Trabajo Fin de Grado

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS y sus Aplicaciones en la Economía

Autor

Guillermo Peribañez Juan

Director/es

Gloria Jarne Jarne

Julio Sánchez Chóliz

Facultad de Economía y Empresa

2014

TÍTULO: Introducción a las Ecuaciones en Diferencias y sus Aplicaciones en la Economía

TITULACIÓN: Grado en Economía

AUTOR: Guillermo Peribañez Juan

DIRECTORES: Gloria Jarne Jarne, Julio Sánchez Chóliz

RESUMEN:

El análisis de todo proceso económico es inseparable del proceso dinámico que lo genera, aunque frecuentemente por simplicidad hagamos análisis estáticos y eludamos el uso de modelos dinámicos. La comprensión de estos requiere el dominio de dos de sus instrumentos básicos, las ecuaciones y sistemas en diferencias y las ecuaciones y sistemas diferenciales. El grado de Economía dedica muy poco tiempo a estos instrumentos y ello me ha motivado a ampliar con esta memoria mis conocimientos en ecuaciones en diferencias, lo que no es sino una primera introducción al amplio instrumental de la Economía dinámica.

En el trabajo abordaremos las ecuaciones en diferencias lineales de primer y segundo orden y las de orden superior, cerrando la memoria con algunos resultados sobre los sistemas lineales en diferencias. Nos centraremos principalmente en la expresión de las soluciones generales y en los conceptos de equilibrio dinámico y de estabilidad.

Conscientes de que estos instrumentos son, sobre todo, apoyos para profundizar en el sentido económico de lo que nos rodea, la presentación de los distintos apartados tienen dos partes o facetas, una teórica y otra aplicada, dividiéndose esta entre el análisis de modelos económicos dinámicos (Harrod, Hicks y Samuelson entre otros), resolubles con el instrumental correspondiente, y simulaciones para valores paramétricos dados hechas con Mathematica.

ABSTRACT:

The analysis of the whole economic process is inseparable from the dynamic process which generates it, although often for simplicity we do a static analysis and we avoid the use of dynamic models. Comprehension of those models requires the knowledge of two basic tools, difference equations and systems, and differential equations and systems. The Degree of Economy spends very little time to those tools and that has motivated me with to make this report to expand my knowledge of the difference equations. It is a first introduction to the large instrumental of the Dynamic Economy.

In this essay we present the linear difference equations of first, second and higher-order, closing the report with some results on linear difference systems. We will mainly focus on the expression of the general solutions and on the concepts of dynamic equilibrium and stability.

Being aware of these tools are mainly supports to deepen in the economic sense of what surrounds us, the presentation of the different sections have two parts: the theoretical and the applied. The applied part is divided between the analysis of dynamic economic models (Harrod, Hicks and Samuelson inter alia), which are solved with the pertinent tools, and simulations for given parametric values made with *Mathematica*.

ÍNDICE

1. PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE FIN DE GRADO

Este Trabajo de Fin de Grado no se trata de un análisis riguroso de las ecuaciones en diferencias finitas, sino de una aproximación a ellas y sus aplicaciones en la economía partiendo del nivel de conocimientos fijados en los estudios vigentes de grado. En este sentido, se puede considerar como un primer paso de una posterior investigación sobre dinámica económica.

El principal objetivo de este trabajo es ampliar las herramientas matemáticas de las que dispongo para poder hacer un análisis dinámico. Durante el Grado, apenas he visto/utilizado tanto las ecuaciones diferenciales como las ecuaciones en diferencias (se ha visto en mayor grado las ecuaciones diferenciales), y por esta razón creo que es importante aprender a usar las ecuaciones en diferencias.

Por esto, este Trabajo de Fin de Grado tiene una aplicación de ámbito universitario.

He querido encaminar este trabajo hacia la macroeconomía, pero sin olvidar la microeconomía. Por ello, la mayoría de los modelos usados para la aplicación de las ecuaciones en diferencias son modelos macroeconómicos.

Algunos de los modelos usados, los he visto durante la carrera, pero en ningún caso, analizados con ecuaciones en diferencias.

2. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DINÁMICO

En esta introducción, antes de exponer definiciones y resultados rigurosos, se van dando las primeras pinceladas sobre los temas que se van a tratar.

El paso del tiempo es el elemento más importante en cualquier proceso dinámico, y un problema al cual nos enfrentamos si queremos predecir el comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico. En economía esto es especialmente relevante porque las necesidades a cubrir, aunque se mantienen en el tiempo, van cambiando sus características. Además los recursos disponibles también cambian y las tecnologías para su aprovechamiento evolucionan. En pocas palabras, la economía es y debe de ser una ciencia dinámica.

Los economistas Frisch (1936) y Samuelson (1947) definieron un sistema como **dinámico** si "su comportamiento a través del tiempo era determinado por ecuaciones funcionales en las cuales estaban comprendidas en forma esencial las variables en diferentes instantes temporales", es decir, si sus variables endógenas eran a su vez funciones temporales.

El análisis dinámico se puede desarrollar de tres formas:

- **Análisis discreto**: se considera el tiempo como variable discreta. Se utilizan ecuaciones en diferencias finitas.
- **Análisis continuo**: se considera el tiempo como variable continua. Se utilizan ecuaciones diferenciales.
- **Análisis mixto**: se considera el tiempo como una variable discreta o continúa según el caso. Se utilizan ecuaciones mixtas diferenciales-en diferencias.

En este trabajo, por su limitación en el tiempo y operatividad, me voy a centrar en el **análisis dinámico discreto**, en el que se pueden plantear dos enfoques:

- **Análisis cuantitativo**: consiste en encontrar la trayectoria temporal solución de la ecuación.

- **Análisis cualitativo**: consiste en determinar las propiedades cualitativas de la trayectoria temporal solución de la ecuación, que pueden ser determinadas sin calcularla explícitamente.

En este trabajo nos centraremos en el análisis cualitativo. El análisis cualitativo permite tratar problemas enunciados en términos de funciones generales y de parámetros que normalmente son como aparecen en los modelos económicos.

En el análisis cualitativo son fundamentales los conceptos de **equilibrio del sistema dinámico** y **estabilidad dinámica** de dicho equilibrio.

Se entiende por equilibrio un estado del sistema donde éste permanece sin cambios a no ser que se produzca una perturbación externa. El equilibrio puede ser **estacionario** (si es una constante) o **móvil** (si es una función del tiempo).

El estudio de la estabilidad dinámica nos permitirá conocer si dada una perturbación que saque al sistema del estado de equilibrio, dicho sistema es capaz de volver a la solución de equilibrio (el equilibrio es **estable** o no).

En este trabajo se abordaran solamente los **sistemas lineales de ecuaciones en diferencias**, ya que el principal objetivo de este trabajo, como ya he dicho anteriormente, es introducir el uso de las ecuaciones en diferencias como herramienta de trabajo de la economía.

En primer lugar, se introducen de forma general las ecuaciones en diferencias lineales de orden *n*, para después particularizar en las de orden 1, orden 2, orden superior y, finalmente, en sistemas de ecuaciones.

Todos los apartados tienen el mismo formato. Primero se hace un análisis teórico, y después se presenta uno o varios modelos, en los cuales se aplica la teoría.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES

3.1 SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN DE ORDEN *n*

La forma general de las ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes de orden n es

$$y_t + a_1 y_{t-1} + ... + a_{n-1} y_{t-n+1} + a_n y_{t-n} = g(t)\,, \qquad (3.1.1)$$

donde las a_i son constantes reales dadas y $g(t)$ es una función conocida. Notar que $a_n \neq 0$ ya que si no la ecuación seria de orden $n-1$. Si $g(t)=0$, se dice que (3.1.1) es una ecuación homogénea y en caso contrario es una ecuación no homogénea o completa. La ecuación homogénea de orden n asociada a (3.1.1) es

$$y_t + a_1 y_{t-1} + ... + a_{n-1} y_{t-n+1} + a_n y_{t-n} = 0\,. \qquad (3.1.2)$$

En la obtención de las soluciones de estas ecuaciones juega un papel fundamental la **ecuación característica** y el valor de sus soluciones. La ecuación característica asociada a (3.1.2) es la ecuación polinómica

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,.$$

El siguiente teorema[1] muestra cómo obtener las soluciones de la ecuación (3.1.1).

<u>Teorema 1</u>: Se verifica:

1) *Si* $y_t^{h1}, y_t^{h2}, ..., y_t^{hn}$ *, son un conjunto de soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea entonces* $y_t^h = A_1 y_t^{h1} + A_2 y_t^{h2} + ... + A_n y_t^{hn}$, con $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{R}$, *es la solución general de la ecuación homogénea.*
2) *Si* y_t^p *es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea, la solución general de la misma ecuación se obtiene añadiendo* y_t^p *a la solución general de la correspondiente ecuación homogénea, es decir,*

$$y_t = y_t^h + y_t^p = A_1 y_t^{h1} + A_2 y_t^{h2} + ... + A_n y_t^{hn} + y_t^p\,,$$

[1] Cuya demostración se puede ver en Pérez-Grasa, Minguillón y Jarne (2001).

es la solución general de la ecuación no homogénea.

3) *Si* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *es solución de la ecuación característica de multiplicidad* m (con $m \leq n$) *entonces* $y_t^{h1} = (\lambda_0)^t, y_t^{h2} = t(\lambda_0)^t, ..., y_t^{hm} = t^{m-1}(\lambda_0)^t$ *son* m *soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.*

4) *Si* $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$ *son raíces complejas simples de la ecuación característica entonces* $y_t^{h1} = r^t cos\omega t, y_t^{h2} = r^t \operatorname{sen} \omega t$ *son soluciones de la ecuación homogénea, donde* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ *y* $\omega = \arctan \frac{b}{a}$.

5) Si $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$ son raíces complejas de la ecuación característica de multiplicidad m (siendo $2m \leq n$), entonces $r^t cos\omega t$, $r^t \operatorname{sen} \omega t$, $tr^t cos\omega t$, $tr^t \operatorname{sen} \omega t$,…, $t^{m-1} r^t cos\omega t$, $t^{m-1} r^t \operatorname{sen} \omega t$, son $2m$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.

De este teorema se deduce que la solución general de la ecuación homogénea se determina con las soluciones de la ecuación característica, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, que pueden ser reales o complejas, simples o múltiples.

A continuación se explica cómo se interpretan los resultados anteriores en el análisis cualitativo de la ecuación (3.1.1).

En el caso de que $g(t) = \beta$, constante conocida[2], y de que 1 no sea solución de la ecuación característica, es inmediato[3] que una solución particular de (3.1.1) es la constante

$$y_t^p = y^e = \frac{\beta}{1 + a_1 + ... + a_{n-a} + a_n},$$

y además es una solución de equilibrio estacionario. Lo es porque se verifica que si $y_{t-n} = y^e$, entonces $y_{t-n+1} = y_{t-n+2} = ... = y_t = y^e$.

[2] En este caso, $g(t) = \beta$, la ecuación (3.1.1) se diría ecuación autónoma, pues la variable t no aparece explícitamente en la ecuación.

[3] La demostración se puede ver en Pérez-Grasa, Minguillón y Jarne (2001).

Entonces, según el teorema anterior, si la solución general de (3.1.1) es de la forma $y_t = y_t^h + y^e$ se puede interpretar la solución general de la ecuación homogénea (3.1.2) cómo las desviaciones respecto del equilibrio $y_t^h = y_t - y^e$. Entonces y^e será un equilibrio asintóticamente estable si, y sólo si,

$$\lim_{t\to+\infty} y_t = y^e \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} y_t^h = 0 \ .$$

Luego, la estabilidad dinámica del equilibrio estacionario y^e dependerá de y_t^h, que es la solución general de la ecuación homogénea asociada y, por tanto, dicha estabilidad dependerá de las soluciones de la ecuación característica.

En el caso general de que $g(t)$ no sea constante (o lo sea, pero 1 sea raíz de la ecuación característica) entonces se puede hacer una interpretación similar de y_t^h e y_t^p como partes integrantes de la solución general de (3.1.1), pero en este caso, el equilibrio ya no será estacionario sino móvil.

Si existe un equilibrio[4] de (3.1.1), y_t^e será una trayectoria que nos dará una solución particular de dicha ecuación, y por tanto, la solución general de (3.1.1) será de la forma $y_t = y_t^h + y_t^e$, de donde $y_t^h = y_t - y_t^e$ tendrá la misma interpretación que en el caso anterior, verificándose los mismos resultados

Teorema 2: La condición necesaria y suficiente de estabilidad de un equilibrio es:

$$|\lambda_i| < 1, \forall i = 1, \ldots n \ ,$$

siendo λ_i las soluciones de la ecuación característica.

Demostración:

Si $|\lambda_i| < 1$, se verifica que el $\lim_{t\to\infty} (\lambda_i)^t = 0$ y teniendo en cuenta el **Teorema 1** se tiene:

[4] En los ejemplos concretos que se muestran más adelante se desarrolla más esta idea.

$$\lim_{t\to\infty} y_t^h = \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i y_t^{hi} = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \lim_{t\to\infty} y_t^{hi} = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot 0 = 0\,,$$

por tanto, el equilibrio será asintóticamente estable.

Si $\exists |\lambda_i| \geq 1$, entonces el $\operatorname*{Lim}_{t\to\infty} (\lambda_i)^t \neq 0$, y según el **Teorema 1** habrá y_t^h tales que:

$$\lim_{t\to\infty} y_t^h = \lim_{t\to\infty} A_i y_t^{hi} = A_i \cdot \lim_{t\to\infty} y_t^{hi} \neq 0\,,$$

luego el equilibrio no sería asintóticamente estable.

Por tanto, podemos asegurar que

$$|\lambda_i| < 1, \forall i = 1, \ldots n\,,$$

es una condición necesaria y suficiente de estabilidad asintótica del equilibrio.

3.2 ECUACIONES DE ORDEN 1

3.2.1 Resultados teóricos

La forma general de estas ecuaciones es:

$$y_t + a_1 y_{t-1} = g(t)\,, \qquad (3.2.1.1)$$

en donde a_1 es una constante no nula dada y $g(t)$ es una función conocida.

La ecuación homogénea asociada es:

$$y_t + a_1 y_{t-1} = 0\,. \qquad (3.2.1.2)$$

Como se deduce del **<u>Teorema 1</u>**, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_t^h = A(-a_1)^t\,.$$

La solución general de la ecuación completa (3.2.1.1) es

$$y_t = y_t^h + y_t^p = A(-a_1)^t + y_t^p\,,$$

siendo y_t^p una solución particular de la ecuación completa cuya obtención se muestra en el **ANEXO I** y que dependerá de la función $g(t)$.

Si se toma como solución particular la solución de equilibrio $y_t^p = y_t^e$ (si existe), entonces se tiene que $y_t = A(-a_1)^t + y_t^e$ y si se considera el valor inicial de la variable como y_0, resulta que

$$y_t = (y_0 - y_0^e)(-a_1)^t + y_t^e\,.$$

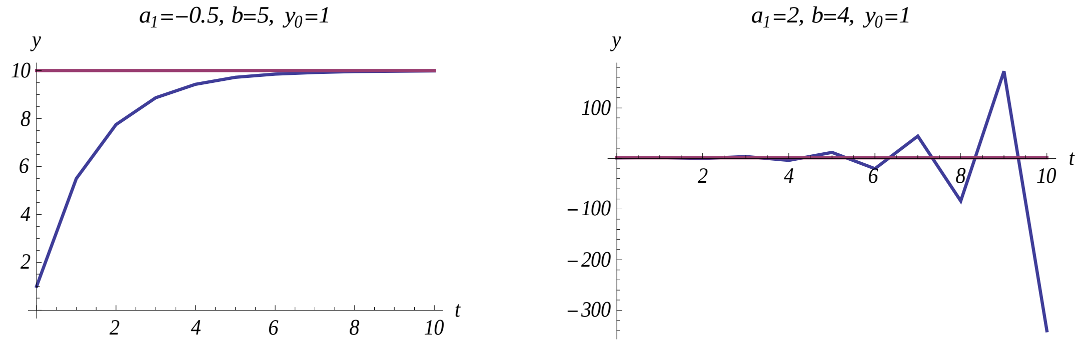
Por el **<u>Teorema 2</u>**, el equilibrio y_t^e es asintóticamente estable $\Leftrightarrow |\mathrm{a}_1| < 1$.

El comportamiento en el tiempo de las desviaciones respecto al equilibrio $y_{ht} = (y_0 - y_0^e)(-a_1)^t$ depende del signo y del valor absoluto del parámetro a_1. Estos comportamientos se resumen en la siguiente tabla:

a_1	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y_t^h	Monótona explosiva	$y_0^e - y_0$	Monótona amortiguada	Fluctuante amortiguada	Fluctuante entre $y_0 - y_o^e$ e $y_0^e - y_0$	Fluctuante Explosiva
y_t^e	Inestable	Neutral	Asintóticamente estable	Asintóticamente estable	Neutral	Inestable

Un equilibrio se dice que es asintóticamente estable si cualquier trayectoria solución converge a él. Es inestable cuando existen trayectorias solución que se alejen indefinidamente del equilibrio. Y un equilibrio es neutral cuando la trayectoria se mantiene a una distancia constante del equilibrio.

Gráfico 1. Ejemplos



En el *Gráfico 1* se pueden observar distintos casos posibles[5]. En la primera figura se muestra una convergencia monótona al equilibrio, y en la segunda una divergencia oscilante.

3.2.2 Modelo simple sobre la tasa de empleo

Para mostrar la aplicación de las ecuaciones en diferencias lineales de primer grado comenzaremos con este sencillo modelo.

[5] Nótese que aunque estén unidos los puntos, no deberían estarlo, ya que los puntos intermedios no existen, pero se observa mejor el movimiento que si sólo estuvieran representados los puntos y_0, y_1, y_2...

Denotaremos por L la población activa de una determinada región, que supondremos constante en el tiempo (las nuevas incorporaciones se compensan con las salidas). Sea y_t la población ocupada al final del periodo t, entonces se define la tasa de empleo como $x_t = \dfrac{y_t}{L}$.

La población ocupada evoluciona conforme a las siguientes reglas:

- En el periodo $t-1$, un determinado porcentaje de la población ocupada p_T ($0 < p_T < 1$) continua empleada en el periodo siguiente, mientras que un porcentaje p_D ($0 < p_D < 1$) pasará a estar desempleada. Suponemos que $p_T + p_D < 1$, así pues $1 - p_T - p_D$ será el porcentaje de población que deje de ser activa (y en el periodo siguiente se repondrá).
- De la población desempleada ($L - y_{t-1}$) en un periodo $t-1$, habrá un porcentaje q_T ($0 < q_T < 1$) que accederá al mercado laboral en el periodo siguiente, mientras que un porcentaje q_D ($0 < q_D < 1$) continuará sin empleo. Suponemos que $q_T + q_D < 1$, así pues $1 - q_T - q_D$ será porcentaje de población que deje de ser activa (y en el periodo siguiente se repondrá).
- Se producen $(1 - p_T - p_D)y_{t-1} + (1 - q_T - q_D)(L - y_{t-1})$ nuevas incorporaciones a la población activa de las que un porcentaje r $(0 < r < 1)$ encuentra trabajo, y el resto se quedará desempleada

Según lo anterior, la población ocupada al final del periodo t será

$$y_t = p_T y_{t-1} + q_T(L - y_{t-1}) + r\left[(1 - p_T - p_D)y_{t-1} + (1 - q_T - q_D)(L - y_{t-1})\right],$$

y agrupando términos

$$y_t = \left[p_T - q_T + r(1 - p_T - p_D) - r(1 - q_T - q_D)\right]y_{t-1} + L\left[q_T + r(1 - q_T - q_D)\right].$$

Si denotamos por

$$\begin{aligned} \alpha &= p_T - q_T + r(1 - p_T - p_D) - r(1 - q_T - q_D) \\ \beta &= q_T + r(1 - q_T - q_D) \end{aligned} ,$$

y dividimos por L, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_t = \alpha x_{t-1} + \beta \Leftrightarrow x_t - \alpha x_{t-1} = \beta,$$

que modeliza la evolución de la tasa de empleo[6].

Como se puede ver en el **ANEXO I**, una solución particular de esta ecuación en diferencias lineales de orden 1 es

$$x_t^p = x^e = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Y la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$x_t^h = (x_0 - x^e)\alpha^t,$$

siendo x_0 la tasa de empleo inicial (que es conocida).

Por tanto, la solución general es

$$x_t = x_t^h + x^e = (x_0 - x^e)\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha} = (x_0 - \frac{\beta}{1-\alpha})\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Como $|\alpha|<1$, entonces $\operatorname{Lim}_{t\to\infty} \alpha^t = 0$, y por tanto $\lim_{t\to\infty} x^e = \frac{\beta}{1-\alpha}$, para cualquier dato inicial x_0. Esto quiere decir, que a largo plazo, la tasa de empleo se estabilizará en el valor $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

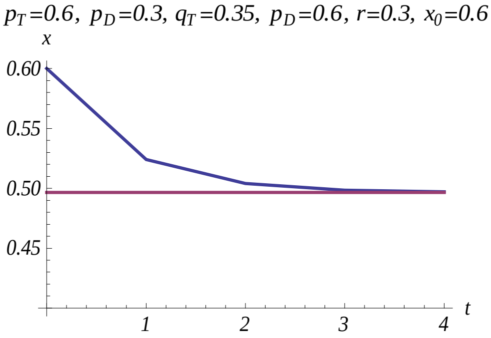
La convergencia al equilibrio estacionario puede ser oscilante o monótona.

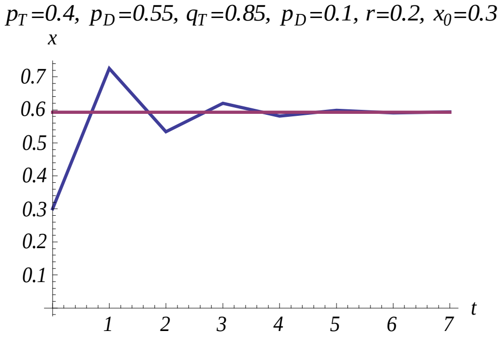
Si $\alpha > 0$, la función α^t es monótona decreciente y que x_t crezca o decrezca hacia x^e dependerá del signo de $x_0 - x^e$.

Si $\alpha < 0$, α^t es una sucesión oscilante, por lo que x_t alternará por encima y por debajo del equilibrio hasta converger a él. Si $\alpha = 0$, a partir de $t = 1$, se alcanza el nivel de equilibrio

[6] Nótese que $-1 < \alpha < 1$ pues $\alpha = (1-r)(p_T - q_T) + r(q_D - p_D), r \in (0,1)$, esto es, α es un punto del segmento que une los puntos $p_T - q_T \in (-1,1)$ y $p_D - q_D \in (-1,1)$.

Gráfico 2. Simulaciones para distintos casos





Como se puede observar, en ambos casos la tasa de empleo a largo plazo alcanza el estado estacionario $x^e = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

3.2.3 Modelo simple sobre consumo y renta

En este apartado vamos a trabajar con un modelo simplificado de una economía familiar.

Este modelo se basa en dos supuestos básicos:

I. Una familia consume una parte proporcional de su renta Y_t disponible en cada periodo,

$$C_t = cY_t,\ 0 < c < 1$$

donde c es la propensión marginal al consumo.

II. La renta de la familia proviene del salario ω_t, que se recibe al final del periodo, y que crece a una tasa constante[7] $r > 0$.

Asi, $\omega_{t+1} = (1+r)\omega_t$, de donde resulta que

$$\omega_t = \omega_0(1+r)^t.$$

Tomando $\omega_0 = 1$[8], se tiene que la renta disponible al comienzo del periodo $t+1$ es

[7] r es la inflación del salario.

[8] Lo que no es otra cosa que una normalización de la unidad monetaria, en adelante se considera que ésta equivale justamente al salario inicial.

$$Y_{t+1} = (1-c)Y_t + (1+r)^t \,,$$

es decir, la renta disponible en $t+1$ es el ahorro en t más el salario recibido al final del mismo periodo.

La ecuación resultante, es una ecuación en diferencias de orden 1 lineal no autónoma que se puede escribir siguiendo la notación de la teoría

$$Y_t - (1-c)Y_{t-1} = (1+r)^{t-1} \,.$$

Una solución particular deberá de ser del tipo $B(1+r)^{t-1}$ siendo B una constante indeterminada. Sustituyendo en la ecuación en diferencias y operando llegaremos a saber el valor de B:

$$B(1+r)^t - (1-c)B(1+r)^{t-1} = (1+r)^{t-1} \,,$$

$$(1+r)^{t-1}\left[B(1+r) - (1-c)B - 1\right] = 0 \,,$$

$$B = \frac{1}{r+c} \,.$$

Por tanto, una solución particular será

$$Y_t^{\,p} = Y_t^e = \frac{(1+r)^{t-1}}{r+c} \,,$$

que se puede identificar con un equilibrio móvil.

Y la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$Y_t^h = A(1-c)^t = (Y_0 - Y_0^e)(1-c)^t \,,$$

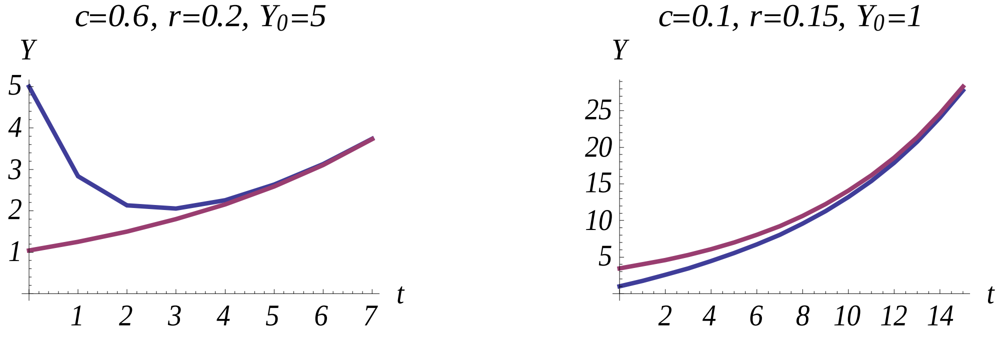
siendo Y_0 la producción inicial (que es conocida).

Por tanto, la solución general es

$$Y_t = Y_t^h + Y_t^e = (Y_0 - \frac{1}{(1+r)(r+c)})(1-c)^t + \frac{(1+r)^{t-1}}{r+c} \,.$$

Como $0 < 1-c < 1$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty}(1-c)^t = 0$, y por tanto el equilibrio será asintóticamente estable, siendo esta convergencia monótona.

Gráfico 3. Simulaciones para distintos casos



Las simulaciones realizadas nos confirman lo anteriormente dicho, hay convergencia monótona hacia la trayectoria equilibrio. Cualquier desviación de ella con el tiempo desaparece y se vuelve a la senda de equilibrio.

3.2.4 Modelo simplificado de Harrod

El modelo de Harrod trata de explicar el crecimiento económico a largo plazo como consecuencia de los procesos de ahorro e inversión. La formalización que aquí se presenta es una simplificación del modelo original[9].

Supongamos que el ahorro *ex ante* viene determinado por la función

$$S_t = sY_{t-1},$$

siendo s una constante que representa la propensión marginal (y media) a ahorrar. Por otra parte la inversión *ex ante* está dada por

$$I_t = k(Y_t - Y_{t-1}),$$

donde k, que es el coeficiente de aceleración al incremento de demanda o renta, es constante.

En el equilibrio económico, el ahorro *ex ante* tiene que ser igual a la inversión *ex ante*, así que

$$sY_{t-1} = k(Y_t - Y_{t-1}),$$

$$kY_t - (k+s)Y_{t-1} = 0,$$

[9] Harrod (1939)

$$Y_t - \frac{(k+s)}{k} Y_{t-1} = 0 . \qquad (3.2.2.1)$$

La ecuación en diferencias obtenida rige la dinámica del equilibrio económico de este modelo (donde $S_t = I_t$). Es una ecuación lineal de orden 1 homogénea y como hemos visto, su solución general es

$$Y_t = A\left(\frac{k+s}{k}\right)^t = A\left(1+\frac{s}{k}\right)^t , \qquad (3.2.2.2)$$

en donde la constante arbitraria A será el valor inicial de la renta, Y_0 . La solución (3.2.2.2) nos muestra que la renta aumenta en el tiempo a una tasa de crecimiento constante de s/k . Esta tasa es la que Harrod llama tasa de crecimiento “garantizada” y es tal que, si la renta crece a ese ritmo, asegura la continua igualdad a lo largo del tiempo entre inversión y ahorro *ex ante*, es decir, permite alcanzar un crecimiento sostenido con tasa de crecimiento constante.

Una vez conocida la trayectoria temporal de la renta, se obtiene la del ahorro

$$S_t = sY_{t-1} = sY_0\left(\frac{k+s}{k}\right)^{t-1} = sY_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^{t-1} ,$$

y la inversión:

$$I_t = k(Y_t - Y_{t-1}) = k\left[Y_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^t - Y_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^{t-1}\right] =$$

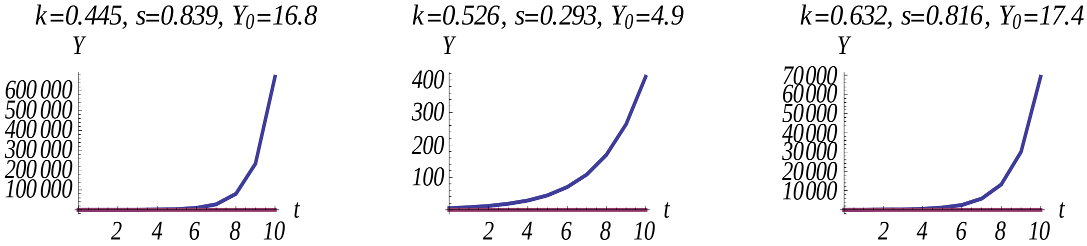
$$kY_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^{t-1}\left[1+\frac{s}{k}-1\right] = sY_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^{t-1} .$$

La trayectoria de crecimiento se caracteriza por ser inestable, ya que $1+\frac{s}{k} > 1$.

Si por cualquier shock la renta se desvía de la trayectoria de crecimiento balanceado dada por (3.2.2.2), la renta seguirá creciendo y apartándose de dicha situación balanceada.

Para aplicar el modelo a la realidad, voy a realizar las simulaciones con datos del FMI[10] y el PIB del año 2012 en billones de dólares para varios países.

Gráfico 4. Simulaciones para EE.UU., Japón y Zona Euro



Y tal como se ha visto anteriormente, en todos los casos la senda de crecimiento balanceado es monótona y muy explosiva.

10 PERSPECTIVAS DE LA ECONOMÍA MUNDIAL, Septiembre de 2005 http://www.imf.org/external/pubs/ft/weo/2005/02/esl/weo0905s.pdf (página 133)

3.3 ECUACIONES DE ORDEN 2

3.3.1 Resultados teóricos

La forma general de estas ecuaciones es

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = g(t)\,, \qquad (3.3.1.1)$$

en donde a_1 , a_2 son constantes dadas, con $a_2 \neq 0$, y $g(t)$, una función conocida.

La solución general de esta ecuación será de la forma $y_t = y_t^h + y_t^p$ con y_t^p una solución particular de la ecuación e y_t^h la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = 0\,. \qquad (3.3.1.2)$$

Esta solución y_t^h se obtiene, según el **Teorema 1**, a partir de las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0\,, \qquad (3.3.1.3)$$

que resultan ser

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}\,.$$

La solución y_t^h dependerá de que estas raíces sean reales o complejas (según el signo que tenga el discriminante $\Delta \equiv a_1^2 - 4a_2$), y en caso de ser reales, pueden ser simples o múltiples.

A continuación se muestran los distintos casos que se pueden dar:

Caso (1): $\Delta > 0$.

En este caso, las soluciones λ_1, λ_2 son reales, distintas y no nulas al ser $a_2 \neq 0$, por consiguiente, de acuerdo con el **Teorema 1**,

$$y_t^h = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t\,,$$

en donde A_1, A_2 son dos constantes arbitrarias.

La clase de movimiento a que y_t^h da lugar (monótono, oscilante o una combinación de ambos) depende del signo de λ_1, λ_2. Puesto que cada solución puede tener cualquier signo, se pueden dar una gran variedad de movimientos, pero cualquier que sea éste será convergente a 0, si y sólo si, ambas raíces son en valor absoluto menores que la unidad.

Para saber el signo de cada solución de la ecuación característica, en este caso, podremos hacer uso del **Teorema de Descartes**.

Este teorema nos dice que: "en cualquier igualdad algebraica, completa o incompleta, el número de raíces positivas no puede ser superior al número de cambios de signo de los coeficientes, en tanto que, en cualquier igualdad algebraica completa, el número de raíces negativas no puede exceder al número de continuaciones en los signos de los coeficientes".

Casos, de acuerdo con el signo de los coeficientes $1, a_1, a_2$:

- $+++$ Las dos raíces negativas.
- $++-$ Una raíz positiva y otra negativa (la negativa es la raíz dominante).
- $+--$ Una raíz positiva y otra negativa (la positiva es la raíz dominante).
- $+-+$ Las dos raíces positivas.
- $+0-$ Una raíz positiva y otra negativa con el mismo módulo.

Caso (2): $\Delta = 0$.

Las soluciones de (3.3.1.3) son dos raíces reales e iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}a_1$; y según el **Teorema 1**, la solución general de la ecuación homogénea es entonces

$$y_t^h = (A_1 + A_2 t)\left(-\frac{1}{2}a_1\right)^t .$$

Se observa que cuando $\left|-\frac{1}{2}a_1\right| < 1 \Leftrightarrow |a_1| < 2$, tendrá un movimiento amortiguado. Que el movimiento sea monótono u oscilante dependerá del signo de a_1:

- Si $a_1 < 0$, el movimiento será monótono.
- Si $a_1 > 0$, el movimiento será oscilante.

Caso (3): $\Delta < 0$:

En este caso, las soluciones de la ecuación característica son dos números complejos conjugados, es decir, dos números de la forma $\alpha \pm i\beta$, donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria y α, β son números reales, con $\alpha = -\frac{1}{2}a_1$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}$.

Según el **Teorema 1**,

$$y_t^h = r^t (A_1 \cos \omega t + A_2 \operatorname{sen} \omega t),$$

con $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{a_2}$ y $\omega = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$.

El movimiento resultante es una oscilación trigonométrica cuyo periodo es $2\pi / \omega$ y cuya amplitud será creciente, constante o decreciente según que $r = \sqrt{a_2}$ sea mayor, igual o menor que la unidad. La condición que asegura que la oscilación de y_t^h sea amortiguada es que $a_2 < 1$.

Una vez vistos los distintos casos respecto al comportamiento de y_t^h, nos centraremos en la estabilidad dinámica del posible equilibrio. Esta estabilidad estará de nuevo regida por la condición de que las soluciones de la ecuación característica sean menores que la unidad en valor absoluto. Esta condición se puede escribir en términos de los coeficientes de la ecuación característica que coinciden con los coeficientes de la ecuación en diferencias mediante un conjunto de desigualdades conocidas como las **Condiciones de Schur**[11].

El conjunto de desigualdades,

$$\left.\begin{array}{l} 1+a_1+a_2>0 \\ 1-a_2>0 \\ 1-a_1+a_2>0 \end{array}\right\}, \qquad (3.3.1.4)$$

constituye un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que las soluciones de la ecuación característica sean menores que la unidad en valores absolutos y, en consecuencia, para que y_t^h converja a 0 y el equilibrio, si existe, sea asintóticamente convergente.

Una vez conocida y_t^h, tenemos que obtener una solución particular y_t^p de la ecuación no homogénea (3.3.1.1). La obtención de estas soluciones se puede ver en el **ANEXO II**.

Según hemos visto anteriormente, la solución de la ecuación homogénea, y por tanto de la completa, dependen de dos constantes arbitrarias. Para determinarlas se necesitan dos condiciones iniciales. Las más usuales son los valores de la variable en dos instantes temporales (t_0, t_1 por ejemplo). Así se obtiene el valor de las constantes y una solución concreta de (3.3.1.1)

3.3.2 Modelo de la interacción acelerador-multiplicador de Samuelson

Este modelo[12] reduce la economía a una función de consumo, una función de inversión (en la cual hay tanto inversión exógena como endógena) y exige la igualdad que define el equilibrio de la renta.

El consumo depende de la renta del periodo anterior,

$$C_t = bY_{t-1},$$

con $0 < b < 1$, siendo b la propensión (marginal y media) al consumo.

[11] Gandolfo (1976).
[12] Samuelson (1939)

La inversión total es

$$I_t = I'_t + I''_t\ ,$$

compuesta de I'_t (inversión endógena) e I''_t (inversión exógena). La inversión exógena sería el gasto público, que se considera constante:

$$I''_t = G\ ,$$

y la inversión endógena dependerá de la variación en la demanda de bienes de consumo:

$$I'_t = k(C_t - C_{t-1})\ ,$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de aceleración.

La condición de equilibrio económico es:

$$Y_t = C_t + I_t\ .$$

Si sustituimos las funciones de inversión y consumo en la condición de equilibrio, llegamos a:

$$Y_t - b(1+k)Y_{t-1} + bkY_{t-2} = G\ , \qquad (3.3.2.1)$$

que resulta ser una ecuación en diferencias finitas lineal de orden 2 y completa, en concreto, con término independiente constante (autónoma).

La solución de esta ecuación en diferencias nos dará el comportamiento en el tiempo de la renta nacional, el consumo y la inversión endógena.

La solución general de (3.3.2.1) es $Y_t = Y_t^h + Y_t^p$. Siguiendo los pasos vistos en el **ANEXO II**, como G es una constante, una solución particular de la ecuación (3.3.2.1) es:

$$Y_t^p = \frac{G}{1-b(1+k)+bk} = \frac{G}{1-b-bk+bk} = \frac{G}{1-b} = Y^e\ , \qquad (3.3.2.2)$$

que además se corresponde con el valor de estado estacionario de la renta nacional ya que si en (3.3.2.1) se hace $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y^e$ se obtiene este valor.

Para calcular Y_t^h, que se identifica con las desviaciones de la renta respecto al equilibrio, tenemos que resolver la ecuación homogénea asociada a la ecuación (3.3.2.1):

$$Y_t - b(1+k)Y_{t-1} + bkY_{t-2} = 0\,,$$

cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 - b(1+k)\lambda + bk = 0\,.$$

Las soluciones de esta ecuación característica vendrían dadas por

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{b(1+k) \pm \sqrt{(-b(1+k))^2 - 4bk}}{2}\,.$$

Para profundizar en el análisis dinámico recurrimos al análisis cualitativo. Para determinar la estabilidad dinámica del estado estacionario aplicamos las **Condiciones de Schur** (3.3.1.4), que en este caso son:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - b(1+k) + bk = 1 - b > 0 \\ 1 - bk > 0 \\ 1 + b(1+k) + bk > 0 \end{array}\right\}.$$

Podemos ver que la primera desigualdad se cumple siempre, ya que hemos supuesto que la propensión marginal al consumo es menor que 1 (el cual es un supuesto empíricamente aceptable); la tercera también se cumple ya que es una suma de cantidades positivas. Por ello la existencia de estabilidad nos la marcará la segunda inecuación.

Así $Y^e = \dfrac{G}{1-b}$ es asintóticamente estable $\Leftrightarrow b < \dfrac{1}{k}$.

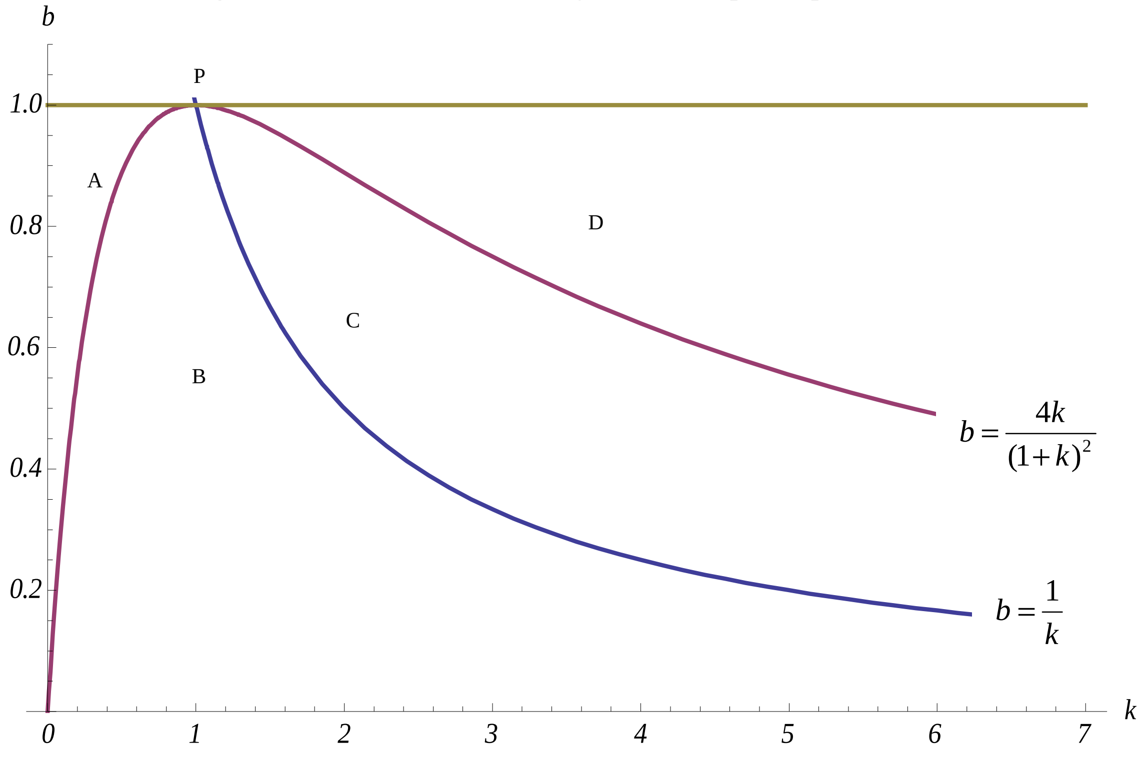
La clase de movimiento de las desviaciones respecto a Y^e vendrá determinado por las soluciones de la ecuación característica. Los signos de los coeficientes de la ecuación son $+-+$, y aplicando la regla de los signos de Descartes (vista en el apartado anterior) no habrá ninguna raíz negativa, de forma que podemos excluir los movimientos que implican oscilaciones “impropias” (oscilaciones no trigonométricas). Calculamos el discriminante de la ecuación característica, este es:

$$\Delta = b^2(1+k)^2 - 4bk .$$

Se verifica que $\Delta >=< 0 \Leftrightarrow b >=< \dfrac{4k}{(1+k)^2}$

En el siguiente gráfico representamos las curvas $b = \dfrac{1}{k}$ y $b = \dfrac{4k}{(1+k)^2}$, teniendo en cuenta que $b < 1$, para mostrar los diferentes comportamientos de las soluciones según el valor de los parámetros b y k.

Gráfico 5. Delimitación de las regiones en el plano paramétrico



Se pueden observar 4 regiones en el plano paramétrico (k, b):

- *Región A.* Cualquier punto que esté en esta región satisface $b < 1/k$ y $b > 4k/(1+k)^2$. Se cumple la condición de estabilidad, y las raíces de la ecuación característica son reales positivas; por tanto, la renta Y_t poseerá un movimiento monótono convergente hacia el valor de equilibrio Y^e (será un equilibrio asintóticamente estable).

- *Región B.* Cualquier punto que esté en esta región satisface $b < 1/k$ y $b < 4k/(1+k)^2$. La condición de estabilidad se cumple y las raíces de la ecuación característica son complejas; por tanto, Y_t se acercara al equilibrio oscilando amortiguadamente (será un estado estacionario asintóticamente estable).
- *Región C.* Cualquier punto que esté en esta región satisface $b > 1/k$ y $b < 4k/(1+k)^2$. La condición de estabilidad no se cumple y las raíces de la ecuación característica son complejas; así el movimiento resultante para Y_t será una oscilación explosiva, alejándose equilibrio Y^e (será un estado estacionario inestable).
- *Región D.* Cualquier punto que esté en esta región satisface $b > 1/k$ y $b > 4k/(1+k)^2$. La condición de estabilidad no se cumple y las raíces son reales positivas; luego el movimiento de Y_t será monótono y explosivo (será un equilibrio inestable).

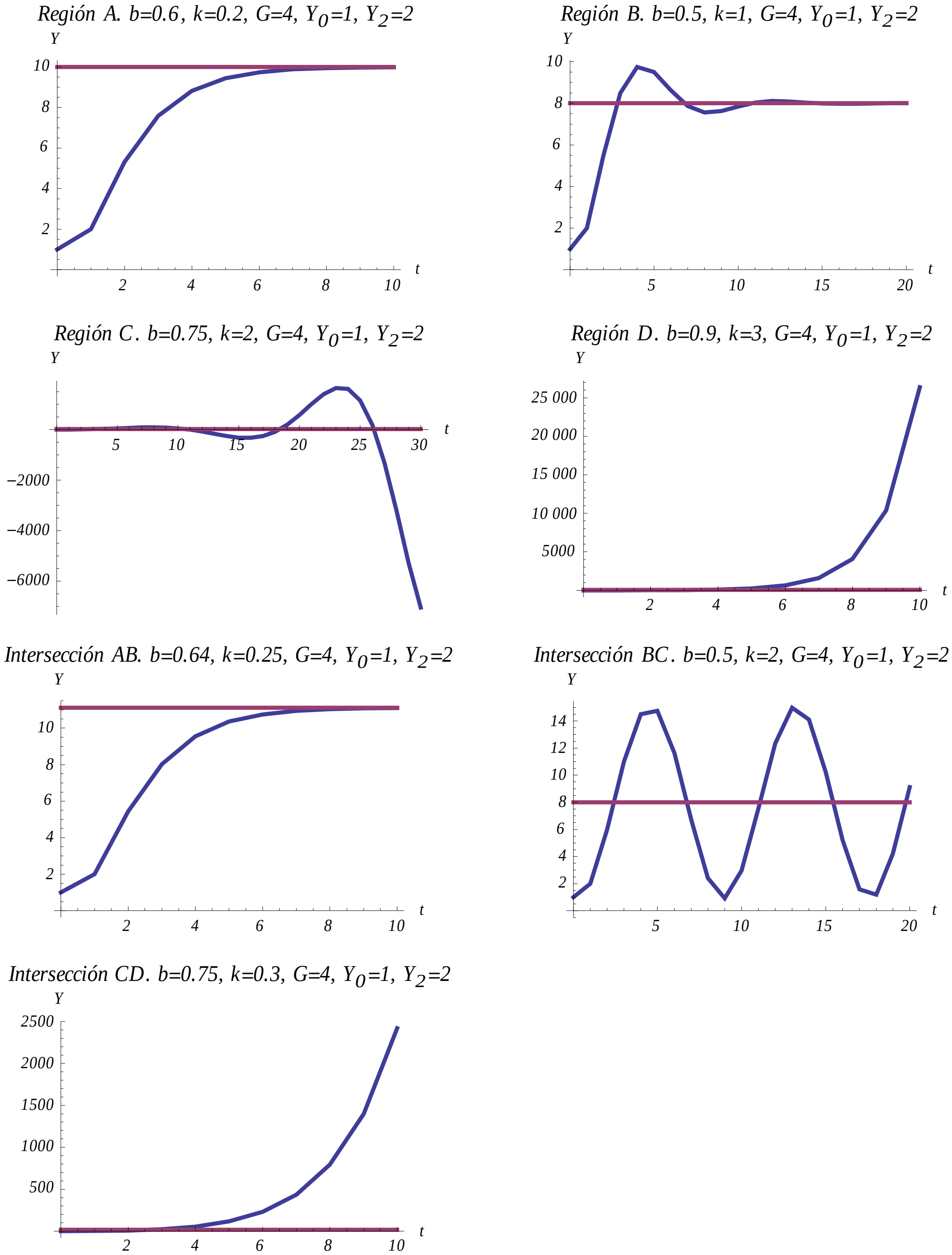
El análisis no estaría completo si no estudiáramos los puntos que limitan las regiones. Excluiremos de nuestro análisis los puntos de los ejes y el punto P intersección entre las curvas $b = \frac{1}{k}$ y $b = \frac{4k}{(1+k^2)}$, por no ser de interés económicos, ya que tomamos que $0 < b < 1$ y que $k > 0$.

- Puntos situados entre las regiones A y B. Aquí tenemos que $b = 4k/(1+k)^2$; luego la ecuación característica tiene una raíz real doble $\lambda = \frac{b(1+k)}{2}$. La condición de estabilidad se satisface, entonces $\frac{b(1+k)}{2}$ será menor que la unidad. El movimiento de Y_t será monótono hacia el valor de equilibrio Y^e (será un equilibrio asintóticamente estable).

- Puntos situados entre las regiones B y C. En estos puntos, $b < 4k/(1+k)^2$ y $b = 1/k$, por lo que tenemos raíces complejas y por tanto movimientos oscilantes. Como $b = 1/k$, el módulo de las raíces es unitario, lo que implica oscilaciones de amplitud constante. Tendremos un movimiento no explosivo pero tampoco amortiguado, es el caso de estabilidad neutral (será un equilibrio neutralmente estable).
- Puntos situados entre las regiones C y D. Existe una solución doble para la ecuación característica, pero no se cumple la condición de estabilidad. Por lo tanto, el movimiento de Y_t será monótonamente divergente del equilibrio Y^e (será un equilibrio inestable).

A continuación se pueden ver las distintas simulaciones:

Gráfico 6. Simulaciones en las disitntas regiones



3.4 ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

3.4.1 Resultados teóricos

La ecuación en diferencias finitas lineal de coeficientes constantes de orden n es de la forma:

$$y_t + a_1 y_{t-1} + ... + a_n y_{t-n} = g(t), \qquad (3.4.1.1)$$

con a_i contantes dadas, $a_n \neq 0$ y $g(t)$ una función conocida.

Siguiendo el **Teorema 1**, la solución general de la ecuación será $y_t = y_t^h + y_t^p$ donde y_t^p es una solución particular de la ecuación e y_t^h la solución general de la ecuación homogénea asociada a (3.4.1.1) y que dependerá de n constantes.

Para determinar las n constantes arbitrarias se requieren n condiciones adicionales, que normalmente son el valor de la solución en n instantes temporales, $y_{t_0} = y_0, y_{t_1} = y_1, ..., y_{t_{n-1}} = y_{n-1}$. Sustituyendo estos valores en la solución general, llegamos a un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas que permite calcular el valor de las n constantes.

La forma de calcular la expresión explicita de y_t^h e y_t^p es la señalada en el **Teorema 1** y explicada con más detalle para el caso de $n=1$ y de $n=2$ (en los apartados anteriores). Para calcular y_t^h es necesario obtener las n raíces de la ecuación característica asociada, lo que puede ser difícil de realizar. Por ello el análisis cualitativo es esencial en ecuaciones de orden superior (aunque también puede ser complicado).

Las condiciones de estabilidad asintótica para el equilibrio en estas ecuaciones de orden n sigue siendo que el módulo de las raíces de la ecuación característica sea menor que la unidad. Y esta condición se puede establecer en términos de los coeficientes de la ecuación, existiendo diversas formulaciones (ver **ANEXO III**).

En el caso de una ecuación de tercer orden, la forma explícita de **las condiciones de estabilidad de Schur-Cohn**[13] son

$$\left.\begin{array}{l} 1+a_1+a_2+a_3>0 \\ 1-a_1+a_2-a_3>0 \\ 1+a_2-a_1a_3-a_3^2>0 \\ 1-a_2+a_1a_3-a_3^2>0 \end{array}\right\} \qquad (3.4.1.2)$$

3.4.2 Modelo de Hicks. Desfases distribuidos y la interacción acelerador-multiplicador

La idea básica de este modelo es que la inversión y el consumo en cualquier periodo dependen de los valores que la renta nacional haya tenido en los n períodos anteriores[14].

En la función de inversión, se hace la siguiente hipótesis: el volumen de la inversión endógena por una variación de renta no puede ser llevado a cabo en un solo período de tiempo, sino que se extiende en los n períodos sucesivos (si la variación de renta es ΔY, y la inversión endógena $k\Delta Y$, siendo $k>0$ un coeficiente de aceleración, una parte de esa inversión será invertida en el período siguiente, $e_1(k\Delta Y)$, otra fracción dos periodos después, $e_2(k\Delta Y)$, y así sucesivamente hasta $e_n(k\Delta Y)$, teniendo que $e_1+e_2+...+e_n=1$). Si llamamos $e_ik\equiv k_i$, tendremos que $\sum_{i=1}^{n}k_i=k>0$. Llamando $I_t^{'}$ a la inversión endógena total en el período t, tenemos que

$$I'_t=k_1(Y_{t-1}-Y_{t-2})+k_2(Y_{t-2}-Y_{t-3})+...+k_n(Y_{t-n}-Y_{t-n-1}).$$

Para la función de consumo, la hipótesis que se hace es que el consumo depende de los valores de la renta nacional en los n períodos pasados. Tenemos por tanto

$$C_t=b_1Y_{t-1}+b_2Y_{t-2}+...+b_nY_{t-n},$$

donde

$$b_1+b_2+...+b_n=b\in(0,1).$$

13 Fernández, Vásquez y Vegas (2003).
14 Hicks (1950).

Supondremos además que la inversión autónoma es

$$I''_t = A_0(1+g)^t, \; g>0, A_0>0.$$

Con estas hipótesis e imponiendo la condición de equilibrio económico $Y_t = C_t + I_t$ se obtendrá una ecuación en diferencias de orden $n+1$.

Vamos a examinar el caso simple en el cual tanto la inversión como el consumo tardan en distribuirse dos periodos. Las ecuaciones del modelo son entonces:

$$Y_t = C_t + I_t,$$

$$C_t = b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2}, \text{ con } 0 < b_1 + b_2 < 1,$$

$$I_t = I'_t + I''_t,$$

$$I'_t = k_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + k_2(Y_{t-2} - Y_{t-3}), \text{ con } k_1, k_2 > 0,$$

$$I''_t = A_0(1+g)^t, \text{ con } g>0, A_0>0.$$

Sustituyendo en la primera ecuación todas las demás, llegamos a

$$Y_t - (b_1+k_1)Y_{t-1} - (k_2+b_2-k_1)Y_{t-2} + k_2 Y_{t-3} = A_0(1+g)^t, \tag{3.4.2.1}$$

que resulta ser una ecuación en diferencias lineal de orden 3 completa y no autónoma.

Probamos como solución particular $Y_t^p = C(1+g)^t$, donde C es una constante indeterminada. Sustituyendo en (3.4.2.1) y realizando unas operaciones, nos queda que[15]

$$Y_t^p = \frac{A_0(1+g)^3}{(1+g)^3 - (b_1+k_1)(1+g)^2 - (k_2+b_2-k_1)(1+g) + k_2}(1+g)^t. \tag{3.4.2.2}$$

Para obtener Y_t^h, tenemos que calcular las raíces de la ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias

$$\lambda^3 - (b_1+k_1)\lambda^2 - (k_2+b_2-k_1)\lambda + k_2 = 0,$$

[15] Suponemos que el denominador es positivo para que la solución tenga sentido económico.

que en este caso resulta muy complicado. Por tanto, obtener la expresión explícita de la solución de la ecuación resulta muy complejo. Por ello, recurrimos al análisis cualitativo, estudiando la estabilidad dinámica del equilibrio dado por y_t^p. Aplicando las **condiciones de Schur-Cohn** (3.4.1.2):

1) $1-b_1-k_1-k_2-b_2+k_1+k_2=1-b_1-b_2>0$.
2) $1+b_1+k_1-k_2-b_2+k_1-k_2=1+2(k_1-k_2)+b_1-b_2>0$.
3) $1-k_2-b_2+k_1+(b_1+k_1)k_2-k_2^2>0$.
4) $1+k_2+b_2-k_1-(b_1+k_1)k_2-k_2^2>0$.

La primera desigualdad se cumple siempre, ya que viene establecida por los supuestos iniciales. De la segunda no podemos asegurar nada.

Y de la tercera y cuarta condición, por separado, no podemos asegurar nada, pero si las sumamos[16]:

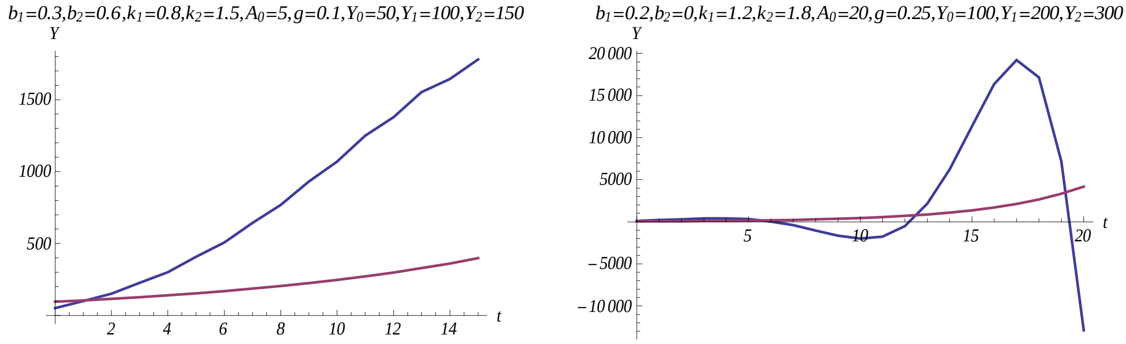
$$2-2k_2^2>0 \Leftrightarrow k_2^2<1 \Leftrightarrow 0<k_2<1.$$

Luego si $k_2>1$, podemos asegurar que el equilibrio será inestable. Esto es una condición suficiente de inestabilidad que se verifica de acuerdo con la evidencia empírica[17].

Para las simulaciones, ya que no he encontrado unos datos fiables, voy a usar los datos proporcionados por Gandolfo (1976) para la realización de ejercicios con este modelo.

[16] Recordemos que $k_2>0$.
[17] Como señala Hicks es muy probable que la mayor parte de la inversión no este concentrada en el primer periodo sino en periodos más alejados, por ello $k_2>k_1$. Y los datos empíricos nos permiten suponer que el valor de k no es menor que 2. Por ello, de $k_1+k_2=k\geq 2$, y de $k_2>k_1$, se deduce que $k_2>1$.

Gráfico 7. Simulaciones para distintos casos



Como se puede observar, ambos casos nos muestran que no hay convergencia, tal y como el análisis cualitativo nos indicaba.

3.5 SISTEMAS DE ECUACIONES

3.5.1 Resultados teóricos

Dos (o más) ecuaciones en diferencias, que contengan dos (o más) funciones desconocidas, constituyen un sistema de ecuaciones en diferencias. Para que el sistema sea resoluble el número de ecuaciones debe de ser igual al número de incógnitas, siendo además estas ecuaciones independientes y consistentes.

El tipo más sencillo posible de sistema lineal lo constituye el siguiente sistema de primer orden autónomo en forma normal:

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= a_{11}y_t + a_{12}z_t + b_1 \\ z_{t+1} &= a_{21}y_t + a_{22}z_t + b_2 \end{aligned} \tag{3.5.1.1}$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_1, b_2 son constantes determinadas. El sistema (3.5.1.1) es no homogéneo si $b_1 \neq 0$ o $b_2 \neq 0$. El sistema homogéneo asociado será

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= a_{11}y_t + a_{12}z_t \\ z_{t+1} &= a_{21}y_t + a_{22}z_t \end{aligned} \tag{3.5.1.2}$$

Para obtener la solución general del sistema (3.5.1.1) se utilizan técnicas de algebra lineal[18]. En este trabajo nos centramos en el análisis de la estabilidad dinámica del equilibrio del sistema (si existe).

Suponemos que (y^e, z^e) es un equilibrio estacionario del sistema (3.5.1.1), entonces

$$\left.\begin{aligned} y^e &= a_{11}y^e + a_{12}z^e + b_1 \\ z^e &= a_{21}y^e + a_{22}z^e + b_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^e \\ z^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^e \\ z^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

en notación matricial[19]:

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^e \\ z^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

[18] Fernández, Vásquez y Vegas (2003).

[19] Llamamos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, por tanto $I - A = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix}$.

de donde

$$\begin{pmatrix} y^e \\ z^e \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

suponiendo

$$\begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix} = |I - A| \neq 0 ,$$

$$| I - A | = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= 1 - \text{Traza}A + \text{Det}A \neq 0 ,$$

entonces existe un equilibrio estacionario del sistema dinámico (3.5.1.1) que es

$$\begin{pmatrix} y^e \\ z^e \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Como en el caso de las ecuaciones, el equilibrio anterior será asintóticamente estable si, y sólo si, los valores propios de la matriz A (soluciones de la ecuación $| A - \lambda I_2 | = \lambda^2 - \text{Traza}A\lambda + \text{Det}A = 0$) tengan módulo menor que la unidad.

Aplicando las **condiciones de Schur**, la condición necesaria y suficiente de estabilidad asintótica se puede escribir de la forma

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \text{Traza}A + \text{Det}A > 0 \\ 1 - \text{Det}A > 0 \\ 1 + \text{Traza}A + \text{Det}A > 0 \end{array}\right\}.$$

Estos resultados se pueden generalizar a sistemas lineales de primer orden pero de n ecuaciones (ver **ANEXO IV**).

3.5.2 Modelo de duopolio de Cournot

El modelo de competencia de Cournot es un modelo económico usado para describir una situación de mercado en la cual dos empresas compiten en las cantidades que van a producir[20].

[20] Cournot (1897)

Consideremos un mercado en el cual ambas producen el mismo (y único) bien, donde la función de demanda del mercado viene dada por

$$p_t = a - b(x_t^1 + x_t^2)\,,\ a, b > 0\,,$$

siendo p_t el precio del bien y x_t^i la producción de la empresa $i = 1, 2$ en el periodo t.

Para la producción del bien se necesita un periodo, por ello, esta producción debe planificarse con un periodo de antelación. Suponemos que cada empresa tiene un precio esperado (una expectativa del precio en el siguiente periodo) creyendo que la producción de la otra empresa no cambiará en el futuro. Estos precios esperados serán

$$\begin{aligned} p_{t+1}^1 &= a - b(x_{t+1}^1 + x_t^2) \\ p_{t+1}^2 &= a - b(x_t^1 + x_{t+1}^2) \end{aligned},$$

donde p_{t+1}^i es el precio esperado del bien para la empresa i en el periodo $t+1$.

Tratarán de maximizar su beneficio esperado Π_{t+1}^i, dado por:

$$\begin{aligned} \Pi_{t+1}^1 &= p_{t+1}^1 x_{t+1}^1 - c^1 x_{t+1}^1 = a x_{t+1}^1 - b\left(x_{t+1}^1\right)^2 - b x_{t+1}^1 x_t^2 - c^1 x_{t+1}^1 \\ \Pi_{t+1}^2 &= p_{t+1}^2 x_{t+1}^2 - c^2 x_{t+1}^2 = a x_{t+1}^2 - b\left(x_{t+1}^2\right)^2 - b x_{t+1}^2 x_t^1 - c^2 x_{t+1}^2 \end{aligned},$$

siendo c^1, c^2 los costes de ambas empresas.

Sus producciones en $t+1$ vendrán determinadas por las condiciones necesarias de optimización:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{t+1}^1}{\partial x_{t+1}^1} &= a - 2b x_{t+1}^1 - b x_t^2 - c^1 = 0 \\ \frac{\partial \Pi_{t+1}^2}{\partial x_{t+1}^2} &= a - 2b x_{t+1}^2 - b x_t^1 - c^2 = 0 \end{aligned},$$

aplicando las condiciones suficientes se puede ver que para cada empresa, su punto crítico será un máximo global:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_{t+1}^1}{(\partial x_{t+1}^1)^2} &= -2b < 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi_{t+1}^2}{(\partial x_{t+1}^2)^2} &= -2b < 0 \end{aligned}.$$

La evolución temporal de las producciones de las empresas vendrá determinada por el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{cases} x_{t+1}^1 = -\dfrac{1}{2} x_t^2 + \dfrac{a-c^1}{2b} \\ x_{t+1}^2 = -\dfrac{1}{2} x_t^1 + \dfrac{a-c^2}{2b} \end{cases},$$

que se puede escribir de forma matricial

$$x_{t+1} = Ax_t + B, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \ B = \frac{1}{2b}\begin{pmatrix} a-c^1 \\ a-c^2 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Se trata de un sistema lineal no homogéneo.

Como hemos visto en el apartado anterior, suponemos que las soluciones de equilibrio son x^{1e} y x^{2e}.

Tenemos pues

$$x^e = Ax^e + B,$$

$$x^e = (I-A)^{-1}B = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{4}{3} \end{pmatrix} \frac{1}{2b}\begin{pmatrix} a-c^1 \\ a-c^2 \end{pmatrix};$$

$$x^e = \begin{pmatrix} x^{1e} \\ x^{2e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2b}\left[\dfrac{4}{3}(a-c^1) - \dfrac{2}{3}(a-c^2)\right] \\ \dfrac{1}{2b}\left[\dfrac{4}{3}(a-c^2) - \dfrac{2}{3}(a-c^1)\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a-2c^1+c^2}{3b} \\ \dfrac{a-2c^2+c^1}{3b} \end{pmatrix}.$$

Estas serían las cantidades en el equilibrio estacionario.

El equilibrio será asintóticamente estable si, y sólo si, los valores propios de la matriz A tienen módulo menor que la unidad.

Los valores propios de la matriz A vienen determinados por las soluciones de la ecuación $|A-\lambda I_2|=0$, en nuestro caso $\lambda^2-\frac{1}{4}=0$, $\lambda^2=\frac{1}{4}$, por tanto $\lambda=\pm\frac{1}{2}$. El equilibrio será asintóticamente estable, ya que el módulo de es menor que 1. Las implicaciones que tiene que sea positivo o negativo quedarán reflejadas en el tipo de movimiento por el cual las trayectorias se aproximarán al equilibrio.

Ahora podemos afirmar que las cantidades de equilibrio serán las cantidades a largo plazo.

A continuación voy a realizar 2 simulaciones. La primera de ella será para 2 empresas totalmente iguales (Gráfico 8), y la segunda para empresas muy distintas (Gráfico 9)

Gráfico 8. Simulación para 2 empresas iguales

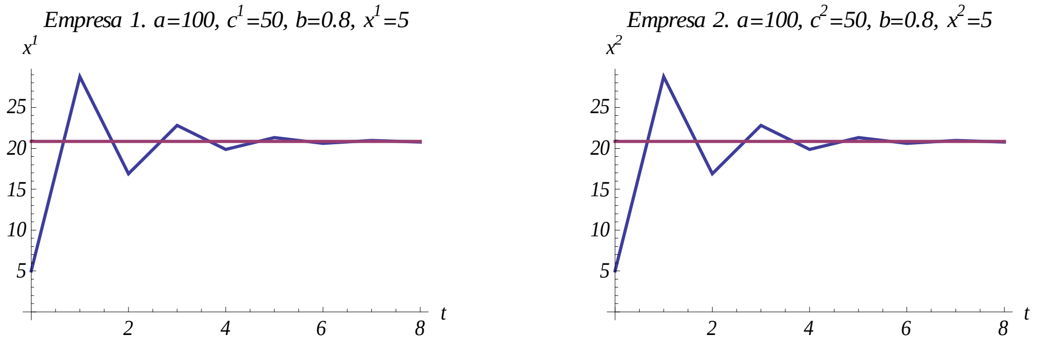
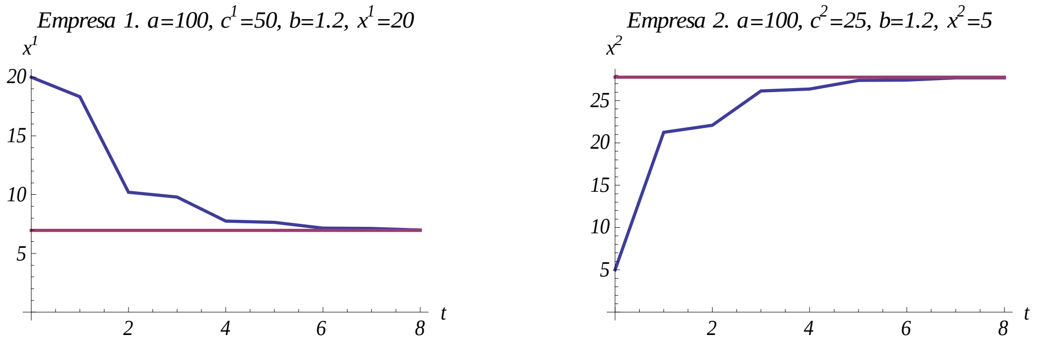


Gráfico 9. Simulación para 2 empresas distintas



En ambos casos se puede observar convergencia, como anteriormente se había calculado.

4. COMENTARIO FINAL

Como se indica en la introducción, esta memoria es el primer paso para lograr uno de mis deseos personales, comprender mejor la realidad económica a través de la profundización en sus aspectos dinámicos y en la interrelación entre las distintas variables. Únicamente he abordado las ecuaciones lineales en diferencias y los sistemas de estas, focalizando el análisis en las de bajo orden, en los conceptos de equilibrio y estabilidad y usando las representaciones gráficas para una mejor comprensión.

A pesar de ello, ver cómo pueden aplicarse estas técnicas en modelos tan explicativos como el del acelerador-multiplicador de Samuelson, ha sido un acicate para mi futura formación en este campo. Soy consciente de todo lo que me falta de aprender, pero no me desanima. En primer lugar tendré que enfrentarme a los sistemas lineales de orden n, que son fundamentales ya que una economía no tiene sólo dos o tres sectores, tiene muchos, con tecnologías diferentes y cada uno de ellos requiere de numerosas variables para describirlo. Por otra parte, la realidad económica no es lineal, aunque se aproxime cuando las variaciones de las variables son pequeñas. Ello me obligará a dar otro salto en mi formación, el paso a sistemas no lineales donde la obtención de resultados sobre equilibrios y condiciones de estabilidad son mucho más difíciles, pero también más prometedores. Por último, todos los análisis en diferencias tienen un paralelo en el análisis diferencial, ecuaciones lineales, no lineales, sistemas, estabilidad,…, que no puede identificarse con el análisis en diferencias pero que se complementa con este. Este es otro desafío pendiente.

5. BIBLIOGRAFÍA

- **GANDOLFO, G.** (1976) *Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica*. Edit. Tecnos, Madrid.
- **SHONE, R.** (2002) *Enonomic Dynamics. Phase diagrams and their Economic Application.* Cambridge University Press, Cambridge.
- **PÉREZ-GRASA, I., MINGUILLÓN, E. Y JARNE, G.** (2001) *Matemáticas para la Economía. Programación Matemática y Sistemas Dinámicos*. Ed. McGraw-Hill, Madrid
- **HARROD, R.F.** (1939) "An Essay in Dynamic Theory", *The Economic Journal*, Vol. 49, Nº 193, páginas. 14-33.
- **SAMUELSON, P. A.** (1939) "The interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Aceleration". *Review of Economic Statistics*, Vol. 21, Nº 2, páginas 75-78
- **HICKS, J. R.** (1950) *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*. Clarendon Press, Oxford
- **FERNÁNDEZ PÉREZ, C.; VÁSQUEZ HERNÁNDEZ, F. J. y VEGAS MONTANER, J. M.** (2003) *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*. Ediciones Paraninfo, Madrid.
- **COURNOT, A.A.** (1897) *Researches Into The Mathematical Principles Of The Theory Of Wealth*. The Macmillan Company, New York