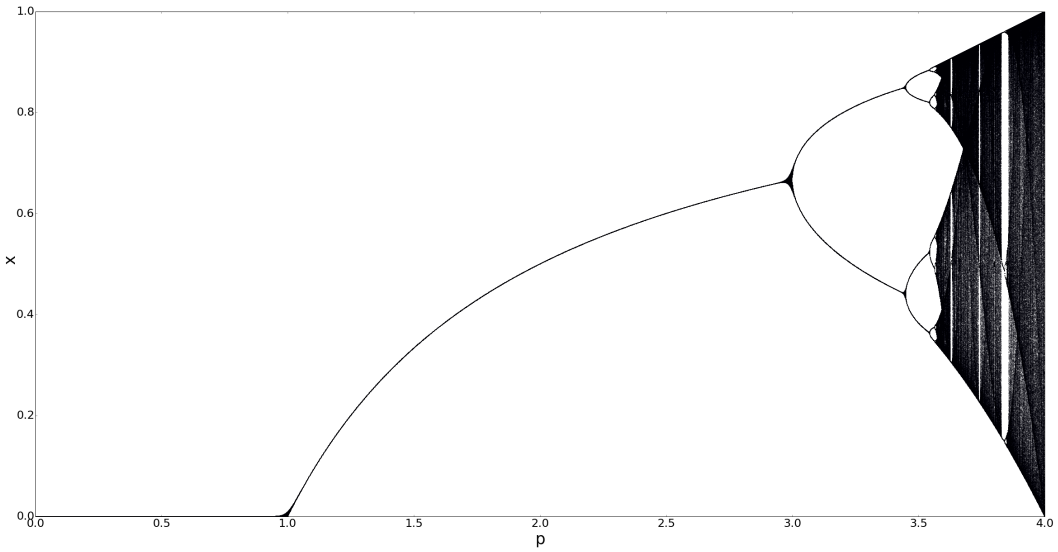


Figura 1.3: Diagrama de bifurcación el mapa logístico.

5. $3.82 < p < 3.85$: Aparece una órbita de periodo 3 para $p = 3.82$ tras un régimen donde el sistema se vuelve más sencillo. Las zonas impredecibles, llamadas *intermitencias*, se vuelven más infrecuentes, hasta desaparecer y originar la órbita de periodo 3. El teorema de Sarkovskii garantiza por tanto que podemos encontrar órbitas de cualquier periodo, aunque en este caso no son observables dada la inestabilidad computacional. En este rango aparece una *cascada de doblamiento de periodos* $3 \cdot 2^n$.

6. $3.85 < p < 4$: Aparece de nuevo un comportamiento caótico con ventanas periódicas en este intervalo.

7. $p = 4$: El régimen caótico se obtiene, para este valor del parámetro, en todo el intervalo $[0, 1]$. Este régimen especifico produce dinámicas que parecen aleatorias. La dinámica pierde su determinismo, y la población evoluciona como un generador de números aleatorios.

Estos comportamientos quedan bien representados en su *diagrama de bifurcación*. Se omiten los *estados transitorios*, la trayectoria descrita antes de alcanzar un punto fijo o una órbita periódica.

Capítulo 2

El modelo de acoplado logístico

En este capítulo se introduce y estudia la dinámica de un acoplado multiplicativo de mapas logísticos sobre una red, que puede ser interpretado como modelo de un sistema cooperativo o simbiótico. Se definen los conceptos de estabilidad y biestabilidad y se estudian los parámetros de acoplo para los que el sistema presenta dicha propiedad. Se comprueba que cuando el valor del parámetro de acoplo es pequeño, la dinámica de la red se disipa con el tiempo y deja de haber actividad: la red está *apagada*. Cuando aumentamos el parámetro emerge, a partir de un valor crítico, un nuevo estado sincronizado no nulo, para el cual consideraremos que la red está *encendida*. Se prueba, además, que el valor del parámetro en el que aparece la bifurcación de estados es independiente de la topología de la red. Esto motiva la reinterpretación del sistema simbiótico como modelo sencillo para los estados *despierto* y *dormido* de un cerebro [BL].

2.1. Acoplo de dos unidades funcionales

Como hemos visto antes, el mapa logístico modeliza la evolución de una especie, generación tras generación, en un sistema en el que el exceso de población es limitante. En esta sección generalizamos el modelo a dos especies que coexisten simbióticamente, es decir, una puede contribuir al crecimiento de la otra. En terminología de redes neurales hablamos de acoplado *excitatorio*.

Demos primero unas nociones sobre estabilidad.

Definición 2.1.1. *Dado un sistema dinámico $(\mathscr{S},\phi,\mathfrak{T})$ un conjunto $J \subseteq \mathscr{S}$ se dice* ***conjunto invariante*** *si se cumple:*

$$Si\ \ x \in J \Longrightarrow \phi_t(x) \in J,\ \forall t \in \mathfrak{T}$$

Definición 2.1.2. *Sea J un conjunto invariante, se dice que J es estable (en el sentido de Lyapunov) si se satisface:*

$$\forall V \text{ abierto con } J \subset V,\ \exists W \text{ abierto con } J \subset W \text{ tal que } \phi_t(x) \in V,\ \forall t \geq 0 \text{ y } \forall x \in W$$

Definición 2.1.3. *Sea J un conjunto invariante, se dice que J es un* ***atractor*** *si:*

- *Atrae la dinámica, es decir, $\exists V$ abierto con $J \subset V$, tal que $\forall x \in V$ se tiene que:*

  $$d(\phi_t(x),V) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

  Llamamos a V ***vasija de atracción*** *de J.*

- *V es un conjunto minimal, es decir, no existe ningún subconjunto no vacío de V que sea invariante y atraiga la dinámica.*

Teorema 2.1.4. *Sea $(\mathscr{S},\phi,\mathbb{Z})$ un sistema dinámico discreto, y sea $F=\phi_1$ una función diferenciable, de forma que $\phi_n = F\circ\overset{n}{\cdots}\circ F$. Sea $\mathscr{O}=\{p_0,\ldots,p_{\tau-1}\}$ una órbita periódica de periódica de periodo mínimo τ, y consideremos $B=D\phi_\tau(p_0)=B=DF(p_{\tau-1})\circ DF(p_{\tau-2})\circ\cdots\circ DF(p_0)$. Entonces, denotando ρ al radio espectral:*

- *Si $\rho(B)<1$, entonces la órbita periódica es asintóticamente estable, (en particular es estable).*
- *Si $\rho(B)>1$, entonces la órbita periódica es inestable.*

Definición 2.1.5. *Un sistema dinámico se dice **biestable** si coexísten dos órbitas estables.*

Consideremos ahora el modelo de dos nodos [LF, LP], el sistema dinámico en $[0,1]\times[0,1]$ dado por la ecuación de recurrencia:

$$x_{n+1} = p(3y_n+1)x_n(1-x_n) \tag{2.1}$$

$$y_{n+1} = p(3x_n+1)y_n(1-y_n) \tag{2.2}$$

Nótese que el *grafo de acoplado* es en este caso el grafo conexo de dos nodos, una red muy sencilla. Es el producto de las ecuaciones por un término externo lo que acopla las ecuaciones, hablamos de un acoplado multiplicativo. Se escoge precisamente el término $p(3z+1)$ para forzar al ratio de crecimiento de cada especie, ahora variable con el tiempo, a pertenecer al intervalo $(0,4)$, al igual que en el mapa logístico.

2.1.1. Dinámica y puntos fijos

Estudiamos la dinámica del sistema en función del parámetro p:

1. $0<p<0.75$: El beneficio que una unidad ofrece a la otra es demasiado pequeño para permitir la estabilización de actividad. Ambas unidades decaen hasta desaparecer, independientemente de las condiciones iniciales. El único punto fijo estable en esta franja es $\mathscr{O}=(0,0)$, el estado *apagado*.

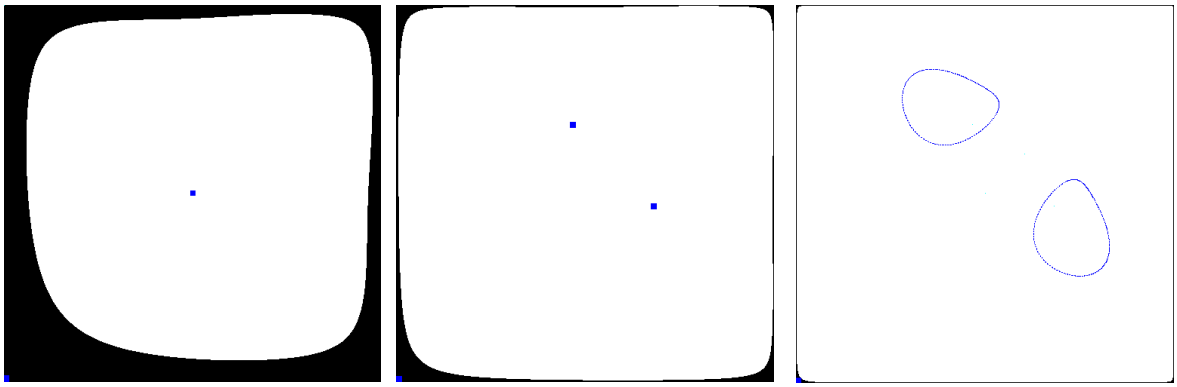
2. $0.75<p<0.86$: Un cambio repentino aparece al hacer variar el parámetro en este intervalo. Ambas poblaciones se sincronizan en un punto fijo estable y no nulo, el estado *encendido*, cuando las condiciones iniciales superan ciertos valores críticos:

$$x_+=(\alpha_+,\alpha_+) \quad con \quad \alpha_+=\frac{1}{3}(1+\sqrt{4-\frac{3}{p}})$$

   Si las condiciones iniciales se escogen bajo estos límites, en la *vasija de atracción* del estado *apagado*, ambas desaparecen. Coexisten por tanto dos estados estables. El sistema es *biestable* en esta franja. Existe otro punto fijo, inestable y sincronizado, en esta franja:

$$x_-=(\alpha_-,\alpha_-) \quad con \quad \alpha_-=\frac{1}{3}(1-\sqrt{4-\frac{3}{p}})$$

3. $0.86<p<0.95$: El estado *encendido*, antes un solo punto fijo, se bifurca en una órbita de periodo 2 cuando $p\sim 0.86$. Ambas unidades oscilan desfasadas. El punto fijo sigue existiendo, pero solo atrae actividad dentro de la diagonal. Es necesaria menor actividad inicial para encender la red. Anular una de las componentes sigue siendo buena estrategia para apagarla.



(a) $p = 0.8$ (b) $p = 0.9$ (c) $p = 0.98$

Figura 2.1: Divisiones del espacio de fases en función del parámetro p.

4. $0.95 < p < 1$: El sistema ya no converge a una órbita de periodo 2, esta pierde la estabilidad. Aparecen órbitas cuasiperiódicas y estables alrededor de ambos puntos de la órbita de periodo 2, en forma de curva invariante cerrada. El sistema sigue apagándose cuando anulamos una de las componentes.

5. $p > 1$: El sistema pierde la biestabilidad. Regímenes caóticos aparecen a partir de este punto.

La figura 2.1 resume la dinámica en las tres regiones en las que la existe biestabilidad. Se pinta de negro la región de condiciones iniciales que lleva al estado *apagado*, y de blanco la región que lleva a la red al *encendido*.

2.2. Acoplado de una red arbitraria

Después de haber estudiado la dinámica de dos unidades que interactúan entre si parece razonable preguntarse como evolucionarán un número arbitrario de unidades, enlazadas también de forma cooperativa. Ahora bien, es natural que una especie, neurona o grupo de activos pueda relacionarse de forma directa solo con un número concreto de elementos de una estructura mayor. Es por ello que construiremos un modelo que permita generalizar este tipo de enlace *simbiótico* a una red con cualquier estructura [BL]. Centraremos el modelo en grafos no dirigidos.

Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$ de N nodos, y sea un nodo $i \in V$. Llamaremos vecindario de i al conjunto de vecinos de i, y lo denotaremos v_i. Asociamos a cada nodo i un estado en $[0,1]$, al que denotaremos x_i (sin hablar todavía de dependencias temporales). Llamaremos ***media local de un nodo*** al valor:

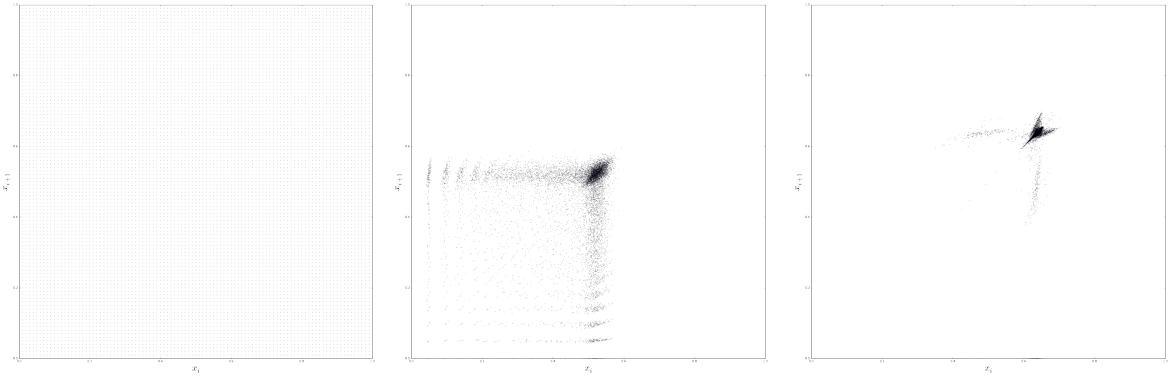
$$\bar{x}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j \in v_i} x_j \tag{2.3}$$

Con estos ingredientes podemos pasar ya a la construcción del sistema dinámico. Este vendrá dado por el sistema de ecuaciones de recurrencia acoplado:

$$x_{i,n+1} = p(3\bar{x}_{i,n} + 1)x_{i,n}(1 - x_{i,n}) \quad con \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.4}$$

Es claro que el *grafo de acoplado* del sistema coincide con el grafo inicial G, y que el modelo general es compatible con el de dos nodos.

Nos preguntamos ahora si el modelo de muchos nodos heredará la biestabilidad de su progenitor y, en caso afirmativo, como y cuando surge. Veamos que esta propiedad esta presente independientemente de la red escogida.



(a) Condiciones iniciales (b) Segunda iteración (c) Quinta iteración

Figura 2.2: Las siguientes figuras retratan el movimiento de los puntos de una sección de un grafo completo de 100 nodos, con $p = 0.97$. Se toman dos nodos distintos y cada eje corresponde al estado de un nodo. Las condiciones iniciales para los nodos elegidos se distribuyen uniformemente. Para el resto de los nodos se escogen condiciones aleatoriamente, siguiendo una distribución uniforme.

2.2.1. Dinámica y biestabilidad del modelo de muchos nodos

Pese a que hay muchas definiciones del término [BK], consideraremos que el sistema está *sincronizado* cuando se cumpla que $x_{i,n} = x_n$ para $i = 1, \ldots, N$. Estudiaremos, por simplicidad, que es lo que sucede en este régimen sincronizado y veremos cuando la dinámica es atraída a este estado.

Nótese que, en estas condiciones de sincronía, también se tiene que $\bar{x}_{i,n} = x_n$, ya que sumamos N_i copias del mismo estado.

Sustituyendo en cualquier ecuación los estados antiguos por los sincronizados obtenemos que la evolución del sistema sobre la *variedad de sincronización*, Δ, viene dada por el mapa cúbico:

$$x_{n+1} = p(3x_n + 1)x_n(1 - x_n) \tag{2.5}$$

Es claro ahora que la *variedad de sincronización* (o dada nuestra definición de sincronía simplemente *diagonal*) a la que hemos llamado Δ, es un conjunto invariante del sistema dinámico, ya que si las condiciones iniciales se escogen idénticas, las relaciones recursivas toman la expresión anterior en todo nodo, y por tanto su evolución es la misma.

Calculemos los puntos fijos de esta ecuación haciendo $x_{n+1} = x_n = x$:

$$x = p(3x + 1)x(1 - x) \tag{2.6}$$

Cuyas soluciones son:

$$\mathscr{O} = 0, \quad x_{\pm} = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{4 - \frac{3}{p}}) \tag{2.7}$$

Exactamente los mismos puntos fijos que en el modelo de dos nodos, cosa evidente ya que ambos sistemas coinciden en Δ.

El estado $\mathscr{O}$ es estable para $0 < p < 1$ y los estados $x_{\pm}$ surgen cuándo $p > 0.75$, bifurcándose en $p = p_0 = 0.75$ a partir del punto fijo $x = \frac{1}{3}$. Aunque hay dinámicas estables para $p > 1$, solo consideraremos los casos en los que $p \in [0, 1]$, que es donde el estado *apagado* es estable, y por tanto la región donde puede existir biestabilidad acorde a la interpretación que estamos siguiendo.

En estas condiciones, el punto fijo x_+ es estable en todo el recorrido de p en el que existe, $0.75 < p \leq 1$. Por contra, como en la red de dos nodos, el punto fijo x_- es inestable en esta región. Por tanto obtenemos biestabilidad en Δ:

$$x_i = \mathscr{O} \longrightarrow \textbf{Apagado}$$
$$x_i = x_+ \longrightarrow \textbf{Encendido}$$

Ahora bien, la diagonal solo comprende una región cerrada del espacio de fases, por tanto la estabilidad sobre Δ no implica necesariamente la estabilidad global. Pequeñas perturbaciones que sacaran los estados fuera de esta sincronización podrían desestabilizarlos completamente.

Estudiamos a continuación cómo afecta una perturbación transversal a Δ a la dinámica, y cuando podemos garantizar que el sistema tenderá de nuevo a la sincronización.

Representamos la perturbación en el instante n del nodo i con $\varphi x_{i,n}$, de forma que el estado en cada nodo, desplazado de cualquiera de los estados sincronizados estables que ahora representamos con θ, queda como sigue:

$$x_{i,n} = \theta + \varphi x_{i,n} \quad con \quad \theta = \mathscr{O} \vee x_+ \tag{2.8}$$

Definimos en base a esto la perturbación de la media local de un nodo como:

$$\varphi \bar{x}_{i,n} = \frac{3}{N_i} \sum_{j \in v_i} \varphi x_{j,n} \tag{2.9}$$

Incluimos el 3 para simplificar expresiones posteriores. Sustituyendo estos valores en la ecuación del sistema, podemos despejar una ecuación que exprese la evolución temporal de la perturbación.

$$\varphi x_{i,n+1} = p(3\theta+1)(1-2\theta)\varphi x_{i,n} + p\theta(1-\theta)\varphi \bar{x}_{i,n} \tag{2.10}$$

En esta expresión podemos comprobar la estabilidad del estado *apagado*, $\theta = \mathscr{O}$:

$$\varphi x_{i,n+1} = p\varphi x_{i,n} \tag{2.11}$$

Por tanto cuando $0 < p < 1$ la sucesión de perturbaciones:

$$\varphi x_{i,n} = p^n \varphi x_{i,0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.12}$$

Por otra parte podemos ver cómo avanza la perturbación sobre la media local sustituyendo la expresión 2.10 en 2.9 :

$$\varphi \bar{x}_{i,n+1} = p(3\theta+1)(1-2\theta)\varphi \bar{x}_{i,n} + 3p\theta(1-\theta) \times \frac{1}{N_i} \sum_{j \in v_i} \varphi \bar{x}_{j,n} \tag{2.13}$$

Ahora expresemos la media local de perturbaciones de forma más sencilla, en función de su nodo central, definiendo $\sigma_{i,n}$, una cantidad variable de forma que:

$$\frac{1}{N_i} \sum_{j \in v_i} \varphi \bar{x}_{j,n} = \sigma_{i,n} \varphi \bar{x}_{i,n} \tag{2.14}$$

Por tanto:

$$\sigma_{i,n} = \frac{\frac{1}{N_i} \sum_{j \in v_i} \varphi \bar{x}_{j,n}}{\varphi \bar{x}_{i,n}} \tag{2.15}$$

Luego esta cantidad queda determinada por la propia dinámica del sistema y es dependiente de la topología. Si consideramos el sistema dinámico que expresa la evolución de ambas cantidades, la perturbación en un nodo y en su media local, tenemos el sistema de ecuaciones:

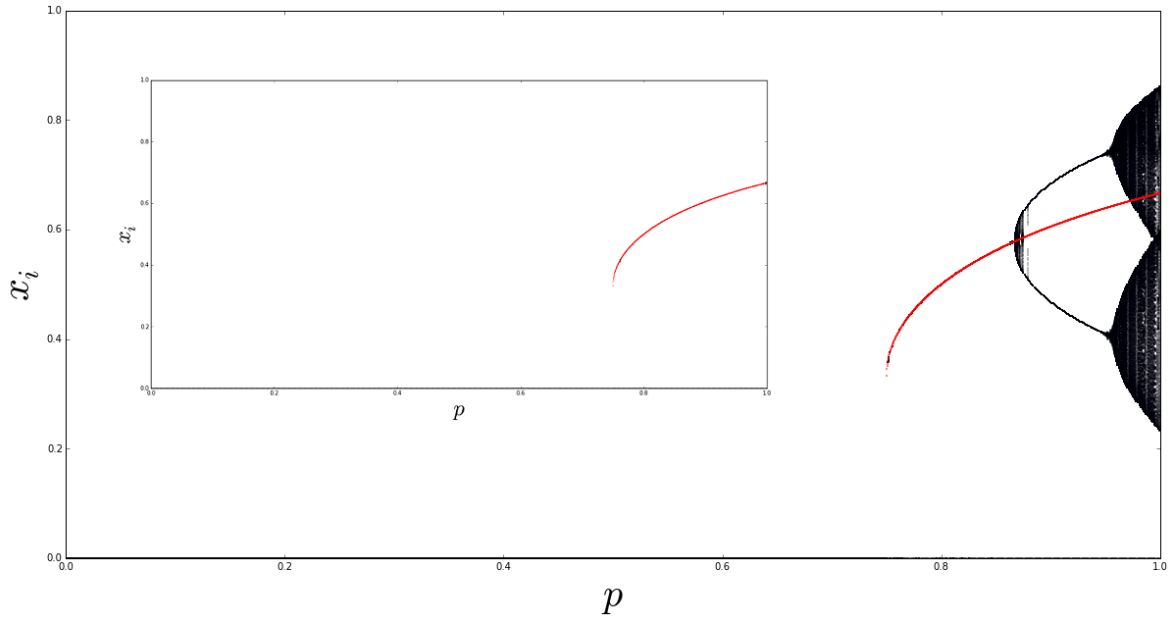


Figura 2.3: En negro el diagrama de bifurcación del estado de un nodo, para una red *scale-free* de 100 nodos, con $\gamma = 2.5$. En rojo el punto x_+ para cada valor del parámetro entre 0.75 y 1. Podemos ver que hay biestabilidad, primero sobre un punto, después sobre una órbita periódica y después en lo que parecen órbitas cuasiperiódicas, igual que en el modelo de dos nodos. Las condiciones iniciales se generan aleatoriamente siguiendo una distribución uniforme. En este caso $p_f = 1$ y $p_c = 0.87$. En la gráfica interior es idéntica para un grafo completo de 100 nodos. El estado del punto se solapa completamente con x_+.

$$\begin{pmatrix} \varphi x_{i,n+1} \\ \varphi \bar{x}_{i,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(3\theta+1)(1-2\theta) & p\theta(1-\theta) \\ 0 & p(3\theta+1)(1-2\theta)+3p\sigma_{i,n}\theta(1-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi x_{i,n} \\ \varphi \bar{x}_{i,n} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

La única dependencia de la topología de la red está contenida en el valor de $\sigma_{i,n}$, el resto de la matriz es completamente independiente de la red escogida y es igual para todos los nodos.

Estudiemos ahora los valores propios de la matriz, que nos dará información sobre la estabilidad del sistema de perturbaciones.
Cuando $\theta = \mathscr{O}$ los valores propios de la matriz son $\lambda_1 = \lambda_2 = p$, por tanto es un estado atractivo si $0 < p < 1$, información que ya conocíamos por 2.12 . Por tanto el parámetro máximo para el que la biestabilidad es posible, $p_f \leq 1$, y desaparecerá solo cuando falle la estabilidad de x_+.

Sea ahora $\theta = x_+$. El estudio de este estado es más complicado. Supongamos, por simplicidad, que $\sigma_{i,n} = \sigma$, esto es, constante sobre todo nodo y a lo largo del tiempo. En el siguiente capítulo veremos que esta hipótesis está justificada. En este caso, los valores propios de la matriz quedan:

$$\lambda_1 = 2 - 2p - p\sqrt{4 - \frac{3}{p}} \tag{2.17}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\sigma}{3}(3 - 2p + p\sqrt{4 - \frac{3}{p}}) \tag{2.18}$$

El valor propio λ_1 es función decreciente de p, y toma el valor $\lambda_1 = -1$ cuando $p = 1$. Por tanto el valor del parámetro p para el cual x_+ pierde la estabilidad, al que llamaremos p_c satisface $p_c \leq 1$,

y esta inestabilidad vendrá asociada a λ_2, ya que $\mid \lambda_1 \mid < 1$ si $p < 1$. Notemos que, por como esta definido, $\sigma \in (-1,1)$. Veamos cómo varía el valor de p_c en función del de σ:

- $\underline{0 < \sigma < 1}$: En este caso $\mid \lambda_2 \mid < 1$. Por tanto el sistema es estable, y para estos valores de σ hay biestabilidad siempre que el estado *encendido*, propiamente x_+, esté definido. Esto es, hay biestabilidad si $0.75 < p < 1$. El estado pierde la estabilidad en $p = 1$, por tanto $p_c = p_f = 1$.
- $\underline{-1 < \sigma < 0}$: En este caso obtenemos valores para los que x_+ pierde la estabilidad con $p < 1$, por tanto $p_c < 1$, es decir, $\lambda_2 = -1$ para algún $p < 1$. Es aun posible encontrar dinámica activa y estable distinta de un punto fijo para valores de p tales que $p_c < p < p_f = 1$, tal y como pasa en el modelo de dos nodos. Esto es, la biestabilidad sigue siendo viable, y el punto en el que se pierda y el tipo de actividad es dependiente de la topología de la red.

De todo esto se deduce que el valor de σ captura en cierta medida información de la estructura de la red, además de información sobre la dinámica del sistema. De la ecuación 2.14 se deduce que, si $\sigma < 0$, las perturbaciones local y de la media oscilan desfasadas. Sin embargo, si $\sigma > 0$, ambas perturbaciones oscilan sincronizadas en fase.

En el siguiente capítulo calcularemos un valor aproximado de σ para algunos tipos de redes.

Capítulo 3

Algunos resultados nuevos

El acoplado de mapas logísticos da lugar a una gran cantidad de propiedades emergentes, dependientes e independientes de la topología de red escogida.

En este capítulo revisaremos algunas características cuyo estudio ha quedado pendiente, motivados por su relevancia en la dinámica del sistema.

3.1. Puntos fijos en ciertas topologías de red

Durante el análisis computacional se hace razonable la posibilidad de que los únicos puntos fijos (al menos los estables) sin ninguna componente nula del sistema yazcan sobre la variedad sincronizada. Por tanto, si esto es cierto, otra dinámica estable que pudiera existir deberá ser de otro tipo.

En esta sección se comprobará la certeza de la hipótesis en ciertos tipos de red, pero primero demos una propiedad que deben satisfacer los puntos fijos del sistema.

Proposición 3.1.1. *Sea G un grafo no dirigido de N nodos cualquiera y $\mathbb{L}$ el sistema de acoplado logístico asociado a G. Sea $X = (x_1, \ldots, x_N)$ un punto fijo del sistema y tomemos dos nodos, i y j tales que $x_i, x_j \neq 0$, siendo x_i y x_j sus estados en el punto fijo y $\bar{x}_i$ y $\bar{x}_j$ sus medias locales. Entonces:*

$$x_i = x_j \iff \bar{x}_i = \bar{x}_j \tag{3.1}$$

Demostración. Primero supongamos que $x_i = x_j = x$. Tomemos las ecuaciones i y j del sistema:

$$x_{i,n+1} = p(3\bar{x}_{i,n} + 1)x_{i,n}(1 - x_{i,n})$$
$$x_{j,n+1} = p(3\bar{x}_{j,n} + 1)x_{j,n}(1 - x_{j,n})$$

Como se trata de un punto fijo eliminamos la dependencia temporal:

$$x_i = p(3\bar{x}_i + 1)x_i(1 - x_i)$$

$$x_j = p(3\bar{x}_j + 1)x_j(1 - x_j)$$

Restando ambas ecuaciones y cambiando la notación de los puntos i y j por x:

$$0 = 3p(\bar{x}_i - \bar{x}_j)x(1 - x)$$

Como X no tiene ninguna componente nula (y es fácil ver que ninguna puede tomar el valor 1), se tiene que $\bar{x}_i = \bar{x}_j$.

Recíprocamente, sea $\bar{x}_i = \bar{x}_j = \bar{x}$. Entonces, la i-ésima ecuación queda:

$$x_i = p(3\bar{x}+1)x_i(1-x_i)$$

Como x_i es no-nula podemos despejar el valor de x_i:

$$x_i = 1 - \frac{1}{p(3\bar{x}+1)}$$

Y como la ecuación para la componente j es idéntica, se tiene el resultado:

$$x_i = x_j = 1 - \frac{1}{p(3\bar{x}+1)}$$

□

Este sencillo resultado desvela una ligadura entre el valor del estado de dos nodos y sus medias locales.

A partir de ahora, como en la proposición, llamaremos G al grafo no dirigido de N nodos al que nos refiramos y $\mathbb{L}$ a su sistema de acoplado logístico asociado.

3.1.1. Topología en estrella

Uno de los casos más sencillos de comprobar, debido a sus simetrías, es la topología en estrella.

Sea X un punto fijo de $\mathbb{L}$ para G un grafo en estrella, es decir, el nodo c es el centro y es adyacente al resto de nodos, y todos los demás solo son adyacentes a c.

Entonces $\bar{x}_i = x_c$ para todo $i \neq c$, y $\bar{x}_c = \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq c} x_j$. Con esta información el sistema que da los puntos fijos, eliminando el paso temporal, se reduce a solo dos ecuaciones distintas:

$$\begin{cases} \frac{1}{p} = (3x_c+1)(1-x_i) \\ \frac{1}{p} = (3\bar{x}_c+1)(1-x_c) \end{cases} \tag{3.2}$$

Por tanto, despejando el valor de x_i:

$$x_i = 1 - \frac{1}{p(3x_c+1)} \tag{3.3}$$

Luego $x_i = x_j = x$ para todos $i, j \neq c$. De aquí, $\bar{x}_c = x$, y por tanto las ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} \frac{1}{p} = (3x_c+1)(1-x) \\ \frac{1}{p} = (3x+1)(1-x_c) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{p} = (3x_c+1)(1-x) \\ \frac{1}{p} = (3x+1)(1-x) + (3x+1)(x-x_c) \end{cases} \tag{3.4}$$

En la segunda expresión, restando la primera ecuación a la segunda queda:

$$0 = 3(x-x_c)(1-x) + (3x+1)(x-x_c) \Longrightarrow 0 = 4(x-x_c) \tag{3.5}$$

y por tanto $x_i = x = x_c$, como queríamos demostrar.

3.1.2. Clústers de tipo all-to-all

A continuación pasamos a comprobar agregaciones de una red en las que todos los nodos son vecinos entre sí. Esta propiedad no es exclusiva de una red *all-to-all* (todos con todos, o grafo completo), algunas componentes de otro tipo de redes pueden satisfacer esta condición. Veremos a continuación que en un punto fijo, todos los estados asociados a estas agregaciones deben coincidir.

Las medias locales de este tipo de agregados satisfacen:

$$\bar{x}_{i,n} + \frac{x_{i,n}}{N-1} = \bar{x}_{j,n} + \frac{x_{j,n}}{N-1}, \quad \forall i, j \tag{3.6}$$

Sea pues X un punto fijo, y veamos que los estados de los nodos en este tipo de componentes coinciden. La i-ésima y la j-ésima ecuación del sistema que da los puntos fijos quedan:

$$\begin{cases} \frac{1}{p} = (3\bar{x}_i + 1)(1 - x_i) \\ \frac{1}{p} = (3\bar{x}_j + 1)(1 - x_j) \end{cases} \tag{3.7}$$

Podemos reescribir 3.6 de la siguiente manera:

$$\bar{x}_{i,n} + \frac{x_{i,n} - x_{j,n}}{N-1} = \bar{x}_{j,n}, \quad \forall i, j \tag{3.8}$$

Sustituimos esta expresión, ahora sin la dependencia temporal, en la segunda ecuación de 3.7 y queda:

$$\frac{1}{p} = (3\bar{x}_j + 1)(1 - x_j) = (3(\bar{x}_i + \frac{x_i - x_j}{N-1}) + 1)(1 - x_j) \tag{3.9}$$

Que podemos desplegar y reescribir como:

$$\frac{1}{p} = (3\bar{x}_i + 1)(1 - x_i) + (3\bar{x}_i + 1)(x_i - x_j) + \frac{3(x_i - x_j)}{N-1}(1 - x_j) \tag{3.10}$$

Restamos la primera ecuación de 3.7 a 3.10, y queda la expresión:

$$0 = (3\bar{x}_i + 1)(x_i - x_j) + \frac{3(x_i - x_j)}{N-1}(1 - x_j) \tag{3.11}$$

Sacando fuera el factor $(x_i - x_j)$:

$$0 = (x_i - x_j)((3\bar{x}_i + 1) + \frac{3}{N-1}(1 - x_j)) \tag{3.12}$$

El segundo factor de la expresión de la izquierda no se puede anular, es mayor que 1. Por tanto $x_i = x_j = x$, como queríamos demostrar. Además, de la ecuación 3.6 se deduce que $\bar{x}_i = \bar{x}_j = x$.

3.1.3. Desconectado de clústers all-to-all

Comprobamos como afecta a los puntos fijos de los agregados anteriores la desconexión de un nodo de un cierto número de nodos adyacentes. Para simplificar las expresiones asumiremos que la red tiene $N+1$ nodos.

Elegimos un nodo, i, y k nodos que desconectaremos de este. Los nodos que están desconectados de i forman un clúster *all-to-all*, todos ellos están conectadas entre sí y comparten los mismos vecinos. Los nodos no desconectados, obviamente, siguen estando conectados con todos los demás, forman otro clúster. Por tanto, en un punto fijo, cada uno de estos grupos toma el mismo valor. Al valor del

grupo conectado lo denotamos x, y al del grupo desconectado y. Las medias de un elemento en cada grupo quedan:

$$\bar{x} = \frac{ky + x_i + (N-k-1)x}{N}; \quad \bar{y} = \frac{(k-1)y + (N-k)x}{N-1}; \quad \bar{x}_i = x \tag{3.13}$$

Por tanto, sustituyendo estos valores, las ecuaciones de los puntos fijos quedan:

$$\begin{cases} \frac{1}{p} = (3(\frac{ky+x_i+(N-k-1)x}{N}) + 1)(1-x) \\ \frac{1}{p} = (3(\frac{(k-1)y+(N-k)x}{N-1}) + 1)(1-y) \\ \frac{1}{p} = (3x+1)(1-x_i) \end{cases} \tag{3.14}$$

La tercera ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{1}{p} = (3x+1)(1-x) + (3x+1)(x-x_i) \tag{3.15}$$

La primera como:

$$\frac{1}{p} = (3x+1+3\frac{ky+x_i}{N} - 3\frac{k+1}{N}x)(1-x) \tag{3.16}$$

Restamos 3.16 y 3.15:

$$0 = (3\frac{ky+x_i}{N} - 3\frac{k+1}{N}x)(1-x) + (3x+1)(x_i-x) \tag{3.17}$$

Reagrupamos:

$$0 = (\frac{3k}{N}(y-x) + \frac{3}{N}(x_i-x))(1-x) + (3x+1)(x_i-x) \tag{3.18}$$

Y sacando los factores:

$$0 = \underbrace{\frac{3k}{N}(1-x)}_{c_1}(y-x) + \underbrace{(3x+1+\frac{3}{N}(1-x))}_{c_2}(x_i-x) \tag{3.19}$$

Por otra parte multiplicamos la segunda ecuación de 3.14 por $N-1$ y queda:

$$\frac{N-1}{p} = [3((k-1)y+(N-k)x) + (N-1)](1-x) + [3((k-1)y+(N-k)x) + (N-1)](x-y) \tag{3.20}$$

Ahora multiplicamos la primera por N y le restamos 3.20, y obtenemos:

$$\frac{1}{p} = (3(y+x_i-x)+1)(1-x) + [3((k-1)y+(N-k)x) + (N-1)](y-x) \tag{3.21}$$

Restamos 3.15 a 3.21, y queda, tras reordenar:

$$0 = \underbrace{4}_{c_4}(x_i-x) + \underbrace{[3((k-1)y+(N-k-1)x) + (N+2)]}_{c_3}(y-x) \tag{3.22}$$

Tomando las dos expresiones finales nos queda el sistema:

$$\begin{cases} 0 = c_1(y-x) + c_2(x_i-x) \\ 0 = c_3(y-x) + c_4(x_i-x) \end{cases} \quad con \quad c_1, c_2, c_3, c_4 > 0 \tag{3.23}$$

Multiplicamos la primera ecuación por c_3 y la segunda por c_1 y las restamos, obteniendo así:

$$0 = (c_2c_3 - c_1c_4)(x_i-x) \tag{3.24}$$

Comprobemos en que condiciones podemos garantizar que $c_2c_3 \neq c_1c_4$, teniendo en cuenta que $x,y \in (0,1)$ y $N,k \in \mathbb{N}$ con $k < N$.

Si $c_2c_3 = c_1c_4$ podemos despejar y de la igualdad como función de x:

$$y(x) = \frac{16kN}{3(k-1)(N-1)(3Nx+N-3x+3)} + \frac{x(k-N+1)}{k-1} - \frac{4k+N^2+N-2}{3(k-1)(N-1)} \tag{3.25}$$

Un análisis sencillo de la función muestra que es decreciente en $[0,1]$. Su máximo por tanto se alcanza para $x = 0$, y es $y \leq 0$ si $N \geq 1$, en contradicción con las condiciones de contorno escogidas. Por tanto si $N \geq 1$ entonces $x = x_i \; \forall k \leq N$. Y de 3.22 se sigue que $x = x_i = y$, como queríamos probar.

Un reinterpretación de este resultado es la posibilidad de añadir un nuevo nodo conectado arbitrariamente a una agregación de este tipo.

3.2. Medidas computacionales de parámetros asociados al sistema

La biestabilidad es una propiedad que el sistema presenta a partir del valor del parámetro logístico $p \geq 0.75$, independientemente de la red escogida. Pasamos ahora a calcular algunos de los parámetros que utilizamos en el estudio previo, que rigen la dinámica de la red y son dependientes de la topología.

3.2.1. Cálculo de p_c en algunas topologías

En primer lugar calcularemos aproximaciones de los puntos en los que el punto fijo x_+ deja de ser estable y la dinámica del estado *encendido* sufre un cambio. Utilizaremos el sistema que define la evolución de las perturbaciones como se vio en el capítulo anterior:

$$\varphi x_{i,n+1} = p(3\theta+1)(1-2\theta)\varphi x_{i,n} + p\theta(1-\theta)\varphi \bar{x}_{i,n} \tag{3.26}$$

Lo que nos hace posible calcular p_c a partir de las perturbaciones $\varphi x_{i,n}$ es el hecho de que, si el sistema se asienta en el punto fijo sincronizado a partir de un cierto tiempo k, entonces $\varphi x_{i,n} = 0$, $\forall n \geq k$. Por tanto basta aproximar el primer valor de p para el que $\varphi x_{i,n} \neq 0$, $\forall n$. Este procedimiento resulta más preciso y más sencillo que aproximar el punto de bifurcación directamente de los valores del sistema logístico. Todos los cálculos se realizan con redes de 100 nodos, y asumiendo que el tiempo de transición hasta que el sistema cae en el estado *encendido* es menor que 100.

- Para una red *scale-free* el valor de $p_c \approx 0.86$, calculado con un error de ± 0.01. Este rango de valores resulta ser casi independiente del parámetro γ asociado a la distribución de grados de los nodos. En concreto, calculando el valor de p_c para una red en estrella, que podemos considerar un caso límite de este tipo de redes, obtenemos el mismo valor.

- Para redes en anillo obtenemos los valores representados en la figura 3.1. Se observa que p_c se acerca más a 1 conforme la red se compacta, aunque este crecimiento no es monótono.

- Para redes *all-to-all* el valor de p_c es muy cercano a 1, como se observa al final de la gráfica 3.1. En este caso, con 100 nodos, $p_c \approx 0.99$, con un error de ± 0.01.

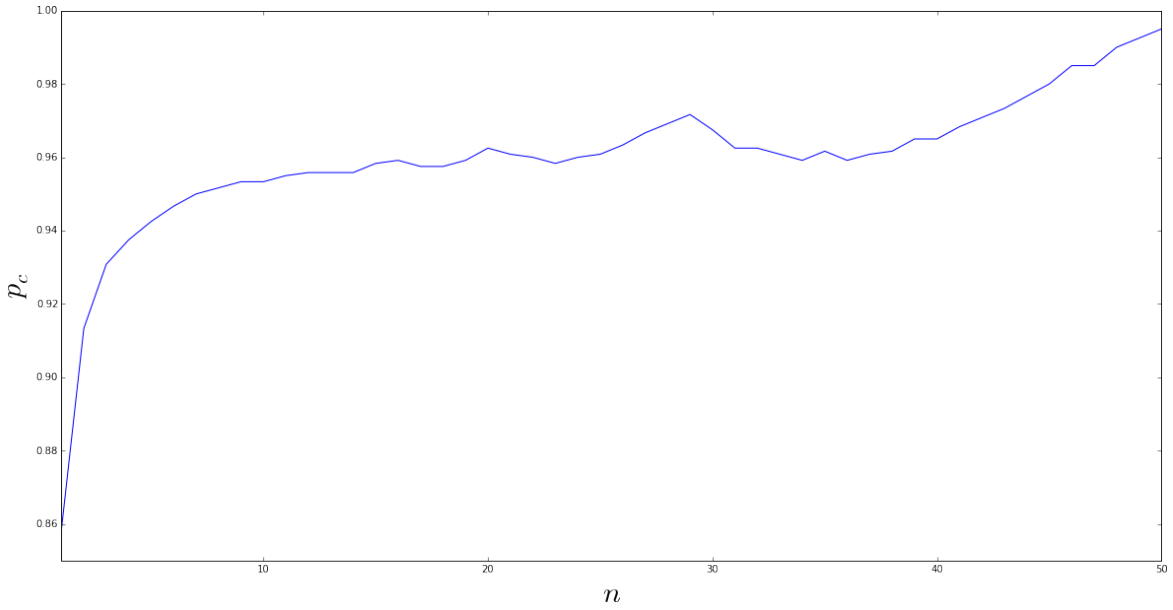


Figura 3.1: Calculamos la siguiente gráfica para redes de 100 nodos. El primer valor corresponde a una red en anillo simple. A partir de esta red construimos anillos con mayor densidad de enlaces, conectando cada nodo con todos los nodos a distancia menor o igual que n. Por tanto, la última de estas redes corresponderá al grafo *all-to-all* de 100 nodos, para $n = 50$.

De este estudio se concluye que, cuanto más compacta es la red, más amplia es la región en la que el punto fijo x_+ es estable, es decir, un mayor número de interconexiones hacen más fuerte la biestabilidad sencilla. Si interpretáramos la *memoria* de la red como su capacidad para acceder a estados dinámicos estables complejos, las redes con más memoria en su zona biestable son aquellas con menor densidad de conexiones.

3.2.2. Cálculo de σ en algunas topologías

Pasamos ahora al cálculo del parámetro σ, de nuevo en redes de 100 nodos. Se comprueba en la práctica que la suposición de que $\sigma_{i,n}$ es constante para todo nodo y a partir de un cierto tiempo es razonable. El valor de este parámetro proporciona más información sobre la red que p_c. De hecho, conociendo σ podemos calcular el valor exacto de p_c a partir de los valores propios de la matriz del sistema de perturbaciones dado en el capítulo anterior:

$$\lambda_1 = 2 - 2p - p\sqrt{4 - \frac{3}{p}} \tag{3.27}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\sigma}{3}(3 - 2p + p\sqrt{4 - \frac{3}{p}}) \tag{3.28}$$

Si $0 \leq \sigma < 1$ vimos que $p_c = 1$, y si $-1 < \sigma < 0$ entonces, por ser $\lambda_2 < 0.5$ en esta región, y decreciente como función de p, se tiene que p_c es el valor que hace $\lambda_2 = -1$:

$$p_c = \frac{3\sigma^2 - 30\sigma - 27 - \sqrt{3(\sigma-3)^2(3\sigma^2 + 14\sigma + 27)}}{32\sigma} \in (0.75, 1) \tag{3.29}$$

Primero notemos que, en la zona en la que el punto fijo x_+ es estable, $\sigma_{i,n}$ deja de estar bien definido a partir de un cierto tiempo, pues las perturbaciones terminan por anularse. Por tanto el cálculo de σ debe hacerse tras la pérdida de estabilidad de x_+, esto es, a partir de p_c.

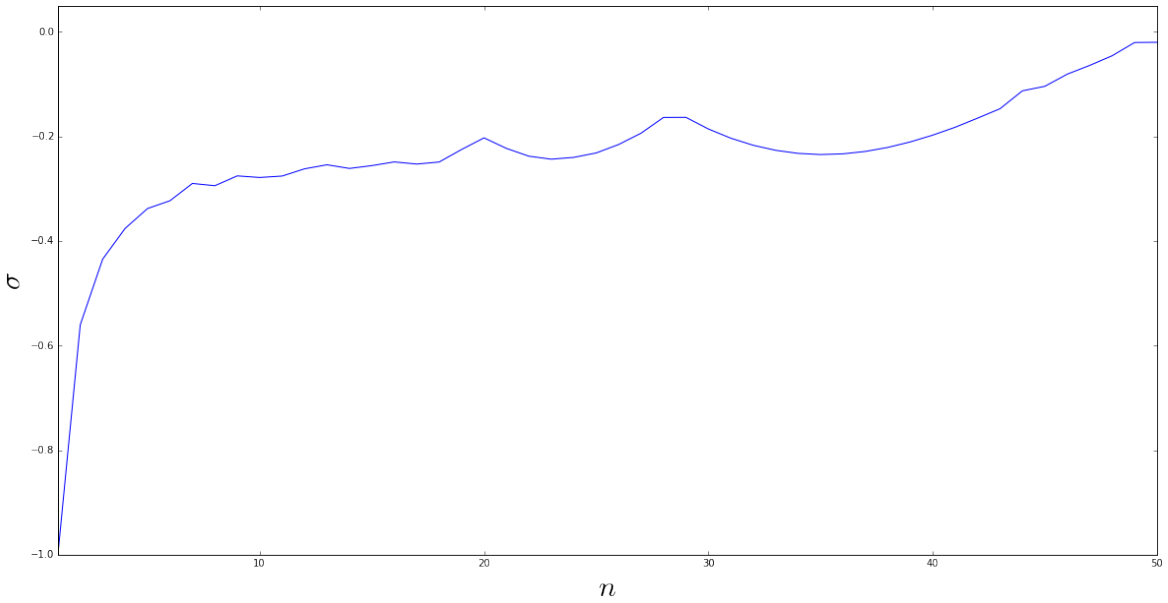


Figura 3.2: De nuevo construimos redes anulares desde el anillo simple hasta la red *all-to-all*, y le asignamos a la red n el valor de σ correspondiente. La similitud entre ambas gráficas sugiere una dependencia lineal.

- Para una red *scale-free* $\sigma = -1$. Este valor es, de nuevo, independiente del parámetro de distribución de grados escogido. Resolviendo el problema, obtenemos un valor $p_c = 0.866$, que coincide con el valor obtenido en el apartado anterior.
- Para redes en anillo obtenemos los valores de σ representados en la gráfica 3.2. Esta gráfica está construida en las mismas condiciones que la del apartado anterior. Nótese la fuerte similaridad de ambas figuras, casi idénticas, que deja clara la dependencia entre p_c y σ.
- Para redes *all-to-all* tomamos el último valor calculado para los anillos. Por tanto, $\sigma \approx 0$, esto es, $\lambda_1 \approx \lambda_2$ y por tanto x_+ es estable para todo valor de p, de nuevo confirmando lo obtenido en el apartado anterior.

Para ver más clara la dependencia entre σ y p_c calculamos varios valores de p_c usando la ecuación 3.29. En la figura 3.3 vemos que la dependencia entre estos dos valores es prácticamente lineal. El ajuste por mínimos cuadrados da, con un error medio de 0.00117, la siguiente recta:

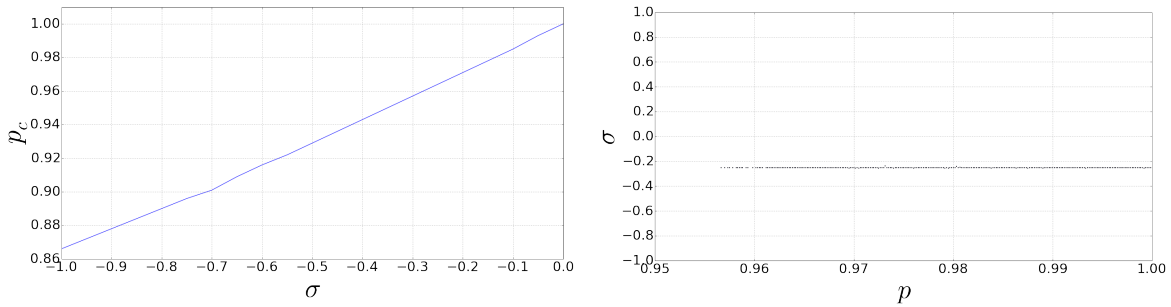
$$p_c = 0.998 + 0.135\sigma, \quad \sigma \in [-1, 0] \tag{3.30}$$

3.3. Estrategias para la ruptura de la biestabilidad

En esta sección estudiaremos métodos para romper la biestabilidad de las redes anteriores, eliminando el estado *encendido* y dejando solamente el estado *apagado*.

3.3.1. Por sembrado aleatorio de parámetros

El proceso que seguiremos, más concretamente, consistirá en considerar una red de 100 nodos con un parámetro fijo, seleccionar de ésta la mitad de sus nodos al azar y asignarles un parámetro distinto, dentro de la región en la que la red no presenta biestabilidad. Es decir, si llamamos p_1 al parámetro



(a) (b)

Figura 3.3: En el primer gráfico se representan los valores de p_c calculados para cada σ. En el segundo gráfico se representan los valores de σ para cada p en una red anular con $n = 17$. Se observa que el parámetro se asienta casi perfectamente sobre un valor fijo, justificando empíricamente la suposición de que σ es constante.

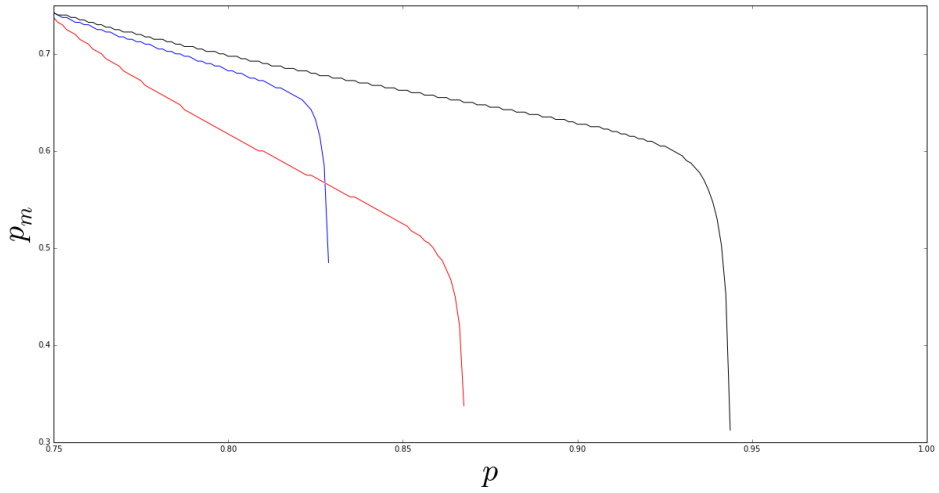


Figura 3.4: Ruptura por sembrado de parámetros. En rojo los valores para la red *scale-free*, en azul los valores para la red en anillo y en negro los valores para la red *all-to-all*.

inicial, p_2 al parámetro impuesto a posteriori, N_1 y $N_2 = N \setminus N_1$ a los conjuntos de nodos asociados a cada uno de ellos obtenemos el nuevo sistema de recurrencias:

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = p_1(3\bar{x}_{i,n}+1)x_{i,n}(1-x_{i,n}) & con \quad i \in N_1 \quad y \quad p_1 \in [0.75,1) \\ x_{i,n+1} = p_2(3\bar{x}_{i,n}+1)x_{i,n}(1-x_{i,n}) & con \quad i \in N_2 \quad y \quad p_2 \in [0,0.75) \end{cases} \tag{3.31}$$

La elección aleatoria provoca distintos comportamientos en función de los nodos escogidos y de su relevancia en la red: perturbar nodos que afectan a un mayor número de vecinos es más perjudicial para la biestabilidad que elegir nodos con poca influencia. No obstante, ciertas conductas se preservan independientemente de los nodos escogidos, solo son relativas a la topología de la red.

En adelante, dado un parámetro inicial p_1, llamaremos p_m al valor máximo de p_2 que rompe la biestabilidad de la red. Por tanto la biestabilidad se pierde $\forall p_2 \leq p_m$.

Red *scale-free*, en anillo y *all-to-all*

Tomamos una red *scale-free* con $\gamma = 2.5$, una red *all-to-all* y un anillo periódico simple, $n = 1$, con una selección aleatoria de 50 nodos. Obtenemos los p_m representados en la gráfica 3.4.

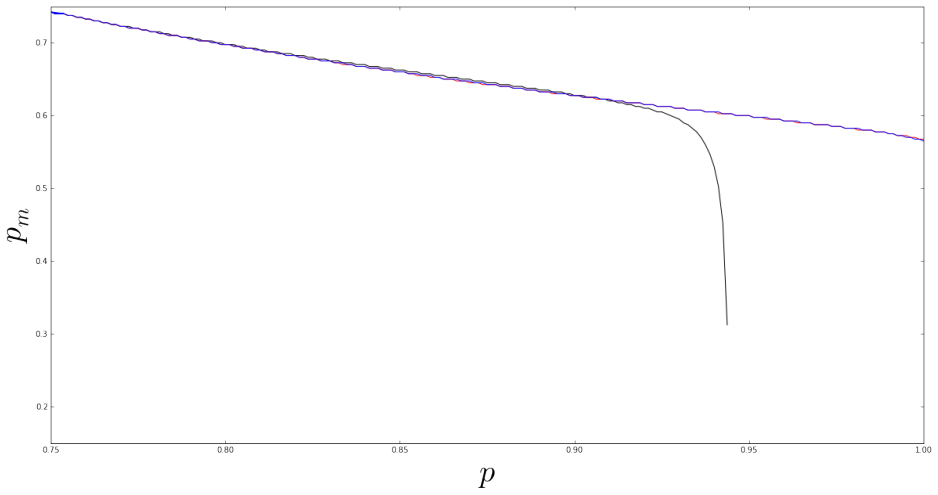


Figura 3.5: Ruptura por efecto frontera. En rojo los valores para la red *scale-free*, en azul los valores para la red en anillo y en negro los valores para la red *all-to-all*

.

En la gráfica, p representa a p_1, el valor inicial del parámetro. Como cabía esperar, cuanto menor es p mayor es p_m, es decir, cuanto más pequeño es el valor del parámetro inicial más fácil es apagar la red. Conforme el valor de p avanza, más difícil se hace romper la biestabilidad de la red. Se observa una caída drástica conforme p se acerca a p_c, el punto en el que el estado estable de la red cambia de dinámica. Es tal la caída que cuando superamos en cierta medida p_c la biestabilidad no puede eliminarse solamente rebajando los parámetros de media red, el resto de nodos es suficiente para mantenerla encendida.

Las redes *scale-free* tienen una biestabilidad sólida ante ataques aleatorios. La red en anillo muestra ser la más robusta de las tres. En la red *all-to-all*, por su estructura, da igual que nodos seleccionemos. Los resultados son independientes de los nodos elegidos, y por tanto los valores de p_m solo dependen del número de nodos cuyo parámetro rebajamos. No obstante, esta red es más sensible. También se vuelve imposible apagar la red a partir de cierto valor, pero es más sencillo apagarla que a cualquiera de las anteriores.

3.3.2. Ruptura por efecto frontera

En este caso tomaremos pares de las mismas redes que hemos tratado antes, pero ahora con 50 nodos. Construimos con cada par de redes idénticas una nueva, enlazando cada nodo de una con todos los nodos de la otra. Esta operación se conoce como *suma de grafos*. Formalmente:

Definición 3.3.1. *Dados dos grafos, $G = (V_1, E_1)$ y $H = (V_2, E_2)$, se define el grafo $G+H$ como:*

$$G+H = (V_3, E_3) \quad con \quad V_3 = V_1 \cup V_2, \quad E_3 = E_1 \cup E_2 \cup \{(i,j) |\, i \in V_1 \wedge j \in V_2\}$$

Ahora asignamos un parámetro distinto a cada uno de los grafos iniciales, a uno $p_1 \in [0.75, 1]$ y al otro $p_2 \in [0.0, 0.75]$. Repetimos los mismos cálculos para las nuevas redes, obteniendo los valores representados en la figura 3.5.

Las redes *scale-free* y anular resultan ser más sensibles en este caso, justo al contrario que con el proceso anterior. Es posible apagarlas en todo el recorrido del parámetro. La red resultante de sumar dos redes *all-to-all* de 50 nodos no es más que otra red *all-to-all* de 100 nodos, luego los valores obtenidos deben ser los mismos.

Bibliografía

[B] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D. U. Hwang, *Complex Networks: Structure and dynamics*, Physics Reports **424**: págs. 175-308, 2006.

[BA] A. L. Barabási, R. Albert, *Statistical Mechanics of Complex Networks*, Reviews of Modern Physics **74** (1): págs. 47-97, 2002.

[BB] A.L. Barabási, E. Bonabeu, *Scale-Free Networks*, Scientific American **288** (5): págs. 50-9, 2003.

[BK] R. Brown, L. Kocarev, *A Unifiying Definition of Synchronization for Dynamical Systems*, American Institute of Physics **10** (2): págs. 344-9, 2000.

[BL] R. López-Ruiz, D. Fournier-Prunaret, *The Bistable Brain: A Neuronal Model with Symbiotic Interactions*, Nova Science Publishers, Symbiosis: Evolution, Biology and Ecological effects **10**: págs. 235-54, 2013.

[BY] Y. Bar-Yam, *General Features of Complex Systems*, UNESCO Encyclopaedia of Life Support Systems **1**, Oxford.

[C] D. Chu, *Complexity: Against Systems*, Theory in biosciences **130** (3): págs. 229-45 ,2011.

[ER] P. Erdös, A. Rényi, *On the Evolution of Random Graphs*, Public Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences **5**: págs. 17-61, 1960.

[KW] J. Kim, T. Wilhelm, *What is a complex graph?*, Physica A **387**: págs. 2637-52, 2008.

[LF] R. López-Ruiz, D. Fournier-Prunaret, *Complex Behavior in a Discrete Coupled Logistic Model for the Symbiotic Interaction of Two Species*, Mathematical Biosciencies and Engineering **1** (2): págs. 307-24, 2004.

[LP] R. López-Ruiz, C. Pérez-García, *Dynamics of maps with a Global Multiplicative Coupling*, Chaos, Solitions and Fractals **1**: págs. 511-28, 1991.

[R] R. Rosen, *Life Itself: A Comprehensive Inquiry into the Nature, Origin, and Fabrication of Life*, Columbia University Press, 1991.

[S] S.H. Strogatz, *Exploring Complex Networks*, Nature **410** (6825): págs. 268-76, 2001.

[SN] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2^a edición, Addison-Wesley, 1994.

[T] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics **140**, 2012.

[W] S. Willard, *General Topology*, 2^a edición, Addison-Wesley, Massachusetts, 1998.

[WS] D. J. Watts, S. H. Strogatz, *Collective dynamics of small-world networks*, Nature **393**: págs. 440-2, 1998.