



**NUEVAS VARIABLES CANÓNICAS PARA
LA INTEGRACIÓN ANALÍTICA DEL
PROBLEMA PRINCIPAL-ECUATORIAL
DEL SATÉLITE ARTIFICIAL**

Sergio Borrallo Tirado

*Máster en Modelización Matemática, Estadística y Computación
Trabajo de Fin de Máster*

Nuevas variables canónicas para la integración analítica del problema principal-ecuatorial del satélite artificial

Introducción	03-06
1) Formulación del problema principal-ecuatorial	07-18
<i>a) Movimiento kepleriano</i>	
<i>b) Variables de estado: vector de estado</i>	
<i>c) Elementos orbitales</i>	
<i>d) Variables polares-nodales</i>	
<i>e) Variables de Delaunay</i>	
<i>f) Movimiento orbital</i>	
<i>g) Problema principal ecuatorial del satélite artificial</i>	
2) Nuevas variables tipo “Delaunay” para la integración del problema	19-30
<i>a) Obtención de la función generatriz</i>	
<i>b) Significado de los nuevos momentos</i>	
<i>c) Obtención de las nuevas variables</i>	

- d) *Obtención de las funciones $\lambda(\mathbf{r})$ y $f(\mathbf{r})$*
- e) *Significado de las nuevas variables*
- f) *Expresiones explícitas de la transformación*
- g) *Integración del problema principal-ecuatorial en las nuevas variables*

3) Obtención de la distancia r en función del tiempo t .

Ecuación de Kepler Generalizada 31-44

- a) *Expresión de la relación entre r y t como un oscilador armónico perturbado*
- b) *Aplicación del método Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky*
- c) *Relación de r con ψ y f*
- d) *Ecuación de Kepler Generalizada*

Conclusiones 45-46

Apéndices 47-54

- e) *Elementos de dinámica hamiltoniana y ecuación de Hamilton-Jacobi*
- f) *Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky*

Bibliografía 55-56

Introducción

La tecnología espacial es responsable de una buena parte de los avances tecnológicos actuales. Desde el año 1957, cuando se lanzó al espacio el primer satélite artificial, se han realizado una gran variedad de misiones espaciales con objetivos muy diferentes. Una de las partes fundamentales de cada proyecto es el **análisis de misión**, que consiste en la determinación previa de la órbita que seguirá el satélite para cumplir las especificaciones de la misión (Werz & Larson, 2010). El poder imponer el cumplimiento de determinadas condiciones para una órbita ha permitido alcanzar con éxito muchos de los objetivos de las misiones realizadas hasta hoy.

De entre toda la variedad de órbitas de satélites artificiales terrestres las más conocidas, por su utilidad para las comunicaciones, son las llamadas órbitas geoestacionarias. Las primeras ideas sobre las órbitas geoestacionarias fueron publicadas por Herman Potočnik en 1928 en su trabajo “El problema del viaje espacial - El motor cohete”. Años después, en 1945, Arthur C. Clarke hace mención a las ventajas que puede tener el uso de esta órbita para las comunicaciones, pues con solo tres satélites es suficiente para establecer comunicación con cualquier punto del planeta, exceptuando regiones cerca de los polos. En el año 1963 es lanzado, y puesto en órbita, el Syncom-2, que es el primer satélite de comunicaciones en órbita geoestacionaria. Esto confirmó las ideas de Arthur C. Clarke y constituye un avance fundamental en distintas disciplinas o áreas de conocimiento como son: las telecomunicaciones, climatología, oceanografía, geodesia, militar, entre muchas otras más.

Las órbitas geoestacionarias pertenecen a un conjunto más amplio, que llamaremos **órbitas geosíncronas**, caracterizadas por su sincronía con la rotación de la Tierra, de manera que el periodo orbital del satélite, que es función del semieje mayor de la elipse orbital, coincide con el periodo de rotación terrestre, esto es, un día sidéreo (23h 56m 4.09s). Para que ésto sea así, el semieje (o el radio si son circulares) debe medir 42164 km. Si además de la sincronización de periodos hacemos que la inclinación de la órbita sobre el ecuador terrestre sea nula, esto es, que el satélite esté siempre en el ecuador, conseguimos que el satélite sea visible desde la Tierra como un punto fijo en el ecuador, de ahí que a estas órbitas se las llame **órbitas geoestacionarias**, y que una simple antena fija permita una recepción y transmisión de datos de forma continua. Una detallada descripción de las características dinámicas de estas órbitas puede verse en Soop (1994). El objetivo de esta memoria es construir una teoría analítica, basada en un conjunto especial de variables canónicas, para describir y analizar el movimiento de los satélites geoestacionarios o próximos a geoestacionarios.

La primera aproximación al movimiento orbital nos la dan las ecuaciones del movimiento kepleriano, que no son sino las ecuaciones derivadas de las leyes de Newton cuando existen fuerzas de atracción gravitacional entre masas puntuales. La integración de estas ecuaciones conduce a un movimiento que puede describirse a partir de las conocidas *leyes de Kepler*. Las leyes de Kepler nos aseguran órbitas planas y cónicas y en ocasiones, cuando la cónica es una elipse, periódicas. Sin embargo, la realidad nos da órbitas muy próximas a las descritas por las leyes de Kepler pero no exactamente iguales, lo que se debe a la aparición de otras fuerzas, gravitacionales o no, que actúan sobre el sistema modificándolo. Entre las fuerzas más importantes que perturban la órbita de un satélite artificial tenemos: que la Tierra no es un punto sino un cuerpo no esférico; el rozamiento producido por la atmósfera cuando el satélite está dentro de ella; la fuerza gravitacional producida por el Sol y la Luna, la fuerza de radiación solar, etc. (*Abad, 2012; Danby, 1988; Kovalevsky, 1967*).

El *problema principal* del satélite artificial consiste en el estudio de su movimiento orbital considerando un modelo kepleriano perturbado por el achatamiento de la Tierra (o de cualquier otro planeta). El achatamiento de un planeta constituye la principal perturbación sobre la órbita kepleriana de un satélite artificial; cualquier otra perturbación tiene una magnitud mucho menor que ésta.

Las perturbaciones separan el satélite de su posición prevista, lo que obliga a encender los motores del satélite, cada cierto tiempo, para situarlo de nuevo en esa posición. Naturalmente ese gasto de combustible determina el coste y duración de la misión espacial, por lo que un buen conocimiento previo de la órbita que seguirá el satélite incide en su coste final. Por ello resulta de gran utilidad la obtención de un modelo analítico del movimiento del satélite considerando el mayor número posible de perturbaciones que permita integrar el modelo.

A pesar de la simplicidad de un sistema dinámico kepleriano, la dinámica del movimiento orbital se complica notablemente cuando añadimos cualquier tipo de perturbación. Tanto si añadimos un tercer cuerpo al sistema orbital como si consideramos la perturbación producida por el achatamiento obtenemos sistemas dinámicos “no integrables” que nos conducen a la necesidad de aplicar métodos numéricos o desarrollos asintóticos para el análisis de los sistemas. La única posibilidad de obtener sistemas integrables consiste en restringir alguna de las características del movimiento, por ejemplo, si en el problema principal nos limitamos a órbitas ecuatoriales, el problema, que llamaremos *problema principal-ecuatorial*, se convierte en integrable.

Por su integrabilidad consideraremos el problema principal-ecuatorial del satélite para trazar la órbita preliminar del satélite en sustitución de su órbita kepleriana. Aunque existen diversas soluciones analíticas a este problema (*Jezevski 1983 y Martinusi & Gurfil 2013*), ninguna de ellas permite su posterior utilización para el estudio del efecto

de otras perturbaciones de menor magnitud, como el efecto gravitacional de la luna o la radiación solar, etc.

En este trabajo se propone un nuevo enfoque en la solución de este problema, basado en la aplicación de la ecuación de Hamilton-Jacobi para la obtención de un nuevo conjunto de variables canónicas, similares a las obtenidas por Delaunay para el movimiento de la Luna (*Delaunay 1860*), donde, al añadir la perturbación del problema principal-ecuatorial como un término μ^*/r^3 , se introducen expresiones dependientes de funciones e integrales elípticas que serán obtenidas a partir de las relaciones que aparecen en *Byrd & Friedman (1971)*.

Las variables de Delaunay, cuyo significado está íntimamente relacionadas con los elementos orbitales, han jugado un papel fundamental en la obtención de las teorías analíticas del movimiento orbital. La primera de estas variables es la anomalía media, l que no es sino una función lineal del tiempo que varía de 0 a 2π en cada periodo, por lo que su uso equivale a usar explícitamente la variable tiempo en las expresiones de la teoría. Una de las características del problema kepleriano es que resulta imposible la obtención de expresiones analíticas cerradas (que no usen desarrollo en serie de potencias) para ninguno de los parámetros dinámicos que describen el problema, en particular la distancia r entre el satélite y el planeta. Para resolver esto se usa, en lugar de la anomalía media, otra variable angular, llamada anomalía excéntrica, E , cuya relación con la anomalía media viene dada a partir de la llamada ecuación de Kepler, $l = E - e \sin E$, donde e es la excentricidad. Esta relación resulta de enorme importancia en el tratamiento del movimiento orbital.

En nuestro caso, aparecerá el mismo problema, esto es, no podremos expresar explícitamente ningún parámetro a partir de la primera de las variables obtenidas, por lo que deberemos desarrollar un procedimiento para encontrar la expresión equivalente a la ecuación de Kepler, que nosotros llamaremos ecuación de Kepler generalizada y que jugará, en este problema, un papel similar al de la ecuación de Kepler en el movimiento kepleriano. La ecuación de Kepler generalizada se obtendrá de manera indirecta reformulando el problema principal-ecuatorial como un oscilador armónico perturbado que se resolverá aplicando el **método de Krylov-Bogoliuvov-Mitropolsky** (explicado en el apéndice B y que, a partir de ahora, será llamado por brevedad método KBM)

La presente memoria se presenta en tres capítulos que presentan respectivamente: la formulación del problema principal-ecuatorial del satélite; la obtención de unas variables similares a las de Delaunay adecuadas a este problema (junto con la integración del mismo); y la obtención de la ecuación de Kepler generalizada. Finalmente, después de las conclusiones, se presentan varios apéndices con las herramientas básicas usadas a lo largo de la memoria, y la bibliografía utilizada.

1. Formulación del problema principal-ecuatorial.

Movimiento kepleriano

El **problema kepleriano** consiste en el estudio del movimiento de una partícula P , que llamaremos **orbitador**¹, relativo a otra partícula O , que llamaremos **cuerpo central**². Las ecuaciones del movimiento kepleriano están representadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_k = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x},$$

donde $\mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mu)$ es la fuerza kepleriana, siendo $\mathbf{x} = \overline{OP}$ el vector de posición de P respecto de O , $r = \|\mathbf{x}\|$ la distancia y $\mu = \mathcal{G}(m_o + m_p)$ la constante gravitatoria resultado del producto de la constante de gravitación universal \mathcal{G} por la suma de las masas de ambos cuerpos.

El sistema diferencial anterior, de orden dos, puede ponerse como un sistema de ecuaciones de orden uno en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{X}, \\ \dot{\mathbf{X}} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde \mathbf{X} es el vector velocidad.

El problema kepleriano puede ser también expresado en forma hamiltoniana. Para ello supondremos un sistema dinámico cuyo hamiltoniano, que llamaremos **hamiltoniano kepleriano**, tendrá la forma

$$\mathcal{H}_k(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = T + V_k = \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}\|},$$

donde \mathbf{x} representa las coordenadas y \mathbf{X} los momentos y hemos llamado energía cinética del movimiento relativo al primer sumando y energía potencial del movimiento relativo al segundo.

¹ Entre los distintos tipos de orbitadores encontramos, entre otros, planetas, asteroides, cometas, satélites naturales y artificiales, etc.

² Estrellas como el Sol, planetas, etc.

Las ecuaciones de Hamilton correspondientes al hamiltoniano \mathcal{H}_k son

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{H}_k = \mathbf{X}, \\ \dot{\mathbf{X}} &= -\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}_k = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x},\end{aligned}$$

y por tanto son idénticas a las ecuaciones (1.1) del movimiento kepleriano, por ello, podemos concluir que éste está representado por un sistema dinámico de hamiltoniano \mathcal{H}_k .

Variables de estado: vector de estado

Llamaremos *órbita kepleriana* y la denotaremos con el símbolo \mathcal{O} , a la solución de las ecuaciones del problema kepleriano para unas condiciones iniciales dadas. Entenderemos por órbita no solo la trayectoria del orbitador, sino todos sus parámetros, tanto estáticos-constantes como dinámicos-variables.

Las ecuaciones del problema kepleriano constituyen un sistema de seis ecuaciones diferenciales de orden uno. De acuerdo con la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias la solución general de dicho sistema vendrá dada como $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{C})$, donde $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6,)$ representa un vector de seis constantes funcionalmente independientes que llamaremos *variables de estado* porque permiten determinar cualquier parámetro de la órbita en cualquier instante, es decir, caracterizan la órbita.

Los seis elementos que componen las variables de estado son constantes de la órbita o variables dinámicas particularizadas para un instante dado. En este último caso hay que dar el valor de éstas y el instante t_0 en que han sido calculadas.

Una vez determinado el conjunto de variables de estado, la órbita quedará caracterizada por éste, y pondremos $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ si los elementos del vector de estado son constantes de la órbita y $\mathcal{O}(t_0, \mathbf{C})$ si son variables particularizadas en t_0 .

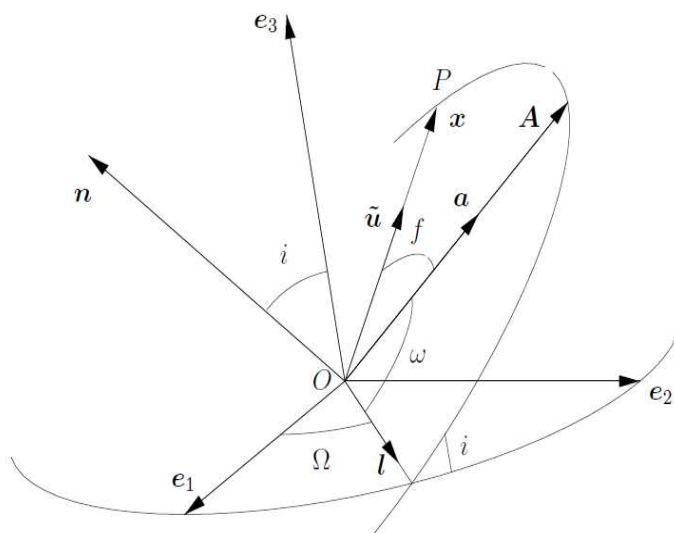
Las variables de estado pueden ser elegidas de diversas maneras. La más natural, desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales, es a través de los valores del vector de posición, \mathbf{x}_0 , y la velocidad, \mathbf{X}_0 , para un instante dado. El vector de dimensión seis formado por las componentes de los vectores \mathbf{x}_0 y \mathbf{X}_0 se llama *vector de estado*. De esta forma una órbita kepleriana podrá ser representada como $\mathcal{O}(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{X}_0)$.

El vector de estado es la forma más natural de representar una órbita desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución del sistema, sin embargo existen otros conjuntos de variables de estado que se adaptan mejor a diferentes aspectos del movimiento kepleriano.

Por un lado los elementos orbitales constituyen la forma más natural, desde el punto de vista geométrico y astronómico, de visualizar y comprender como son las órbitas de los astros. Por otro lado, existen otros conjuntos de variables de estado, como son las variables polares-nodales y las variables de Delaunay que por su carácter de variables canónicas permiten el estudio del movimiento con técnicas de dinámica hamiltoniana.

Elementos orbitales

Para representar una órbita de forma mucho más descriptiva, tanto desde un punto de vista geométrico como astronómico y dinámico, se utilizan unas variables de estado que se adaptan completamente a la descripción del movimiento dada por las leyes de Kepler: los **elementos orbitales**.



Órbita kepleriana en el espacio

En primer lugar tomaremos los dos elementos que caracterizan la cónica descrita por un cuerpo que sigue las leyes de Kepler, esto es, el **semieje mayor** (o el semi-lado recto p) y la **excentricidad** e , que representan respectivamente las dimensiones y la forma de la cónica.

Para completar la información sobre la trayectoria necesitaremos situarla en el espacio, para lo cual basta observar la figura que se muestra arriba y recordar que la órbita está contenida en un plano perpendicular al vector momento angular $\mathbf{G} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$ o, lo que es igual, a su dirección \mathbf{n} . Supondremos, por ahora, que la órbita no coincide con el plano Oxy del sistema espacial, esto es, que $\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3 \neq 0$.

Puesto que el plano de la órbita y el plano fundamental del sistema espacial Oxy no son paralelos, necesariamente se cortarán en una recta que pasa por O y pertenece a ambos planos y que llamaremos **línea de los nodos**. Tomaremos como dirección

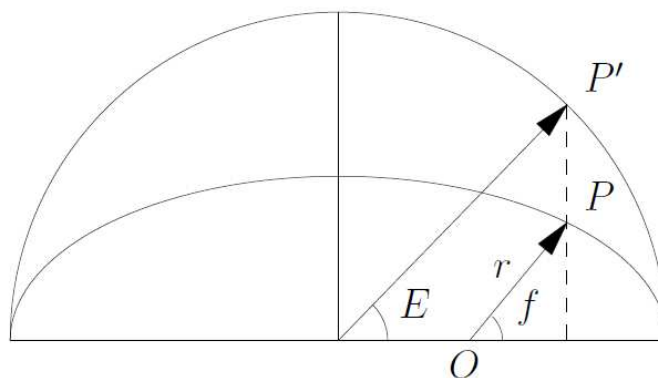
positiva de dicha recta la que contiene el nodo ascendente, o punto de la órbita en el que el orbitador pasa de coordenadas z negativas a positivas. El vector unitario \mathbf{l} define la línea de los nodos y forma un ángulo Ω , llamado **ángulo del nodo**, con \mathbf{e}_1 . El ángulo Ω puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π .

El ángulo que forman el vector \mathbf{n} con \mathbf{e}_3 será llamado **inclinación**, y denotado por i , y representa también el ángulo entre el plano Oxy y el de la órbita. El ángulo i puede tomar un valor cualquiera entre 0 y π .

El vector \mathbf{n} representa también el sentido de la rotación de la partícula pues, debido a su definición, ésta tiene siempre lugar en sentido contrario a las agujas del reloj si se observa desde el extremo de \mathbf{n} . De acuerdo con esto, el ángulo i que forma \mathbf{n} con \mathbf{e}_3 indica el sentido de giro observado desde un punto cualquiera de la parte positiva del eje Oz . Un ángulo i entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ indicará una órbita directa (sentido de giro contrario a las agujas del reloj), mientras que una inclinación entre $\frac{\pi}{2}$ y π indicará una órbita retrógrada (sentido de giro igual al de las agujas del reloj).

Los dos ángulos, Ω e i representan la posición del plano de la órbita en el espacio, pero para poder representar con exactitud la situación de la cónica hay que determinar la dirección del eje de la misma dentro de su plano. El eje de la cónica, también llamado **línea de los ápsides**, lleva la dirección de un vector \mathbf{a} , que forma un ángulo w con la línea de los nodos. Dicho ángulo será llamado **argumento del periaastro**, representa la posición relativa de la cónica en su plano y es la tercera variable angular de la órbita. El argumento del periaastro toma un valor cualquiera entre 0 y 2π .

Se han completado así los cinco elementos que caracterizan la geometría de la órbita, esto es, la forma, dimensiones y situación de la curva que recorre el orbitador. Para completar la caracterización de la órbita bastará un elemento que describa la dinámica, o lo que es igual, que nos informe acerca del punto de la curva o trayectoria en el que se encuentra el orbitador en cada instante t .



Anomalías en el movimiento kepleriano

Para ello recordemos que si se elige un sistema de coordenadas polares (r, f) , en el plano de la órbita (ver figura anterior), con origen en el cuerpo central O , y con eje de coordenadas polares según la dirección del periastro, entonces la ecuación de una cónica nos da la relación

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f},$$

donde f es llamada *anomalía verdadera*.

Para encontrar la relación de f con t se introducen dos nuevas variables angulares: la *anomalía excéntrica* E y la *anomalía media* $l = n(t - T)$, siendo $n = \sqrt{\mu/a^3}$, el movimiento medio, y T la *época* o instante de paso del orbitador por el periastro. Las relaciones entre las tres anomalías vienen dadas por la expresión

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2},$$

que permite obtener fácilmente f en función de E , y E en función de f , y por otro lado por

$$l = E - e \sin E, \quad (1.2)$$

llamada *ecuación de Kepler*, que juega un papel fundamental en la Astrodinámica, y que nos da la relación de l con E , y por tanto con f . Así como la relación anterior entre f y E es fácilmente invertible, la ecuación de Kepler no lo es y permite obtener fácilmente l conocido E , sin embargo, para obtener E a partir de l , debemos aplicar un método numérico u obtener la inversa a partir de un desarrollo en serie de potencias de la excentricidad.

Para caracterizar su dinámica basta considerar finalmente la constante³ T , puesto que a partir de ella y las relaciones entre las anomalías puede obtenerse la posición del orbitador en su trayectoria.

Llamaremos *elementos orbitales* al conjunto de seis constantes (a, e, i, Ω, w, T) . La obtención de los elementos orbitales a partir de las condiciones iniciales (t_0, x_0, X_0) y viceversa, cuya demostración puede verse en *Abad (2012)*, demuestra la equivalencia entre ambos, y en consecuencia los elementos orbitales constituyen un conjunto de variables de estado. Por tanto, la órbita kepleriana se puede caracterizar como $\mathcal{O}(a, e, i, \Omega, w, T)$ o bien como $\mathcal{O}(t_0, x_0, X_0)$.

³ Aunque el elemento T es constante hay que tener en cuenta que, para órbitas elípticas, éste varía de una vuelta a otra aumentando en una cantidad igual al periodo orbital P .

Variables polares-nodales

Se puede definir otro conjunto de variables que nos servirán igualmente para caracterizar una órbita dada. Al conjunto de variables $(r, \theta, \nu, R, \Theta, N)$ se le llama **variables polares-nodales** y en otras ocasiones variables de Hill o variables de Whitaker y constituyen un conjunto de variables canónicas donde (r, θ, ν) son las variables y (R, Θ, N) los momentos.

La relación de estas variables con los elementos orbitales viene dada por las expresiones

$$\begin{aligned} r & & ; & & \theta = w + f & & ; & & \nu = \Omega, \\ R = \dot{r} & & ; & & \Theta = G & & ; & & N = G(e_3 \cdot n) = G \cos i. \end{aligned}$$

Notemos que R representa la **velocidad radial** y N la **proyección del momento angular** sobre el eje OZ. A la variable θ se le llama **argumento de latitud**⁴.

Al constituir las variables polares-nodales un conjunto de variables canónicas, podremos expresar el hamiltoniano del modelo kepleriano en estas variables, para lo cual basta tener en cuenta

$$\mathbf{X}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2 = R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2},$$

por lo que la función de Hamilton del problema kepleriano podrá ponerse como

$$\mathcal{H}_k = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (1.3)$$

Variables de Delaunay

Otro conjunto de variables muy útil e importante en el estudio del movimiento orbital son las variables de Delaunay (*Delaunay, 1860*) introducidas por éste para el estudio del movimiento de la Luna.

⁴ Ángulo comprendido entre las rectas que unen el centro de masas del cuerpo principal con el nodo ascendente y el periastro de la órbita de un satélite.

Las *variables de Delaunay* (l, g, h, L, G, H), constituyen también un conjunto de variables canónicas, donde (l, g, h), representan las variables y (L, G, H), los momentos, y que se definen por las expresiones

$$\begin{aligned} l &= n(t - T) & ; & & g &= w & ; & & h &= \Omega, \\ L &= \sqrt{\mu a} & ; & & G & & ; & & H &= G \cos i, \end{aligned}$$

donde puede destacarse que la primera variable representa la anomalía media, o lo que es igual el tiempo multiplicado por una constante.

Al igual que en el caso de las variables polares-nodales, las variables de Delaunay son canónicas, por lo que podremos representar⁵ el hamiltoniano del problema en estas variables en la forma

$$\mathcal{H}_k = -\frac{\mu^2}{2L^2}.$$

Movimiento Orbital

En la realidad, además de la fuerza kepleriana aparecen una serie de perturbaciones que modifican las ecuaciones y la trayectoria de la órbita, entre las que podemos destacar:

- Potencial gravitatorio del cuerpo central debido a la distribución de masa no esférica de los cuerpos celestes.
- Atracción gravitatoria de otros cuerpos del sistema distintos del central: la Luna y el Sol en el caso de órbitas terrestres, y la Tierra para órbitas lunares, etc.
- Rozamiento o resistencia de la atmosfera en aquellos cuerpos que la poseen.
- Presión de radiación solar.
- Efectos de mareas, relatividad y otros.

Las anteriores perturbaciones pueden formularse por medio de una fuerza adicional \mathcal{P} que modifica las ecuaciones del movimiento (1.1) en la forma:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mu \frac{\mathbf{x}}{r^3} = \mathcal{P}, \quad (1.4)$$

⁵ La demostración de esto puede verse en Abad (2012) y es similar a la que aparece para las variables de tipo Delaunay en el apartado segundo de esta memoria.

o expresado como un sistema de orden uno

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{X}, \\ \dot{\mathbf{X}} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} + \mathcal{P}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Cuando el vector perturbación vale cero, $\mathcal{P} = 0$, el movimiento coincide con el movimiento kepleriano, mientras que cuando se verifique la condición $\|\mathcal{P}\| \ll \frac{\mu}{r^2}$, esto es, cuando la aceleración que produce la perturbación sea mucho menor que la kepleriana, la solución de (1.4) o (1.5) será llamada **movimiento kepleriano perturbado** o, simplemente, **movimiento orbital**. En este caso el comportamiento del movimiento orbital es muy próximo al del movimiento kepleriano, sirviendo éste como primera aproximación para comprender y estudiar el movimiento de los cuerpos en el espacio. De hecho, la forma práctica para visualizar este movimiento orbital supone considerar que la órbita es instantáneamente kepleriana, esto es que en cada instante se puede describir como una partícula describiendo una cónica (órbita osculatriz) cuyos elementos van variando lentamente con el tiempo.

Si existe una función V_p que verifique

$$\mathcal{P} = -\nabla_{\mathbf{x}} V_p,$$

podemos definir el hamiltoniano \mathcal{H} , del movimiento orbital

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \mathcal{H}_k + V_p = \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} - \frac{\mu}{\|\mathbf{x}\|} + V_p,$$

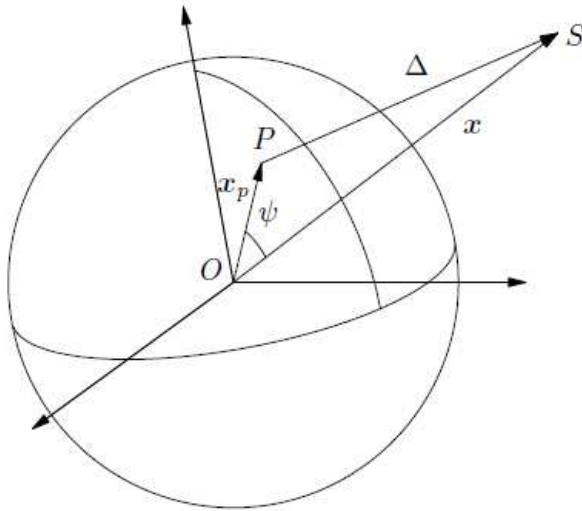
como suma del hamiltoniano kepleriano \mathcal{H}_k y la función V_p , que llamaremos **potencial perturbador**.

Las ecuaciones de Hamilton aplicadas a este hamiltoniano coinciden con las ecuaciones (1.5) del movimiento orbital, por lo que ambos sistemas son equivalentes y llamaremos a $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ **hamiltoniano del movimiento orbital**.

Problema principal ecuatorial del satélite artificial

Las ecuaciones diferenciales del modelo kepleriano están basadas en la ley de gravitación universal de Newton que formula la fuerza de atracción entre dos masas puntuales. En un caso más general dicha fuerza de atracción puede extenderse a sólidos homogéneos de forma esférica. Sin embargo en el caso del satélite artificial los dos cuerpos involucrados son el satélite y la Tierra (o planeta). La pequeña masa y dimensiones del satélite comparada con la de la Tierra permite considerar éste como

un punto, sin embargo la forma de la Tierra no es esférica, de hecho, ni siquiera es un sólido, sino un fluido con movimientos internos de masas y una densidad no constante, a pesar de lo cual consideraremos como aproximación suficiente una Tierra o planeta sólido de densidad constante. En lo que sigue formularemos el modelo de potencial gravitatorio producido por un sólido homogéneo sobre una masa puntual.



Tal y como se ve en la figura de la izquierda, cada punto P de un sólido, de masa dm , ejerce sobre un orbitador S una fuerza de atracción cuyo potencial viene dado por la expresión $-\mathcal{G} \cdot \frac{dm}{\Delta}$ siendo Δ la distancia entre P y S , y \mathcal{G} la constante de gravitación universal. Además tomaremos como unidad de masa la de S y llamaremos dm al elemento diferencial de masa del punto P .

El potencial creado por el sólido en S vendrá dado por la integral extendida a toda la masa del sólido

$$V = -\mathcal{G} \int_M \frac{dm}{\Delta}, \quad (1.6)$$

Si \mathbf{x} , \mathbf{x}_p representan los vectores de posición respectivos de S y P , referidos a un sistema con centro en el centro de masas del sólido, y ψ el ángulo entre dichos vectores, tendremos

$$\Delta^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)^2 = x^2 + x_p^2 - 2|x||x_p|\cos\psi = |x|^2(1 - 2x\alpha + x^2).$$

Donde en la última expresión hemos llamado $x = \frac{|x_p|}{|x|}$, $\alpha = \cos\psi$. Finalmente, puesto que $r = |x|$, podemos poner

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + x^2}}. \quad (1.7)$$

El término $1/\sqrt{1 - 2x\alpha + x^2}$ suele sustituirse por su desarrollo en serie de potencias

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + x^2}} = \sum_{n \geq 0} P_n(\alpha)x^n = \sum_{n \geq 0} P_n(\cos\psi)x^n,$$

cuyos coeficientes son los *polinomios de Legendre*, definidos por la expresión

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n,$$

que en particular para, el orden dos, se puede poner como

$$P_2(t) = \frac{1}{2} (3t^2 - 1). \quad (1.8)$$

Para calcular la integral (1.6) a lo largo de toda la masa del sólido formularemos el problema en un sistema de coordenadas planetográficas⁶ donde llamaremos (λ, ϕ) , respectivamente a la longitud y latitud planetográfica del satélite y (Λ, Φ) a las de un punto P del planeta y de igual modo vamos a llamar \hat{x}_s y \hat{x}_p a las direcciones de los vectores de posición, en coordenadas cartesianas, del planeta y del satélite respectivamente.

El coseno del ángulo ψ entre estos dos vectores vendrá dado por el producto escalar de ambos, lo que lleva a la expresión

$$\cos\psi = \hat{x}_s \cdot \hat{x}_p = \text{sen}\phi \text{sen}\Phi + \cos\phi \cos\Phi \cos(\Lambda - \lambda).$$

La relación anterior, llevada a los polinomios de Legendre, permite obtener la siguiente propiedad

$$P_n(\cos\psi) = P_n(\text{sen}\phi)P_n(\text{sen}\Phi) + 2 \sum_{j=1}^n \frac{(n-j)!}{(n+j)!} P_{nj}(\text{sen}\phi)P_{nj}(\text{sen}\Phi)\cos j(\Lambda - \lambda). \quad (1.9)$$

donde P_{nj} representan los polinomios asociados de Legendre (Abad, 2012) definidos a partir de las derivadas de los polinomios de Legendre.

Por otro lado, la expresión (1.6) del potencial del sólido, haciendo uso de (1.7), se podrá poner como

$$\begin{aligned} V &= -\mathcal{G} \int_M \frac{dm}{\Delta} = -\mathcal{G} \int_M \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + x^2}} dm \\ &= -\mathcal{G} \int_M \frac{1}{r} \cdot \sum_{n \geq 0} P_n(\cos\psi) x^n dm = -\frac{\mathcal{G}}{r} \sum_{n \geq 0} \int_M \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos\psi), \end{aligned}$$

⁶ La longitud planetográfica se mide en el ecuador del planeta desde un meridiano principal definido y aceptado internacionalmente. La latitud planetográfica se mide en el arco que une el ecuador con la posición del punto en cuestión.

de donde, usando la relación (1.9) llegamos a

$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{r_p}{r}\right)^n \left[J_n P_n(\text{sen}\phi) - \sum_{j=1}^n P_{nj}(\text{sen}\phi) (C_{nj} \cos j\lambda + S_{nj} \text{sen} j\lambda) \right], \quad (1.10)$$

siendo r_p el radio ecuatorial del planeta, M la masa del mismo y donde J_n, C_{nj}, S_{nj} , llamadas **coeficientes armónicos**⁷, son constantes para cada sólido que corresponden a las expresiones de las integrales después de separar los términos que dependen únicamente de la posición del orbitador. Si conocemos la distribución de masas del sólido estas constantes pueden ser calculadas por integración, sin embargo, en el caso de los planetas y la Tierra dichas constantes únicamente pueden ser medidas en forma indirecta a partir de un detallado análisis de las órbitas de los satélites artificiales.

Los términos J_n son llamados **armónicos zonales**, mientras que C_{nj}, S_{nj} son los **armónicos teserales**. Si el sólido tiene simetría de revolución, los términos dependientes de la longitud λ desaparecen, y nos quedamos únicamente con los términos zonales J_n . En particular el término J_2 corresponde al achatamiento planetario, esto es a la diferencia entre los radios ecuatorial y polar.

Por lo que respecta a su magnitud el armónico J_2 es en general mucho más grande que el resto de los armónicos, en el caso de la Tierra éste tiene una magnitud de 10^{-3} , mientras que el resto de armónicos es del orden de 10^{-6} . Esto significa que la expresión (1.10) puede separarse en tres sumandos. El primer sumando corresponde al término

$$V_k = -\frac{GM}{r},$$

que representa el potencial del planeta si fuese un punto o un sólido homogéneo, esto es el potencial kepleriano. El segundo sumando

$$V_p = \frac{GM}{r} \left(\frac{r_p}{r}\right)^2 J_2 P_2(\text{sen}\phi),$$

corresponde a la acción del achatamiento terrestre o lo que es igual a considerar el planeta como un elipsoide homogéneo de revolución. Finalmente, el tercer sumando corresponde a la parte de la expresión (1.10) excluyendo los sumandos V_k y V_p .

⁷ Elijiendo el centro de masas del sólido como origen del sistema de referencia los términos $J_1, C_{11}, S_{11} = 0$, por lo cual el sumatorio (1.9) comienza en el índice $n = 2$ y no en $n=1$.

Como se ha dicho en el apartado anterior la primera aproximación al movimiento orbital del satélite artificial se obtiene utilizando el modelo kepleriano, lo que equivale a considerar $V = V_k$. Si queremos una mejor aproximación a la órbita real debemos añadir a éste el potencial debido al achatamiento terrestre, esto es, considerar el potencial

$$V = V_k + V_p = -\frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \left(\frac{r_p}{r}\right)^2 J_2 P_2(\text{sen}\phi), \quad (1.11)$$

siendo $\mu = \mathcal{G}M$. Al modelo obtenido sustituyendo el potencial kepleriano por (1.11) se le denomina *problema principal del satélite*.

En nuestro caso, como se ha dicho en la introducción, no consideraremos este modelo, sino una aproximación al mismo, que llamaremos *problema principal-ecuatorial* que consiste en suponer que el satélite se encuentra en una órbita que no abandona el plano ecuatorial, por lo que en todo momento $\phi = 0$, o lo que es igual, $\text{sen}\phi = 0$. De esta forma se tendrá, de acuerdo con (1.9), que $P_2(\text{sen}\phi) = -1/2$, y por tanto el potencial para el problema principal ecuatorial se expresará, a partir de (1.11) como

$$V = V_k + V_{pe} = -\frac{\mu}{r} + \frac{\mu^*}{r^3}, \quad (1.12)$$

donde $\mu = \mathcal{G}M$ y $\mu^* = -\mathcal{G}M r_p^2 J_2 / 2$.

Una vez conocido el potencial podemos obtener fácilmente la expresión del Hamiltoniano de este problema que, de acuerdo con (1.3), puede expresarse en variables polares-nodales como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^*}{r^3}. \quad (1.13)$$

Si tenemos en cuenta que el factor J_2 es del orden de la milésima podemos concluir que $\mu^* \ll \mu$, y por tanto poner $\mu^* = \varepsilon \sigma$, donde ε es un pequeño parámetro y σ es del mismo orden que μ . De este modo, podemos expresar (1.13) en la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \varepsilon \frac{\sigma}{r^3}, \quad (1.14)$$

esto es, como un desarrollo en serie de potencias de un pequeño parámetro ε , cuyo orden cero corresponde con el hamiltoniano kepleriano y el orden uno, σ/r^3 , representa la perturbación del problema principal ecuatorial.

2. Nuevas variables tipo “Delaunay” para la integración del problema

Para encontrar unas nuevas variables canónicas adecuadas para el problema principal-euatorial partiremos del hamiltoniano del mismo expresado en variables polares-nodales, que como hemos visto en el apartado anterior puede expresarse como

$$\mathcal{H}(r, \theta, v, R, \Theta, N) = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^*}{r^3}, \quad (2.1)$$

donde, como vemos, no aparecen explícitamente ni la variable v ni el momento N .

La no aparición de v (ángulo del nodo) y N (proyección del momento angular sobre el eje OZ) permite dejar fijos estos elementos en la transformación canónica que busquemos, de manera que trataremos de encontrar una transformación

$$(r, \theta, v, R, \Theta, N) \leftrightarrow (\lambda, \gamma, v, \Lambda, \Gamma, N),$$

que transforme únicamente las variables (r, θ) en (λ, γ) , y los momentos en (R, Θ) en (Λ, Γ) .

El procedimiento que seguiremos para obtener esta transformación es similar al usado en *Abad (2012)* para la obtención de las variables de Delaunay con la diferencia de que allí se parte del Hamiltoniano del problema kepleriano y aquí se parte del hamiltoniano (2.1) cuyo término adicional, μ^*/r^3 , complica las expresiones de las nuevas variables al aparecer integrales elípticas en las expresiones. En *Abad (1985)* se aplica un proceso similar para el estudio del movimiento de una estrella en un sistema triple.

Este procedimiento está basado en la búsqueda de una función generatriz $S(r, \theta, \Lambda, \Gamma)$, dependiente de las variables viejas y los nuevos momentos, que cumpla la ecuación de Hamilton-Jacobi, en la forma que se muestra en el apéndice A. Las expresiones (A.4) del apéndice indican que la transformación canónica se obtendrá a partir de las relaciones

$$R = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad \Theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}, \quad \lambda = \frac{\partial S}{\partial \Lambda}, \quad \gamma = \frac{\partial S}{\partial \Gamma}, \quad (2.2)$$

mientras que la función generatriz, de acuerdo con (A.5), debe verificar

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^*}{r^3} = \Lambda, \quad (2.3)$$

donde como se ve se ha elegido la energía del sistema como el primer momento Λ .

Obtención de la función generatriz

Para encontrar una función generatriz que verifique **(2.3)** ensayaremos una función

$$S(r, \theta, \Lambda, \Gamma) = S_1(r, \Lambda, \Gamma) + S_2(\theta, \Lambda, \Gamma),$$

que sea separable en otras dos, cada una de las cuales depende únicamente de una de las variables antiguas. De esta forma podremos poner

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S_1}{\partial r} \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial S_2}{\partial \theta},$$

por lo cual, la ecuación **(2.3)** toma la forma:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^*}{r^3} = \Lambda,$$

que, reorganizando términos, se transforma en:

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 = 2r^2\Lambda - r^2 \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + 2\mu r - \frac{2\mu^*}{r},$$

donde el término de la izquierda solo depende de los nuevos momentos y de θ , mientras que el de la derecha solo depende de los momentos y de r . Así pues esto obliga a que ambos términos sean independientes de las variables r y θ , por lo que cualquier función de Λ y Γ verificará la igualdad. Por ello elegimos el momento Γ^2 como el valor de la igualdad, de forma que se tendrá

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 = 2r^2\Lambda - r^2 \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + 2\mu r - \frac{2\mu^*}{r} = \Gamma^2. \quad (2.4)$$

Igualando el primer y el tercer término de la igualdad **(2.4)** se tiene que

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 = \Gamma^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial S_2}{\partial \theta} = \pm \Gamma \quad \rightarrow \quad S_2(\theta) = \pm \Gamma \theta,$$

donde hemos elegido un límite inferior $\theta = 0$ para la integración. Aunque cualquiera de las dos soluciones es válida elegiremos, para simplificar, la expresión con signo positivo, así se tendrá

$$S_2(\theta, \Lambda, \Gamma) = \Gamma \theta.$$

De igual modo usando el primer y segundo término de **(2.4)** observamos que

$$2r^2\Lambda - r^2 \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + 2\mu r - \frac{2\mu^*}{r} = \Gamma^2,$$

que reordenando queda:

$$\frac{\partial S_1}{\partial r} = \sqrt{2\Lambda + \frac{2\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} - \frac{2\mu^*}{r^3}} \rightarrow S_1(r) = \int_{r_0}^r \sqrt{2\Lambda + \frac{2\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} - \frac{2\mu^*}{r^3}} dr,$$

donde el límite inferior de integración r_0 será elegido como la mínima distancia entre el orbitador y el origen de coordenadas, o lo que es igual, la distancia en el periastro.

Hemos hallado, por tanto, unas expresiones para S_1 y S_2 , por lo que ahora podemos expresar la función generatriz S de la transformación como

$$S(r, \theta, \Lambda, \Gamma) = \Gamma\theta + \int_{r_0}^r \sqrt{2\Lambda + \frac{2\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} - \frac{2\mu^*}{r^3}} dr. \quad (2.5)$$

De aquí en adelante, con objeto de simplificar las expresiones, llamaremos

$$\mathcal{R}(r) = \sqrt{2\Lambda + \frac{2\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} - \frac{2\mu^*}{r^3}},$$

y de ahí podremos poner

$$S(r, \theta, \Lambda, \Gamma) = \Gamma\theta + \int_{r_0}^r \mathcal{R}(r) dr. \quad (2.6)$$

Significado de los nuevos momentos

Una vez obtenida la función generatriz, usaremos las expresiones dadas en (2.2) para obtener las relaciones que definen las nuevas variables canónicas.

Las dos primeras expresiones (2.2) nos conducen a las expresiones

$$R = \frac{\partial S}{\partial r} = \mathcal{R}(r), \quad (2.7)$$

$$\Theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \Gamma. \quad (2.8)$$

De (2.8) se deduce que el segundo momento de las nuevas variables coincide, al igual que para las variables de Delaunay, con el segundo momento de las variables polares-nodales, esto es, con la norma del momento angular. De esta forma hemos dado significado a los nuevos momentos:

- Λ representa la energía del sistema, como se estableció en la página 20.

➤ Γ es la norma del momento angular $\rightarrow \Gamma = \Theta = G$.

Obtención de las nuevas variables

Las dos últimas relaciones (2.2) se podrán poner como

$$\lambda = \frac{\partial S}{\partial \Lambda} = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\mathcal{R}(r)}, \quad (2.9)$$

$$\gamma = \frac{\partial S}{\partial \Gamma} = \theta - \int_{r_0}^r \frac{\Gamma dr}{r^2 \mathcal{R}(r)}. \quad (2.10)$$

En primer lugar, realizaremos el cambio de variables $r = 1/z$, que conduce a las expresiones

$$\lambda = - \int_{z_0}^z \frac{dz}{z^2 \sqrt{2\Lambda + 2\mu z - \Gamma^2 z^2 - 2\mu^* z^3}}, \quad (2.11)$$

$$\gamma = \theta - \int_{z_0}^z \frac{\Gamma dz}{\sqrt{2\Lambda + 2\mu z - \Gamma^2 z^2 - 2\mu^* z^3}}, \quad (2.12)$$

donde $z_0 = \frac{1}{r_0}$.

Las expresiones anteriores, una vez integradas y después de deshacer el cambio de variables, se podrán poner como:

$$\lambda = \lambda(r), \quad \gamma = \theta - f(r). \quad (2.13)$$

Obtención de las funciones $\lambda(r)$ y $f(r)$.

La expresión de las funciones (2.11) y (2.12) se obtendrá mediante la integración de expresiones en las que aparece la raíz cuadrado de un polinomio de grado tres. Este tipo de expresiones conduce a integrales elípticas que pueden obtenerse haciendo uso de las relaciones que aparecen en el libro *Byrd & Friedman (1971)*.

Las expresiones de estas integrales se obtienen factorizando los polinomios y aplicando un determinado cambio de variables en función del valor relativo del extremo de integración con respecto a las raíces a, b y c del polinomio. Así, tendremos los siguientes casos:

- **Caso 1** = $a > b \geq y > c$,
- **Caso 2** = $a > b > y \geq c$,
- **Caso 3** = $a \geq y > b > c$,
- **Caso 4** = $a > y \geq b > c$.

En lo que sigue se hará uso de las siguientes integrales elípticas:

- **Integral elíptica incompleta de primera especie**

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}.$$

- **Integral elíptica completa de segunda especie**

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta.$$

- **Integral elíptica incompleta de tercera especie**

$$\Pi(\varphi, \alpha^2, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}.$$

Así como de las funciones elípticas de Jacobi $sn(u, k)$, $cn(u, k)$ y $dn(u, k)$, definidas a partir de las siguientes relaciones

$$sn(u, k) = \operatorname{sen}[am(u, k)].$$

$$cn(u, k) = \operatorname{cos}[am(u, k)].$$

$$dn(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2[am(u, k)]}.$$

donde $\varphi = am(u, k)$ es la inversa de la integral elíptica de primera especie, es decir,

$$\psi = am(u, k) \quad \leftrightarrow \quad u = F(\psi, k)$$

Una detallada descripción de las propiedades de estas funciones puede verse también en *Byrd & Friedman (1971)*.

A continuación se presenta la expresión de las distintas integrales, necesarias para el cálculo de (2.11) y (2.12) según el valor del límite de integración. En todos los casos se indica también el cambio de variables necesario para llegar a ese resultado y el número de la fórmula donde aparece en *Byrd & Friedman (1971)*. Se escribe en negrita el resultado final y sin negrita algunos de los resultados intermedios de la aplicación de la transformación.

Caso 1.a (233.18)

$$\begin{aligned}
 \int_c^y \frac{dz}{z^m \sqrt{(a-z)(b-z)(z-c)}} &= \frac{g}{c^m} \int_0^{u_1} \frac{du}{\left(1 - \frac{c-b}{c} \operatorname{sn}^2 u\right)^m} \\
 &= \frac{g}{c^m} \int_0^{u_1} \frac{du}{(1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)^m} \rightarrow m = 2 \rightarrow \frac{g}{c^2} \int_0^{u_1} \frac{du}{(1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)^2} = \frac{g}{c^2} V_2 \\
 &= \frac{g}{c^2} \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)(k^2 - \alpha^2)} \left[\alpha^2 E(u) + (k^2 - \alpha^2)u \right. \\
 &\quad \left. + (2\alpha^2 k^2 + 2\alpha^2 - \alpha^4 - 3k^2) \Pi(\varphi, \alpha^2, k) - \frac{\alpha^4 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} \right],
 \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{c-b}{c} \quad ; \quad k^2 = \frac{b-c}{a-c} \quad ; \quad g = \frac{2}{(a-c)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \operatorname{sn}^2 u = \frac{z-c}{b-c} \\
 \varphi &= \sin^{-1} \left(\frac{y-c}{b-c} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad u = F \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{z-c}{b-c}} \right), \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} \right].
 \end{aligned}$$

Caso 2.a (234.17)

$$\begin{aligned}
 \int_y^b \frac{dz}{z^m \sqrt{(a-z)(b-z)(z-c)}} &= \frac{g}{b^m} \int_0^{u_1} \frac{\operatorname{dn}^{2m} u \operatorname{du}}{\left(1 - \frac{ak^2}{b} \operatorname{sn}^2 u\right)^m} \\
 &= \frac{g}{b^m} \int_0^{u_1} \frac{\operatorname{dn}^{2m} u \operatorname{du}}{(1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)^m} = \frac{g}{\alpha^{2m}} k^{2m} \sum_{j=0}^m \frac{(\alpha^2 - k^2)^j m!}{k^{2j} j! (m-j)!} V_j,
 \end{aligned}$$

$$m = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{g}{b^2} k^4 \sum_{j=0}^2 \frac{2(\alpha^2 - k^2)^j}{k^{2j} j! (2-j)!} V_j$$

con

$$V_0 = \int du = u = F(\varphi, k) ; \quad V_1 = \Pi(\varphi, \alpha^2, k)$$

$$V_2 = \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)(k^2 - \alpha^2)} \left[\alpha^2 E(u) + (k^2 - \alpha^2)u \right. \\ \left. + (2\alpha^2 k^2 + 2\alpha^2 - \alpha^4 - 3k^2) \Pi(\varphi, \alpha^2, k) - \frac{\alpha^4 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} \right],$$

siendo

$$k^2 = \frac{b-c}{a-c} \quad ; \quad g = \frac{2}{(a-c)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \alpha^2 = \frac{ak^2}{b} \quad ; \quad \operatorname{sn}^2 u = \frac{(a-c)(b-z)}{(b-c)(a-z)},$$

$$\varphi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(a-c)(b-y)}{(b-c)(a-y)}} \quad u = F \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{(a-c)(b-z)}{(b-c)(a-z)}} \right), \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} \right].$$

Caso 3.a (235.19)

$$\int_b^y \frac{dz}{z^m \sqrt{(a-z)(b-z)(z-c)}} = \frac{g}{b^m} \int_0^{u_1} \frac{dn^{2m} u \, du}{\left(1 - \frac{ck^2}{b} \operatorname{sn}^2 u\right)^m} \\ = \frac{g}{b^m} \int_0^{u_1} \frac{dn^{2m} u \, du}{(1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)^m} = \frac{g}{b^m} \frac{k^{2m}}{\alpha^{2m}} \sum_{j=0}^m \frac{(\alpha^2 - k^2)^j m!}{k^{2j} j! (m-j)!} V_j$$

$$m = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{gk^4}{b^2 \alpha^4} \sum_{j=0}^2 \frac{2(\alpha^2 - k^2)^j}{k^{2j} j! (2-j)!} V_j ,$$

con

$$V_0 = \int du = u = F(\varphi, k) \quad ; \quad V_1 = \Pi(\varphi, \alpha^2, k)$$

$$V_2 = \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)(k^2 - \alpha^2)} \left[\alpha^2 E(u) + (k^2 - \alpha^2)u \right. \\ \left. + (2\alpha^2 k^2 + 2\alpha^2 - \alpha^4 - 3k^2) \Pi(\varphi, \alpha^2, k) - \frac{\alpha^4 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} \right],$$

siendo

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)} ; \quad k^2 = \frac{a-b}{a-c} ; \quad g = \frac{2}{\sqrt{a-c}} ; \quad \varphi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(a-c)(y-b)}{(a-b)(y-c)}}$$

$$\alpha^2 = \frac{ck^2}{b} ; \quad u = F \left[\operatorname{arcsin} \left(\sqrt{\frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}} \right), \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} \right].$$

Caso 4.a (236.19)

$$\begin{aligned} \int_y^a \frac{dz}{z^m \sqrt{(a-z)(b-z)(z-c)}} &= \frac{g}{a^m} \int_0^{u_1} \frac{du}{\left[1 - \frac{a-b}{a} \operatorname{sn}^2 u\right]^m} \\ &= \frac{g}{a^m} \int_0^{u_1} \frac{du}{[1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u]^m} = \frac{g}{a^m} V_m \\ &\quad m = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{g}{a^2} V_2 \\ &= \frac{g}{a^2} \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)(k^2 - \alpha^2)} \left[\alpha^2 E(u) + (k^2 - \alpha^2)u \right. \\ &\quad \left. + (2\alpha^2 k^2 + 2\alpha^2 - \alpha^4 - 3k^2) \Pi(\varphi, \alpha^2, k) - \frac{\alpha^4 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} \right], \end{aligned}$$

siendo

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{a-z}{a-b} ; \quad k^2 = \frac{a-b}{a-c} ; \quad g = \frac{2}{\sqrt{a-c}} ; \quad \psi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{a-y}{a-b}}$$

$$\alpha = \sqrt{a - \frac{b}{a}} ; \quad u = F \left[\operatorname{arcsin} \left(\sqrt{\frac{(a-z)}{(a-b)}} \right), \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} \right].$$

Caso 1.b (233.00)

$$\int_c^y \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(z-c)}} = g \int_0^{u_1} du = gu_1 = g \cdot \operatorname{sn}^{-1}(\operatorname{sn} \psi, k) = g \cdot F(\psi, k),$$

siendo

$$g = \frac{2}{(a-c)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \psi = \sin^{-1} \left(\frac{y-c}{b-c} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad k^2 = \frac{b-c}{a-c} .$$

Caso 2.b (234.00)

$$\int_y^b \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(z-c)}} = g \int_0^{u_1} du = gu_1 = g \cdot \operatorname{sn}^{-1}(\sin \varphi, k) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{k}) ,$$

siendo

$$g = \frac{2}{(a-c)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \varphi = \sin^{-1} \left(\frac{(a-c)(b-y)}{(b-c)(a-y)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad k^2 = \frac{b-c}{a-c} .$$

Caso 3.b (235.00)

$$\int_b^y \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(z-c)}} = g \int_0^{u_1} du = gu_1 = g \cdot \operatorname{sn}^{-1}(\sin \varphi, k) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{k}) ,$$

siendo

$$g = \frac{2}{(a-c)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \varphi = \sin^{-1} \left(\frac{(a-c)(y-b)}{(a-b)(y-c)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad k^2 = \frac{a-b}{a-c} .$$

Caso 4.b (236.00)

$$\int_y^a \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(z-c)}} = g \int_0^{u_1} du = gu_1 = g \cdot \operatorname{sn}^{-1}(\sin \psi, k) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{k}) ,$$

siendo

$$g = \frac{2}{(a-c)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \psi = \sin^{-1} \left(\frac{a-y}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad k^2 = \frac{a-b}{a-c} .$$

Significado de las nuevas variables

Aunque el problema queda resuelto una vez obtenidas las expresiones de las funciones $\lambda(r)$ y $f(r)$, éstas no nos permiten comprender fácilmente el significado de estas variables y su relación con las variables clásicas de Delaunay.

Por un lado, si tenemos en cuenta que el primer momento de las variables de Delaunay coincide la velocidad radial, se tendrá la relación $dr = R dt$, que de acuerdo (2.7) se podrá poner como $dr = \mathcal{R}(r) dt$, y llevada a (2.9) conduce a

$$\lambda = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\mathcal{R}(r)} = \int_T^t \frac{\mathcal{R}(r) dt}{\mathcal{R}(r)} = t - T, \quad (2.14)$$

lo que nos indica que la primera variable es el tiempo relativo al periastro, ya que el instante T corresponde al instante de paso por el periastro.

Por otro lado, de acuerdo con la definición de momento angular se tiene que $r^2 \dot{f} = \Theta = \Gamma$, o lo es igual $r^2 df = \Gamma dt$, donde f representa la anomalía verdadera o ángulo entre la dirección del periastro y la del orbitador. Teniendo en cuenta esta relación y la relación anterior $dr = \mathcal{R}(r) dt$, y llevando ambas a (2.10) se tendrá

$$\gamma = \theta - \int_{r_0}^r \frac{\Gamma dr}{r^2 \mathcal{R}(r)} = \theta - \int_0^f df = \theta - f. \quad (2.15)$$

que es una relación idéntica a la de las variables de Delaunay pero donde al anomalía verdadera tiene un valor diferente por el hecho de que la posición del periastro varía por la perturbación.

Así pues el significado de las nuevas variable es el siguiente

- λ representa el tiempo (relativo al periastro)
- γ es similar del argumento del periastro.

Expresiones explícitas de la transformación

De acuerdo con las relaciones anteriores podemos encontrar fácilmente la relación explícita que nos da las nuevas variables canónicas $(\lambda, \gamma, \Lambda, \Gamma)$ en función de las antiguas⁸ (r, θ, R, Θ)

- $\lambda = \lambda(r),$
- $\gamma = \theta - f(r),$
- $\Lambda = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^*}{r^3},$
- $\Gamma = \Theta,$

donde las funciones $\lambda(r)$ y $f(r)$ han sido calculadas anteriormente.

Suponiendo que la expresión $r = r(\lambda)$ representa la inversa de la función $\lambda = \lambda(r)$, para calcular las variables (r, θ, R, Θ) , conocidas las variables $(\lambda, \gamma, \Lambda, \Gamma)$, bastará aplicar las igualdades

- $r = r(\lambda),$
- $\theta = \gamma + f(r),$
- $R = \sqrt{2\Lambda + \frac{2\mu}{r} - \frac{P_2^2}{r^2} - \frac{2\mu^*}{r^3}},$
- $\Theta = \Gamma.$

Para completar el proceso de cálculo de unas variables en función de otras es necesario el conocimiento de la expresión $r = r(\lambda) = r(t - T)$, o lo que es igual, la expresión de r en función del tiempo. Esta relación ya es complicada en el caso kepleriano, donde no puede ser obtenida si no es a partir de un método numérico o bien a través de desarrollos en serie de potencias de la excentricidad de la órbita que permiten invertir la ecuación de Kepler. Para el modelo dinámico tratado en esta memoria este proceso resulta mucho más complejo y será abordado en el siguiente capítulo donde se obtendrá la expresión equivalente, para este problema de la ecuación de Kepler, que llamaremos ecuación de Kepler generalizada.

⁸ No se consideran la variable \mathbf{v} y el momento \mathbf{N} , puesto que ambos coinciden en los dos conjuntos de variables.

Integración del problema principal ecuatorial en las nuevas variables

Finalmente abordaremos el problema de la integración del modelo principal-euatorial del satélite para el que la función hamiltoniana, expresada en las nuevas variables será

$$\mathcal{H}(\lambda, \gamma, \nu, \Lambda, \Gamma, N) = \Lambda ,$$

por lo que las ecuaciones de Hamilton podrán ponerse como

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda} = 1 & \quad ; \quad \dot{\Lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = 0, \\ \dot{\gamma} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Gamma} = 0 & \quad ; \quad \dot{\Gamma} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma} = 0, \\ \dot{\nu} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N} = 0 & \quad ; \quad \dot{N} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu} = 0, \end{aligned}$$

que integradas nos darán

$$\begin{aligned} \lambda = t - T & \quad ; \quad \gamma = \gamma_0 & \quad ; \quad \nu = \nu_0, \\ \Lambda = \Lambda_0 & \quad ; \quad \Gamma = \Gamma_0 & \quad ; \quad N = N_0, \end{aligned}$$

Donde $(\gamma_0, \nu_0, \Lambda_0, \Gamma_0, N_0)$ representa el valor constante de las variables en el instante inicial T.

3. Obtención de la distancia r en función del tiempo t . Ecuación de Kepler Generalizada.

Expresión de la relación entre r y t como un oscilador armónico perturbado

Como se ha dicho en el apartado anterior, para completar la definición de las variables del tipo “Delaunay” en el problema principal-ecuatorial, y la integración del movimiento orbital en estas variables, es necesario obtener la relación $r = r(t - T)$. Para ello volveremos de nuevo a la expresión (1.14) del hamiltoniano del problema

$$H = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \varepsilon \frac{\sigma}{r^3}.$$

Si aplicamos a dicho hamiltoniano las ecuaciones de Hamilton correspondientes a las variables r, R se obtendrá⁹

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial R} = R, \\ \frac{dR}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{3\varepsilon\sigma}{r^4} + \frac{\Theta^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}, \end{aligned}$$

de donde podemos poner

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dR}{dt} = \frac{\Theta^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{3\varepsilon\sigma}{r^4}. \quad (3.1)$$

A continuación introduciremos el siguiente cambio de variables

$$u = \frac{1}{r} + \beta \quad ; \quad r^2 \frac{df}{dt} = \Theta \quad ; \quad v = \frac{du}{df} \quad ; \quad \beta = -\frac{\mu}{\Theta^2}$$

que permite obtener las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dr}{dt} = -r^2 \frac{du}{dt} = -r^2 \frac{du}{df} \frac{ds}{dt} = -\Theta \frac{du}{df}, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{d\Theta}{dt} \frac{du}{df} - \Theta \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{df} \right) = -\Theta \frac{d^2u}{df^2} \frac{ds}{dt} = -\Theta \left(\frac{\Theta}{r^2} \right) \frac{d^2u}{df^2} = -\Theta^2 (u - \beta)^2 \frac{d^2u}{df^2} \end{aligned}$$

⁹ El resto de variables tienen derivada nula por lo que son todas constantes.

que llevadas a (3.1) nos dan para el término de la izquierda la expresión

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\Theta^2 (u - \beta)^2 \frac{d^2 u}{df^2},$$

mientras que para el término de la derecha de (3.1) se tendrá

$$\frac{\Theta^2}{r^3} - \frac{u}{r^2} + \varepsilon \frac{3\sigma}{r^4} = \Theta^2 (u - \beta)^3 - u(u - \beta)^2 + \varepsilon [3\sigma(u - \beta)^4].$$

Igualando y dividiendo por $-\Theta^2 (u - \beta)^2$ se tiene

$$\frac{d^2 u}{df^2} = -(u - \beta) + \frac{u}{\Theta^2} + \varepsilon [3\sigma(u - \beta)^2],$$

Como $\beta = -u/\Theta^2$ podremos poner

$$\frac{d^2 u}{df^2} + u = \varepsilon [3\sigma(u^2 - 2u\beta + \beta^2)],$$

y finalmente llegamos a la expresión

$$\frac{d^2 u}{df^2} + u = \varepsilon (k_0 + k_1 u + k_2 u^2), \quad (3.2)$$

donde $k_0 = 3\sigma\beta^2$; $k_1 = -6\sigma\beta$; $k_2 = 3\sigma$.

La expresión anterior corresponde a la ecuación de un oscilador armónico perturbado, del tipo dado en (A.6), con una frecuencia $w = 1$, y donde el tiempo es la anomalía verdadera f . Para integrar dicha ecuación aplicaremos el método KBM del apéndice B.

Aplicación del método KBM

El método KBM consiste en ensayar una solución

$$u = \delta \cos\psi + \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} u_n(\delta, \psi) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} u_n(\delta, \psi), \quad (3.3)$$

donde cada uno de los $u_n(\delta, \psi)$ es una función 2π -periódica de ψ . De forma que tanto δ como ψ varían de acuerdo con la relación diferencial:

$$\frac{d\delta}{df} = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} A_n(\delta) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} A_n(\delta), \quad A_0 = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{d\psi}{df} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} B_n(\delta) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} B_n(\delta), \quad B_0 = 1. \quad (3.5)$$

Observemos que la segunda relación nos indica que $\psi = f + \varepsilon \psi(\delta)$, esto es, representa una pequeña perturbación de la anomalía verdadera.

En primer lugar calcularemos los valores $F_{0,n}$ que conforman la ecuación que aparece indicada en el apéndice B **(A.13)**:

$$F(u, v; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{0,n},$$

donde $v = \frac{du}{df}$, término que no aparece en nuestra expresión.

Para hacerlo sustituimos en **(3.2)** los valores de u por el desarrollo en serie **(3.3)**, donde si nos quedamos en el orden dos¹⁰ tendremos

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} u_2.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{df^2} + u &= F(u, v, \varepsilon) \\ &= \varepsilon \left[k_0 + k_1 \left(u_0 + \varepsilon u_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} u_2 \right) + k_2 \left(u_0 + \varepsilon u_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} u_2 \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Si nos quedamos con los términos de ε^n tal que $n \leq 2$, tendremos finalmente

$$F(u, v, \varepsilon) = \varepsilon(k_0 + k_1 u_0 + k_2 u_0^2) + \varepsilon^2(u_1 k_1 + 2u_0 u_1 k_2).$$

Así que, emparejando términos obtenemos que

$$F_{01} = k_0 + k_1 u_0 + k_2 u_0^2 \quad ; \quad F_{02} = u_1 k_1 + 2u_0 u_1 k_2. \quad (3.6)$$

Tal y como viene explicado en el apéndice B, vamos a suponer que cada uno de los valores de u_n puede ser expresado mediante una expansión de serie de Fourier de una función 2π -periódica. Para ello comencemos calculando los términos U_n , mediante la aplicación de la fórmula **(A.13)** en la que necesitaremos conocer tanto el valor de $F_{0,n}$ (valores hallados en **(3.6)**) como el del w_n correspondiente.

Para hallar el valor de cada uno de los w_n haremos uso de la fórmula **(A.11)** que necesita de los valores de A_{n-1} , B_{n-1} y u_{n-1} , es decir, exactamente un orden inferior

¹⁰ De aquí en adelante se obtendrá una teoría de orden 2. Para teorías de orden mayor la complejidad de las expresiones que aparecen se hace muy grande y es necesario usar procesadores simbólicos para su obtención.

(por lo que son valores previamente hallados). Aplicando este proceso iterativo podemos calcular los valores de u_n hasta el orden que queramos.

Ahora vamos a establecer los valores iniciales. Tal y como aparece en (A.8) y (A.9) tenemos que $u_0 = \delta \cos\psi$, $A_0 = 0$ y $B_0 = 1$. De igual modo, se tiene que $w_0 = 0$, por lo que finalmente obtenemos que $U_0 = F_{0,0} - w_0 = 0$.

Continuamos del mismo modo, ahora para hallar los términos $n = 1$. Aplicando las mismas fórmulas que en el párrafo anterior, obtenemos que:

$$w_1 = 0$$

$$U_1 = F_{0,1} - w_1 = k_0 + k_1 u_0 + k_2 u_0^2 = k_0 + k_1 \delta \cos\psi + k_2 \delta^2 \cos^2 \psi,$$

Si como se dice en el apéndice B, llamamos $c_j(f)$ y $s_j(f)$ a los coeficientes respectivos de los términos en $\cos j\psi$ y $\sen j\psi$ del desarrollo en serie de Fourier de la función $f(\psi)$ podremos poner finalmente, para U_1

$$c_0(U_1) = k_0 + \frac{k_2 \delta^2}{2} \quad ; \quad c_1(U_1) = k_1 \delta \quad ; \quad c_2(U_1) = \frac{k_2 \delta^2}{2}.$$

Con los datos anteriores, y haciendo uso de las expresiones (A.15) y (A.16), tendremos que

$$A_1 = 0,$$

$$B_1 = -\frac{k_1}{2},$$

$$c_0(u_1) = (k_0 + k_2 \delta^2 / 2),$$

$$c_1(u_1) = 0,$$

$$c_2(u_1) = -\frac{k_2 \delta^2}{6},$$

mientras que el resto de los coeficientes $c_n(u_1)$, $s_n(u_1)$ del desarrollo en serie de Fourier de u_1 son iguales a a cero. Finalmente la expresión de u_1 se podrá poner como

$$u_1 = \left(k_0 + \frac{k_2 \delta^2}{2} - \frac{k_2 \delta^2}{6} \cos 2\psi \right),$$

Siguiendo exactamente el mismo proceso calculamos ahora los términos de un orden superior. Comenzamos con el valor de $F_{0,2}$:

$$F_{0,2} = u_1 k_1 + 2u_0 u_1 k_2$$

Sustituyendo el valor de u_1 , previamente hallado, queda que

$$F_{0,2} = \left(k_1 k_0 + \frac{k_1 k_2 \delta^2}{2} \right) + \delta k_2 (2k_0 + k_2 \delta^2) \cos \psi - k_1 k_2 \delta^2 \cos 2\psi \cos 2\psi - 2k_2^2 \delta^3 \cos \psi \cos 2\psi .$$

Tal y como se explica en el apéndice B, obtenemos el valor de w_2 por medio de la relación (A.11)

$$w_2 = 2(w_{110} + w_{101} + w_{011}),$$

donde, de acuerdo con (A.12) se tiene

$$w_{110} = -\frac{k_1^2 \delta \cos \psi}{4} \quad ; \quad w_{101} = w_{011} = -\frac{k_1 k_2 \delta^2}{3} \cos 2\psi,$$

por lo que al final podemos poner

$$w_2 = -\frac{k_1 \delta}{6} (3k_1 \cos \psi + 8k_2 \delta \cos 2\psi).$$

Así que ya estamos en condiciones de hallar el valor de $U_2 = F_{0,2} - w_2$ que resulta ser

$$U_2 = \left(k_1 k_0 + \frac{k_1 k_2 \delta^2}{2} \right) + \delta k_2 \left(2k_0 + \frac{k_1^2}{2k_2} - \frac{5k_2 \delta^2}{6} \right) \cos \psi + 7k_1 k_2 \delta^2 \cos 2\psi - k_2^2 \delta^3 \cos 3\psi .$$

Continuando el proceso como en el orden anterior obtendremos

$$A_2 = 0 ,$$

$$B_2 = k_2 \left(\frac{5}{6} k_2 \delta^2 - 2k_0 - \frac{k_1^2}{2k_2} \right) ,$$

$$c_1(u_2) = 0 ,$$

$$c_2(u_2) = -\frac{7}{18} k_1 k_2 \delta^2 ,$$

$$c_3(u_2) = k_2^2 \delta^3 ,$$

lo que permite expresar el valor de u_2 en la forma

$$u_2 = (k_1 k_0 + k_1 k_2 \delta^2) - \frac{7}{18} (k_1 k_2 \delta^2) \cos 2\psi + k_2 \delta^3 \cos 3\psi .$$

A partir de u_0 , u_1 y u_2 , obtenemos la expresión aproximada al orden dos de u , que será

$$u = \delta \cos \psi + \varepsilon \left(k_0 + \frac{k_2 \delta^2}{2} - \frac{k_2 \delta^2}{6} \cos 2\psi \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left((k_1 k_0 + k_1 k_2 \delta^2) - \frac{7}{18} (k_1 k_2 \delta^2) \cos 2\psi + k_2 \delta^3 \cos 3\psi \right).$$

De igual modo también nos interesa hallar la expresión de v . Para ello aplicamos la fórmula (A.10)

$$v_n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} \left(A_i \frac{\partial u_j}{\partial \delta} + B_i \frac{\partial u_j}{\partial \psi} \right),$$

a partir de la condición inicial $v_0 = -\delta \sin \psi$.

Para el orden uno se tendrá:

$$v_1 = \frac{1!}{1!0!} \left(A_1 \frac{\partial u_0}{\partial \delta} + B_1 \frac{\partial u_0}{\partial \psi} \right) + \frac{1!}{0!1!} \left(A_0 \frac{\partial u_1}{\partial \delta} + B_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right),$$

por lo que

$$v_1 = k_1 \delta \sin \psi + k_2 \delta^2 \sin 2\psi.$$

Para el orden dos tendremos:

$$v_2 = \frac{2!}{2!0!} \left(A_2 \frac{\partial u_0}{\partial \delta} + B_2 \frac{\partial u_0}{\partial \psi} \right) + \frac{2!}{1!1!} \left(A_1 \frac{\partial u_1}{\partial \delta} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) + \frac{2!}{0!2!} \left(A_0 \frac{\partial u_2}{\partial \delta} + B_0 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} \right),$$

y finalmente

$$v_2 = k_2 \delta \left(2k_0 + \frac{k_1^2}{2k_2} - \frac{5}{6} k_2 \delta^2 \right) \sin \psi + 4k_1 k_2 \delta^2 \sin 2\psi - k_2 \delta^3 \sin 3\psi.$$

Por lo tanto la expresión de v , hasta el orden dos, será

$$v = -\delta \sin \psi + \varepsilon (k_1 \delta \sin \psi + k_2 \delta^2 \sin 2\psi) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[k_2 \delta \left(2k_0 + \frac{k_1^2}{2k_2} - \frac{5}{6} k_2 \delta^2 \right) \sin \psi + 4k_1 k_2 \delta^2 \sin 2\psi - k_2 \delta^3 \sin 3\psi \right].$$

Finalmente si tenemos en cuenta la expresión (3.4) y los valores obtenidos para A_1 y A_2 , se tendrá que la derivada de δ respecto de f vale cero por lo que δ resulta ser una constante.

Por otro lado, puesto que las funciones B_1 y B_2 solo dependen de δ , y ésta es constante, las funciones B_1 y B_2 son también constantes, por lo que llevadas a (3.5) obtendremos

$$\frac{d\psi}{df} = \left(1 + \varepsilon B_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} B_2 \right) = n_\psi, \quad (3.6)$$

siendo n_ψ una constante. Integrando ésta se tendrá finalmente

$$\psi = n_\psi f, \quad (3.7)$$

de ahí, que la variable ψ que no es sino la anomalía verdadera ψ multiplicada por una constante próxima a la unidad será llamada **anomalía media generalizada**.

Relación de r con ψ y f

Si ahora tenemos en cuenta la relación entre r y u indicada en la página 32, $u = \frac{1}{r} + \beta$, podremos expresar r en función de ψ

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = u - \beta = & (\delta \cos\psi - \beta) + \varepsilon \left(k_0 + \frac{k_2\delta^2}{2} - \frac{k_2\delta^2}{6} \cos 2\psi \right) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left((k_1 k_0 + k_1 k_2 \delta^2) - \frac{7}{18} (k_1 k_2 \delta^2) \cos 2\psi + k_2 \delta^3 \cos 3\psi \right), \end{aligned}$$

por otro lado, si introducimos las siguientes igualdades

$$p = -\frac{1}{\beta} \quad ; \quad e = \frac{\delta}{\beta} \quad ; \quad a = \frac{p}{1 - e^2},$$

donde p, e, a son respectivamente el semi-lado recto, la excentricidad y el semieje mayor, podremos poner

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos\psi}{p} + \varepsilon \left(k_0 + \frac{k_2\delta^2}{2} - \frac{k_2\delta^2}{6} \cos 2\psi \right) \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} (k_1 k_0 + k_1 k_2 \delta^2 - 7k_1 k_2 \delta^2 \cos 2\psi + k_2 \delta^3 \cos 3\psi). \end{aligned}$$

Para obtener r haremos uso de las expresiones

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} c_n = \frac{1}{\sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} a_n},$$

donde los coeficientes de la serie pueden obtenerse de forma iterativa en la forma

$$c_0 = \frac{1}{a_0}, \quad c_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a_i c_{n-i},$$

Aplicando dicha relación a $1/r$, tendremos

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{a_0}, \\ c_1 &= -\frac{p}{1 + e \cos \psi} \sum_{i=1}^1 \binom{1}{i} a_i c_{i-1} \\ &= -\frac{p^2}{(1 + e \cos \psi)^2} \left(k_0 + \frac{k_2 \delta^2}{2} - \frac{k_2 \delta^2}{6} \cos 2\psi \right), \\ c_2 &= -\frac{p}{1 + e \cos \psi} \sum_{i=1}^2 \binom{2}{i} a_i c_{2-i} \\ &= -\frac{p^2}{(1 + e \cos \psi)^2} \left[-\frac{p}{(1 + e \cos \psi)} \left(k_0 + \frac{k_2 \delta^2}{2} - \frac{k_2 \delta^2}{6} \cos 2\psi \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(k_1 k_0 + \frac{k_1 k_2 \delta^2}{2} - 7 k_1 k_2 \delta^2 \cos 2\psi + k_2 \delta^2 \cos 3\psi \right) \right]. \end{aligned}$$

Con lo que podremos expresar el valor de r en la forma

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + e \cos \psi} + \varepsilon \left[-\frac{p^2}{(1 + e \cos \psi)^2} \left(k_0 + \frac{k_2 \delta^2}{2} - \frac{k_2 \delta^2}{6} \cos 2\psi \right) \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[-\frac{p^2}{(1 + e \cos \psi)^2} \left[-\frac{p}{(1 + e \cos \psi)} \left(k_0 + \frac{k_2 \delta^2}{2} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{k_2 \delta^2}{6} \cos 2\psi \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \left(k_1 k_0 + \frac{k_1 k_2 \delta^2}{2} - \frac{7}{18} k_1 k_2 \delta^2 \cos 2\psi + k_2 \delta^2 \cos 3\psi \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Ecuación de Kepler generalizada

En el apartado anterior se ha obtenido la relación $r(\psi)$, por lo que para obtener la relación $r(t)$, es necesario encontrar la relación $\psi(t)$.

Reuniendo las expresiones

$$\frac{d\psi}{df} = n_\psi \quad ; \quad r^2 \frac{df}{dt} = \Theta ,$$

podemos encontrar la relación diferencial entre el tiempo y la anomalía verdadera generalizada ψ ,

$$n_\psi \Theta dt = r^2 d\psi , \quad (3.8)$$

cuya integración permitirá obtener la relación que nos falta para determinar la función $\psi(t)$.

En primer lugar calculamos el valor de r^2 , que llevado a (3.8) transforma esta relación en la siguiente:

$$\begin{aligned} n_\psi \Theta dt = & \frac{p^2 \cdot d\psi}{(1 + e \cos \psi)^2} + \varepsilon \left[-\frac{2p^3}{(1 + e \cos \psi)} (k_3 - k_5 \cos 2\psi) \right] d\psi \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{4p}{1 + e \cos \psi} (k_4 - k_6 \cos 2\psi + k_7 \cos 3\psi) \right. \\ & + \frac{p^4}{(1 + e \cos \psi)^4} (k_8 + k_9 \cos 2\psi \\ & \left. + 2(k_3 - k_{10} \cos 2\psi)^2) \right] d\psi , \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde

$$k_3 = k_0 + \frac{k_2 \delta^2}{2} ,$$

$$k_4 = k_1 k_0 + \frac{k_1 k_2 \delta^2}{2} ,$$

$$k_5 = \frac{k_2 \delta^2}{6} ,$$

$$k_6 = \frac{7}{18} k_1 k_2 \delta^2 ,$$

$$\begin{aligned}
k_7 &= k_2 \delta^2, \\
k_8 &= k_0^2 + \frac{2k_0 k_2 \delta^2}{2} + \frac{k_2^2 \delta^4}{4}, \\
k_9 &= \frac{k_2^2 \delta^4}{36} - \frac{2k_0 k_2 \delta^2}{6} - \frac{2k_2^2 \delta^4}{12}, \\
k_{10} &= \frac{k_2 \delta^2}{6},
\end{aligned}$$

En lo que sigue usaremos los polinomios T_n de Chebyshev de primer tipo¹¹, definidos a partir de la relación de recurrencia

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Esta familia de polinomios tiene como propiedad fundamental:

$$\cos n\psi = T_n(\cos \psi),$$

lo que los hace especialmente útiles para su uso con funciones trigonométricas.

Si introducimos la variable q por medio de la relación

$$q = 1 + e \cos \psi,$$

tendremos entonces que

$$\cos n\psi = T_n\left(\frac{q-1}{e}\right),$$

que llevada a **(3.9)** y después de realizar la integral en ambos lados, se obtiene, tras laboriosos cálculos, la expresión¹²

$$\begin{aligned}
n_\psi \Theta(t-T) &= A_1 \int q^{-2} d\psi + \varepsilon \left(A_3 \int q^{-1} d\psi - 2A_3 \int q^{-2} d\psi + B_1 \int q^{-3} d\psi \right) \\
&+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left(A_9 \int q^3 d\psi - 3A_9 \int q^2 d\psi + B_2 \int q d\psi + B_3 \int d\psi \right. \\
&+ B_4 \int q^{-1} d\psi + B_5 \int q^{-2} d\psi + B_6 \int q^{-3} d\psi \\
&\left. + B_7 \int q^{-4} d\psi \right) \quad (5.7) \tag{3.10}
\end{aligned}$$

¹¹ Los polinomios de Chebyshev de primer tipo son una familia de polinomios ortogonales definidos de forma recursiva.

¹² Todas las integrales de esta expresión son integrales definidas en el intervalo $[0, \psi]$ sin embargo por simplicidad, de aquí en adelante, se han omitido los límites de integración en la expresión.

donde

$$A_1 = p^2, \quad A_2 = -2p^3k_3, \quad A_3 = \frac{2p^3k_2\delta^2}{e^2},$$

$$A_4 = 2p^4k_3^2 + \frac{p^4k_2^2\delta^4}{18} + \frac{2}{3}p^4k_2k_3\delta^2 + p^4k_3^2 + \frac{k_2^2\delta^4p^4}{36} + \frac{k_3k_2\delta^2p^4}{3},$$

$$A_5 = \frac{2p^4k_2^2\delta^4}{9e^4} + \frac{1k_2^2\delta^4p^4}{9e^4}, \quad A_6 = -\frac{2p^4k_2^2\delta^4}{9e^2} - \frac{4p^4k_2k_3\delta^2}{3e^2} - \frac{4k_2^2\delta^4p^4}{36e^2},$$

$$A_7 = 4pk_4 + \frac{14pk_1k_2\delta^2e^2}{9e^2}, \quad A_8 = -\frac{29pk_1k_2\delta^2}{9e^2},$$

$$A_9 = \frac{k_2\delta^2}{12e^3}, \quad A_{10} = -\frac{3k_2\delta^2e^2}{48e^3},$$

$$B_1 = A_2 + A_3, \quad B_2 = A_8 + 3A_9 + A_{10}, \quad B_3 = A_5 - 2A_8 - A_9 - A_{10},$$

$$B_4 = -4A_5 + A_7 + A_8,$$

$$B_5 = 6A_5 + A_6,$$

$$B_6 = -4A_5 - 2A_6,$$

$$B_7 = A_4 + A_5 + A_6.$$

La expresión (3.10) nos da la relación entre t y ψ , a partir de las integrales del tipo $\int q^n d\psi$, donde n puede ser positivo o negativo. Si tenemos en cuenta la expresión de q , cuando $n > 0$ el integrando resulta una expresión polinómica de funciones circulares por lo que la integral resulta sencilla de realizar, sin embargo cuando $n < 0$, el integrando se convierte en una expresión racional de funciones circulares, mucho más difícil de integrar. Esta dificultad, que aparece en muchos problemas de la Astrodinámica, se solventa con facilidad combinando el uso de la anomalía verdadera con la excéntrica a partir del cambio de variables correspondiente. En nuestro caso el cambio equivalente viene definido por

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E} \quad ; \quad \sin \psi = \frac{\cos E - e}{1-e \cos E},$$

en la que ψ, E representan respectivamente las anomalías verdadera y excéntrica generalizadas. Usando estas relaciones encontramos que

$$\frac{p}{1 + e \cos \psi} = a(1 - e \cos E) \quad ; \quad d\psi = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} dE ,$$

De esta forma las integrales de potencias de q se podrán poner como

$$\int q^n d\psi = \begin{cases} \int (1 + e \cos \psi)^n d\psi, & n \geq 0 \\ \eta^{-2n-1} \int (1 - e \cos E)^{-n-1} dE, & n < 0 \end{cases}$$

donde $\eta = \sqrt{1 - e^2}$.

Así tendremos finalmente

$$\int q^{-4} d\psi = \eta^7 \int (1 - e \cos E)^3 dE,$$

$$\int q^{-3} d\psi = \eta^5 \int (1 - e \cos E)^2 dE,$$

$$\int q^{-2} d\psi = \eta^3 \int (1 - e \cos E) dE,$$

$$\int q^{-1} d\psi = \eta$$

$$\int d\psi = \psi,$$

$$\int q d\psi = \int (1 + e \cos \psi) d\psi,,$$

$$\int q^2 d\psi = \int (1 + e \cos \psi)^2 d\psi,,$$

$$\int q^3 d\psi = \int (1 + e \cos \psi)^3 d\psi.$$

Con lo que en todos los casos las integrales tienen la forma de un polinomio de funciones trigonométricas. Aunque estas integrales resultan sencillas de realizar, la cantidad de cálculos necesarios para completar la integración, y el volumen de los resultados nos impide escribir estos en el texto.

A pesar de todo nos fijaremos en la forma que adquiere dicha expresión observando, en primer lugar los términos de orden cero de **(3.10)**. Escribiendo la parte no perturbada del orden cero tendremos que

$$n_{\psi} \Theta (t - T) = p^2 \int q^{-2} d\psi = p^2 \eta^3 \int (1 - e \cos E) dE = p^2 \eta^3 (E - e \sin E),$$

que puede ponerse también como

$$n (t - T) = (E - e \sin E),$$

lo que equivale a la ecuación de Kepler. Si consideramos todos los términos de la perturbación podemos deducir que **(3.10)** se transforma en

$$\ell = n(t - T) = E - e \sin E + \sum_{i \geq 1} \frac{\varepsilon^i}{i!} \left(\frac{e^j}{j!} Y_{ij}(E, \psi) \right)$$

que llamaremos *ecuación de Kepler generalizada*.

Conclusiones

En la presente memoria se estudia el problema principal-ecuatorial del satélite artificial, para ello se ha analizado la dinámica del movimiento orbital considerando la perturbación producida por el achatamiento de la Tierra considerando un modelo limitado a orbitas ecuatoriales o cuasi-ecuatoriales.

Mediante la aplicación de la ecuación de Hamilton-Jacobi se ha conseguido, partiendo del hamiltoniano en el que se considera los términos que expresan la no-esfericidad de la Tierra, obtener un nuevo conjunto de variables canónicas, similares en forma a las conocidas variables de Delaunay. Se ha formulado la relación explícita, tanto directa como inversa, de estas variables con las variables polares-nodales. Estas relaciones aparecen en función de integrales elípticas y funciones de Jacobi. Finalmente se ha procedido a integrar el problema principal-ecuatorial en estas nuevas variables.

Con objeto de invertir la expresión de la función $\lambda(r)$ se ha reformulado el problema principal-ecuatorial como si se tratara de un oscilador armónico perturbado, y tras ser tratado con el método KBM se ha obtenido la expresión inversa de la anterior $r(\psi)$, donde ψ es la anomalía verdadera generalizada. Finalmente, se ha obtenido la ecuación de Kepler generalizada, similar a la ecuación de Kepler del problema no perturbado, que nos da la relación entre las variables ψ y λ , o lo que es igual, el tiempo t . Con ello se obtiene la relación de r con t .

Apéndices

A continuación vamos a realizar una presentación teórica de las herramientas matemáticas que se han utilizado durante la realización del trabajo. Se presentan únicamente los resultados fundamentales sin demostración.

Apéndice A: Elementos de dinámica hamiltoniana y ecuación de Hamilton-Jacobi.

Supondremos un sistema dinámico formado por N puntos P_i , $i = 1, \dots, N$, de masas m_i y cuya posición viene expresada, en un sistema inercial, por los vectores \mathbf{x}_i . La dinámica de este sistema de puntos viene descrita por el conjunto de ecuaciones resultante de la aplicación de la ecuación fundamental de Newton a cada una de las partículas:

$$\mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{siendo } \mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (\text{A. 1})$$

Los puntos P_i no se mueven libremente sino que pueden estar sujetos a una serie de relaciones funcionales entre los vectores de posición, llamadas *ligaduras*, del tipo:

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N; t) = 0.$$

En general un sistema de N puntos viene representado por $3N$ coordenadas. Cada ligadura permite expresar una cualquiera de estas coordenadas en función del resto, lo que reduce en una unidad el número de coordenadas independientes. Por ello, si el sistema tiene k ligaduras, entonces podrán introducirse $n = 3N - k$ coordenadas independientes, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, de forma que podremos expresar las posiciones de las partículas como:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{q}, t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{A. 2})$$

Este conjunto de coordenadas independientes se llama *coordenadas generalizadas*, y el espacio n -dimensional de coordenadas libres se llama *espacio de configuración*. Las derivadas de las coordenadas generalizadas $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ son las *velocidades generalizadas*. El número n de coordenadas libres del sistema se llama *número de grado de libertad*.

Se llama *energía cinética de un sistema dinámico* a la función

$$T = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2.$$

Para expresar la energía cinética en función de las coordenadas generalizadas tendremos en cuenta la relación (A.2), cuya derivada será

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \phi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

Por tanto vemos que la energía cinética de un sistema dinámico puede depender tanto de las coordenadas, como de las velocidades generalizadas, es decir, $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

Por otro lado, sea \mathbf{F} el conjunto de fuerzas que actúa sobre el sistema y supongamos que existe¹³ un escalar V , cuyo gradiente respecto de las coordenadas generalizadas coincide con $-\mathbf{F}$, esto es

$$\mathbf{F} = -\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right).$$

Esta función $V = V(\mathbf{q})$, que no depende de las velocidades generalizadas, será llamada *energía potencial de un sistema dinámico*.

Con todo lo anterior, se llama *función lagrangiana de un sistema dinámico* a la expresión

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + V(\mathbf{q}).$$

Puede demostrarse fácilmente que las ecuaciones del movimiento de un sistema dinámico se pueden expresar, en términos de la función lagrangiana, en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{q}} \mathcal{L}) - \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Estas ecuaciones son las llamadas *ecuaciones de Lagrange*.

Se definen los *momentos generalizados*, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, a partir de las igualdades

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Estas funciones nos permiten expresar las velocidades generalizadas \dot{q}_i en la forma

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

¹³ En este caso la fuerza se dice conservativa.

Al espacio $2n$ dimensional (\mathbf{q}, \mathbf{p}) se le llama **espacio fásico**.

Llamaremos *función hamiltoniana* o *hamiltoniano* \mathcal{H} a la transformación de Legendre de la función lagrangiana considerada como función de $\dot{\mathbf{q}}$, esto es

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t).$$

Las ecuaciones de Newton (A.1) y el sistema de ecuaciones de Lagrange (A.3) son equivalentes a las ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} \quad ; \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} = -\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H},$$

que son las llamadas *ecuaciones de Hamilton* del sistema. Así como las ecuaciones de Newton y de Lagrange representan sistemas de ecuaciones diferenciales de orden dos, las ecuaciones de Hamilton constituyen un sistema de orden uno.

Se puede utilizar una notación más compacta llamando $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ al vector de coordenadas y momentos por lo que el Hamiltoniano se expresará como

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

Con todo lo anterior, la evolución dinámica del sistema viene dada por las ecuaciones de Hamilton, que ahora se pueden expresar como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{J} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H},$$

Donde \mathcal{J} es la matriz antisimétrica

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix},$$

Que verifica $\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J}^T = -\mathcal{J}$, y donde $\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_n$ representan, respectivamente, las matrices nula y unidad de orden n .

La formulación hamiltoniana constituye una de las herramientas más potentes para el estudio de los sistemas dinámicos. Las propiedades geométricas del espacio fásico nos dan idea del comportamiento global del sistema, por lo que una buena elección de este espacio fásico nos simplifica su estudio. En lo que sigue se estudiarán las transformaciones canónicas que, por sus propiedades, se adaptan perfectamente a este propósito.

Sea la transformación del espacio fásico $\psi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}: \mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{y} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, definida por las expresiones $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$, que supondremos de clase $C^{(1)}$ y tal que $\det \Gamma \neq 0$ en el dominio (\mathbf{x}, t) que se considere, siendo Γ la matriz jacobiana

$$\Gamma = \mathbf{y}_x = \nabla_x \mathbf{y} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_{2n}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_{2n}}{\partial x_{2n}} \end{pmatrix}.$$

Una transformación ψ que satisface las condiciones anteriores se dice **transformación canónica**, si y solo si, existe una constante μ tal que se satisface la relación $\Gamma J \Gamma^T = \mu J$. La constante μ es llamada **multiplicador de la transformación**. Cuando $\mu = 1$, la transformación se llama **transformación completamente canónica**.

El conjunto de transformaciones canónicas tiene una estructura de grupo respecto a la composición de transformaciones. El elemento neutro de este grupo es la transformación identidad, mientras que la inversa de una transformación canónica de matriz jacobiana Γ y multiplicador μ es otra transformación canónica de matriz jacobiana Γ^{-1} y multiplicador $\frac{1}{\mu}$.

En lo que sigue, y por simplificar, consideraremos únicamente transformaciones canónicas $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ que no dependan del tiempo t puesto que en este caso, que es el considerado en el ejemplo de la memoria, las propiedades se simplifican notablemente.

La propiedad más importante de las transformaciones canónicas nos dice que si aplicamos una transformación $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ a un sistema dinámico autónomo de hamiltoniano $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ entonces las ecuaciones diferenciales del sistema mantienen la forma hamiltoniana, esto es, se pueden expresar como

$$\dot{\mathbf{y}} = J \nabla_y K(\mathbf{y}),$$

siendo $K(\mathbf{y}) = \mu \mathcal{H}(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$ el hamiltoniano transformado.

Aunque existen diversos métodos para obtener transformaciones canónicas, nos fijaremos aquí únicamente en las transformaciones de contacto. Para ello, supongamos que se busca una transformación de $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$.

Puede demostrarse que dada una función cualquiera $S(\mathbf{q}, \mathbf{P})$, llamada función generatriz, la transformación definida por las ecuaciones

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{q}} S, \quad \mathbf{Q} = \nabla_{\mathbf{P}} S, \quad (\text{A. 4})$$

es una transformación completamente canónica.

Aunque S puede ser cualquier función, no todas nos definen una transformación canónica que sea útil para el estudio de nuestro sistema dinámico. Por ello haremos uso de la propiedad que nos dice que si $S(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ satisface la **ecuación de Hamilton-Jacobi**

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} S) = h, \quad (\text{A. 5})$$

donde h es la energía del sistema, entonces las nuevas variables y momentos (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) son constantes del sistema dinámico de hamiltoniano \mathcal{H} .

La búsqueda de una transformación canónica se convierte en la búsqueda de una función S que verifique la ecuación de Hamilton-Jacobi; o lo que es igual, la búsqueda de una integral primera de una ecuación en derivadas parciales.

Apéndice B: Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky.

Krylov y Bogoliubov (1947) desarrollaron un método analítico de resolución del problema de un oscilador armónico perturbado que fue ampliado y justificado por Bogoliubov y Mitropolsky (1961). Calvo (1971) aplica por primera vez dicho método al problema principal del satélite artificial, mientras que Caballero (1971) lo usa para tratar un modelo en el que se incluyen los armónicos zonales J_2, J_3 y J_4 .

El método propuesto por Krylov, Bogoliubov y Mitropolski se usa para obtener aproximaciones asintóticas para cualquier ecuación no lineal de segundo orden que tenga la siguiente forma:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + w^2 u = F(u, v; \varepsilon), \quad (\text{A. 6})$$

donde $v = \frac{du}{dt}$ y ε es un parámetro pequeño. Además, F debe poder ser expresada como una serie de potencias de ε cuyo orden cero es nulo, esto es

$$F(u, v; \varepsilon) = \varepsilon f(u, v; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{n,0}(u, v), \quad F_{0,0}(u, v) = 0. \quad (\text{A. 7})$$

Cuando $\varepsilon = 0$, la ecuación diferencial corresponde a un oscilador armónico cuya solución se puede escribir como $u = \delta \cos \psi$ con una amplitud constante δ y un ángulo de rotación de fase uniforme $\psi = w t + \psi_0$.

El método KBM supone que la solución de la ecuación diferencial bajo estudio (A.7) puede ser expresada como un desarrollo asintótico de la siguiente forma:

$$u = \delta \cos \psi + \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} u_n(\delta, \psi) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} u_n(\delta, \psi), \quad u_0 = \delta \cos \psi, \quad (\text{A.8})$$

donde cada uno de los $u_n(\delta, \psi)$ es una función 2π -periódica de ψ . De igual manera, supondremos que tanto δ como ψ varían de acuerdo con la relación diferencial:

$$\frac{d\delta}{dt} = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} A_n(\delta) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} A_n(\delta), \quad A_0 = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d\psi}{dt} = w + \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} B_n(\delta) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} B_n(\delta), \quad B_0 = w.$$

Para la realización de los cálculos presentados en este apéndice haremos uso de la generalización de la *fórmula de Cauchy*

$$\prod_{n=1}^k \left(\sum_{i \geq 0} \frac{\varepsilon^i}{i!} a_i^{(n)} \right) = \sum_{i \geq 0} \frac{\varepsilon^i}{i!} \left(\sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_k = i} \frac{i!}{j_1! j_2! \dots j_k!} a_{j_1}^{(1)} a_{j_2}^{(2)} \dots a_{j_k}^{(k)} \right).$$

Diferenciando (A.8) con respecto al tiempo, obtenemos

$$v = \frac{du}{dt} = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial u_n}{\partial \delta} \right) \frac{d\delta}{dt} + \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial u_n}{\partial \psi} \right) \frac{d\psi}{dt},$$

donde si sustituimos los valores de $\frac{d\delta}{dt}$ y $\frac{d\psi}{dt}$ dados en (A.9), obtenemos

$$v = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} v_n(\delta, \psi), \quad v_n(\delta, \psi) = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i! j!} \left(A_i \frac{\partial u_j}{\partial \delta} + B_i \frac{\partial u_j}{\partial \psi} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$v_0 = -w \delta \sin \psi.$$

Si diferenciamos de nuevo v con respecto del tiempo se tendrá

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + w^2u &= \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left[w^2u_n \right. \\ &+ \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} \left(A_i \frac{dA_j}{d\delta} \frac{\partial u_k}{\partial \delta} + A_i \frac{dB_j}{d\delta} \frac{\partial u_k}{\partial \psi} + A_i A_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \delta^2} \right. \\ &\left. \left. + B_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \psi^2} + 2A_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \delta \partial \psi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Considerando los valores de u_0, A_0, B_0 y particularizando en la expresión anterior todos los términos de i, j o k iguales a n , encontramos los siguientes términos no nulos:

$$i = n, \quad j = 0, \quad k = 0 \rightarrow 2A_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \delta \partial \psi} = 2A_n B_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \delta \partial \psi} = -2wA_n \sin\psi,$$

$$i = n, \quad j = 0, \quad k = 0 \rightarrow B_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \psi^2} = B_n B_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \psi^2} = -wB_n \delta \cos\psi,$$

$$i = 0, \quad j = n, \quad k = 0 \rightarrow B_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \psi^2} = B_0 B_n \frac{\partial^2 u_0}{\partial \psi^2} = -wB_n \delta \cos\psi,$$

$$i = 0, \quad j = 0, \quad k = n \rightarrow B_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \psi^2} = B_0 B_0 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \psi^2} = -w^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \psi^2},$$

Por lo tanto podremos escribir

$$\frac{d^2u}{dt^2} + w^2u = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(w^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \psi^2} + w^2 u_n - 2wA_n \sin\psi - 2wB_n \delta \cos\psi + w_n \right),$$

donde

$$w_n = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \neq n}} \frac{n!}{i!j!k!} w_{ijk}, \quad (\text{A.11})$$

siendo

$$\begin{aligned} w_{ijk} &= \left(A_i \frac{dA_j}{d\delta} \frac{\partial u_k}{\partial \delta} + A_i \frac{dB_j}{d\delta} \frac{\partial u_k}{\partial \psi} + A_i A_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \delta^2} + B_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \psi^2} \right. \\ &\left. + 2A_i B_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial \delta \partial \psi} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Todo lo hallado previamente representa la parte izquierda de la ecuación **(A.6)** en función de δ y ψ . La parte derecha de la misma ecuación se puede obtener expandiendo como series de potencia de ε la función $F(u, v; \varepsilon)$ en la siguiente forma:

$$F(u, v; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{n,0} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} u_n, \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} v_n \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} F_{0,n}, \quad (\text{A.13})$$

donde $F_{0,n} = F_{0,n}(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$

Igualando orden a orden ambas expresiones previas para cada $n \geq 1$ nos queda

$$w^2 \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial \psi^2} + u_n \right) = 2wA_0 \sin \psi + 2wB_n \delta \cos \psi + U_n, \quad U_n = F_{0,n} - w_n, \quad (\text{A.14})$$

donde U_n solo depende de $A_p, B_p, u_p, p \leq n - 1$.

Llamando $c_j(f)$ y $s_j(f)$ a los coeficientes respectivos de los términos en $\cos j\psi$ y $\sin j\psi$ del desarrollo en serie de Fourier de la función $f(\psi)$ podremos poner finalmente

$$u_n(\psi) = c_0(u_n) + \sum_{j \geq 1} c_j(u_n) \cos j\psi + s_j(u_n) \sin j\psi,$$

$$U_n(\psi) = c_0(U_n) + \sum_{j \geq 1} c_j(U_n) \cos j\psi + s_j(U_n) \sin j\psi.$$

Con esta notación, se sustituimos u_n, U_n de la expresión **(A.14)** por su expansión de Fourier e identificamos término a término, obtenemos

$$A_n = -\frac{s_1(U_n)}{2w}, \quad B_n = -\frac{c_1(U_n)}{2w\delta}, \quad (\text{A.15})$$

así como los coeficientes de la expansión de u_n de la forma

$$c_0(u_n) = \frac{c_0(U_n)}{w^2}, \quad c_j(u_n) = \frac{c_j(U_n)}{w^2(1-j^2)},$$

$$s_j(u_n) = \frac{s_j(U_n)}{w^2(1-j^2)}, \quad j \geq 2, \quad (\text{A.16})$$

Los coeficientes $c_1(u_n), s_1(u_n)$ quedan, por definición, indeterminados, y pueden ser elegidos iguales a cero.

Con todo lo anterior, al ser un proceso iterativo, podemos ir hallando orden a orden los diferentes coeficientes de la expansión de Fourier y podemos hallar el valor tanto de u como de v hasta el orden que deseemos.

6. Bibliografía

- **Abad, A. (1985)** Problema Estelar Triple Jerarquizado: Integración en unas nuevas variables. *Actas X Jornadas Hispano-lusas de Matemáticas*. Pag: 115-121.
- **Abad, A. (2012)**. Astrodinámica. *Editor Bubok Publishing S.L. España*.
- **Byrd, Paul F. Friedman, Morris D. (1971)**. Handbook of Elliptic Integrals for engineers and scientists. *Second Edition. Springer-Verlag New York Heidelberg*.
- **Bogoliubov, N. N. and Mitropolsky, Y. A (1961)**. Asymptotic Method in the Theory of Nonlinear Oscillations. *Gordon and Breach, New York*.
- **Caballero, J. A. (1975)**. Movimiento de un satélite artificial bajo la acción gravitatoria terrestre. Teoría de segundo orden en variables de Hill. *Ph.D. Thesis, University of Zaragoza*.
- **Calvo, M. (1971)**. Aplicación del método de promedios al estudio del movimiento de satélites artificiales. *Ph.D. Thesis, University of Zaragoza*.
- **Danby, J. M. A. (1988)**. Fundamentals of Celestial Mechanics. *Willmann-Bell, Virginia*.

- **Deprit, A and Rom, A. (1970)**, “The main problem of artificial satellite theory for small and moderate eccentricities”. *Celest. Mech. And Dyn. Astr.* 2, 166-206.
- **Delaunay, C. (1860)**. Théorie du mouvement de la lune, Mem. 28; 29 (1867), *Acad. Sci. France, Paris*.
- **Jezewski, D.J (1983)**. An analytic Solution for the J_2 Perturbed Equatorial Orbit. *Celestial Mechanics*. Pag. 367-371. *Reidel Publishing Company*.
- **Kovalevsky, J. (1967)**. Introduction to Celestial Mechanics. *Springer, New York*.
- **Martinusi, V & Gurfil, P (2013)**. Analytical solutions for J_2 -perturbed unbounded equatorial orbits. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy Vol 115*, pag 35-57.
- **Soop, E. M. (1994)**. Handbook of Geostationary Orbits. *Kluwer Academic, London and Microcosm, Inc, California*.
- **Wertz, J.R. and Larson, W. J. (2010)**. *Space Mission Analysis and Design*. *Microcosm Press, Hawthorne, CA and Springer, New York*.