

TESIS DE LA UNIVERSIDAD
DE ZARAGOZA

2014

51

Álvaro Barreras Peral

Matrices estructuradas y alta precisión relativa

Departamento
Instituto Universitario de Investigación en
Matemáticas y sus Aplicaciones

Director/es
Peña Ferrández, Juan Manuel

<http://zaguan.unizar.es/collection/Tesis>



Universidad
Zaragoza

Tesis Doctoral

MATRICES ESTRUCTURADAS Y ALTA PRECISIÓN RELATIVA

Autor

Álvaro Barreras Peral

Director/es

Peña Ferrández, Juan Manuel

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Instituto Universitario de Investigación en Matemáticas y sus Aplicaciones

2014

Matrices estructuradas y alta precisión relativa

Álvaro Barreras Peral

Director: Dr. Juan Manuel Peña Ferrández



IUMA - Universidad de Zaragoza

Matrices estructuradas y alta precisión relativa

Álvaro Barreras Peral

Memoria presentada para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas.

Dirigida por Dr. Juan Manuel Peña Ferrández.



IUMA - Universidad de Zaragoza

Agradecimientos

Al escribir esta tesis, siento que estoy escribiendo el colofón de una etapa. Una etapa de mi vida que me gusta ver como un libro.

Buena parte de ese libro ha sido escrito por Juan Manuel; no sólo todo el conocimiento matemático sintetizado en esta tesis, sino que también ha escrito enseñanzas. Me ha enseñado qué es esto de la investigación, me ha enseñado a trabajar, pero sobre todo me ha enseñado a disfrutar de ello; me ha mostrado cómo es posible ilusionarse y pasarlo bien haciendo matemáticas. Trabajar a su lado es fascinante. Y eso tiene más valor que toda la teoría que puedes encontrar en los *otros* libros.

Para el glosario y las notas al pie, sin los que no se comprendería ni se podría disfrutar el libro, he contado con los compañeros de departamento, los compañeros de congresos y los compañeros del seminario de doctorado.

El color de este libro lo ha aportado María. También se ha ocupado de la portada, las ilustraciones y de que todo estuviese bien estructurado. Podríamos decir que ha aportado la belleza tanto del exterior del libro como del contenido de su interior.

Respecto a la estantería en la que reposará el libro, la ha construido mi familia. Todo libro ha de descansar sobre una repisa donde luzca y espere a ser consultado. Ellos, en especial mis padres y mi hermana, construyeron dicha estantería hace años y se han encargado de repararla, lijarla y barnizarla cuando ha sido necesario. De hecho, no sólo la construyeron sino que son unos auténticos artistas encargados de su mantenimiento.

A este libro lo acompañan otros en el resto de anaqueles de la estantería y son lo que han hecho posible que éste vea la luz. Dichos libros los han ido escribiendo los *maestros* que he tenido la suerte de ir conociendo, tanto los que enseñaban desde las pizarras como los que lo hacían desde el pupitre de al lado. Especial mención merece mi abuela, Irene, que siempre me ha enseñado que *todos* los libros han de escribirse para ser leídos.

Los culpables de que este nuevo libro sirva como referencia para los que han de venir son todos los anteriores. A todos ellos, ¡muchísimas gracias!

Índice general

Introducción	vii
1. Algunas clases de matrices y conceptos básicos	1
1.1. Notaciones matriciales y algunas clases de matrices	1
1.2. Matrices no negativas y generalizaciones	5
1.3. Eliminación y descomposición de matrices	7
1.4. Matrices signo regulares y totalmente positivas	16
1.5. Z-matrices, dominancia diagonal y clases de matrices relacionadas	23
1.6. Alta precisión relativa	25
2. Matrices Jacobi Signo Regulares	29
2.1. Una fórmula para el determinante	29
2.2. Matrices Jacobi TP	31
2.3. Clasificación de las matrices Jacobi SR	33
2.4. Caracterizaciones y test	38
2.5. Matrices Jacobi diagonal dominantes	46
2.6. Matrices SR estrictamente k-bandeadas	47
2.7. Conclusiones	51
3. Matrices con Descomposición Bidiagonal	53
3.1. Caracterizaciones y cálculos precisos	54
3.1.1. Descomposiciones bidiagonales	54
3.1.2. Caracterizaciones	57

3.1.3. Cálculos precisos	60
3.2. Propiedades de las matrices SBD	65
3.3. Matrices Jacobi SBD	74
3.4. Desigualdades sobre el mínimo valor propio y el producto Hadamard	80
3.5. Estabilidad backward de la eliminación Gaussiana	91
3.6. Algoritmos de corte de esquinas y cálculos precisos	98
3.7. Conclusiones	102
4. Z–matrices y dominancia diagonal	105
4.1. Descomposición LDU de M–matrices diagonal dominantes . .	106
4.1.1. Pivotaje de dominancia diagonal débil por columnas . .	107
4.1.2. Algoritmo para calcular la descomposición LDU de M– matrices diagonal dominantes	110
4.1.3. Experimentación numérica	118
4.2. Descomposición LDU de Z–matrices cuasi–diagonal dominantes	120
4.2.1. Cuasi–dominancia diagonal y estrategias de pivotaje . .	121
4.2.2. Algoritmo para calcular la descomposición LDU de Z– matrices cuasi–diagonal dominantes	124
4.2.3. Experimentación numérica	131
4.3. Caracterizaciones y test para cuasi–M–matrices	135
4.3.1. Caracterizaciones de cuasi–M–matrices	136
4.3.2. Algunas subclases de cuasi–M–matrices no singulares .	140
4.4. Conclusiones	143
A. Aplicación para la experimentación numérica	145
A.1. Motivación	145
A.2. Antecedentes	146
A.3. Definición de la aplicación	147
A.4. Tecnología empleada	149
A.4.1. MathML	149
A.5. Funcionamiento de la aplicación	152

A.6. Manual de usuario	153
A.6.1. Ventana Principal	153
A.6.2. Crear Matrices	154
A.6.3. Crear Métodos	155
A.6.4. Editar Matrices y Métodos	158
A.6.5. Resolver problema (Sistema Lineal)	158
A.6.6. Comparación de soluciones	159
Bibliografía	163

Introducción

Esta memoria se enmarca, dentro del Algebra Lineal Numérica, en el campo de estudio de métodos numéricos adaptados a clases de matrices con estructura especial, que es un campo que muestra una intensa y creciente actividad investigadora. Concretamente, considerará clases de matrices para las que se encontrarán métodos numéricos cuyo cálculo se podrá llevar a cabo con alta precisión relativa. Conseguir cálculos precisos es una propiedad muy deseable para cualquier método numérico. El ideal es conseguir alta precisión relativa (independientemente del condicionamiento del problema). Sin embargo, hasta ahora sólo se ha podido garantizar dicha alta precisión relativa en un número muy reducido de métodos numéricos para una lista muy reducida de problemas matemáticos. En particular, en métodos aplicados a matrices con una estructura especial. Hasta ahora, las principales clases de matrices para las que se han podido desarrollar métodos con alta precisión relativa han sido clases de matrices cuya estructura tiene alguna relación con la positividad o bien con la dominancia diagonal.

Las matrices no negativas han aparecido con gran frecuencia en aplicaciones a los campos más diversos, como la Física, Química, Biología, Ingeniería, Economía y Ciencias Sociales. Además, el bien conocido resultado sobre la positividad de su valor propio dominante y vector propio asociado (Teorema de Perron–Frobenius) ha sido un instrumento clave en la modelización matemática de muchas situaciones reales. En general, las clases de matrices relacionadas con la positividad se han mostrado muy fructíferas en las aplicaciones. En particular, en los problemas de aproximación, representación aproximada de curvas y superficies y diseño geométrico asistido por ordenador es frecuente que aparezcan matrices con una estructura especial relacionada con la positividad. Por ejemplo, es muy frecuente que aparezcan matrices no negativas e incluso totalmente positivas (es decir, con todos sus menores no negativos). En los últimos años, se han

visto las grandes ventajas que conlleva encontrar algoritmos adaptados a la estructura especial de estas matrices. Las matrices totalmente positivas están dentro de la clase más amplia de las matrices signo regulares, que es una de las clases de matrices a considerar en la tesis. Una matriz de orden n es signo regular si todos sus menores de orden k , para cada $k = 1, \dots, n$, tienen el mismo signo o son cero. El interés de las matrices signo regulares no singulares en muchas aplicaciones es debido a su caracterización como aplicaciones lineales que disminuyen la variación de signo. Se pueden encontrar muchas aplicaciones de estas transformaciones en [20], [64], y [78]. Uno de los logros de la memoria ha sido la caracterización de las matrices signo regulares no singulares de Jacobi (o tridiagonales).

En contraste con los abundantes resultados publicados sobre matrices totalmente positivas (véase, por ejemplo, los libros [42], [48], [64] y [84] o los surveys que aparecen en [9], [37], [41], [47] y [50]), son mucho más escasos los resultados publicados en el caso de las signo regulares. Una de las razones que podría explicar esta diferencia es el papel que ha jugado en los últimos años la eliminación de Neville (véase [51]) en la teoría de la Total Positividad. Este procedimiento de eliminación es muy conveniente cuando se trata con matrices totalmente positivas y también preserva su estructura. Además, los multiplicadores de la eliminación de Neville determinan la descomposición de matrices totalmente positivas no singulares en producto de bidiagonales y son parámetros naturales de las matrices totalmente positivas de cara a obtener algoritmos con alta precisión relativa. De hecho, en [67] se probó que si se conocen dichos multiplicadores y los pivotes diagonales (que determinan la descomposición bidiagonal de la matriz) con alta precisión relativa, entonces se pueden calcular sus inversas, valores propios o valores singulares con alta precisión relativa. Esta idea se ha aplicado a garantizar cálculos con alta precisión relativa en subclases de matrices totalmente positivas como las de Vandermonde [35], las de Bernstein–Vandemonde [69], las de Pascal [6] o matrices de colocación de bases racionales [34]. En esta memoria presentamos una clase de matrices, llamadas SBD, que incluyen a las totalmente positivas y a sus inversas. Veremos que para esta clase de matrices también podremos obtener algoritmos con alta precisión relativa para calcular sus inversas, valores propios o valores singulares a partir de la descomposición bidiagonal.

Otra de las clases de matrices relacionada con algoritmos de alta precisión relativa es la clase de las M -matrices. Recordemos que las M -matrices (en el caso no singular) son matrices que tienen elementos diagonales positivos, elementos extradiagonales no positivos y cuya inversa es no negativa. Constituyen una clase de matrices que ha dado lugar a importantes

aplicaciones en Análisis Numérico, en programación lineal, en sistemas dinámicos y en economía (véase [19]). Una descomposición reveladora del rango de una matriz A es una factorización $A = XDY^T$, donde D es diagonal no singular y X, Y son bien condicionadas. En [35] se probó que si se conoce una descomposición reveladora del rango con alta precisión relativa, también se pueden conocer los valores singulares con alta precisión relativa. Métodos para el cálculo de una descomposición reveladora del rango de M -matrices diagonal dominantes se han obtenido en [36] y [82], usando ambos eliminación gaussiana, pero [36] con la estrategia de pivotaje completo y [82] con la estrategia introducida en [77]. En el caso de estas matrices, los parámetros naturales que se suponen conocidos de antemano para poder garantizar alta precisión relativa son los elementos extradiagonales y las sumas de filas. Aquí veremos que un método que se puede implementar mejorando las propiedades de [36] y [82]. Además lo extendemos a una clase de Z -matrices (recordemos que una matriz cuadrada es una Z -matriz si sus elementos extradiagonales son no positivos) que llamamos cuasi-diagonal dominantes.

En el Capítulo 1 introducimos conceptos y notaciones básicos así como resultados auxiliares. Muchas de las clases de matrices conocidas mencionadas en la memoria habrán sido presentadas en este capítulo, así como las descomposiciones matriciales usadas más importantes. También se introducirán los algoritmos de corte de esquinas, de gran importancia en diseño geométrico asistido por ordenador (CAGD) y para los que obtendremos una aplicación en el Capítulo 3. Finalmente, introducimos el concepto de alta precisión relativa y recordamos que podremos asegurar que un algoritmo cumplirá dicha propiedad si no usa restas (salvo en los datos iniciales).

El Capítulo 2 está dedicado a las matrices signo regulares no singulares de Jacobi y a alguna extensión de las mismas. Por un lado, se caracterizan de diversas maneras y, por otro lado, se ve su relación con las matrices diagonal dominantes y otras clases de matrices.

El Capítulo 3 se dedica a las matrices SBD, que son introducidas en el mismo, y a otras clases de matrices relacionadas. Realizamos un estudio sistemático de clases de matrices que admitan descomposiciones bidiagonales con objeto de tratar de adaptarles las técnicas que han permitidos la obtención de algoritmos con alta precisión relativa en el caso de matrices totalmente positivas. Para ello fue conveniente explorar condiciones de signo en las descomposiciones bidiagonales. Para las clases de matrices resultantes de nuestro estudio, las matrices SBD, se realizó también

un análisis matricial clásico, estudiando los signos de sus menores o su comportamiento con respecto a los complementos de Schur o al producto de Hadamard, comparando dicho comportamiento con el de las matrices totalmente positivas, como se puede ver en este capítulo. Se prueba la estabilidad backward (o regresiva) que tiene la eliminación Gaussiana sin realizar pivotaje en las matrices SBD. Se extienden a clases de matrices más amplias desigualdades válidas para las matrices totalmente positivas y relacionadas con el mínimo valor propio, el complemento de Schur y el producto de Hadamard. También se presenta una aplicación a diseño asistido por ordenador.

En el Capítulo 4 encontramos para la clase de las M -matrices no singulares diagonal dominantes una implementación de su factorización LDU (con una adecuada estrategia de pivotaje) que es más económica que las de [36] y [82]. Así, se podrá aplicar con ventaja en el cálculo de valores singulares con alta precisión relativa. También extendemos y adaptamos las técnicas que han permitido la obtención de algoritmos con alta precisión relativa para M -matrices no singulares diagonal dominantes a clases de matrices más generales u otras clases de matrices relacionadas. En particular, a las Z -matrices cuasi-diagonal dominantes. Finalmente, se presentarán otras clases de matrices relacionadas y se estudiarán algunas de sus propiedades.

Terminamos la memoria con un apéndice que presenta una aplicación informática que puede resultar muy útil cuando se quieren comparar experimentos numéricos obtenidos con dos entornos distintos de cálculo matemático, como les ocurre a los experimentos numéricos presentados en esta memoria.

Capítulo 1

Algunas clases de matrices y conceptos básicos

En este capítulo se van a definir algunas clases de matrices, se presentarán las notaciones necesarias, los conceptos básicos y algunos resultados auxiliares con el fin de establecer la base teórica sobre la que se desarrollarán los próximos capítulos. En la Sección 1.1, se definirán notaciones matriciales básicas y se presentarán algunas clases de matrices como las de Jacobi, diagonal dominantes o signo simétricas. En la Sección 1.2 se introducirán tanto las matrices no negativas como algunas de sus subclases y generalizaciones más importantes. A lo largo de la Sección 1.3, se definirán dos procesos de eliminación y ciertas descomposiciones de matrices. Después, en la Sección 1.4, se presentarán las matrices signo regulares y las matrices totalmente positivas. En la Sección 1.5 se mostrarán las Z -matrices y otras clases de matrices, como las M -matrices y las H -matrices, que jugarán un papel clave en el Capítulo 4. Finalmente, en la Sección 1.6 se introducirá el concepto de alta precisión relativa.

1.1. Notaciones matriciales y algunas clases de matrices

Empezaremos esta sección dando algunas notaciones que se utilizarán de manera recurrente a lo largo de toda la tesis.

Dados $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, definimos α (β , respectivamente) como una sucesión estrictamente creciente de k (l , respectivamente) enteros positivos menores o iguales que n . El conjunto de todas las sucesiones crecientes de k enteros menores o iguales que n es denotado por $Q_{k,n}$. Para cada $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq k} \in Q_{k,n}$, su número de dispersión $d(\alpha)$ viene definido por

$$d(\alpha) := \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i - 1) = \alpha_k - \alpha_1 - (k - 1).$$

Para las sucesiones de un solo entero $\alpha \in Q_{1,n}$, el número de dispersión es cero, $d(\alpha) = 0$. Observemos que en general, $d(\alpha) = 0$ significa que α consiste en una sucesión de enteros consecutivos.

Dada una matriz A $n \times n$, $\alpha \in Q_{k,n}$ y $\beta \in Q_{l,n}$, denotaremos por $A[\alpha \mid \beta]$ la submatriz $k \times l$ de A formada por las filas cuyos índices forman α y por las columnas cuyos índices forman β . Si $\alpha = \beta$ entonces utilizaremos la notación $A[\alpha] := A[\alpha \mid \alpha]$. Estas últimas submatrices están formadas por filas y columnas de A con los mismos índices y las llamaremos *submatrices principales*. Los menores que utilizan este tipo de submatrices se denominan *menores principales* y son de la forma $\det A[\alpha]$. Si los menores usan submatrices principales con filas iniciales y columnas iniciales se llaman *menores principales directores* y son de la forma $\det A[1, \dots, k]$. La sucesión complementaria a α , α^c , es la sucesión creciente reordenada $\{1, \dots, n\} \setminus \alpha$. Utilizaremos las notaciones $A(\alpha \mid \beta) := A[\alpha^c \mid \beta]$, $A[\alpha \mid \beta) := A[\alpha \mid \beta^c]$, $A(\alpha \mid \alpha) := A[\alpha^c \mid \alpha^c]$ y $A(\alpha) := A[\alpha^c]$ cuando utilicemos sucesiones complementarias.

Nota 1.1. *A menos que se indique lo contrario, las matrices que aparezcan a lo largo de este trabajo serán matrices cuadradas.*

Definición 1.2 (Conversa). *Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ definiremos la matriz conversa de A como $A^\# = (a_{ij}^\#)_{1 \leq i, j \leq n} := (a_{n-i+1, n-j+1})_{1 \leq i, j \leq n}$.*

Observemos que si definimos la sucesión conversa de una sucesión $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$ como $\alpha^\# = (\alpha_i^\#)_{1 \leq i \leq k} := (n - \alpha_i + 1)_{1 \leq i \leq k}$, entonces se tiene que $\det A^\#[\alpha \mid \beta] = \det A[\alpha^\# \mid \beta^\#]$. Además la conversa del producto de matrices es el producto de sus conversas, $(AB)^\# = A^\#B^\#$.

El complemento de Schur de una submatriz en una matriz dada es un concepto muy útil y que aparecerá en el Capítulo 3.

Definición 1.3 (Complemento de Schur). *Sea A una matriz $n \times n$. Si $A[\alpha | \beta]$ es invertible para algunos $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ con $k \in \{1, \dots, n\}$, entonces definimos el complemento de Schur de $A[\alpha | \beta]$ en A como*

$$A/A[\alpha | \beta] = A(\alpha | \beta) - A(\alpha | \beta)A[\alpha | \beta]^{-1}A[\alpha | \beta]. \quad (1.1)$$

Lo denotaremos por $A/A[\alpha | \beta]$. Si $\alpha = \beta$, entonces escribiremos $A/A[\alpha] := A/A[\alpha | \alpha]$. También definimos $A/A(\alpha) := A/A[\alpha^c]$.

El siguiente resultado corresponde al Teorema 1.2 de [9] y relaciona los complementos de Schur con la inversión de matrices.

Teorema 1.4. *Sea A una matriz $n \times n$ no singular, $k \in \{1, \dots, n\}$ y $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$. Entonces $A/[\alpha | \beta]$ es invertible y se tiene que*

$$A^{-1}(\beta | \alpha) = (A/[\alpha | \beta])^{-1}. \quad (1.2)$$

Recordemos la conocida fórmula de Cauchy–Binet para los menores del producto de dos matrices (fórmula (1.23) de [9]). Dadas A y B dos matrices $n \times n$ se tiene, para todo $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ y $k \in \{1, \dots, n\}$, que

$$\det(AB)[\alpha | \beta] = \sum_{\omega \in Q_{k,n}} \det A[\alpha | \omega] \det B[\omega | \beta]. \quad (1.3)$$

Consideremos ahora la matriz

$$J_n := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Dada una matriz A $n \times n$ no singular recordemos la ecuación (1.32) de [9] basada en la ecuación (1.3):

$$\det(JA^{-1}J)[\alpha | \beta] = \frac{\det A(\beta | \alpha)}{\det A} \quad (1.5)$$

para todo $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ y $k \in \{1, \dots, n\}$.

Una operación entre matrices estudiada en muchos trabajos es el llamado producto de Hadamard.

Definición 1.5 (Producto de Hadamard). Sean $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ y $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ dos matrices. Definiremos el producto de Hadamard de A y B como el producto entrada a entrada, es decir $A \circ B := (a_{ij}b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

A continuación presentaremos algunas clases de matrices que aparecerán a lo largo de este trabajo.

Una clase de matrices que jugará un papel esencial especialmente en el siguiente capítulo son las matrices Jacobi (o tridiagonales). A continuación se presenta una definición formal.

Definición 1.6 (Jacobi). Una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es Jacobi (o tridiagonal) si $a_{ij} = 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $|i - j| > 1$.

La dominancia diagonal (estricta o no) es una propiedad interesante de algunas matrices y esencial en muchos resultados. Ha jugado un papel muy importante en Álgebra Lineal Numérica.

Definición 1.7 (Diagonal dominante). Una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es diagonal dominante (por filas) si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Si la desigualdad en la fórmula anterior es estricta, diremos que la matriz A es estrictamente diagonal dominante. Análogamente, se definen las matrices (estrictamente) diagonal dominantes por columnas imponiendo la propiedad a A^T .

La demostración de la no singularidad de las matrices estrictamente diagonal dominantes es equivalente a la que sirve para demostrar el siguiente resultado clásico de localización de valores propios (véase [90]): el conocido Teorema de los discos de Gershgorin (véase Teorema 6.1.1 de [58]). Este resultado nos ayuda a localizar los valores propios de una matriz.

Teorema 1.8. Dada la matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, todos sus valores propios se encuentran en la unión de n discos

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\}.$$

1.2. Matrices no negativas y generalizaciones

Dada una matriz A $n \times n$ (con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) denotamos su *radio espectral* con $\rho(A)$ ($= \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$).

Otra propiedad a tener en cuenta es la simetría en los signos de las entradas de una matriz.

Definición 1.9 (Signo simétrica). *Sea A una matriz $n \times n$ con entradas reales. Se dice que A es signo simétrica si $\det A[\alpha \mid \beta] \det A[\beta \mid \alpha] \geq 0$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ con $k \in \{1, \dots, n\}$.*

Un caso particular de matrices signo simétricas lo constituye la importante clase de matrices signo regulares, que será introducida en la Sección 1.4.

1.2. Matrices no negativas y generalizaciones

En esta sección presentaremos una clase de matrices ampliamente conocida y utilizada, la clase de matrices no negativas. Estas matrices han sido estudiadas en infinidad de trabajos y se han aplicado en numerosos modelos matemáticos. Veremos algunas de sus propiedades y presentaremos algunas subclases y generalizaciones de las matrices no negativas.

Definición 1.10 (No negativa). *Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ con entradas reales, escribimos $A \geq 0$ ($A > 0$, respectivamente) si todas sus entradas son no negativas (positivas, respectivamente), es decir, si $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$, respectivamente) para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. En este caso diremos que A es no negativa (positiva, respectivamente).*

Además, dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ denotaremos con $|A| := (|a_{ij}|)_{1 \leq i, j \leq n}$ a la matriz no negativa formada por los valores absolutos de las entradas de A .

Nota 1.11. *Durante todo el trabajo se utilizará el término positivo para denotar a valores estrictamente positivos, es decir, mayores estrictamente que 0. Para referirse a valores positivos o cero se utilizará el concepto no negativo. Esta notación afectará tanto a números reales, como a determinantes de matrices y menores.*

Veamos ahora algunos resultados clásicos sobre valores y vectores propios de una matriz no negativa. Sea A una matriz $n \times n$ y consideremos los n valores propios de A , $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ ordenados en sentido de módulo decreciente

$$|\lambda_1(A)| \geq \dots \geq |\lambda_n(A)|,$$

con multiplicidades incluidas. Así, el radio espectral de A , $\rho(A)$, es el valor absoluto del primer valor propio, $\rho(A) = |\lambda_1(A)|$. Denotaremos con u_1 un vector propio asociado a $\lambda_1(A)$.

El famoso Teorema de Perron–Frobenius asegura que el primer valor propio de una matriz no negativa es un valor no negativo (véase Lema 6.1 de [9]). Incluimos a continuación los teoremas de Perron–Frobenius para matrices no negativas y para matrices positivas.

Teorema 1.12. *Sea A una matriz $n \times n$ no negativa. Se tiene que el primer valor propio de A es real y no negativo, $\lambda_1(A) \geq 0$ ($\rho(A) = \lambda_1(A)$), y existe un vector propio no negativo $u_1 \geq 0$ asociado a $\lambda_1(A)$. Si A es positiva, entonces $\lambda_1(A) > |\lambda_2(A)|$ y el vector propio u_1 asociado a $\lambda_1(A)$ se puede tomar positivo y es el único vector propio no negativo que posee A .*

Presentamos ahora, como subclase de las matrices no negativas, la clase de las matrices estocásticas.

Definición 1.13 (Estocástica). *Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ no negativa, diremos que A es estocástica (por filas) si los elementos de cada fila suman 1, es decir, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Si A^T es estocástica, se dice que A es estocástica por columnas (o de Markov).*

Es bien conocido (véase [88] y Teorema 5.3 de [19]) que una matriz estocástica A siempre tiene el valor propio 1 y que $\rho(A) = 1$.

La irreducibilidad de una matriz es una propiedad más débil que la positividad y que jugará un papel clave en algunos resultados que se presentarán más adelante.

Definición 1.14 (Matriz irreducible). *Una matriz A $n \times n$ con $n \geq 2$ no negativa se dice irreducible (o indescomponible) si no es reducible. Una matriz A $n \times n$ con $n \geq 2$ es reducible (o descomponible) si existen una matriz de permutación P $n \times n$ y un entero r con $1 \leq r \leq n$ tales que*

$$P^T A P = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

1.3. Eliminación y descomposición de matrices

donde B es $r \times r$, C es $r \times n - r$, D es $n - r \times n - r$ y 0 es una matriz $n - r \times r$ de ceros.

Veamos ahora el Teorema de Perron–Frobenius para matrices irreducibles (véase Teorema 1.4 de [19]). Aunque con respecto al caso de matrices positivas se pierde la garantía de que $\rho(A)$ sea el único valor propio de máximo valor absoluto, se puede aplicar a una clase de matrices menos restrictiva que la de las matrices positivas.

Teorema 1.15. *Sea A una matriz $n \times n$ irreducible. Se tiene que $\rho(A) = \lambda_1(A) > 0$ es un valor propio simple y el vector propio u_1 asociado a $\lambda_1(A)$ se puede tomar positivo y es el único vector propio no negativo que posee A .*

La última clase de matrices que veremos en esta sección es una clase de matrices que no son necesariamente no negativas pero que tienen una familia de menores positivos: las matrices conocidas como P–matrices.

Definición 1.16 (P–matriz). *Sea A una matriz $n \times n$. Se dice que A es una P–matriz (P_0 –matriz, respectivamente) si todos sus menores principales son positivos (no negativos, respectivamente), es decir, si $\det A[\alpha] > 0$ ($\det A[\alpha] \geq 0$, respectivamente) para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ con $k \in \{1, \dots, n\}$.*

1.3. Eliminación y descomposición de matrices

En esta sección presentaremos dos procesos de eliminación (eliminación Gaussiana y eliminación de Neville) imprescindibles para el desarrollo del resto de capítulos. También veremos tres tipos de descomposición de matrices (descomposición LDU , descomposición bidiagonal y descomposición QR) y definiremos los algoritmos de corte de esquinas, de importancia en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador.

Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ no singular, el proceso de *eliminación Gaussiana* con una estrategia de pivotaje dada consiste en una sucesión de, como mucho, $n - 1$ pasos que se traduce en una sucesión de matrices como la siguiente:

$$A = A^{(1)} \longrightarrow \tilde{A}^{(1)} \longrightarrow A^{(2)} \longrightarrow \tilde{A}^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow A^{(n)} \longrightarrow \tilde{A}^{(n)} = U, \quad (1.6)$$

donde U es una matriz triangular superior con los pivotes de la eliminación en su diagonal y $A^{(t)} = (a_{ij}^{(t)})_{1 \leq i, j \leq n}$ tiene ceros por debajo de su diagonal en las primeras $t - 1$ columnas. Obtendremos la matriz $\tilde{A}^{(t)} = (\tilde{a}_{ij}^{(t)})_{1 \leq i, j \leq n}$ reordenando las filas y/o las columnas (desde la t -ésima a la n -ésima) de la matriz $A^{(t)}$ de acuerdo a una estrategia de pivotaje, de manera que se satisfaga $\tilde{a}_{tt}^{(t)} \neq 0$ para todo $t = 1, \dots, n$. Para obtener $A^{(t+1)}$ a partir de $\tilde{A}^{(t)}$, vamos a generar ceros en la columna t por debajo del elemento $\tilde{a}_{tt}^{(t)}$, llamado *pivote* de la eliminación Gaussiana. Esto lo haremos restando múltiplos de la fila t a las filas inferiores, de manera que

$$a_{ij}^{(t+1)} := \begin{cases} \tilde{a}_{ij}^{(t)} & , \text{ si } i \leq t, \\ \tilde{a}_{ij}^{(t)} - \frac{\tilde{a}_{it}^{(t)}}{\tilde{a}_{tt}^{(t)}} \tilde{a}_{tj}^{(t)} & , \text{ si } i > t. \end{cases}$$

Recordemos que dada una matriz no singular, todos los pivotes se podrán tomar no nulos, $\tilde{a}_{tt}^{(t)}$, y por eso $a_{ij}^{(t+1)}$ está bien definida en la fórmula anterior. Además, si los menores principales directores de una matriz A , $\det A[1, \dots, k]$, son no nulos para cualquier $k = 1, \dots, n$, entonces la eliminación Gaussiana puede llevarse a cabo sin cambios de filas. Por lo tanto, y puesto que los elementos obtenidos mediante el proceso de eliminación pueden obtenerse también como complementos de Schur de submatrices, se deduce que, para $t > 1$, los pivotes satisfacen

$$a_{tt}^{(t)} = \frac{\det A^{(t)}[1, \dots, t]}{\det A^{(t-1)}[1, 2, \dots, t-1]}. \quad (1.7)$$

Diremos que una *estrategia de pivotaje* es *simétrica* si durante el proceso de eliminación siempre se intercambian las mismas filas que columnas.

Es bien conocido que la eliminación Gaussiana sin cambios de filas (ni de columnas) de una matriz no singular $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es equivalente a una descomposición matricial conocida como *descomposición triangular* o LU: $A = LU$ con U la matriz triangular superior obtenida tras el proceso de eliminación (1.6) y con los pivotes en la diagonal principal y $L = (l_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ triangular inferior con unos en la diagonal principal y los *multiplicadores*

$$l_{ij} := \frac{a_{ij}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}, \quad i > j, \quad (1.8)$$

debajo de la diagonal principal. Muy relacionada con la descomposición anterior y cumpliendo unicidad, es la llamada descomposición *LDU*. Se trata de una de las descomposiciones de matrices más importantes.

1.3. Eliminación y descomposición de matrices

Definición 1.17 (Descomposición LDU). *Dada una matriz A no singular, una descomposición LDU de A será una descomposición de la forma $A = LDU$, donde L (U , respectivamente) es una matriz triangular inferior (superior, respectivamente) con unos en la diagonal y D es una matriz diagonal con elementos no nulos en la diagonal principal.*

Observemos que la descomposición LDU puede obtenerse como resultado de un proceso de eliminación, por ejemplo la eliminación Gaussiana. Los multiplicadores obtenidos durante la eliminación Gaussiana serán las entradas de la matriz L y la matriz triangular superior obtenida tras el proceso de eliminación en (1.6) será DU . Así, podemos recuperar la matriz D y también obtener U multiplicando la matriz anterior por D^{-1} , la inversa de D . De esta forma, si P es la matriz de permutación asociada a una estrategia de pivotaje que cambia filas, tendremos que $PA = LDU$. Si la estrategia de pivotaje es simétrica, se tendrá que $PAP^T = LDU$.

Presentaremos a continuación el proceso de *eliminación de Neville* de una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ no singular. Este proceso, al igual que la eliminación Gaussiana, consiste en una sucesión de $n - 1$ pasos que se traduce en una sucesión como (1.6). En este caso, para cada $t \in \{1, \dots, n\}$, la matriz $\tilde{A}^{(t)} = (\tilde{a}_{ij}^{(t)})_{1 \leq i, j \leq n}$ tiene ceros bajo su diagonal en las primeras $t - 1$ columnas y se cumple, para $i \geq t$, que

$$\tilde{a}_{it}^{(t)} = 0 \Rightarrow \tilde{a}_{kt}^{(t)} = 0, \quad (1.9)$$

para todo $k \geq i$. La matriz $\tilde{A}^{(t)}$ se obtiene a partir de $A^{(t)}$ moviendo, si es necesario, las filas con una entrada nula en la columna t a la última posición hasta conseguir que se cumpla (1.9). Las filas que se muevan mantendrán su posición relativa que tenían en la matriz $A^{(t)}$. Para conseguir $A^{(t+1)}$ a partir de la matriz $\tilde{A}^{(t)}$ vamos a generar ceros en la columnas t bajo la diagonal restando a la fila $i + 1$ un múltiplo de la fila i , para $i = n - 1, \dots, t$ (es decir, a cada fila le restaremos un múltiplo de la fila anterior, empezando por la última fila) de la siguiente manera

$$a_{ij}^{(t+1)} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij}^{(t)} & , \text{ si } i \leq t \\ \tilde{a}_{ij}^{(t)} - \frac{\tilde{a}_{it}^{(t)}}{\tilde{a}_{i-1,t}^{(t)}} \tilde{a}_{i-1,j}^{(t)} & , \text{ si } i > t \text{ y } \tilde{a}_{i-1,t}^{(t)} \neq 0 \\ \tilde{a}_{ij}^{(t)} & , \text{ si } i > t \text{ y } \tilde{a}_{i-1,t}^{(t)} = 0. \end{cases}$$

Notemos que en el último caso, $\tilde{a}_{i-1,t}^{(t)} = 0$ implica que $\tilde{a}_{it}^{(t)} = 0$. Al igual que en la eliminación Gaussiana, si no es necesario hacer intercambios de filas se tiene que $\tilde{A}^{(t)} = A^{(t)}$ para todo $t \leq n$.

Observemos que, mientras que en la eliminación Gaussiana se utiliza la misma fila del pivote para hacer ceros en todas las filas bajo ella, en la eliminación de Neville se utiliza la fila inmediatamente superior para hacer ceros en cada una de las filas.

El elemento $p_{ij} := \tilde{a}_{ij}^{(j)}$, $1 \leq j \leq i \leq n$, es denominado *pivote* (i, j) de la eliminación de Neville de A y a

$$m_{ij} := \begin{cases} \frac{\tilde{a}_{ij}^{(j)}}{\tilde{a}_{i-1,j}^{(j)}} & , \text{ si } \tilde{a}_{i-1,j}^{(i)} \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } \tilde{a}_{i-1,j}^{(j)} = 0 \end{cases}$$

se le llama *multiplicador* (i, j) . Notemos que, al igual que ocurre con las entradas de A , se tiene que $m_{ij} = 0$ implica $m_{kj} = 0$ para todo $k > i$.

La *eliminación de Neville completa* consiste en aplicar la eliminación de Neville a la matriz A hasta obtener U y después aplicar la eliminación de Neville a la matriz U^T (también se dice aplicar la eliminación de Neville a U por columnas). El pivote (i, j) (multiplicador (i, j) , respectivamente) de la eliminación de Neville completa de A es el mismo pivote (multiplicador, respectivamente) de la eliminación de Neville de A si $i \geq j$ y será el pivote (j, i) (multiplicador (j, i) , respectivamente) de la eliminación de Neville de U^T si $j \leq i$.

Si a una matriz no singular A le podemos aplicar la eliminación de Neville sin necesidad de hacer intercambios de filas diremos que A satisface la condición WR. Si se puede realizar el proceso de eliminación completo a A sin inertambiar filas ni columnas diremos que A satisface la condición WRC.

En [51] puede verse un estudio más detallado sobre la eliminación de Neville. Otros resultados sobre este proceso de eliminación pueden encontrarse en [3], [4], [5], [7], [8]. La eliminación de Neville es un proceso muy ligado a las matrices signo regulares y totalmente positivas (que se introducirán en la siguiente sección) tal y como puede verse en trabajos como [26], [52], [53], [54], [55].

A continuación, hablaremos de descomposiciones bidiagonales de matrices no singulares, noción que jugará un papel clave en el Capítulo 3. Para introducir este tipo de descomposiciones, veremos su relación con la

1.3. Eliminación y descomposición de matrices

eliminación de Neville. Pero antes consideremos matrices del siguiente tipo

$$E_i(x) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & x & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

donde $i \in \{2, \dots, n\}$ y x es un número real en la posición $(i, i-1)$. A estas matrices las llamaremos *matrices bidiagonales elementales*. Veamos algunas propiedades de este tipo de matrices. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} E_i^{-1}(x) &= E_i(-x) \\ E_i(x)E_i(y) &= E_i(x+y) \\ E_i(x)E_j(y) &= E_j(y)E_i(x), \text{ excepto si } |i-j| = 1 \text{ y } xy \neq 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Observemos que dada una matriz no singular A que satisface la condición WR, podemos explicar la eliminación de Neville de forma matricial. Lo haremos utilizando matrices bidiagonales elementales

$$\begin{aligned} &E_n(-m_{n,n-1}) \cdots (E_3(-m_{32}) \cdots E_n(-m_{n2})) \\ &\cdot (E_2(-m_{21}) \cdots E_{n-1}(-m_{n-1,1})E_n(-m_{n1})) A = U \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde U es triangular superior no singular y los m_{ij} son los multiplicadores de Neville asociados a A . De hecho, el siguiente resultado que corresponde al Teorema 2.2 de [55] relaciona la eliminación de Neville con las matrices bidiagonales elementales.

Teorema 1.18. *Una matriz A no singular satisface la condición WRC si y sólo si admite una factorización de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} A &= (E_n(m_{n1})E_{n-1}(m_{n-1,1}) \cdots E_2(m_{21}))(E_n(m_{n2}) \cdots E_3(m_{32})) \cdots \\ &\cdot (E_n(m_{n,n-1}))D(E_n^T(m_{n-1,n}))(E_{n-1}^T(m_{n-2,n-1})E_n^T(m_{n-2,n})) \cdots \\ &\cdot (E_2^T(m_{12}) \cdots E_{n-1}^T(m_{1,n-1})E_n^T(m_{1n})) \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde D es diagonal y los m_{ij} satisfacen

$$\begin{aligned} \text{Para } i > j, \quad m_{ij} = 0 &\Rightarrow m_{kj} = 0 \quad \text{para todo } k > i, \\ \text{para } i < j, \quad m_{ij} = 0 &\Rightarrow m_{ik} = 0 \quad \text{para todo } k > j. \end{aligned}$$

Además, esta factorización es única, m_{ij} es el multiplicador (i, j) de la eliminación de Neville completa de A y la entrada (i, i) de D es el pivote (i, i) de la eliminación de Neville de A .

Observemos lo que sucede al multiplicar las siguientes matrices bidiagonales elementales

$$E_i(m_{ij})E_{i+1}(m_{i+1,j})\cdots E_n(m_{nj}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & m_{ij} & 1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & m_{nj} & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

donde la entrada m_{ij} está en la posición $(i, i - 1)$. Sin embargo, multiplicar las mismas matrices en el orden inverso, $E_n(m_{nj})\cdots E_{i+1}(m_{i+1,j})E_i(m_{ij})$, no tiene como resultado una matriz bidiagonal.

Vamos a utilizar la factorización (1.12) de A para obtener una descomposición en matrices bidiagonales (no necesariamente elementales). Para ello vamos a usar las propiedades de las matrices bidiagonales elementales que hemos visto para reordenar los factores de (1.12) y obtener

$$A = (E_n(m_{n1}))(E_{n-1}(m_{n-1,1})E_n(m_{n2}))(E_{n-2}(m_{n-2,1})E_{n-1}(m_{n-1,2})E_n(m_{n3})) \\ \cdots (E_2(m_{21})\cdots E_n(m_{n,n-1}))D(E_n^T(m_{n-1,n})\cdots E_2^T(m_{21})) \\ \cdots (E_n^T(m_{2n})E_{n-1}^T(m_{1,n-1}))(E_n^T(m_{1n})).$$

Teniendo en cuenta esta factorización y (1.13), podemos expresar A como producto de matrices bidiagonales

$$A = F_{n-1}F_{n-2}\cdots DG_1\cdots G_{n-2}G_{n-1},$$

donde

$$F_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & m_{i+1,1} & 1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & m_{n,n-i} & 1 \end{pmatrix},$$

1.3. Eliminación y descomposición de matrices

y

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 1 & m_{1,i+1} & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & & m_{n-i,n} \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación vamos a dar una definición formal de descomposición bidiagonal de una matriz $n \times n$. Para ello, renombraremos las matrices bidiagonales que acabamos de ver de la siguiente manera

$$L^{(k)} := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & l_{n-k}^{(k)} & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & l_{n-1}^{(k)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$U^{(k)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 1 & u_{n-k}^{(k)} & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & u_{n-1}^{(k)} \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

donde $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Definición 1.19 ($\mathcal{BD}(A)$). Sea A una matriz $n \times n$ no singular. Supongamos que podemos descomponer A como producto de matrices bidiagonales

$$A = L^{(1)} \dots L^{(n-1)} D U^{(n-1)} \dots U^{(1)}, \quad (1.14)$$

donde $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ y, para $k = 1, \dots, n-1$, $L^{(k)}$ ($U^{(k)}$, respectivamente) es una matriz bidiagonal inferior (superior, respectivamente) con unos en la diagonal y cuyas entradas extradiagonales

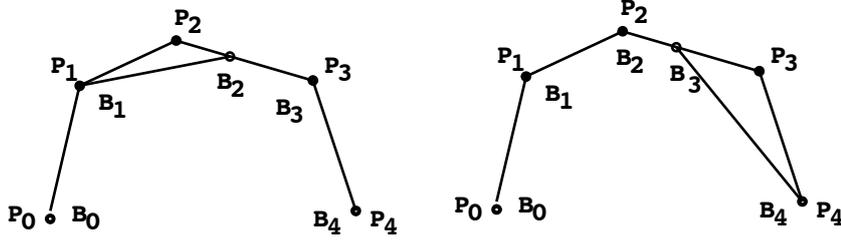


Figura 1.1: Cortes de esquina elementales (1.15) y (1.16).

$l_i^{(k)} := (L^{(k)})_{i+1,i}$ ($u_i^{(k)} := (U^{(k)})_{i,i+1}$, respectivamente) satisfacen, para todo $i \leq n - 1$,

1. $d_i \neq 0$ para todo i ,
2. $l_i^{(k)} = u_i^{(k)} = 0$ para $i < n - k$,
3. $l_i^{(k)} = 0 \Rightarrow l_{i+s}^{(k-s)} = 0$ para $s = 1, \dots, k - 1$ y
 $u_i^{(k)} = 0 \Rightarrow u_{i+s}^{(k-s)} = 0$ para $s = 1, \dots, k - 1$.

Entonces denotaremos la descomposición bidiagonal de A (1.14) por $\mathcal{BD}(A)$.

En la Sección 1.4 veremos que una importante clase de matrices (matrices totalmente positivas) se pueden caracterizar en términos de su descomposición bidiagonal y en el Capítulo 3 extenderemos el concepto de descomposición bidiagonal y presentaremos una nueva clase de matrices con este tipo de descomposiciones.

Presentaremos ahora los algoritmos de corte de esquinas, que jugarán un papel muy importante en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador. Veremos que se pueden expresar como una factorización de matrices. Estos algoritmos de corte de esquinas aparecerán con más detalle en el Capítulo 3.

Empecemos presentando los cortes de esquina elementales. Un *corte de esquina elemental* es una transformación que convierte un polígono $P_0 \cdots P_n$ en otro polígono $B_0 \cdots B_n$ (véase Figura 1.1) de acuerdo a las siguientes reglas

$$\begin{aligned} B_j &= P_j, \quad j \neq i, \\ B_i &= (1 - \lambda)P_i + \lambda P_{i+1}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

bidiagonales

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_0 & \lambda_0 & & & & & \\ & 1 - \lambda_1 & \lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 - \lambda_i & \lambda_i & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 - \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = U(\lambda_{n-1})U(\lambda_{n-2}) \cdots U(\lambda_0).$$

En el caso de las matrices triangulares inferiores se tiene una descomposición análoga. Para un estudio más profundo sobre algoritmos de corte de esquinas véase [56], [85].

Terminaremos esta sección recordando otra descomposición muy importante en Álgebra Lineal Numérica.

Definición 1.21 (Descomposición QR). Sea A una matriz no singular. Diremos que A admite una descomposición QR si se puede escribir $A = QR$, donde Q es una matriz ortogonal y R es una matriz triangular superior.

1.4. Matrices signo regulares y totalmente positivas

En esta sección presentaremos una clase de matrices de gran importancia en el Capítulo 2, las matrices signo regulares. También veremos la subclase de matrices más importante en cuanto a aplicaciones y que más aparece en la literatura, las matrices totalmente positivas.

Dado un entero l , definimos un vector de signos $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$, donde $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$ para todo $k \in \{1, \dots, l\}$. A este vector ε se le denomina *signatura*. Consideraremos que $\varepsilon_k = 1$ para todo $k \leq 0$.

Las matrices signo regulares son aquellas que tienen todos los menores del mismo orden de igual signo. A continuación presentamos una definición más formal.

Definición 1.22 (Signo regular). Decimos que una matriz A $n \times m$ es signo regular de orden k ($k \leq \min\{n, m\}$) con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, o simplemente

1.4. Matrices signo regulares y totalmente positivas

que A es SR_k con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, si

$$\varepsilon_j \det A[\alpha \mid \beta] \geq 0, \quad \forall \alpha, \beta \in Q_{j,k}, j = 1, \dots, k. \quad (1.17)$$

Si A es signo regular de orden k para todo $k = 1, \dots, \min\{n, m\}$ entonces diremos que A es signo regular, o que A es SR, con signatura ε . Diremos que una matriz es estrictamente SR (o estrictamente SR_k) si la desigualdad en (1.17) es estricta.

Definición 1.23 (Totalmente positiva). Si todos los menores de orden menor o igual que k de una matriz $n \times m$ ($k \leq \min\{n, m\}$) son no negativos se dice que la matriz es totalmente positiva de orden k , o simplemente que la matriz es TP_k . Si A es totalmente positiva de orden k para todo $k = 1, \dots, \min\{n, m\}$, se dice que A es totalmente positiva, o que A es TP. Si los menores son estrictamente positivos, diremos que la matriz es estrictamente TP (estrictamente TP_k).

Observemos que las matrices totalmente positivas son una subclase de las matrices signo regulares. En concreto una matriz TP es una matriz SR con signatura $(1, \dots, 1)$. Las matrices TP también son llamadas *totalmente no negativas* (véase [42]).

El interés de las matrices SR no singulares en muchas aplicaciones se debe a que pueden caracterizarse como aplicaciones lineales que disminuyen la variación de signo en las componentes de un vector. Definamos el número de cambios de signo en un vector para poder formalizar la propiedad mencionada.

Definición 1.24 (Variación de signo). Dado cualquier vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\mathcal{V}^-(x)$ al número mínimo de cambios de signo en las componentes consecutivas de x . Es decir,

$$\mathcal{V}^-(x) := \min\{k \mid \exists 1 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n, \text{ t.q. } (-1)^j x_{i_j} \geq 0 \\ \forall j \in \{0, \dots, k\} \text{ ó } (-1)^j x_{i_j} \leq 0 \forall j \in \{0, \dots, k\}\}.$$

La clave de la importancia de las matrices SR en las aplicaciones está en la llamada *propiedad de disminución de la variación*. El siguiente resultado recoge esta propiedad (véase Teorema 5.6 de [9]).

Teorema 1.25. Sea A una matriz $n \times n$ real no singular. Entonces A es SR si y sólo si $\mathcal{V}^-(Ax) \leq \mathcal{V}^-(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Schoenberg realizó un estudio teórico sobre el que se basan las aplicaciones que cumplen la propiedad de disminución de la variación en [87]. En [64] podemos encontrar aplicaciones de estas transformaciones. En cuanto a aplicaciones estadísticas de las matrices SR, tenemos [20]. Para aplicaciones en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador, véase [78].

El siguiente resultado corresponde al Teorema 2.1 de [9] restringido a matrices cuadradas y reduce el número de menores a considerar para determinar si una matriz es SR:

Teorema 1.26. *Sea A una matriz $n \times n$ de rango r . Si la ecuación (1.17) es válida cuando $d(\beta) \leq n - r$, entonces A es signo regular con signatura ε . En particular, si $\det A[\alpha | \beta] \geq 0$ es válido cuando $d(\beta) \leq n - r$, entonces A es totalmente positiva.*

Debido a un resultado de Fekete en un trabajo de Fekete y Pólya (véase [45]) la estricta signo regularidad se puede asegurar comprobando el signo de los menores que usan filas y columnas consecutivas (véase Teorema 2.5 de [9]).

Teorema 1.27. *Sea A una matriz $m \times n$. Si la desigualdad (1.17) es estricta cuando $d(\alpha) = 0 = d(\beta)$, entonces A es estrictamente signo regular.*

Más adelante veremos que para comprobar la total positividad y estricta total positividad todavía podemos reducir mucho más el número de menores.

El producto de matrices SR es una matriz SR, tal y como asegura el Teorema 3.1 de [9].

Teorema 1.28. *Sean A, B matrices signo regulares con signaturas $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ respectivamente. Entonces la matriz AB también es signo regular y tiene signatura $\varepsilon_A \cdot \varepsilon_B$.*

En particular, si A y B son totalmente positivas, entonces la matriz AB también será totalmente positiva.

Recordemos el siguiente resultado que corresponde al Corolario 6.6 de [9] y muestra una propiedad de los valores propios de las matrices SR.

Proposición 1.29. *Sea A una matriz $n \times n$ SR con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ y no singular. Se tiene que A tiene todos sus valores propios reales y, para*

1.4. Matrices signo regulares y totalmente positivas

$k \leq n$,

$$\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}} \lambda_k(A) > 0,$$

con $\varepsilon_0 := 1$. Observemos que si A es TP no singular entonces todos sus valores propios son reales y positivos.

Si imponemos que la matriz sea estrictamente SR, entonces podemos asegurar más propiedades espectrales como muestra el siguiente resultado (que se obtiene del Teorema 6.2 y del Teorema 6.3 de [9]).

Teorema 1.30. *Sea A una matriz $n \times n$ estrictamente signo regular con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Se tiene que todos los valores propios $\lambda_i(A)$ de A son reales y distintos, y*

$$\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}} \lambda_k(A) > |\lambda_{k+1}(A)|, \quad k \leq n,$$

con $\varepsilon_0 := 1$ y $\lambda_{n+1}(A) := 0$.

Además, el vector propio u_k de A asociado al k -ésimo valor propio $\lambda_k(A)$ cumple que

$$\mathcal{V}^-(u_k) = k - 1, \quad k \leq n.$$

El siguiente resultado, Teorema 3.3 de [9], recoge información acerca de submatrices, complementos de Schur e inversas de matrices SR.

Teorema 1.31. *Sea A una matriz $n \times n$ SR con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Entonces se tiene que*

- $A[\alpha \mid \beta]$ es SR con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ para todo $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ y $k \in \{1, \dots, n\}$.
- Si $\alpha \in Q_{k,n}$ con $d(\alpha) = 0$ y $A(\alpha)$ ($= A[\alpha^c]$) es invertible, entonces el complemento de Schur de $A(\alpha)$ en A , $A/A(\alpha)$, es SR con signatura $\varepsilon_\alpha = (\varepsilon_{n-k} \varepsilon_{n-k+i})_{1 \leq i \leq k}$.
- Si A es no singular, entonces $J_n A^{-1} J_n$ es SR con signatura $\varepsilon_J = (\varepsilon_n \varepsilon_{n-i})_{1 \leq i \leq n}$ (donde J_n es la matriz definida en (1.4)).

En particular, si A es TP, entonces $A[\alpha \mid \beta]$, $A/A(\alpha)$ y $J_n A^{-1} J_n$ también serán TP.

En cuanto al estudio de las matrices TP en particular, hemos de recordar algunos resultados existentes. Como el siguiente, que corresponde al Corolario 3.8 de [9] y asegura que una matriz TP no singular tiene todos los menores principales positivos.

Proposición 1.32. *Sea A una matriz $n \times n$ totalmente positiva. Si A es no singular, entonces $\det A[\alpha] > 0$ para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ y $k \leq n$.*

Veamos ahora que para reconocer que una matriz es TP o estrictamente TP podemos reducir considerablemente el número de menores con respecto a los casos SR y estrictamente SR, respectivamente. Empezamos por la caracterización de las matrices estrictamente TP (véase Teorema 4.1 de [51]).

Teorema 1.33. *Sea A una matriz $m \times n$. Entonces A es estrictamente TP si y sólo si para cada $k \leq \min\{m, n\}$ se tiene que $\det A[\alpha | 1, \dots, k] > 0$ para todo $\alpha \in Q_{k,m}$ con $d(\alpha) = 0$ y $\det A[1, \dots, k | \beta] > 0$ para todo $\beta \in Q_{k,n}$ con $d(\beta) = 0$.*

El siguiente resultado caracteriza las matrices TP no singulares (véase Teorema 3.1 de [52]).

Teorema 1.34. *Sea A una matriz $n \times n$. Entonces A es TP no singular si y sólo si para cada $k \leq n$ se tiene que $\det A[1, \dots, k] > 0$, $\det A[\alpha | 1, \dots, k] \geq 0$ para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ y $\det A[1, \dots, k | \beta] \geq 0$ para todo $\beta \in Q_{k,n}$.*

Sobre la descomposición de matrices TP, consideremos el Teorema 3.5 de [9]:

Teorema 1.35. *Sea A una matriz $n \times n$ TP. Entonces A se puede descomponer como $A = LU$, donde L (U , respectivamente) es triangular inferior (superior, respectivamente) y TP.*

Teniendo en cuenta que, por la Proposición 1.32, los menores principales directores de una matriz A TP no singular son positivos, deducimos que A tiene descomposición LDU . Por el Teorema 1.35 y el Teorema 1.28 podemos caracterizar estas matrices mediante dicha factorización.

Teorema 1.36. *Sea A una matriz cuadrada. Entonces A es TP si y sólo si $A = LDU$ con L y U TP triangular inferior y superior respectivamente, con unos en la diagonal principal y D diagonal con elementos diagonales positivos.*

1.4. Matrices signo regulares y totalmente positivas

Por el Teorema 2.1 de [54], podemos dar la descomposición LDU de las matrices estrictamente SR aunque no caracteriza dichas matrices.

Teorema 1.37. *Si A es estrictamente SR, entonces $A = LDU$ con L y U TP triangular inferior y superior respectivamente, con unos en la diagonal principal y D diagonal no singular.*

Las matrices TP no singulares están caracterizadas en términos de su descomposición bidiagonal (véase Definición 1.19), tal y como demuestra el Teorema 4.2 de [55].

Teorema 1.38. *Sea A una matriz $n \times n$ no singular. Se tiene que A es TP si y sólo si existe $\mathcal{BD}(A)$ (véase Definición 1.19) y se cumple*

1. $d_i > 0$ para todo $i \leq n$,
2. $l_i^{(k)}, u_i^{(k)} \geq 0$ para todo $k \leq n - 1$ y $n - k \leq i \leq n - 1$.

Por el Teorema 1.37 y el Teorema 1.38 podemos obtener la $\mathcal{BD}(A)$ para A una matriz estrictamente SR.

Por otro lado, las matrices estrictamente TP, las TP y las TP no singulares se pueden caracterizar por la eliminación de Neville mediante el Teorema 4.1, el Teorema 5.4 y el Corolario 5.5 de [51], respectivamente. Como ilustración de los resultados anteriores presentaremos la caracterización de las matrices estrictamente TP (Teorema 4.1 de [51]).

Teorema 1.39. *Sea A una matriz cuadrada. Entonces A es estrictamente TP si y sólo si la eliminación de Neville completa se puede llevar a cabo sin cambiar filas ni columnas y todos los pivotes son positivos.*

Observemos que las caracterizaciones anteriores permiten comprobar que una matriz $n \times n$ pertenece a las clases anteriores con $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones elementales. Mencionemos que las matrices SR (y las SR no singulares y las estrictamente SR) no se pueden caracterizar sólo mediante su eliminación de Neville completa. Véase el test de [28] de $\mathcal{O}(n^4)$ operaciones elementales.

Un resultado clásico sobre matrices TP es el conocido como Lema de las sombras (véase Lema A de [33]) que trata de la distribución de ceros en dichas matrices. Tal resultado se ha extendido a matrices SR_2 en el Lema 2.2 de [79], que presentamos a continuación.

Lema 1.40. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz SR_2 con signatura $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ y una entrada nula, $a_{ij} = 0$. Si $\varepsilon_2 = 1$ ($\varepsilon_2 = -1$, respectivamente), entonces se cumple una de las condiciones 1, 2, 3 o 4 (1, 2, 5 o 6, respectivamente).*

1. $a_{kj} = 0$ para todo $k \leq n$,
2. $a_{ik} = 0$ para todo $k \leq n$,
3. $a_{kl} = 0$ para todo $k \geq i$ y $l \leq j$,
4. $a_{kl} = 0$ para todo $k \leq i$ y $l \geq j$,
5. $a_{kl} = 0$ para todo $k \leq i$ y $l \leq j$,
6. $a_{kl} = 0$ para todo $k \geq i$ y $l \geq j$.

Otra importante subclase de las matrices TP son las matrices oscilatorias.

Definición 1.41 (Oscilatoria). *Dada una matriz $A n \times n$ y TP, diremos que A es oscilatoria si alguna potencia de A es estrictamente TP, es decir, si existe un entero k de manera que A^k es una matriz estrictamente TP.*

Recordemos algunas propiedades de las matrices oscilatorias, como la siguiente caracterización que podemos encontrar en el Teorema 4.2 de [9].

Teorema 1.42. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz TP. Se tiene que A es oscilatoria si y sólo si A es no singular y*

$$a_{i,i+1}, a_{i+1,i} > 0$$

para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Observemos que, tal y como se dice en la página 2 de [42], una matriz TP irreducible y no singular es una matriz oscilatoria.

El producto de una matriz oscilatoria por otra TP no singular tiene como resultado una matriz oscilatoria (véase Corolario 4.3 de [9]).

Corolario 1.43. *Sean A, B dos matrices $n \times n$ TP. Si A es oscilatoria y B es no singular, entonces tanto AB como BA son oscilatorias.*

1.5. Z–matrices, dominancia diagonal y clases de matrices relacionadas

Además, el producto de Hadamard de matrices Jacobi oscilatorias es, de nuevo, una matriz Jacobi oscilatoria (véase el Teorema 1 de [71]).

Teorema 1.44. *Sean A, B dos matrices $n \times n$ Jacobi oscilatorias. Entonces la matriz $A \circ B$ es Jacobi oscilatoria.*

Finalmente, presentamos las matrices signo consistentes (véase [64], [74]) Éstas forman una clase de matrices que generaliza a las matrices SR.

Definición 1.45 (Signo consistente). *Sea A una matriz $n \times n$ y sea $i \leq n$. Se dice que A es signo consistente de orden i , o que A es SC_i , con signo $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ si todos los menores de A tienen el mismo signo ε_i (no necesariamente estricto).*

Notemos que, por ejemplo, las matrices $n \times n$ TP_k son matrices SC_i con signo $+1$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. De hecho, una matriz $n \times n$ SR con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ es una matriz SC_i con signo ε_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

1.5. Z–matrices, dominancia diagonal y clases de matrices relacionadas

En esta sección presentaremos algunas clases de matrices importantes que se utilizarán en los Capítulos 3 y 4. Se trata de las Z–matrices, las M–matrices y las H–matrices, todas ellas ampliamente estudiadas por numerosos autores.

Empecemos definiendo la clase de las Z–matrices.

Definición 1.46 (Z–matriz). *Diremos que una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es una Z–matriz si tiene elementos extradiagonales no positivos, es decir si $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$.*

Una de las subclases de las Z–matrices más importantes la forman las M–matrices.

Definición 1.47 (M–matriz). *Sea A una Z–matriz. Diremos que A es una M–matriz si se puede expresar como $A = sI - B$, donde $B \geq 0$ y $s \geq \rho(B)$, siendo $\rho(B)$ el radio espectral de B .*

En realidad, son las M–matrices no singulares las que más protagonismo tienen a lo largo de la literatura. A continuación daremos un resultado que contiene varias caracterizaciones de las M–matrices no singulares (véase Teorema 2.5.3 de [59] o Teorema 2.3 del Capítulo 6 de [19]).

Teorema 1.48. *Sea A una Z–matriz $n \times n$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i) *A es una M–matriz no singular.*
- (ii) *A^{-1} es no negativa, $A^{-1} \geq 0$.*
- (iii) *Todos los menores principales de A son positivos: $\det A[\alpha] > 0$ para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ (es decir, A es P–matriz).*
- (iv) *Todos los menores principales directores de A son positivos: $\det A[1, \dots, k] > 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.*
- (v) *Todos los valores propios reales de A son positivos.*
- (vi) *Existe una matriz diagonal positiva D tal que AD es una matriz estrictamente diagonal dominante.*
- (vii) *$A = LU$, con L (U , respectivamente) una matriz triangular inferior (superior, respectivamente) con elementos diagonales positivos.*

En el Teorema 2.2 de [73] (véase también [68]) se estudió la relación entre las M–matrices y las matrices TP. De hecho, se demostró que la matriz inversa de una M–matriz Jacobi es TP.

Teorema 1.49. *Sea A una M–matriz $n \times n$ y no singular. Entonces A^{-1} es TP si y sólo si A es Jacobi.*

En el Capítulo 4 se estudiarán más detenidamente las M–matrices. En concreto se trabajará con M–matrices diagonal dominantes y se realizará un estudio más detallado de las mismas.

Las matrices Stieltjes son una subclase de las M–matrices que también serán consideradas más adelante.

Definición 1.50 (Stieltjes). *Diremos que A es una matriz Stieltjes si A es una M–matriz simétrica y no singular.*

Para presentar la siguiente clase importante de matrices, necesitamos definir la matriz de comparación de una matriz dada.

Definición 1.51 (Matriz de comparación). *Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, definimos la matriz de comparación de A como $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, donde*

$$m_{ij} := \begin{cases} |a_{ii}| & , \text{ si } i = j, \\ -|a_{ij}| & , \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Por último, definiremos otra clase de matrices que aparecerá en el Capítulo 3.

Definición 1.52. *Dada una matriz $A n \times n$, diremos que A es una H-matriz si su matriz de comparación $\mathcal{M}(A)$ es una M-matriz.*

1.6. Alta precisión relativa

En esta sección presentaremos el concepto de la alta precisión relativa y mencionaremos algunas situaciones en las que se pueden tener algoritmos con alta precisión relativa para ciertas clases de matrices.

Las tres fuentes principales de errores en la experimentación numérica son: errores de redondeo, datos imprecisos y errores de truncamiento. Estos últimos no tienen lugar en el contexto de este trabajo, por lo que no entraremos en más detalles. Los errores de redondeo son una consecuencia inevitable de trabajar en aritmética de precisión finita. No obstante podremos controlar dichos errores en muchas situaciones. Mediante el análisis de error backward, podremos reducir el problema de errores de redondeo a un problema de datos imprecisos. En general, el error *backward* (o regresivo) mide la perturbación del problema inicial para la que se obtienen los resultados computados como solución exacta. En contraste, el error *forward* (o progresivo), mide la distancia entre la solución exacta y la computada. Los errores backward y forward en un problema están relacionados mediante el condicionamiento del problema, es decir, la sensibilidad de la solución ante perturbaciones en los datos iniciales. Normalmente es muy difícil tratar de acotar directamente el error forward y suele ser más sencillo estudiar primero cotas para el error backward. Recordemos la fórmula clásica que se obtiene

tras un adecuado análisis de error y que permite reducir el análisis de error forward a un análisis de error backward:

$$\text{error forward} \leq \text{error backward} \times \text{número de condición.}$$

El número de condición depende intrínsecamente del problema a tratar, mientras que el error backward depende del método utilizado. En álgebra lineal numérica es habitual que el error backward dependa del llamado factor de crecimiento. De manera informal, se puede definir el *factor de crecimiento* asociado a un algoritmo como la variación del tamaño de los datos intermedios que aparecen a lo largo del algoritmo respecto al tamaño de los datos iniciales.

Como ejemplo del condicionamiento en el problema de la resolución de sistemas lineales mencionemos el *número de condición de una matriz* A :

$$\kappa_k(A) := \|A\|_k \|A^{-1}\|_k, \quad (1.18)$$

donde $k \in \{1, 2, \infty\}$ y $\|A\|_k$ denota la norma k de la matriz A como es habitual. El número de condición también se puede definir utilizando otras normas, pero en este trabajo sólo usaremos las definidas aquí ya que son las más utilizadas a lo largo de la literatura. Diremos que una matriz está *bien condicionada* si su número de condición es pequeño (próximo a cero). Por el contrario, una matriz está *mal condicionada* si su número de condición es grande.

Como hemos comentado anteriormente, para obtener cotas de error forward de un algoritmo dependemos del condicionamiento del problema. Sin embargo, hay una situación en la que se puede evitar esta dependencia y corresponde a los algoritmos con alta precisión relativa. Un algoritmo se puede llevar a cabo con *alta precisión relativa* si el error forward (es decir, la diferencia entre la solución exacta y la computada) es del orden de la unidad del error de redondeo (o precisión de la máquina, normalmente denotado por ϵ).

En [35] (página 52) se muestra que la condición suficiente para que un algoritmo se pueda llevar a cabo con alta precisión relativa es: *que el algoritmo sólo utilice productos, cocientes y sumas de números del mismo signo*. Es decir, la única operación que no se permite son las verdaderas restas. De modo que, si conocemos con alta precisión relativa los datos iniciales y el algoritmo cumple estas condiciones, entonces podremos obtener con alta precisión relativa las salidas o resultados del algoritmo. Además con una

aritmética de punto flotante bien implementada también se puede permitir la resta de datos iniciales sin perder la alta precisión relativa (véase página 53 de [35]).

En [35] se definen además las descomposiciones reveladoras del rango, un concepto importante ligado a los algoritmos con alta precisión relativa para el cálculo de valores singulares.

Definición 1.53 (RRD). *Sea A una matriz $n \times n$. Diremos que A tiene una descomposición reveladora del rango, o que A tiene una RRD, si podemos descomponer $A = XDY^T$, donde X, Y son matrices bien condicionadas y D es una matriz diagonal no singular.*

De hecho, en [35] se demostró que, si se conoce la descomposición reveladora del rango de una matriz con alta precisión relativa, entonces se puede calcular con alta precisión relativa su descomposición en valores singulares.

Notemos que, por supuesto, no todos los algoritmos pueden llevarse a cabo con alta precisión relativa. De hecho sólo se tienen algoritmos con alta precisión relativa para obtener algunos resultados (valores singulares, valores propios, resolución de ciertos sistemas de ecuaciones lineales, matrices inversas, etc.) de ciertas clases de matrices estructuradas; fundamentalmente se trata de matrices relacionadas con las Jacobi, con las matrices TP o con las M-matrices diagonal dominantes.

Un aspecto importante cuando se trata de algoritmos con alta precisión relativa son los parámetros a tener en cuenta. Dependiendo de la clase de matrices con la que se trabaje, serán necesarios unos parámetros u otros para poder encontrar algoritmos con alta precisión relativa.

En el caso de las matrices TP, Plamen Koev (véase [66] y [67]) obtuvo algoritmos con alta precisión relativa para calcular los valores singulares, los valores propios, la matriz inversa y resolver ciertos sistemas de ecuaciones lineales. Los parámetros naturales asociados a estas matrices son las entradas de la descomposición bidiagonal de la matriz (véase Definición 1.19). Recordemos que esos parámetros eran los multiplicadores y los pivotes diagonales de la eliminación de Neville.

En el caso de las M-matrices diagonal dominantes los parámetros que permiten obtener algoritmos con alta precisión relativa son las entradas

extradiagonales de la matriz y las sumas de filas o las sumas de columnas (véase [1], [2] y [36]). Para esta clase de matrices, y con adecuadas estrategias de pivotaje, se han obtenido utilizando estos parámetros algoritmos con alta precisión relativa para calcular una descomposición LDU , que es también una descomposición reveladora del rango (por tener L y U bien condicionadas). En consecuencia, se tienen algoritmos con alta precisión relativa para calcular los valores singulares (véase [38], [82] y [93]).

Capítulo 2

Matrices Jacobi Signo Regulares

En este capítulo se estudiarán las matrices Jacobi (o tridiagonales) signo regulares (SR) y alguna extensión de las mismas. En la Sección 2.1 se obtendrá una fórmula para el determinante de las matrices Jacobi. Después, en la Sección 2.2 se presentarán algunos resultados sobre las matrices Jacobi totalmente positivas (TP). A lo largo de la Sección 2.3 se obtendrán resultados que clasifiquen a las matrices Jacobi SR en función de su signatura. En la Sección 2.4 se presentarán nuevas caracterizaciones de dichas matrices y test para comprobar si una matriz Jacobi es SR. Más tarde, en la Sección 2.5, probaremos que las matrices Jacobi estrictamente diagonal dominantes no negativas son TP y caracterizaremos las matrices SR estrictamente diagonal dominantes. En la Sección 2.6 estudiaremos la signo regularidad de una clase de matrices que generaliza a las matrices Jacobi: las matrices k -bandeadas. Caracterizaremos las matrices signo regulares no singulares estrictamente k -bandeadas. Finalmente, la Sección 2.7 presenta las conclusiones principales de este capítulo.

Parte del material presentado en este capítulo ha sido publicado en [12].

2.1. Una fórmula para el determinante

En esta sección presentaremos una fórmula para el determinante de una matriz Jacobi. Observemos que la expresión del determinante de una matriz

desarrollado por una fila se reduce considerablemente al trabajar con matrices Jacobi. Es decir, si A es una matriz Jacobi en general su determinante vendrá dado por $\det A = a_{11} \det A[2, \dots, n] - a_{21} \det A[1, 3, \dots, n \mid 2, \dots, n]$. Y si desarrollamos un poco más esta ecuación tenemos que

$$\det A = a_{11} \det A[2, \dots, n] - a_{21} a_{12} \det A[3, \dots, n]. \quad (2.1)$$

El siguiente resultado generaliza la fórmula anterior. Antes de presentarlo notemos que si α es el conjunto vacío, diremos que $\det A[\alpha] = 1$. Por ejemplo, si A es una matriz $n \times n$, se tiene que $\det A[1, 0] = 1$ y $\det A[n + 1, n] = 1$.

Probemos ahora la siguiente expresión para calcular el determinante de una matriz Jacobi. Dicha fórmula aparece en la página 99 de [84] sin demostración. En el siguiente resultado incluimos una demostración.

Proposición 2.1. *Sea A una matriz $n \times n$ ($n > 3$) Jacobi, entonces*

$$\begin{aligned} \det A &= \det A[1, \dots, i] \cdot \det A[i + 1, \dots, n] \\ &\quad - a_{i, i+1} a_{i+1, i} \det A[1, \dots, i - 1] \cdot \det A[i + 2, \dots, n] \end{aligned} \quad (2.2)$$

para $i = 1, \dots, n - 1$.

Demostración. Si $i = 1$ ($i = n - 1$, respectivamente), la fórmula se reduce al caso trivial presentado en (2.1) (a un caso análogo, desarrollando el determinante por la última fila, respectivamente).

Para $i \in \{2, \dots, n - 2\}$, probaremos el resultado por inducción sobre i . Si $i = 2$, entonces desarrollamos el determinante de A y, puesto que se trata de una matriz Jacobi, tenemos que

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A[2, \dots, n] - a_{12} a_{21} \det A[3, \dots, n] \\ &= a_{11} (a_{22} \det A[3, \dots, n] - a_{23} a_{32} \det A[4, \dots, n]) - a_{12} a_{21} \det A[3, \dots, n] \\ &= (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \det A[3, \dots, n] - a_{11} a_{23} a_{32} \det A[4, \dots, n] \\ &= \det A[1, 2] \cdot \det A[3, \dots, n] - a_{23} a_{32} \det A[1] \cdot \det A[4, \dots, n]. \end{aligned}$$

Luego la fórmula (2.2) es válida para $i = 2$.

Supongamos que la ecuación se verifica para $i = k - 1$. Veamos que entonces es cierta también para $i = k$. Por hipótesis de inducción sabemos que

$$\begin{aligned} \det A &= \det A[1, \dots, k - 1] \cdot \det A[k, \dots, n] \\ &\quad - a_{k-1, k} a_{k, k-1} \det A[1, \dots, k - 2] \cdot \det A[k + 1, \dots, n]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2. Matrices Jacobi TP

Desarrollando un poco más $\det A[k, \dots, n]$ tenemos que

$$\det A[k, \dots, n] = a_{kk} \det A[k+1, \dots, n] - a_{k,k+1} a_{k+1,k} \det A[k+2, \dots, n],$$

y por lo tanto podemos escribir el producto $\det A[1, \dots, k-1] \det A[k, \dots, n]$ como

$$\begin{aligned} & \det A[1, \dots, k-1] a_{kk} \det A[k+1, \dots, n] \\ & - \det A[1, \dots, k-1] a_{k,k+1} a_{k+1,k} \det A[k+2, \dots, n]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Luego, por (2.3) y (2.4), tenemos que

$$\begin{aligned} \det A &= (\det A[1, \dots, k-1] a_{kk} \\ & - a_{k-1,k} a_{k,k-1} \det A[1, \dots, k-2]) \det A[k+1, \dots, n] \\ & - a_{k,k+1} a_{k+1,k} \det A[1, \dots, k-1] \det A[k+2, \dots, n]. \end{aligned}$$

Pero, teniendo en cuenta que $A[1, \dots, k]$ es Jacobi por serlo A y la definición del determinante de una matriz, se tiene que

$$\det A[1, \dots, k] = a_{kk} \det A[1, \dots, k-1] - a_{k-1,k} a_{k,k-1} \det A[1, \dots, k-2].$$

Por tanto, sustituyendo esto en la ecuación anterior queda probada la fórmula (2.2). □

2.2. Matrices Jacobi TP

Recordemos que, como hemos visto en el capítulo anterior, una subclase de las matrices SR son las matrices totalmente positivas, o matrices TP.

Puesto que en este capítulo se pretende estudiar y caracterizar a las matrices Jacobi signo regulares, vamos a presentar en esta sección algunos resultados concernientes a las matrices Jacobi TP.

El siguiente resultado forma parte del Teorema 2.3 de [9]:

Proposición 2.2. *Sea A una matriz $n \times n$ Jacobi. Si A es no negativa y $\det A[\alpha] \geq 0$ cuando $d(\alpha) = 0$, entonces A es totalmente positiva.*

Pinkus, en la página 100 de [84], ofrece un resultado que usa menos menores para la total positividad de las matrices Jacobi no negativas.

Teorema 2.3. *Sea A una matriz Jacobi y no singular. Se tiene que A es TP si y sólo si A es no negativa y $\det A[1, \dots, k] > 0$ para $k = 1, \dots, n$.*

A continuación, recordamos un resultado (véase Lema 6 de [62]) que relaja aún más estas condiciones suficientes para la total positividad de una matriz Jacobi. Este resultado se usará posteriormente.

Proposición 2.4. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz Jacobi y no negativa. Si $\det A[1, \dots, k] > 0$ para $k = 1, \dots, n - 2$, $\det A[1, \dots, n - 1] \geq 0$ y $\det A \geq 0$ entonces A es TP.*

Veamos ahora un resultado auxiliar relacionado y que también se aplica a matrices Jacobi no negativas.

Lema 2.5. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ($n \geq 3$) una matriz Jacobi no negativa. Si $\det A[1, \dots, k] > 0$ para $k = 1, \dots, n - 2$ y $\det A > 0$, entonces $\det A[1, \dots, n - 1] > 0$.*

Demostración. Primero veamos que $a_{nn} \neq 0$. Si $a_{nn} = 0$, entonces, aplicando la fórmula (2.2) para $i = n - 1$, tenemos que $\det A = -a_{n-1,n}a_{n,n-1} \det A[1, \dots, n - 2]$, donde $a_{n-1,n}a_{n,n-1} \geq 0$ y $\det A[1, \dots, n - 2] > 0$ por hipótesis. Por tanto, $\det A \leq 0$, lo que contradice la hipótesis de que A tiene determinante positivo. Luego $a_{nn} > 0$.

Si $a_{n-1,n}a_{n,n-1} = 0$, entonces $(0 <) \det A = a_{nn} \det A[1, \dots, n - 1]$. Luego $\det A[1, \dots, n - 1] > 0$.

Si $a_{n-1,n}a_{n,n-1} \neq 0$, por (2.2) tenemos que $\det A = a_{nn} \det A[1, \dots, n - 1] - a_{n-1,n}a_{n,n-1} \det A[1, \dots, n - 2]$, donde $\det A > 0$, $a_{n-1,n}a_{n,n-1} \geq 0$, $\det A[1, \dots, n - 2] > 0$ por hipótesis y $a_{nn} > 0$. Luego concluimos que $\det A[1, \dots, n - 1] > 0$.

□

Como consecuencia del resultado anterior, veamos que el Teorema 2.3 se puede mejorar usando $n - 1$ menores en lugar de n .

2.3. Clasificación de las matrices Jacobi SR

Teorema 2.6. *Sea A una matriz $n \times n$ ($n \geq 3$) Jacobi y no negativa. Se tiene que A es TP no singular si y sólo si $\det A[1, \dots, k] > 0$ para $k = 1, \dots, n-2$ y $\det A > 0$.*

Demostración. Si A es TP no singular sabemos, por la Proposición 1.32, que tiene sus menores principales positivos. En particular, serán positivos los $n-1$ menores del enunciado de este teorema.

Para demostrar el recíproco, utilizaremos el Lema 2.5 para probar que $\det A[1, \dots, n-1] > 0$. En consecuencia, tenemos una matriz Jacobi con todos sus menores principales directores positivos. Por lo tanto, por el Teorema 2.3, tenemos que A es TP no singular.

□

2.3. Clasificación de las matrices Jacobi SR

En esta sección probaremos que una matriz Jacobi, SR, no negativa y no singular es una matriz TP_{n-1} , por lo que sólo hay dos tipos de estas matrices en función de su signatura (dependiendo del signo del determinante). Veamos antes que la hipótesis de no singularidad es necesaria. Consideremos la siguiente matriz de tamaño 3×3 ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se trata de una matriz Jacobi, SR, no negativa (y singular) y tiene un menor de orden 2 negativo: $\det A[1, 2] = -1 < 0$, por lo que no puede ser TP_2 .

Para clasificar las matrices Jacobi SR, necesitaremos algunos resultados auxiliares. El siguiente lema muestra una propiedad esta clase de matrices que involucra al elemento $(1, 1)$.

Lema 2.7. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ($n \geq 3$) una matriz Jacobi, SR y no singular. Entonces $a_{11} \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que $a_{11} = 0$. Entonces $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$, ya que A es Jacobi y no singular. Así tenemos que $\det A[1, 2] = -a_{12}a_{21} < 0$, ya que

al ser A SR, todas sus entradas tienen el mismo signo. Sin embargo, también se tiene que o bien $a_{n,n-1} \neq 0$ o bien $a_{nn} \neq 0$, luego, por el mismo motivo, $\det A[2, n | 1, j] > 0$ para $j = n - 1$ o $j = n$. Lo cual contradice el hecho de que A sea SR.

□

A continuación estudiaremos el efecto de la eliminación Gaussiana sobre las matrices Jacobi SR no singulares.

Lema 2.8. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ($n \geq 3$) una matriz Jacobi, SR, no negativa y no singular. Podemos llevar a cabo un paso de eliminación Gaussiana (véase (1.6)) y la matriz $A^{(2)}[2, \dots, n]$ será también SR, no negativa y no singular.*

Demostración. Por el Lema 2.7, se tiene que $a_{11} \neq 0$ y por lo tanto podemos llevar a cabo un paso de eliminación Gaussiana (sin cambiar filas) para obtener la matriz $A^{(2)}$ (véase (1.6)). Ahora, si $a_{21} = 0$, entonces $A^{(2)} = A$ y el resultado es obvio.

A partir de ahora, supongamos que $a_{21} \neq 0$. Entonces se tiene para cualquier $k \leq n - 1$ e índices $(2 \leq) i_1 \leq \dots \leq i_k (\leq n)$ y $(2 \leq) j_1 \leq \dots \leq j_k (\leq n)$ que

$$\det A^{(2)}[i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k] = \frac{\det A[1, i_1, \dots, i_k | 1, j_1, \dots, j_k]}{a_{11}}. \quad (2.5)$$

Y puesto que A es SR, concluimos que la matriz $A^{(2)}[2, \dots, n]$ también es SR. Claramente es también no singular por ser $\det A = a_{11} \det A^{(2)}[2, \dots, n]$.

Por otro lado, como A es Jacobi, sabemos que $a_{31} = 0$, pero por ser A no singular (y no negativa), ha de existir $j > 1$ tal que $a_{3j} > 0$. Por tanto $\det A[1, 3 | 1, j] = a_{11} a_{3j} > 0$ y así, todos los menores de A de orden 2 son no negativos. De esta forma, deducimos de (2.5) y del hecho de que $a_{11} > 0$ que para cualquier $i, j > 1$, $a_{ij}^{(2)} \geq 0$, quedando así demostrado el resultado.

□

Observemos que si una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es Jacobi, SR, no negativa y satisface que $a_{i+1,i} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$, entonces se puede

2.3. Clasificación de las matrices Jacobi SR

comprobar rápidamente que A es TP_{n-1} ; basta tomar el determinante de las submatrices que tienen estas entradas como elementos diagonales, $\det A[2, \dots, 2 \mid 1, \dots, k-1]$. De manera análoga, se deduce la misma conclusión si los elementos $a_{i,i+1} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Sin embargo, el caso general requiere un estudio más profundo y mediante el siguiente resultado se pueden clasificar las matrices Jacobi, SR, no singulares.

Teorema 2.9. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ($n \geq 2$) una matriz Jacobi, no negativa y no singular. Se tiene que A es SR si y sólo si A es TP_{n-1} .*

Demostración. Si A es TP_{n-1} , es evidente que A es SR, ya que A es una matriz $n \times n$.

Supongamos ahora que la matriz A es SR, probaremos por inducción sobre n que A es TP_{n-1} . Si $n = 2$, A es TP_{n-1} por ser no negativa. Si $n > 2$, supongamos que el resultado es válido para $n-1$ y lo vamos a probar para n .

Sabemos, por el Lema 2.8, que podemos llevar a cabo un paso de eliminación Gaussiana y la submatriz resultante $A^{(2)}[2, \dots, n]$ será SR, no negativa y no singular. Y puesto que esta submatriz es también Jacobi, tenemos, por la hipótesis de inducción, que $A^{(2)}[2, \dots, n]$ es TP_{n-2} . Por lo tanto, podemos concluir que la matriz $A^{(2)}$ es TP_{n-2} .

Además tenemos que podemos escribir matricialmente el paso de eliminación Gaussiana como

$$A = L_1 A^{(2)}, \quad L_1 := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

donde la matriz bidiagonal y no negativa L_1 es TP. Puesto que hemos expresado A como producto de una matriz TP y de una TP_{n-2} , y utilizando el Teorema 1.28, llegamos a la conclusión de que A también es TP_{n-2} .

Ya sólo nos queda encontrar un menor positivo de orden $n-1$ para probar que A es TP_{n-1} . Observemos la siguiente fórmula, que se deduce de (2.5):

$$\det A[1, \dots, n-1] = a_{11} \det A^{(2)}[2, \dots, n-1]. \quad (2.6)$$

Recordemos que, por el Lema 2.7, $a_{11} > 0$. También tenemos que, por ser $A^{(2)}[2, \dots, n]$ TP $_{n-2}$, $\det A^{(2)}[2, \dots, n-1] \geq 0$. Ahora bien, si $\det A^{(2)}[2, \dots, n-1] > 0$ entonces $\det A[1, \dots, n-1] > 0$ (por (2.6)) y el resultado estaría probado.

En cambio, si $\det A^{(2)}[2, \dots, n-1] = 0$, como $A^{(2)}$ es Jacobi y $n > 2$, podemos escribir por (2.2) $\det A^{(2)}[2, \dots, n]$ como

$$\begin{aligned} & a_{nn}^{(2)} \det A^{(2)}[2, \dots, n-1] - a_{n-1,n}^{(2)} a_{n,n-1}^{(2)} \det A^{(2)}[2, \dots, n-2] \\ & = -a_{n-1,n} a_{n,n-1} \det A^{(2)}[2, \dots, n-2]. \end{aligned}$$

De nuevo por ser $A^{(2)}[2, \dots, n]$ TP $_{n-2}$, tenemos que $\det A^{(2)}[2, \dots, n-2] \geq 0$. Pero además este menor no puede ser nulo porque $A^{(2)}$ (y, por tanto, $A^{(2)}[2, \dots, n]$) es no singular. Luego el menor es positivo y así tenemos que $\det A^{(2)}[2, \dots, n] < 0$. Por tanto $\det A = a_{11} \det A^{(2)}[2, \dots, n] < 0$, y de este modo tenemos que

$$\det A = a_{nn} \det A[1, \dots, n-1] - a_{n-1,n} \det A[1, \dots, n-2, n \mid 1, \dots, n-1] < 0. \quad (2.7)$$

Finalmente, y puesto que $\det A[1, \dots, n-1] = 0$, podemos deducir, por (2.7), que

$$\det A[1, \dots, n-2, n \mid 1, \dots, n-1] > 0.$$

Y éste es el menor positivo de orden $n-1$ que buscábamos.

□

Dado que una matriz SR es o bien no negativa, o bien no positiva, podemos deducir el siguiente resultado:

Corolario 2.10. *Sea A una matriz $n \times n$ ($n \geq 2$) Jacobi y no singular. Se tiene que A es SR si y sólo si A es TP $_{n-1}$ o $-A$ es TP $_{n-1}$.*

Como consecuencia del resultado anterior, en la siguiente nota clasificamos por su signatura todas las matrices Jacobi SR no singulares.

Nota 2.11. *En definitiva, las matrices Jacobi SR no singulares sólo pueden tener una de estas 4 signaturas: $(1, \dots, 1)$, $(1, \dots, 1, -1)$, $(-1, 1, \dots, (-1)^n)$ o, por último, $(-1, 1, \dots, (-1)^{n-1}, (-1)^{n-1})$. Dada una matriz Jacobi, SR, no singular y no negativa (consideraremos su opuesta si es no positiva), únicamente hay que caracterizar los dos posibles casos: las matrices TP y las de signatura $\varepsilon = (1, \dots, 1, -1)$ (es decir, las matrices que tienen todos sus menores no negativos y su determinante es negativo).*

2.3. Clasificación de las matrices Jacobi SR

En [62], puede verse un estudio con más resultados sobre matrices SR con la signatura $(1, \dots, 1, -1)$.

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 2.9. Satisface las hipótesis de la Proposición 2.4 pero cambia $\det A[1, \dots, n-1] \geq 0$ por la condición $\det A[1, \dots, n-1] = 0$, cambia $\det A \geq 0$ por la no singularidad de A y añade la hipótesis de signo regularidad. Y así, la conclusión es distinta a la de la Proposición 2.4. Observemos, además, que este corolario se aplica a matrices no negativas (ya que, por hipótesis, se trata de matrices SR con $a_{11} > 0$).

Corolario 2.12. *Sea A una matriz $n \times n$ ($n \geq 2$) Jacobi, SR y no singular. Si $\det A[1, \dots, k] > 0$ para $k = 1, \dots, n-2$ y $\det A[1, \dots, n-1] = 0$, entonces A tiene signatura $(1, \dots, 1, -1)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.9, tenemos que o bien A es TP o bien tiene signatura $(1, \dots, 1, -1)$. Teniendo en cuenta que $\det A[1, \dots, n-1] = 0$ tenemos, por la Proposición 1.32, que A no puede ser TP, por lo que ha de tener signatura $(1, \dots, 1, -1)$.

□

Recordemos que una matriz es totalmente negativa si tiene todos sus menores no positivos (véase [21], [22], [23], [24], [29], [43], [60], [80]). Para finalizar la sección, haremos una observación consecuencia del Teorema 2.9 sobre la total negatividad de las matrices SR y presentaremos otra clase de matrices: las Jacobi reversas.

Nota 2.13. *Una matriz $n \times n$ ($n \geq 3$) SR, Jacobi y no singular no puede ser totalmente negativa.*

Definición 2.14 (Jacobi reversa). *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz $n \times n$ que verifica que los elementos fuera de la diagonal secundaria ($a_{i, n-i+1}$ para $i = 1, \dots, n$), la subdiagonal secundaria ($a_{i, n-i+2}$ para $i = 2, \dots, n$) y la superdiagonal secundaria ($a_{i, n-i}$ para $i = 1, \dots, n-1$) son nulos. En ese caso diremos que A es una matriz Jacobi reversa.*

Dada una matriz no negativa no singular A de este tipo, de nuevo existen sólo dos posibles signaturas dependiendo del signo del determinante de A , tal y como asegura el siguiente resultado. Pero antes recordemos que dado un

número real x , denotaremos por $\lfloor x \rfloor$ al mayor número entero menor o igual que x .

Corolario 2.15. *Sea A una matriz $n \times n$ Jacobi reversa, no negativa y no singular. Si A es SR con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ entonces, para $i = 1, \dots, n-1$,*

$$\varepsilon_i = (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}. \quad (2.8)$$

Demostración. Consideremos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Observemos que P es SR y su signatura viene dada por la expresión (2.8) pero extendida para $i = 1, \dots, n$.

Ahora tenemos, por el Teorema 1.28, que AP es SR. Además, AP es no singular, no negativa (por serlo A y P) y Jacobi. Luego, por el Teorema 2.9, tenemos que AP es TP_{n-1} . Pero notemos que $P^{-1} = P$, por lo que $(AP)P = A$. Es decir, por el Teorema 1.28, A es signo regular y con las $n-1$ primeras componentes de su signatura dadas por (2.8). Notemos que el determinante de A puede ser positivo o negativo.

□

2.4. Caracterizaciones y test

En esta sección se utilizará la clasificación de las matrices Jacobi SR no singulares de la sección anterior para caracterizar dichas matrices. Además incluiremos test para reconocerlas.

El siguiente teorema ofrece una caracterización de las matrices Jacobi SR no singulares, en términos de pivotes de la eliminación Gaussiana. A partir de este resultado, se podrá desarrollar un test de bajo coste computacional para comprobar si una matriz Jacobi no singular es SR.

Teorema 2.16. *Sea A una matriz $n \times n$ ($n \geq 3$) Jacobi, no negativa y no singular. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

2.4. Caracterizaciones y test

(i) A es SR.

(ii) Las submatrices $A[1, \dots, n-1]$ y $A[2, \dots, n]$ son TP y tanto $A[1, \dots, n-2]$ como $A[2, \dots, n-1]$ son no singulares.

(iii) Si p_1, \dots, p_{n-1} son los primeros $n-1$ pivotes de la eliminación Gaussiana de A y q_1, \dots, q_{n-1} son los pivotes de la eliminación Gaussiana de $A[2, \dots, n]$, entonces

$$p_1, \dots, p_{n-2} > 0, \quad q_1, \dots, q_{n-2} > 0 \quad \text{y} \quad p_{n-1}, q_{n-1} \geq 0$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Como A es Jacobi y SR sabemos, por el Teorema 2.9, que A es TP_{n-1} . Por lo tanto, las submatrices $A[1, \dots, n-1]$ y $A[2, \dots, n]$ son TP. Veamos ahora que las submatrices $A[1, \dots, n-2]$ y $A[2, \dots, n-1]$ son no singulares. Si $\det A > 0$ entonces A es TP y no singular y entonces, por la Proposición 1.32, sus menores principales son positivos (en particular nuestras dos submatrices son no singulares). En cambio si $\det A < 0$, observemos que podemos escribir

$$\det A = a_{nn} \det A[1, \dots, n-1] - a_{n-1,n} a_{n,n-1} \det A[1, \dots, n-2].$$

Y como $a_{nn} \geq 0$ y $\det A[1, \dots, n-1] \geq 0$, deducimos que $\det A[1, \dots, n-2] > 0$. Además, como

$$0 < \det A[1, \dots, n-2] = a_{11} \det A[2, \dots, n-2] - a_{1,2} a_{2,1} \det A[3, \dots, n-2],$$

podemos decir que $\det A[2, \dots, n-2] > 0$. Y puesto que $0 \leq \det A[2, \dots, n] = a_{nn} \det A[2, \dots, n-1] - a_{n-1,n} a_{n,n-1} \det A[2, \dots, n-2]$, concluimos que $\det A[2, \dots, n-1] > 0$.

(ii) \Rightarrow (i). Como A es no singular sabemos, por el Teorema 1.26, que para demostrar que A es SR basta con comprobar que $\varepsilon_k \det A[\alpha \mid \beta] \geq 0$ para $k = 1, \dots, n$ y $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$, con $d(\beta) = 0$. Puesto que nuestra matriz A es cuadrada, es suficiente con comprobarlo para todo $k \leq n-1$.

Si $\alpha, \beta \subseteq \{1, \dots, n-1\}$, entonces $\det A[\alpha \mid \beta] \geq 0$ por la total positividad de la matriz $A[1, \dots, n-1]$.

Si $\alpha_k = n \neq \beta_k$, entonces $\det A[\alpha \mid \beta] = a_{n,\beta_k} \det A[\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \mid \beta_1, \dots, \beta_{k-1}]$ (recordemos que $a_{nj} = 0$ para todo $j \in \{\beta_1, \dots, \beta_{k-1}\}$). Además, como $A[1, \dots, n-1]$ es TP y los conjuntos $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\} \subseteq \{1, \dots, n-1\}$

$1\}$ y $\{\beta_1, \dots, \beta_{k-1}\} \subseteq \{1, \dots, n-2\}$, tenemos que $\det A[\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \mid \beta_1, \dots, \beta_{k-1}] \geq 0$. Por tanto $\det A[\alpha \mid \beta] \geq 0$.

Si $\alpha_k \neq n = \beta_k$, este caso es análogo al anterior, así tendremos $\det A[\alpha \mid \beta] = a_{\alpha_k, n} \det A[\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \mid \beta_1, \dots, \beta_{k-1}] \geq 0$.

Si $\alpha_k = \beta_k = n$, observemos que $\beta_1 > 1$, ya que $d(\beta) = 0$ y $\beta \in Q_{k, n}$, con $k \leq n-1$. De modo que tenemos dos subcasos:

Si $\alpha_1 > 1$, entonces $\det A[\alpha \mid \beta] \geq 0$ puesto que $A[2, \dots, n]$ es TP. Y si $\alpha_1 = 1$ entonces el caso es similar al caso $\alpha_k = n \neq \beta_k$ visto anteriormente.

(ii) \Rightarrow (iii). Como $A[1, \dots, n-2]$ es TP y no singular sabemos, por la Proposición 1.32, que todos sus menores principales son positivos. Así, por (1.7), tenemos que todos los pivotes p_1, \dots, p_{n-2} son positivos. De manera análoga se prueba que todos los pivotes q_1, \dots, q_{n-2} también son positivos. Ahora, como $0 \leq \det A[1, \dots, n-1]$ y $0 < \det A[1, \dots, n-2]$, deducimos de nuevo por (1.7) que $p_{n-1} \geq 0$. De manera similar se prueba que $q_{n-1} \geq 0$.

(iii) \Rightarrow (ii). El hecho de que los pivotes p_1, \dots, p_{n-2} sean positivos implica, por (1.7), que $\det A[1, \dots, k] > 0$ para $1 \leq k \leq n-2$, y como $p_{n-1} \geq 0$ deducimos de nuevo por (1.7) que $\det A[1, \dots, n-1] \geq 0$. Luego, por la Proposición 2.4, tenemos que la matriz $A[1, \dots, n-1]$ es TP. De manera análoga, la positividad de los pivotes q_1, \dots, q_{n-2} y la no negatividad de q_{n-1} implican que la matriz $A[2, \dots, n]$ es TP. Por supuesto, las matrices $A[1, \dots, n-2]$ y $A[2, \dots, n-1]$ son no singulares, ya que hemos demostrado que tienen determinante positivo.

□

Observemos dos hechos relacionados con este último teorema:

- Mientras que en el caso de las matrices TP basta con comprobar los menores principales directores, para las matrices SR con signatura $(1, \dots, 1, -1)$ es necesario estudiar también la submatriz $A[2, \dots, n]$ (condiciones (ii) del teorema anterior). Un ejemplo que ilustra la necesidad de esta hipótesis lo proporciona la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Caracterizaciones y test

Esta matriz verifica $\det A[1] = 1 > 0$, $\det A[1, 2] = 1 > 0$ y $\det A = -7 < 0$. Pero sin embargo no es SR ya que $\det A[2, 3] = -5$ es un menor de orden 2 que es negativo.

- Los menores $\det A[2, \dots, n]$ y $\det A[1, \dots, n-1]$ pueden ser nulos (tal y como recogen las condiciones (ii) del Teorema 2.16) en el caso de que la matriz Jacobi no negativa sea SR no singular con signatura $(1, \dots, 1, -1)$. Ejemplos de estas situaciones son, respectivamente, las siguientes matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El siguiente resultado recoge una propiedad de las matrices Jacobi SR con signatura $(1, \dots, 1, -1)$ (véase Teorema 3 de [30]) que permitirá reducir la complejidad del test que presentamos.

Teorema 2.17. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz SR con signatura $(1, \dots, 1, -1)$ y no singular. Entonces $a_{ij} \neq 0$ para $|i - j| < 2$.*

Observemos que, por el teorema anterior, una matriz Jacobi con una entrada nula en la subdiagonal o en la superdiagonal no podrá ser SR con signatura $(1, \dots, 1, -1)$. Podemos utilizar este hecho para reducir el número de operaciones a realizar para comprobar si una matriz Jacobi es SR.

A continuación presentamos un test basado en las condiciones (iii) del Teorema 2.16, pero que también utiliza algunos de los resultados vistos anteriormente. Concretamente, la Proposición 2.4, el Corolario 2.10, el Corolario 2.12 y el Teorema 2.17.

Veamos ahora que el coste computacional de este test es muy bajo: tan sólo $\mathcal{O}(n)$ operaciones elementales. En el test, en el peor de los casos se lleva a cabo eliminación Gaussiana a dos matrices Jacobi de órdenes n y $n - 1$ ($A[1, \dots, n-1]$ y $A[2, \dots, n]$, respectivamente). Puesto que las matrices son Jacobi, en cada paso de la eliminación Gaussiana sólo es necesario calcular el pivote

$$p_i = a_{ii}^{(i-1)} - a_{i-1,i}^{(i-1)} \frac{a_{i,i-1}^{(i-1)}}{a_{i-1,i-1}^{(i-1)}} = a_{ii} - a_{i-1,i} \frac{a_{i,i-1}}{p_{i-1}},$$

lo que conlleva tres operaciones elementales (1 producto, 1 división y 1 resta). Notemos que $p_1 = a_{11}$ y que también se utiliza el pivote p_n . El cálculo de

Algoritmo 1 Verifica si una matriz $A \geq 0$ Jacobi no singular es SR

Entradas: $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \geq 0$

```

1: for  $i = 1, \dots, n - 2$  do
2:    $p_i = i$ -ésimo pivote de  $A$ 
3:   if  $p_i \leq 0$  then
4:      $A$  no es SR.
5:   end if
6: end for
7:  $p_{n-1} = (n - 1)$ -ésimo pivote de  $A$ 
8: if  $p_{n-1} < 0$  then
9:    $A$  no es SR.
10: else
11:    $p_n = n$ -ésimo pivote
12:   if  $((p_{n-1} > 0)$  and  $(p_n \geq 0))$  then
13:      $A$  es TP.
14:   else
15:     for  $i = 2, \dots, n$  do
16:       if  $((a_{i,i-1} = 0)$  or  $(a_{i-1,i} = 0))$  then
17:          $A$  no es SR.
18:       end if
19:     end for
20:     for  $i = 1, \dots, n - 2$  do
21:        $q_i = i$ -ésimo pivote de  $A[2, \dots, n]$ 
22:       if  $q_i \leq 0$  then
23:          $A$  no es SR.
24:       end if
25:     end for
26:      $q_{n-1} = (n - 1)$ -ésimo pivote de  $A[2, \dots, n]$ 
27:     if  $q_{n-1} < 0$  then
28:        $A$  no es SR.
29:     else
30:        $A$  es SR con signatura  $(1, \dots, 1, -1)$ .
31:     end if
32:   end if
33: end if

```

los pivotes q_1, \dots, q_{n-1} tiene un coste computacional similar. Por lo tanto, tenemos que el coste computacional total del test es de $2n - 3$ productos, otras tantas divisiones y el mismo número de restas. Para terminar, cabe resaltar que utilizar este test para comprobar si una matriz es SR es un método estable porque estamos aplicando eliminación Gaussiana sobre dos matrices TP (véase [32]).

Observemos que en el anterior test la no singularidad de la matriz era una hipótesis. Presentamos a continuación una ligera variante del test que no precisa de esa hipótesis y se puede aplicar a cualquier matriz Jacobi no negativa para estudiar si es SR no singular. El test finalizará si se detecta que la matriz no cumple alguna de estas dos propiedades.

Notemos que en la línea 17 del Algoritmo 2 anterior hay dos posibles casos: el primero $p_{n-1} = 0, p_n > 0$ no puede darse (véase el Lema 2.5), y la otra posibilidad $p_{n-1} \geq 0, p_n < 0$ podría corresponder a una matriz SR no singular con signatura $(1, \dots, 1, -1)$ y por eso continúa el algoritmo.

Nota 2.18. *Recordemos que en los resultados de esta sección se ha trabajado con matrices Jacobi no negativas. Pero estos mismos resultados pueden aplicarse a otros tipos de matrices como matrices Jacobi no positivas, Jacobi reversas no negativas y Jacobi reversas no positivas. Dada una matriz A Jacobi no positiva, podremos aplicar estos teoremas a su matriz opuesta $-A$, que es Jacobi no negativa. Si se tiene una matriz A que sea Jacobi reversa, aplicaremos los resultados a la matriz AP (que es Jacobi) donde $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es la matriz que tiene 1 en su diagonal secundaria y 0 en el resto de sus entradas (véase (2.9)).*

A continuación presentamos a modo de ejemplo algunas matrices que ilustrarán el funcionamiento del Algoritmo 2.

- Aplicaremos el test a la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & & & \\ 0 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que los 2 primeros pivotes de A , $p_1 = 5$ y $p_2 = 3$, son positivos. Calculamos $p_3 = \frac{11}{3}$ y $p_4 = -\frac{2}{11}$. Como $p_4 < 0$ la matriz A no puede ser TP. A continuación comprobamos si los elementos de la

Algoritmo 2 Verifica si una matriz $A \geq 0$ Jacobi es SR no singular

Entradas: $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \geq 0$

```

1: for  $i = 1, \dots, n - 2$  do
2:    $p_i = i$ -ésimo pivote de  $A$ 
3:   if  $p_i \leq 0$  then
4:      $A$  no es SR no singular.
5:   end if
6: end for
7:  $p_{n-1} = (n - 1)$ -ésimo pivote de  $A$ 
8: if  $p_{n-1} < 0$  then
9:    $A$  no es SR no singular.
10: else
11:    $p_n = n$ -ésimo pivote
12:   if  $(p_n = 0)$  then
13:      $A$  es singular.
14:   else
15:     if  $((p_{n-1} > 0)$  and  $(p_n > 0))$  then
16:        $A$  es TP no singular.
17:     else
18:       for  $i = 2, \dots, n$  do
19:         if  $((a_{i,i-1} = 0)$  or  $(a_{i-1,i} = 0))$  then
20:            $A$  no es SR no singular.
21:         end if
22:       end for
23:       for  $i = 1, \dots, n - 2$  do
24:          $q_i = i$ -ésimo pivote de  $A[2, \dots, n]$ 
25:         if  $q_i \leq 0$  then
26:            $A$  no es SR no singular.
27:         end if
28:       end for
29:        $q_{n-1} = (n - 1)$ -ésimo pivote de  $A[2, \dots, n]$ 
30:       if  $q_{n-1} < 0$  then
31:          $A$  no es SR no singular.
32:       else
33:          $A$  es SR no singular con signatura  $(1, \dots, 1, -1)$ .
34:       end if
35:     end if
36:   end if
37: end if

```

2.4. Caracterizaciones y test

subdiagonal y los de la superdiagonal son no nulos, pero como $a_{21} = 0$ concluimos que A **no es SR no singular** sin necesidad de calcular los pivotes de la submatriz $A[2, 3, 4]$. Notemos que en este caso el menor $\det A[2, 3, 4] = -2 < 0$ hace que no se cumplan las condiciones (ii) del Teorema 2.16. Mencionemos finalmente que esta matriz es no singular y no es SR.

- Consideremos ahora la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -7 & & \\ 0 & -3 & -1 & \\ & -1 & -4 & -1 \\ & & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como B es no positiva, aplicaremos el test a la matriz $-B$. Puesto que la submatriz principal $(-B)[1, 2, 3]$ coincide con la del ejemplo anterior $A[1, 2, 3]$, los 3 primeros pivotes son los mismos, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$ y $p_3 = \frac{11}{3}$ (son positivos). Además, el último pivote de la matriz también es positivo $p_4 = \frac{19}{11}$. Recordemos que este hecho es equivalente a que los menores principales directores de la matriz sean positivos. Luego la matriz $-B$ es TP no singular. Por lo tanto, nuestra matriz B **es SR no singular con signatura** $(-1, 1, -1, 1)$.

- Por último, tenemos la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & & \\ 1 & 5 & 1 & \\ & 1 & 3 & 1 \\ & & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una vez más tenemos que los 2 primeros pivotes de nuestra matriz son positivos, $p_1 = 2$ y $p_2 = \frac{1}{2}$. El siguiente pivote también es positivo, $p_3 = 1$. Sin embargo $p_4 = -1$ y por lo tanto C tiene determinante negativo, por lo que no puede ser TP. Como los elementos de la subdiagonal y los de la superdiagonal son no nulos, hemos de calcular los pivotes de la submatriz $C[2, 3, 4]$: $q_1 = 5$, $q_2 = \frac{14}{5}$ y $q_3 = \frac{2}{7}$. Como son todos positivos concluimos que C **es SR no singular con signatura** $(1, 1, 1, -1)$.

2.5. Matrices Jacobi diagonal dominantes

En esta sección se pretende estudiar la propiedad de dominancia diagonal estricta (véase Definición 1.7) en las matrices Jacobi no negativas.

El siguiente resultado corresponde (suprimiendo el apartado (iii)) al Teorema 6.1.10 de [58] y en él está incluido (en el apartado (i)) el conocido Teorema de Levy–Desplanques.

Teorema 2.19. *Sea A una matriz estrictamente diagonal dominante. Entonces:*

- (i) *A es invertible.*
- (ii) *Además, si todos los elementos de la diagonal principal de A son positivos, entonces todos los valores propios de A tienen parte real positiva.*

Observemos que dada una matriz estrictamente diagonal dominante con elementos diagonales positivos, podemos asegurar que su determinante será positivo, ya que el determinante de una matriz es igual al producto de sus valores propios y dicho producto será positivo por el apartado (ii) del teorema anterior. Por tanto podemos deducir el siguiente corolario del resultado anterior.

Corolario 2.20. *Sea A una matriz estrictamente diagonal dominante con todos los elementos diagonales positivos. Entonces $\det A > 0$.*

El siguiente teorema cumple con el objetivo de esta sección: estudiar la dominancia diagonal estricta en las matrices Jacobi no negativas. De hecho, concluiremos que estas matrices son TP.

Teorema 2.21. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz Jacobi estrictamente diagonal dominante y no negativa. Entonces A es TP.*

Demostración. Como A es no negativa y estrictamente diagonal dominante, sus elementos diagonales han de ser positivos ($a_{ii} > 0$ para todo $i \leq n$). Por tanto, por el Corolario 2.20, podemos asegurar que su determinante es positivo.

2.6. Matrices SR estrictamente k -bandeadas

Por otro lado, cualquier submatriz principal de A será no negativa y estrictamente diagonal dominante por serlo A . Luego podemos aplicar el razonamiento anterior para deducir que cualquier menor principal de A es positivo. Finalmente, utilizaremos la Proposición 2.2 para concluir que A es TP.

□

Observemos que del Corolario 2.20 se deduce que una matriz A SR estrictamente diagonal dominante no negativa es una P -matriz y, por tanto, TP. Si A es no positiva, aplicamos el mismo resultado a $-A$ y deducimos que A es opuesta de TP. En conclusión, se tiene el siguiente resultado que caracteriza las matrices SR estrictamente diagonales dominantes.

Teorema 2.22. *Sea A una matriz estrictamente diagonal dominante. Se tiene que A es SR si y sólo si A es TP u opuesta de TP.*

2.6. Matrices SR estrictamente k -bandeadas

Comenzaremos esta sección con una definición que motivará una extensión de las matrices Jacobi que vamos a estudiar en este apartado.

Definición 2.23. *Decimos que una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es estrictamente Jacobi si $a_{ij} = 0$ cuando $|i - j| > 1$ y además $a_{ij} \neq 0$ cuando $|i - j| = 1$.*

En el Teorema 2.31 de esta sección veremos que una matriz Jacobi SR o bien es TP u opuesta de TP o bien estrictamente Jacobi. En esta sección analizaremos la extensión del concepto de matriz SR estricta Jacobi al concepto de matriz SR estricta k -bandeada, caracterizando de varias formas dichas matrices.

Empezaremos recordando un resultado (véase Teorema 3.3 de [30]) que extiende el Teorema 2.17 para matrices con signatura $(1, \dots, 1, -1)$ a matrices con otras signaturas. Pero antes veamos algunos casos (a), (b) y (c) excluidos en el siguiente resultado y que corresponden, respectivamente, a los casos en los que $-A$, PA o $-PA$ son matrices TP (recordemos que presentamos P en (2.9)). Dada $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$, la signatura de una matriz $n \times n$ SR, consideremos los siguientes casos:

- (a) $\varepsilon_i = (-1)^i$ para todo $i \leq n$.
- (b) $\varepsilon_i = (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ para todo $i \leq n$.
- (c) $\varepsilon_i = (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} + 1 \rfloor}$ para todo $i \leq n$.

Proposición 2.24. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz SR no singular con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ que no corresponde a ninguno de los casos (a) – (c). Si existe un número entero positivo k con $2 < k \leq n$ tal que $\varepsilon_i = +1$ para todo $i < k$ y $\varepsilon_k = -1$, entonces $a_{ij} \neq 0$ cuando $|i - j| \leq n - k + 1$.*

A continuación presentaremos dos nuevas clases de matrices: las matrices k -bandeadas y las estrictamente k -bandeadas. Las matrices SR k -bandeadas han sido estudiadas en [61] y aquí profundizaremos en el estudio de las estrictamente k -bandeadas.

Definición 2.25 (Matriz k -bandeada). *Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, consideremos un entero $k < n$. Diremos que A es una matriz k -bandeada si $a_{ij} = 0$ cuando $|i - j| > k$. Si además $a_{ij} \neq 0$ cuando $|i - j| = k$, entonces diremos que A es una matriz estrictamente k -bandeada.*

Nota 2.26. *Observemos que las matrices (estrictamente) 0-bandeadas son matrices (estrictamente) diagonales, las (estrictamente) 1-bandeadas son (estrictamente) Jacobi o tridiagonales y a las matrices (estrictamente) 5-bandeadas también se les llama (estrictamente) pentadiagonales.*

En esta sección también estudiaremos las matrices reversas de las k -bandeadas, por ello presentamos la siguiente definición.

Definición 2.27 (Anti- k -bandeada). *Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, consideremos un entero $k < n$. Diremos que A es una matriz anti- k -bandeada si $a_{ij} = 0$ cuando $i + j < n - k + 1$ y cuando $i + j > n + k$. Si además $a_{ij} \neq 0$ cuando $i + j = n - k + 1$ y cuando $i + j = n + k$, entonces diremos que A es una matriz estrictamente anti- k -bandeada.*

Nota 2.28. *Observemos que si A es una matriz (estrictamente) k -bandeada, entonces las matrices AP y PA son (estrictamente) anti- k -bandeadas.*

El siguiente resultado caracteriza las matrices SR estrictamente k -bandeadas en términos de sus entradas no nulas.

2.6. Matrices SR estrictamente k -bandeadas

Teorema 2.29. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz SR no singular y sea k un entero tal que $k < n$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) A es estrictamente k -bandeada.
- (ii) $a_{ij} \neq 0$ si y sólo si $|i - j| \leq k$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Como A es estrictamente k -bandeada, podemos tomar un índice $i \in \{k + 1, \dots, n - 1\}$ de manera que $a_{i, i-k}$ y $a_{i+1, i-k+1}$ sean no nulas y $a_{i+1, i-k} = 0$. Así, el menor $\det A[i, i + 1 \mid i - k, i - k + 1] = a_{i, i-k} a_{i+1, i-k+1}$ es estrictamente positivo y como A es SR por hipótesis, concluimos que $\varepsilon_2 = 1$.

Supongamos ahora que $a_{ij} = 0$ para unos i, j tales que $|i - j| \leq k$. Entonces podemos aplicar el Lema de las sombras (véase Lema 1.40 del Capítulo 1) y tendremos que A cumple una de las condiciones 1 - 4 de ese lema. Notemos que, como A es no singular, no puede tener columnas ni filas de ceros, por lo tanto A no cumple ni la condición 1 ni la condición 2. Si A cumpliera la condición 3, entonces tendríamos que $a_{hl} = 0$ para todo $h \geq i$ y $l \leq j$, en particular tendríamos que $a_{i, i-k} = 0$, pero esto contradice el hecho de que A sea estrictamente k -bandeada. Análogamente podemos comprobar que A no cumple la condición 4. Por lo tanto, concluimos que $a_{ij} \neq 0$ para cualesquiera i, j que satisfacen $|i - j| \leq k$.

(ii) \Rightarrow (i). Esta implicación es trivial considerando la Definición 2.25.

□

El siguiente teorema muestra la relación entre las matrices estrictamente k -bandeadas y la total positividad.

Teorema 2.30. *Sea A una matriz $n \times n$ k -bandeada, no singular, no negativa y SR con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $\varepsilon_{n-k+1} = -1$. Se tiene que A es estrictamente k -bandeada si y sólo si A es TP_{n-k} .*

Demostración. Para demostrar la implicación directa basta considerar los menores $\det A[k + 1, \dots, l \mid 1, \dots, l - k] = a_{k+1, 1} a_{k+2, 2} \cdots a_{l, l-k} > 0$ para $l = k + 1, \dots, n$. De esta forma, tenemos menores positivos de órdenes 1 hasta $n - k$ y por lo tanto, podemos decir que A es TP_{n-k} .

Para demostrar que A es estrictamente k -bandeada, recordemos primero que $\varepsilon_i = 1$ para $i \leq n - k$ por ser A TP_{n-k} y que $\varepsilon_{n-k+1} = -1$ por hipótesis. Por tanto, podemos aplicar la Proposición 2.24 y concluir que $a_{ij} \neq 0$ cuando $|i - j| \leq k$. Luego, por el Teorema 2.29, tenemos que A es estrictamente k -bandeada.

□

El próximo resultado completa la clasificación de las matrices Jacobi SR no singulares obtenida por el Teorema 2.9 y muestra que sólo hay los siguientes casos: o bien A o $-A$ son TP o bien A es estrictamente Jacobi.

Teorema 2.31. *Sea A una matriz $n \times n$ Jacobi no singular. Se tiene que A es SR si y sólo si o bien A o $-A$ son TP o bien A es SR estrictamente Jacobi.*

Demostración. Como hemos visto en el Teorema 2.9, sólo hay dos posibles firmas para una matriz Jacobi SR no negativa y no singular: $(1, \dots, 1)$ (caso TP) o $(1, \dots, 1, -1)$. Puesto que una matriz SR es no negativa u opuesta a una matriz no negativa, si tenemos que A es Jacobi SR no singular, entonces o bien A es TP o tiene firma $(1, \dots, 1, -1)$ o bien A es opuesta a una matriz con una de esas firmas. Como la matriz opuesta a una matriz estrictamente Jacobi es también estrictamente Jacobi, sólo falta demostrar que A es estrictamente Jacobi cuando A es no negativa y tiene firma $(1, \dots, 1, -1)$. Puesto que en ese caso $\varepsilon_n = -1$, podemos utilizar la Proposición 2.24 (para $k = n$) y el Teorema 2.29 para concluir que A es estrictamente Jacobi.

La otra implicación se cumple trivialmente.

□

Consideremos ahora las matrices pentadiagonales SR. A partir del Teorema 2.30 podemos derivar el siguiente corolario.

Corolario 2.32. *Sea A una matriz $n \times n$ pentadiagonal, no singular, no negativa y SR con firma $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $\varepsilon_{n-1} = -1$. Se tiene que A es estrictamente pentadiagonal si y sólo si A es TP_{n-2} .*

2.7. Conclusiones

También podemos extender el Teorema 2.30 a las matrices anti- k -bandeadas, tal y como muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.33. *Sea A una matriz $n \times n$ anti- k -bandeada, no singular, no negativa y SR con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $\varepsilon_{n-k+1} = (-1)^{\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor + 1}$. Se tiene que A es estrictamente anti- k -bandeada si y sólo si A tiene signatura $\varepsilon_i = (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ para todo $i \leq n - k$.*

Demostración. Consideremos la matriz P presentada en (2.9). Recordemos que P es una matriz SR con signatura $\hat{\varepsilon} = (\hat{\varepsilon}_i)_{1 \leq i \leq n}$ que viene dada por $\hat{\varepsilon}_i = (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Ahora, por el Teorema 1.28 (del Capítulo 1), tenemos que la matriz AP es SR y que la entrada $(n - k + 1)$ -ésima de su signatura es $\varepsilon_{n-k+1} \hat{\varepsilon}_{n-k+1} = (-1)^{2 \lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor + 1} = -1$. Además, AP es no singular, no negativa y k -bandeada. Por lo tanto, por el Teorema 2.30, tenemos que AP es estrictamente k -bandeada si y sólo si AP es TP_{n-k} . Notemos que $P^{-1} = P$ y entonces $(AP)P = A$. Observemos que si AP es TP_{n-k} , tenemos, por el Teorema 1.28, que A tiene signatura $\varepsilon_i = (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ para todo $i \leq n - k$. Por último, podemos concluir que A es estrictamente k -bandeada si y sólo si A tiene signatura $\varepsilon_i = (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ para todo $i \leq n - k$.

□

2.7. Conclusiones

Algunos de los resultados de este capítulo han sido publicados en [12].

Presentamos ahora los objetivos más significativos alcanzados en este capítulo:

- Presentación y demostración de una fórmula para el determinante de las matrices Jacobi.
- Condiciones suficientes para que una matriz Jacobi $n \times n$ sea TP no singular usando $n - 1$ menores.

- Clasificación de las matrices $n \times n$ Jacobi SR no singulares. Posibles signaturas: $(1, \dots, 1)$ (matriz TP), $(1, \dots, 1, -1)$, $(-1, 1, \dots, (-1)^n)$ (opuesta de TP) y $(-1, 1, \dots, (-1)^{n-1}, (-1)^{n-1})$.
- Caracterización de las matrices Jacobi SR no singulares.
- Test de bajo coste computacional ($\mathcal{O}(n)$ operaciones elementales) para determinar si una matriz $n \times n$ Jacobi no singular es SR.
- Test similar para determinar si una matriz $n \times n$ Jacobi es SR no singular.
- Relación de las matrices Jacobi estrictamente diagonal dominantes con la total positividad.
- Caracterización de las matrices $n \times n$ SR estrictamente diagonal dominantes. Posibles signaturas: $(1, \dots, 1)$ (matriz TP) y $(-1, 1, \dots, (-1)^n)$ (opuesta de TP).
- Caracterizaciones de las matrices SR estrictamente k -bandeadas.

Capítulo 3

Matrices con Descomposición Bidiagonal

En este capítulo se presentará una nueva clase de matrices con descomposición bidiagonal con signo. A estas matrices las denominaremos matrices SBD (de “signed bidiagonal decomposition”) y serán definidas y caracterizadas en la Sección 3.1. En esa misma sección veremos cálculos que se pueden realizar con alta precisión relativa con estas matrices. Después, en la Sección 3.2, estudiaremos más a fondo la nueva clase de matrices, demostrando propiedades teóricas de las mismas. En la Sección 3.3 nos centraremos en las matrices SBD que también son Jacobi. A lo largo de la Sección 3.4 se extenderán desigualdades relacionadas con el mínimo valor propio, el complemento de Schur y el producto de Hadamard a clases de matrices más amplias que las TP, incluyendo las SBD. En la Sección 3.5 se demostrará la estabilidad backward que tiene la eliminación Gaussiana sin realizar pivotaje en las matrices SBD. Más tarde, en la Sección 3.6 se estudiará la relación entre los algoritmos de corte de esquinas (de importancia en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador), las descomposiciones bidiagonales de matrices y la alta precisión relativa. Finalmente, en la Sección 3.7 se presentarán las conclusiones principales de este capítulo.

Parte del material presentado en este capítulo ha sido publicado o aceptado para su publicación en [11], [14], [15] y en [17].

3.1. Caracterizaciones y cálculos precisos

Algunas clases de matrices son muy importantes en diversas aplicaciones. Por ejemplo, las matrices TP no singulares juegan un papel crucial en teoría de aproximación, Diseño Geométrico Asistido por Ordenador o estadística (véase [9], [78], [84]); las M-matrices tridiagonales y, en general, las matrices cuyas inversas son totalmente positivas aparecen en la discretización de ecuaciones en derivadas parciales (véase [72]). Entre esta sección y la siguiente veremos que todas estas clases de matrices pertenecen a una clase de P-matrices signo simétricas (véase Definición 1.16 y Definición 1.9) con una descomposición bidiagonal que llamaremos matrices con descomposición bidiagonal con signo.

La nueva clase de matrices será presentada en la Subsección 3.1.1. En la Subsección 3.1.2 veremos varias caracterizaciones de las matrices con descomposición bidiagonal con signo. Respecto a las matrices TP no singulares, si suponemos que conocemos con alta precisión relativa las entradas de los factores bidiagonales de su descomposición bidiagonal (véase la Definición 1.19), entonces se pueden aplicar algoritmos con alta precisión relativa (véase [66], [67]). En la Subsección 3.1.3 veremos que, con la misma suposición, podemos utilizar esos algoritmos para calcular con alta precisión relativa los valores propios, los valores singulares, la inversa, resolver ciertos sistemas lineales o calcular la descomposición LDU de las matrices de esta nueva clase de matrices. También incluiremos experimentación numérica que confirma que dichos cálculos son precisos.

3.1.1. Descomposiciones bidiagonales

Tal y como vimos en la Sección 1.3, algunas clases de matrices, incluidas las matrices TP, se pueden expresar como producto de matrices bidiagonales.

Las descomposiciones bidiagonales que satisfacen las propiedades de la Definición 1.19 han sido consideradas en muchos trabajos recientes (véase [66], [67], [69], [70]). Recordemos las matrices bidiagonales elementales, denotadas por $E_i(x)$ (para $2 \leq i \leq n$ y siendo x un número real), presentadas en la Sección 1.3 del Capítulo 1. Denotaremos por $E_i^T(x)$ a la matriz $(E_i(x))^T$.

En general, una matriz que puede ser descompuesta en términos de

3.1. Caracterizaciones y cálculos precisos

matrices bidiagonales admite también otras descomposiciones bidiagonales (véase el Capítulo 6 de [84]). Sin embargo, el siguiente resultado utiliza el Teorema 1.18 para demostrar que una descomposición bidiagonal $\mathcal{BD}(A)$ como la de la Definición 1.19 es única.

Proposición 3.1. *Sea A una matriz no singular. Si existe $\mathcal{BD}(A)$, entonces es única.*

Demostración. Supongamos que existe una $\mathcal{BD}(A)$ y que entonces se cumple (1.14). En ese caso podemos escribir

$$L^{(k)} = E_{n-k+1}(l_{n-k}^{(k)}) \cdots E_n(l_{n-1}^{(k)}), \quad U^{(k)} = E_n^T(u_{n-1}^{(k)}) \cdots E_{n-k+1}^T(u_{n-k}^{(k)}).$$

Si sustituimos estas expresiones en la ecuación (1.14), tendremos

$$A = (E_n(l_{n-1}^{(1)}))(E_{n-1}(l_{n-2}^{(2)})E_n(l_{n-1}^{(2)})) \cdots (E_2(l_1^{(n-1)}) \cdots E_n(l_{n-1}^{(n-1)}))D \cdot \\ (E_n^T(u_{n-1}^{(n-1)}) \cdots E_2^T(u_1^{(n-1)})) \cdots (E_n^T(u_{n-1}^{(2)})E_{n-1}^T(u_{n-2}^{(2)}))(E_n^T(u_{n-1}^{(1)})).$$

Utilizando la notación $m_{i,k+i-n} := l_{i-1}^{(k)}$ (notemos que $i > k + i - n$) y $m_{k+j-n,j} := u_{j-1}^{(k)}$ (notemos que $k + j - n < j$), podemos reformular la ecuación anterior como

$$A = (E_n(m_{n1}))(E_{n-1}(m_{n-1,1})E_n(m_{n2})) \cdots (E_2(m_{21}) \cdots E_n(m_{n,n-1}))D \cdot \\ (E_n^T(m_{n-1,n}) \cdots E_2^T(m_{12})) \cdots (E_n^T(m_{2n})E_{n-1}^T(m_{1,n-1}))(E_n^T(m_{1n})).$$

Observemos que, por (1.10), podemos reordenar los factores de la ecuación anterior para conseguir la siguiente descomposición de A

$$(E_n(m_{n1}) \cdots E_2(m_{21}))(E_n(m_{n2}) \cdots E_3(m_{32})) \cdots (E_n(m_{n,n-1}))D \cdot \quad (3.1) \\ (E_n^T(m_{n-1,n}))(E_{n-1}^T(m_{n-2,n-1})E_n^T(m_{n-2,n})) \cdots (E_2^T(m_{12}) \cdots E_n^T(m_{1n})),$$

donde D es una matriz diagonal y los m_{ij} claramente satisfacen

$$m_{ij} = 0 \Rightarrow m_{hj} = 0 \quad \forall h > i \quad \text{if } i > j, \\ m_{ij} = 0 \Rightarrow m_{ik} = 0 \quad \forall k > j \quad \text{if } i < j,$$

debido a la condición 3 de la Definición 1.19. Por el Teorema 1.18, sabemos que la descomposición (3.1) es única y por tanto podemos concluir que nuestra $\mathcal{BD}(A)$ también es única.

□

De hecho, por el resultado utilizado en la demostración anterior (el Teorema 1.18), sabemos que las entradas $l_i^{(k)}, u_i^{(k)}$ de la descomposición bidiagonal coinciden con los multiplicadores de la eliminación de Neville, utilizada en muchos trabajos relacionados con las matrices TP (véase [51]).

Terminaremos esta subsección presentando la clase de matrices que analizaremos en este capítulo y que generaliza a la clase de matrices TP no singulares. Primero recordemos que denotábamos por ε al vector $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ con $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$ para todo $j = 1, \dots, m$, y lo llamábamos *signatura* en el Capítulo 1.

Definición 3.2 (SBD). *Dada una signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ y una matriz $n \times n$ no singular A , decimos que A tiene una descomposición bidiagonal con signo, o simplemente que A es SBD, con signatura ε si existe una $\mathcal{BD}(A)$ (única por la Proposición 3.1) que cumple*

1. $d_i > 0$ para todo i ,
2. $l_i^{(k)} \varepsilon_i \geq 0, u_i^{(k)} \varepsilon_i \geq 0$ para todo $1 \leq k \leq n-1$ y $n-k \leq i \leq n-1$.

Diremos que A tiene una *descomposición bidiagonal con signo*, o simplemente que A es *SBD*, si tiene una descomposición bidiagonal con signo con alguna signatura ε . Observemos que, por el Teorema 1.38 del Capítulo 1, una matriz TP no singular tiene una descomposición bidiagonal con signo con signatura $\varepsilon = (1, \dots, 1)$.

Como ejemplo, consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 & 24 \\ -3 & 4 & 11 & -47 \\ -9 & 14 & 47 & -215 \\ 18 & -30 & -120 & 590 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene una descomposición bidiagonal con signo con signatura $\varepsilon = (-1, 1, -1)$ y su descomposición bidiagonal viene dada por

$$\mathcal{BD}(A) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 4 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \\ \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & 3 & \\ & & 1 & -2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 2 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -4 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.2. Caracterizaciones

Empecemos esta subsección viendo tanto la caracterización de las matrices presentadas en la última definición de la subsección anterior como la caracterización de sus inversas. Primero, necesitamos algunas notaciones. Dada una signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$, definimos una matriz diagonal $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ de manera que k_i cumpla

$$k_i \in \{\pm 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad k_i k_{i+1} = \varepsilon_i \quad \forall i = 1, \dots, n-1. \quad (3.2)$$

Observemos que dada ε , existen sólo dos posibles matrices diagonales K que satisfagan (3.2), que corresponden a los dos posibles valores para k_1 : $k_1 = \varepsilon_1$ o $k_1 = -\varepsilon_1$. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, recordemos que $|A| := (|a_{ij}|)_{1 \leq i, j \leq n}$.

El siguiente teorema proporciona varias caracterizaciones de matrices con descomposición bidiagonal con signo con una signatura dada.

Teorema 3.3. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz no singular y sea $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ una signatura. Se tiene que las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i) A es SBD con signatura ε .
- (ii) $KAK = |A|$ es TP, donde K es cualquier matriz diagonal que satisfaga (3.2).
- (iii) A^{-1} es SBD con signatura $-\varepsilon = (-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_{n-1})$.
- (iv) $|A|$ es TP y para todo $1 \leq i, j \leq n$, se tiene

$$\text{signo}(a_{ij}) = \begin{cases} \varepsilon_j \cdots \varepsilon_{i-1} & , \text{ si } i > j \\ 1 & , \text{ si } i = j \\ \varepsilon_i \cdots \varepsilon_{j-1} & , \text{ si } i < j \end{cases} \quad (3.3)$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Si consideramos (1.14) y tenemos en cuenta que $K^2 = I$, tenemos que

$$KAK = (KL^{(1)}K) \cdots (KL^{(n-1)}K)(KDK)(KU^{(n-1)}K) \cdots (KU^{(1)}K), \quad (3.4)$$

que es una descomposición bidiagonal de KAK que satisface las condiciones de la Definición 1.19 y por tanto, es la $\mathcal{BD}(KAK)$. Observemos que, considerando (3.2), tenemos que todos los factores de $\mathcal{BD}(KAK)$ son no negativos. De hecho, $KDK \geq 0$, ya que $d_i > 0$ y por tanto $k_i^2 d_i = d_i > 0$. Lo mismo sucede con los factores bidiagonales $KL^{(j)}K$ ($KU^{(j)}K$) para $j = 1, \dots, n-1$: sus entradas diagonales son unos y las entradas extradiagonales son $k_{i-1}l_{i-1}^{(j)}k_i = \varepsilon_{i-1}l_{i-1}^{(j)} \geq 0$ para $i > 1$ ($k_i u_i^{(j)} k_{i+1} = \varepsilon_i u_i^{(j)} \geq 0$ para $i > 0$). Como todos los factores de $\mathcal{BD}(KAK)$ son no negativos, podemos deducir del Teorema 1.38, que KAK es TP. Puesto que KAK sólo puede diferir de A en el signo de algunas de sus entradas y KAK es no negativa, concluimos que $KAK = |A|$.

(ii) \Rightarrow (i). Como KAK es TP, sabemos por el Teorema 1.38 que existe una única $\mathcal{BD}(KAK)$ con todos los factores no negativos. Por tanto, tenemos que $KAK = \hat{L}^{(1)} \dots \hat{L}^{(n-1)} \hat{D} \hat{U}^{(n-1)} \dots \hat{U}^{(1)}$ como en (1.14). Ahora, como $K^{-1} = K$, podemos escribir A como producto de matrices bidiagonales

$$\begin{aligned} A &= K(KAK)K = K(\hat{L}^{(1)} \dots \hat{L}^{(n-1)} \hat{D} \hat{U}^{(n-1)} \dots \hat{U}^{(1)})K \\ &= (K\hat{L}^{(1)}K) \dots (K\hat{L}^{(n-1)}K)(K\hat{D}K)(K\hat{U}^{(n-1)}K) \dots (K\hat{U}^{(1)}K) \\ &= L^{(1)} \dots L^{(n-1)} D U^{(n-1)} \dots U^{(1)}, \end{aligned}$$

donde $L^{(k)} := K\hat{L}^{(k)}K$, $D := \hat{D}$ y $U^{(k)} := K\hat{U}^{(k)}K$ satisfacen claramente las condiciones 1, 2 y 3 de la Definición 1.19 y las condiciones 1 y 2 de la Definición 3.2, puesto que multiplicar por K sólo cambia el signo de las entradas extradiagonales de las matrices bidiagonales. De manera que tenemos una descomposición bidiagonal con signo de A con signatura ε . Además, la unicidad de $\mathcal{BD}(KAK)$ implica la unicidad de $\mathcal{BD}(A)$.

(ii) \Leftrightarrow (iii). Por el Teorema 1.31, el hecho de que KAK sea TP es equivalente al hecho de que $J_n(KAK)^{-1}J_n$ ($= (J_n K)A^{-1}(K J_n)$) sea TP, donde $J_n = \text{diag}(1, -1, \dots, (-1)^{n-1})$. Definamos la matriz diagonal $\hat{K} = \text{diag}(\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_n)$ como $\hat{K} := J_n K$ ($= K J_n$). Así tenemos que las entradas diagonales de \hat{K} cumplen (3.2) con $-\varepsilon$: $\hat{k}_i \hat{k}_{i+1} = -\varepsilon_i$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. De esta manera, por la equivalencia entre (i) y (ii), podemos deducir la equivalencia entre el hecho de que $\hat{K}A^{-1}\hat{K}$ sea TP y el hecho de que A^{-1} sea SBD con signatura $-\varepsilon = (-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_{n-1})$, es decir, que se cumpla el apartado (iii).

(ii) \Rightarrow (iv) Observemos que existen dos posibles matrices K que satisfacen (3.2). De hecho, si $k_1 = \varepsilon_1$, entonces $k_i = \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{i-1}$ y si $k_1 = -\varepsilon_1$,

3.1. Caracterizaciones y cálculos precisos

entonces $k_i = -\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{i-1}$ para todo $i = 2, \dots, n$. De modo que tenemos

$$\begin{aligned} (KAK)_{ij} &= k_i a_{ij} k_j = (\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{i-1}) a_{ij} (\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{j-1}) \\ &= \begin{cases} (\varepsilon_j \cdots \varepsilon_{i-1}) a_{ij} & , \text{ if } i > j. \\ a_{ij} & , \text{ if } i = j. \\ (\varepsilon_i \cdots \varepsilon_{j-1}) a_{ij} & , \text{ if } i < j. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como todas las entradas de la matriz KAK son no negativas, las entradas de A han de tener el signo mencionado.

(iv) \Rightarrow (ii) Definamos una matriz $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ que satisfaga (3.2). Observemos que entonces se cumple (3.5), y por (3.3), se puede comprobar que $(KAK)_{ij} = |a_{ij}|$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Por tanto, tenemos que $KAK = |A|$.

□

El Teorema 3.3 nos permite caracterizar las matrices SBD en términos de las matrices totalmente positivas, tal y como muestra el siguiente resultado. Esta caracterización nos permitirá utilizar los métodos con alta precisión relativa para matrices totalmente positivas de [67] para asegurar cálculos precisos con matrices SBD.

Corolario 3.4. *Sea A una matriz $n \times n$ no singular. Se tiene que A es SBD si y sólo si existe una matriz diagonal $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ con $k_i \in \{\pm 1\}$ para todo $i = 1, \dots, n$ de manera que $KAK = |A|$ es una matriz TP.*

Un caso particular del Teorema 3.3 corresponde al caso de las matrices TP no singulares, tal y como queda recogido en el siguiente corolario.

Corolario 3.5. *Sea A una matriz no singular. Se tiene que las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i) A es SBD con signatura $(1, \dots, 1)$.
- (ii) A es TP.
- (iii) A^{-1} es SBD con signatura $(-1, \dots, -1)$.

Como dijimos al comienzo de esta sección, las matrices inversas de las matrices TP son muy importantes en cuanto a aplicaciones. En el Corolario 3.5 hemos demostrado que son matrices SBD. Observemos que el Teorema 3.3 también demuestra que la clase de matrices con descomposición bidiagonal con signo es cerrada para la inversión de matrices. Veremos más propiedades de esta clase de matrices en la Sección 3.2.

Nota 3.6. *Dada una matriz opuesta a una matriz SBD, notemos que ésta también cumple todas las propiedades de la Definición 3.2 excepto la propiedad 1, que queda reemplazada por*

$$1'. \quad d_i < 0 \text{ para todo } i.$$

De manera que la descomposición bidiagonal de estas matrices cumple que la matriz diagonal tiene sus entradas diagonales negativas. Por tanto, por el Corolario 3.4, una matriz no singular A es opuesta a una matriz SBD si y sólo si existe una matriz diagonal $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ con $k_i \in \{\pm 1\}$ para todo $i = 1, \dots, n$ de manera que $-KAK = |A|$ es TP. Las matrices A tales que A o $-A$ son SBD con signatura ε las llamaremos en la Sección 3.2 matrices ε -BD.

3.1.3. Cálculos precisos

Tal y como muestran trabajos recientes ([37], [39], [66], [67], [69], [70]), las entradas diagonales de la matriz D de $\mathcal{BD}(A)$ (véase (1.14) del Capítulo 1) y las entradas extradiagonales del resto de factores de (1.14) pueden ser considerados parámetros naturales asociados a A . De manera que podemos suponer que en ocasiones se conocen dichos parámetros con alta precisión relativa. En relación a esta suposición, la eliminación de Neviile (véase [70]) ha sido frecuentemente una herramienta útil. Veamos que si suponemos esto para las matrices de este capítulo, entonces podemos encontrar algoritmos con alta precisión relativa para llevar a cabo algunos cálculos con estas matrices, como por ejemplo el cálculo de sus valores propios, el cálculo de sus valores singulares, el cálculo de sus matrices inversas o la resolución de algunos sistemas lineales $Ax = b$ (aquellos en los que Kb tiene un patrón ajedrezado de signos).

Para todo los cálculos mencionados seguiremos un procedimiento similiar, que se puede resumir en los siguientes pasos:

3.1. Caracterizaciones y cálculos precisos

1. A partir de $\mathcal{BD}(A)$ obtenemos $\mathcal{BD}(|A|)$, que viene dada por (3.4).
2. Podemos aplicar los algoritmos ya conocidos con alta precisión relativa para matrices TP a $\mathcal{BD}(|A|)$. Recordemos que, por el Corolario 3.4 y la Nota 3.6, se tiene que $|A|$ es TP si A pertenece a la clase de matrices caracterizada en dichos resultados.
3. A partir de la información obtenida para $|A|$, podemos recuperar el resultado correspondiente para A .

Ahora explicaremos cómo llevar a cabo cada uno de los pasos anteriores.

Para el Paso 1, supongamos que conocemos con alta precisión relativa la $\mathcal{BD}(A)$ (véase (1.14) del Capítulo 1) de una matriz A que satisface las propiedades del Corolario 3.4 o las propiedades de la Nota 3.6. De esta manera, tenemos o bien $|A| = KAK$ o bien $|A| = -KAK$, donde K es una matriz diagonal que cumple (3.2); por tanto, podemos deducir de (3.4) que

$$|A| = |L^{(1)}| \cdots |L^{(n-1)}| |D| |U^{(n-1)}| \cdots |U^{(1)}| \quad (3.6)$$

es la $\mathcal{BD}(|A|)$. De hecho, $\mathcal{BD}(A)$ y $\mathcal{BD}(KAK)$ vienen dadas por (1.14) y por (3.3) respectivamente. La demostración del Teorema 3.3 muestra que si $KAK = |A|$, entonces todos los factores de $\mathcal{BD}(KAK)$ (en (3.3)) son no negativos y entonces $|L^{(j)}| = KL^{(j)}K$, $|U^{(j)}| = KU^{(j)}K$ para todo $j = 1, \dots, n-1$. Por tanto, la ecuación (3.6) se deriva de (3.3). Si $|A| = -KAK$ entonces podemos aplicar los mismos argumentos para ver que todos los factores de $\mathcal{BD}(-KAK)$ son no negativos. Teniendo en cuenta que $\mathcal{BD}(KAK)$ y $\mathcal{BD}(-KAK)$ sólo se diferencian en que el factor KDK se cambia por $-KDK$, podemos deducir de la Nota 3.6 que $-KDK = -D = |D|$ y de nuevo tendremos que la ecuación (3.6) se deriva de (3.3).

Para el Paso 2, aplicaremos a (3.6) el correspondiente algoritmo con alta precisión relativa para matrices TP. En particular, consideremos los siguientes cálculos precisos con matrices TP:

- A. Los valores propios de A se pueden obtener por el método de la Sección 5 de [66] (la función `TNEigenvalues` de [65] es una implementación en MATLAB de este método).
- B. Los valores singulares de A se pueden obtener por el método de la Sección 6 de [66] (la función `TNSingularValues` de [65] es una implementación en MATLAB de este método).

- C. La matriz inversa de A se puede obtener por el método de la página 736 de [67].
- D. Observemos que resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente a resolver $(KAK)(Kx) = Kb$, es decir, $|A|(Kx) = Kb$. Por lo tanto, podemos calcular de manera precisa $|A|^{-1}$ mediante el procedimiento del caso anterior. Por el Teorema 1.31, sabemos que $|A|^{-1}$ tiene un patrón ajedrezado de signos y, puesto que Kb también tiene un patrón ajedrezado de signos, podemos calcular $Kx = |A|^{-1}(Kb)$ sin realizar restas, y por tanto con alta precisión relativa.

Para el Paso 3, tenemos los siguientes casos correspondientes a cada uno de los casos del Paso 2:

- A. Si A es SBD, entonces $|A| = KAK = K^{-1}AK$ y por tanto son matrices semejantes y tienen los mismos valores propios. Si $-A$ es SBD, entonces los valores propios de A son los opuestos a los valores propios de $|A|$.
- B. Los valores singulares de A y de $|A|$ coinciden, puesto que $|A| = \pm KAK$, donde K es una matriz unitaria.
- C. Si A es SBD, entonces $|A|^{-1} = (KAK)^{-1} = KA^{-1}K$ y por tanto $A^{-1} = K|A|^{-1}K$. Análogamente, si $-A$ es SBD, entonces $|A|^{-1} = -KA^{-1}K$ y $A^{-1} = -K|A|^{-1}K$.
- D. Si conocemos Kx , entonces $x = K(Kx)$.

Además, veamos que si tenemos la $\mathcal{BD}(A)$ con alta precisión relativa, entonces podemos calcular la descomposición LDU de A con alta precisión relativa e incluso obtener la matriz A con alta precisión relativa. De hecho, debido a la unicidad de la descomposición LDU de una matriz, se puede comprobar que las matrices

$$L = L^{(1)} \dots L^{(n-1)}, \quad U = U^{(n-1)} \dots U^{(1)} \quad (3.7)$$

se calculan sin utilizar restas y por tanto con alta precisión relativa. Además, también podemos calcular $A = LDU$ con alta precisión relativa.

Terminaremos esta subsección con una caracterización de las matrices SBD en términos de su descomposición LDU .

3.1. Caracterizaciones y cálculos precisos

Proposición 3.7. *Una matriz $n \times n$ A es SBD con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ si y sólo si $A = LDU$, donde L (U , respectivamente) es una matriz triangular inferior (superior, respectivamente) con unos en la diagonal y SBD con signatura ε y D es una matriz diagonal con entradas diagonales positivas.*

Demostración. Supongamos que A es una matriz SBD con signatura ε . Sabemos que entonces A se puede descomponer como en (1.14) con D con entradas diagonales positivas y, debido a la unicidad de la descomposición LDU , sabemos que se cumple (3.7). Además, por la Proposición 3.1, dicha descomposición nos proporciona la descomposición bidiagonal de L y de U con signatura ε en ambos casos.

Para demostrar la otra implicación, notemos que las descomposiciones bidiagonales $\mathcal{BD}(L)$ y $\mathcal{BD}(U)$ proporcionan, por la Proposición 3.1, la descomposición bidiagonal $\mathcal{BD}(A)$ dada por $A = LDU$, que es una descomposición bidiagonal con signo de A con signatura ε .

□

Experimentación numérica

Hemos llevado a cabo experimentos numéricos para comprobar las ventajas de los procedimientos presentados anteriormente. Presentaremos dos ejemplos ilustrativos. Empezamos eligiendo dos clases de matrices estructuradas que son totalmente positivas, como son las matrices Vandermonde y las matrices de Hilbert, y para las que se conocen sus descomposiciones bidiagonales (véase [66]). Después elegimos dos signaturas distintas y cambiamos los signos de las entradas de las matrices (de acuerdo con (3.3)) y el signo de las entradas de la descomposición bidiagonal. De esta manera, tenemos dos matrices SBD. Calcularemos sus valores singulares utilizando Mathematica con aritmética de 60 dígitos, los cuales tomaremos como solución exacta, y los compararemos con el resultado del procedimiento explicado en esta subsección y con el resultado obtenido con Octave (con la función `svd`).

En el primer ejemplo, calcularemos los valores singulares de la matriz

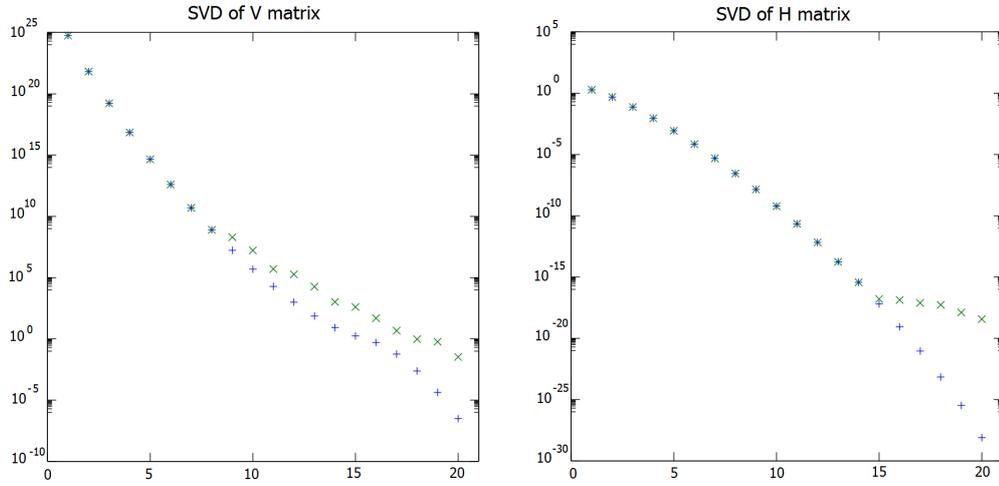


Figura 3.1: Valores singulares de las matrices V y H (20×20) respectivamente; “+” = preciso, “x” = Octave.

$V = [v_{ij}]_{i,j=1}^{20}$, donde

$$|v_{ij}| = i^{j-1}$$

para $1 \leq i, j \leq 20$ y el signo de las entradas viene dado por (3.3) con $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1}^{20}$ y $\varepsilon_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, 20$ excepto $\varepsilon_3 = \varepsilon_8 = -1$. Observamos que los valores singulares calculados con Mathematica y los calculados con el método preciso de esta subsección coinciden en, al menos, 14 dígitos. Sin embargo, el método de Octave (la función `svd`) sólo calcula de forma precisa el mayor valor singular, mientras que los valores singulares más pequeños se calculan sin ningún dígito correcto. Podemos encontrar estos resultados en la parte izquierda de la Figura 3.1.

Para el segundo ejemplo, vamos a calcular los valores singulares de la matriz $H = [h_{ij}]_{i,j=1}^{20}$, donde

$$|h_{ij}| = \frac{1}{i + j - 1}$$

para $1 \leq i, j \leq 20$ y el signo de las entradas viene dado por (3.3) con $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1}^{20}$ y $\varepsilon_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, 20$ excepto $\varepsilon_k = -1$ para $k = 1, 3, 4, 8, 10, 15, 18$. Hemos llevado a cabo cálculos similares a los del ejemplo anterior y hemos obtenido diferencias significativas entre los valores singulares más pequeños calculados por Octave y los calculados con el método de esta subsección (los últimos coinciden con los resultados obtenidos con

3.2. Propiedades de las matrices SBD

Mathematica en, al menos, 13 dígitos). Los resultados están ilustrados en la parte derecha de la Figura 3.1.

En resumen, hemos visto que los métodos precisos para matrices TP no singulares de [67] pueden utilizarse para obtener métodos precisos para la clase extendida de matrices SBD. También hemos visto que las matrices inversas de las TP también son SBD.

3.2. Propiedades de las matrices SBD

En esta sección presentaremos más propiedades sobre la clase de matrices SBD definida en la sección anterior y estudiaremos su relación con otras clases de matrices.

El siguiente resultado demuestra que la clase de matrices SBD, definida en la Subsección 3.1.1, es una subclase de las P-matrices (véase Definición 1.16).

Proposición 3.8. *Si A es una matriz $n \times n$ SBD, entonces A es una P-matriz.*

Demostración. Por el Corolario 3.4, tenemos que $|A| = KAK$ es TP y como A es no singular, $|A|$ también es no singular. Además es bien sabido (véase la Proposición 1.32) que cualquier submatriz principal $|A|[\alpha]$ tiene determinante positivo. De manera que tenemos $0 < \det |A|[\alpha] = (\det K[\alpha])^2 \det A[\alpha]$, y por tanto $\det A[\alpha] > 0$ para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ y todo $k \leq n$. Así, concluimos que A es una P-matriz.

□

El siguiente resultado muestra que las submatrices principales de matrices SBD son de nuevo SBD.

Corolario 3.9. *Sea A una matriz SBD. Se tiene que cualquier submatriz principal de A es una matriz SBD.*

Demostración. Supongamos que A es una matriz SBD de tamaño $n \times n$ y sea $A[\alpha]$, $\alpha \in Q_{k,n}$ para cualquier $k \leq n$, una submatriz principal de A . Por

el Corolario 3.4 sabemos que existe una matriz diagonal K con ± 1 en la diagonal, de manera que la matriz $KAK = |A|$ es TP. Notemos que entonces $K[\alpha]A[\alpha]K[\alpha] = (KAK)[\alpha] = |A|[\alpha] = |A[\alpha]|$ es TP para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ y para todo $k \leq n$. Por la Proposición 3.8, tenemos que $A[\alpha]$ es no singular y entonces, de nuevo por el Corolario 3.4, la submatriz $A[\alpha]$ es SBD para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ y para todo $k \leq n$.

□

El siguiente resultado recoge otras propiedades de las matrices SBD con signatura ε . Recordemos que dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, definimos, en la Sección 1.1, la matriz *conversa* de A , dada por la matriz $A^\# = (a_{ij}^\#)_{1 \leq i, j \leq n} := (a_{n-i+1, n-j+1})_{1 \leq i, j \leq n}$. Recordemos también que $(AB)^\# = A^\#B^\#$.

Proposición 3.10. *Sean A y B dos matrices $n \times n$ SBD ambas con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$. Se tiene que*

- (i) A^T es SBD con signatura ε .
- (ii) $A^\#$ es SBD con signatura $\varepsilon^\# = (\varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_1)$.
- (iii) AB es SBD con signatura ε .

Demostración. Observemos que, por hipótesis, A es no singular y por el Teorema 3.3, cualquier matriz K que satisfaga (3.2) verifica que la matriz $KAK = |A|$ es TP.

(i) Se tiene que $|A^T| = |A|^T$ es TP; además tenemos que $|A^T| = K^T A^T K^T = K A^T K$ y como A^T también es no singular, por el Teorema 3.3 sabemos que A^T es SBD con signatura ε .

(ii) Observemos que $|A^\#| = |A|^\#$ es TP y $|A^\#| = K^\# A^\# K^\#$. Como $A^\#$ es PAP , donde P es la reversa de la matriz identidad, tenemos que $A^\#$ es no singular y por tanto, por el Teorema 3.3, $A^\#$ es SBD con signatura $(\varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_1)$.

(iii) Puesto que B es SBD con la misma signatura que A , tenemos que $KBK = |B|$. De ese modo, $K(AB)K = (KAK)(KBK) = |A||B|$ es producto de matrices TP y, por el Teorema 1.28, también es TP. Por tanto,

3.2. Propiedades de las matrices SBD

$K(AB)K = |AB|$. Además, AB es no singular por ser A y B no singulares y, de nuevo por el Teorema 3.3, concluimos que AB es SBD con signatura ε .

□

Las matrices SBD también son signo simétricas (véase Definición 1.9), tal y como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.11. *Si A es SBD, entonces A es signo simétrica.*

Demostración. Sea $A[\alpha | \beta]$ cualquier submatriz de A . Por el Corolario 3.4 sabemos que existe una matriz diagonal no singular K tal que KAK es TP. Por tanto $\det(KAK)[\alpha | \beta] \geq 0$ y $\det(KAK)[\beta | \alpha] \geq 0$, y entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \det(KAK)[\alpha | \beta] \det(KAK)[\beta | \alpha] \\ &= (\det K[\alpha])^2 \det A[\alpha | \beta] \det A[\beta | \alpha] (\det K[\beta])^2. \end{aligned}$$

Como $\det K[\alpha] \neq 0$ y $\det K[\beta] \neq 0$, podemos deducir de la fórmula anterior que $0 \leq \det A[\alpha | \beta] \det A[\beta | \alpha]$ y así queda demostrado el resultado.

□

Observemos que si A es una matriz SBD, entonces $-A$ se puede descomponer como en (1.14) (véase Definición 1.19) con los mismos factores bidiagonales que A pero cambiando el signo de las entradas diagonales de la matriz D . Esto nos lleva a la definición de una nueva clase de matrices.

Definición 3.12 (ε -BD). *Sea $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ una signatura. Diremos que una matriz A es una matriz ε -BD si es una matriz SBD con signatura ε o es la opuesta de una matriz SBD con signatura ε . Diremos que la signatura de una matriz ε -BD de tamaño $n \times n$ es $(\varepsilon, \varepsilon_n)$, de manera que tiene n componentes (en lugar de $n - 1$ como en el caso de las matrices SBD) y la componente n -ésima es un 1 si la matriz es SBD y un -1 si la matriz es opuesta a una SBD.*

Notemos que las matrices ε -BD son matrices no singulares.

Nota 3.13. *Observemos que, por la Definición 3.2 y la Definición 3.12, una matriz A es ε -BD (con signatura $(\varepsilon, \varepsilon_n)$) si y sólo si A es no singular y existe una $BD(A)$ (única por la Proposición 3.1) que cumple*

1. $\varepsilon_n d_i > 0$ para todo $i \leq n - 1$,
2. $l_i^{(k)} \varepsilon_i \geq 0, u_i^{(k)} \varepsilon_i \geq 0$ para todo $1 \leq k \leq n - 1$ y $n - k \leq i \leq n - 1$.

Las matrices TP no singulares y las opuestas de estas matrices son matrices ε -BD, tal y como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.14. *Una matriz A es ε -BD con signatura $(1, \dots, 1, 1)$ ($(1, \dots, 1, -1)$, respectivamente) si y sólo si A ($-A$, respectivamente) es TP no singular.*

Demostración. Si A es ε -BD con signatura $(1, \dots, 1, 1)$, entonces la matriz es TP, puesto que las matrices bidiagonales no negativas de (1.14) son TP y el producto de matrices TP también es TP (véase Teorema 1.28). Por otro lado, si A es TP no singular entonces, por el Teorema 1.38, tenemos que A satisface las condiciones de la Definición 3.12 con signatura $(1, \dots, 1, 1)$.

Observemos que si A es una matriz ε -BD, entonces $-A$ se puede descomponer como en (1.14) (véase Definición 1.19) con los mismos factores bidiagonales que A pero cambiando el signo de las entradas diagonales de la matriz D . Por tanto, A es ε -BD con signatura $(1, \dots, 1, 1)$ si y sólo si $-A$ es ε -BD con signatura $(1, \dots, 1, -1)$, quedando así demostrado el resultado. □

Recordemos que cada matriz bidiagonal de la descomposición (1.14) puede ser descompuesta a su vez como producto de matrices bidiagonales elementales (como ya vimos en (1.13)). Por ejemplo,

$$E_2(l_1^{(k)}) \cdots E_n(l_{n-1}^{(k)}) = L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_1^{(k)} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & l_{n-1}^{(k)} & 1 \end{pmatrix},$$

y una descomposición análoga se obtiene para los factores bidiagonales superiores de (1.14). Además, podemos reescribir (1.14) de la siguiente manera

$$A = (E_2(l_1^{(1)}) \cdots E_n(l_{n-1}^{(1)})) \cdots (E_2(l_1^{(n-1)}) \cdots E_n(l_{n-1}^{(n-1)})) D \cdot \quad (3.8) \\ (E_n^T(u_{n-1}^{(n-1)}) \cdots E_2^T(u_1^{(n-1)})) \cdots (E_n^T(u_{n-1}^{(1)}) \cdots E_2^T(u_1^{(1)})),$$

3.2. Propiedades de las matrices SBD

donde todos los factores bidiagonales son elementales.

La equivalencia entre (1.14) y (3.8) nos proporciona la siguiente caracterización de las matrices ε -BD.

Proposición 3.15. *Sea A una matriz $n \times n$ ($n \geq 2$) no singular. Se tiene que A es una matriz ε -BD si y sólo si podemos escribir A como (3.8), donde $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $l_i^{(k)}$ y $u_i^{(k)}$ cumplen las condiciones 1 y 2 de la Nota 3.13.*

El siguiente resultado muestra que las inversas de matrices TP y las opuestas de las inversas de TP también son matrices ε -BD. Considerando la Proposición 3.14 y el hecho de que al calcular la inversa de A en su expresión (3.8) tenemos que $(E_i(x))^{-1} = E_i(-x)$ para todo $i \leq n$ y para cualquier número real x , podemos demostrar el siguiente resultado.

Proposición 3.16. *Una matriz A es ε -BD con signatura $(-1, \dots, -1, 1)$ ($(-1, \dots, -1)$, respectivamente) si y sólo si A^{-1} ($-A^{-1}$, respectivamente) es TP.*

Dada una matriz A que se puede descomponer como en (3.8), decimos que A tiene r factores no triviales si sólo hay r entradas no nulas $l_i^{(k)}$ y $u_i^{(k)}$ en (3.8).

La clase de las matrices ε -BD tiene algunas propiedades que nos permiten conocer el signo de sus entradas y el signo de sus menores a partir de su signatura, tal y como demuestra el siguiente resultado. Diremos que un menor tiene signo $+1$ (-1) si es no negativo (no positivo). Observemos que con esta definición, para un menor nulo puede considerarse que tiene ambos signos: $+1$ o -1 .

Teorema 3.17. *Sea A una matriz ε -BD de tamaño $n \times n$ con signatura $(\varepsilon, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$. Se tiene que*

$$\text{signo}(\det A[\alpha | \beta]) = (\varepsilon_n)^k \prod_{i=1}^k \prod_{j=\text{mín}(\alpha_i, \beta_i)}^{\text{máx}(\alpha_i-1, \beta_i-1)} \varepsilon_j \quad (3.9)$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ y para todo $k \leq n$.

Demostración. Por la Proposición 3.15, sabemos que A se puede descomponer como en (3.8). Demostraremos el resultado por inducción sobre

el número de factores no triviales de A en (3.8). Supongamos que A no tiene factores no triviales, es decir, A es una matriz diagonal con entradas diagonales no nulas. Observemos que en ese caso, el menor $\det A[\alpha | \beta]$ es no nulo sólo si $\alpha = \beta$ y entonces puede comprobarse que se cumple (3.9).

Supongamos ahora que una matriz ε -BD con $r - 1$ factores no triviales satisface (3.9) y vamos a demostrar que se cumple (3.9) para una matriz ε -BD A con r factores no triviales. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A = LB$, donde L (el primer factor de la descomposición (3.8) de A) es una matriz bidiagonal inferior elemental con la entrada $l \neq 0$ en la posición $(i_0, i_0 - 1)$ y $\text{signo}(l) = \varepsilon_{i_0 - 1}$ y $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ satisface (3.8) con $r - 1$ factores no triviales. La demostración del caso $A = BU$, con U una matriz bidiagonal superior elemental, es análoga. Observemos que $(A)_{ij} = b_{ij}$ si $i \neq i_0$ y que $(A)_{i_0 j} = lb_{i_0 - 1, j} + b_{i_0, j}$ para todo $1 \leq j \leq n$. Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in Q_{k, n}$ un vector tal que $\alpha_h = i_0$ para un $h \leq k$. Tenemos que

$$\det A[\alpha | \beta] = l \det B[\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, i_0 - 1, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_k | \beta] + \det B[\alpha | \beta]. \quad (3.10)$$

Si denotamos con $m := \det B[\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, i_0 - 1, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_k | \beta]$, entonces tenemos, por la hipótesis de inducción, que

$$\begin{aligned} \text{signo}(lm) &= \varepsilon_{i_0 - 1} \left((\varepsilon_n)^{h-1} \prod_{i=1}^{h-1} \prod_{j=\min(\alpha_i, \beta_i)}^{\max(\alpha_i - 1, \beta_i - 1)} \varepsilon_j \right) \cdot \\ &\quad \left(\varepsilon_n \prod_{j=\min(i_0 - 1, \beta_h)}^{\max(i_0 - 2, \beta_h - 1)} \varepsilon_j \right) \left((\varepsilon_n)^{k-h} \prod_{i=h+1}^k \prod_{j=\min(\alpha_i, \beta_i)}^{\max(\alpha_i - 1, \beta_i - 1)} \varepsilon_j \right). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\varepsilon_{i_0 - 1} \left(\prod_{j=\min(i_0 - 1, \beta_h)}^{\max(i_0 - 2, \beta_h - 1)} \varepsilon_j \right) = \prod_{j=\min(i_0, \beta_h)}^{\max(i_0 - 1, \beta_h - 1)} \varepsilon_j.$$

De manera que tenemos que

$$\text{signo}(lm) = (\varepsilon_n)^k \prod_{i=1}^k \prod_{j=\min(\alpha_i, \beta_i)}^{\max(\alpha_i - 1, \beta_i - 1)} \varepsilon_j = \text{signo}(\det B[\alpha | \beta]).$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior y (3.10), podemos concluir que A satisface (3.9) y por tanto se cumple el resultado.

□

3.2. Propiedades de las matrices SBD

Al aplicar el Teorema anterior con $\alpha, \beta \in Q_{1,n}$, obtenemos el siguiente resultado sobre los signos de las entradas de una matriz ε -BD.

Corolario 3.18. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz ε -BD con signatura $(\varepsilon, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$. Se tiene que*

$$\text{signo}(a_{ij}) = \varepsilon_n \prod_{k=\text{mín}(i,j)}^{\text{máx}(i-1,j-1)} \varepsilon_k \quad (3.11)$$

para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n$.

El siguiente lema extiende a las matrices ε -BD el conocido Lema de las sombras para matrices TP (véase el Lema 1.40 del Capítulo 1). Dada una matriz ε -BD, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, con una entrada nula $a_{ij} = 0$, entonces una de las siguientes regiones de A está llena de ceros:

$$a_{kj} = 0 \quad \forall k, \quad (3.12)$$

$$a_{ik} = 0 \quad \forall k, \quad (3.13)$$

$$a_{kl} = 0 \quad \forall k \geq i, l \leq j, \quad (3.14)$$

$$a_{kl} = 0 \quad \forall k \leq i, l \geq j. \quad (3.15)$$

Lema 3.19. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz ε -BD con $a_{ij} = 0$, una entrada nula en la posición (i, j) . Se tiene que entonces se cumple una de las condiciones (3.12), (3.13), (3.14) o (3.15).*

Demostración. Supongamos que $i < j$ (el caso $i > j$ se demuestra análogamente) y supongamos que no se cumplen ni (3.12) ni (3.13). Como no se cumple (3.12), sabemos que $a_{tj} \neq 0$ para algún $t \neq i$. Supongamos que $t > i$. De esta manera tenemos que $\det A[i, t \mid j, l] = -a_{tj}a_{il}$ para todo $l > j$. Consideremos el caso en que $i < t < j < l$ (los casos $i < j < t < l$ y $i < j < l < t$ son similares). Por el Corolario 3.18 tenemos que

$$\begin{aligned} \text{signo}(-a_{tj}a_{il}) &= - \left(\varepsilon_n \prod_{k=\text{mín}(t,j)}^{\text{máx}(t-1,j-1)} \varepsilon_k \right) \left(\varepsilon_n \prod_{k=\text{mín}(i,l)}^{\text{máx}(i-1,l-1)} \varepsilon_k \right) \\ &= - \prod_{k=t}^{j-1} \varepsilon_k \prod_{k=i}^{l-1} \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Sin embargo, por el Teorema 3.17 se tiene que

$$\begin{aligned} \text{signo}(\det A[i, t \mid j, l]) &= (\varepsilon_n)^2 \prod_{k=\min(i,j)}^{\max(i-1,j-1)} \varepsilon_k \prod_{k=\min(t,l)}^{\max(t-1,l-1)} \varepsilon_k = \prod_{k=i}^{j-1} \varepsilon_k \prod_{k=t}^{l-1} \varepsilon_k \\ &= \prod_{k=i}^{l-1} \varepsilon_k \prod_{k=t}^{j-1} \varepsilon_k. \end{aligned}$$

De manera que concluimos que $a_{il} = 0$ para todo $l > j$.

Análogamente, podemos deducir que $a_{rs} = 0$ para todo $r < i$, $s \geq j$ y habremos demostrado que se cumple (3.15).

Con un razonamiento similar podemos demostrar que si $t < i$, entonces se cumple (3.14). □

Recordemos que una matriz no singular A admite una *descomposición QR* si se puede escribir $A = QR$, donde Q es una matriz ortogonal y R es una matriz triangular superior (véase Definición 1.21). A continuación, extenderemos un resultado que caracteriza las matrices TP no singulares en términos de su descomposición QR, a la clase de matrices SBD. Para ello, necesitamos definir dos clases de matrices. La primera, que incluimos a continuación, fue usada en la mencionada caracterización.

Definición 3.20 (γ -matriz). *Sea A una matriz no singular. Diremos que A es una γ -matriz si admite una descomposición LDU, $A = LDU$, donde LD y U^{-1} son dos matrices TP.*

Ahora presentamos una clase de matrices generalizando la clase de matrices correspondiente a la definición anterior.

Definición 3.21 (γ_{SBD} -matriz). *Sea A una matriz no singular. Diremos que A es una γ_{SBD} -matriz con signatura ε si admite una descomposición LDU, $A = LDU$, donde LD y U^{-1} son dos matrices SBD con signatura ε .*

El siguiente resultado extiende el Teorema 4.7 de [52], válido para matrices TP no singulares, a la clase de matrices SBD.

3.2. Propiedades de las matrices SBD

Teorema 3.22. *Sea A una matriz no singular. Se tiene que A es SBD con signatura ε si y sólo si existen dos γ_{SBD} -matrices con signatura ε ortogonales Q_1, Q_2 y dos matrices SBD con signatura ε triangulares superiores R_1, R_2 tales que*

$$A = Q_1 R_1, \quad A^T = Q_2 R_2.$$

Demostración. Para ver la implicación directa recordemos que, por el Teorema 3.3, la matriz $KAK = |A|$ es TP no singular, donde K es cualquier matriz diagonal que que cumpla (3.2). Por el Teorema 4.7 de [52] sabemos que

$$KAK = \hat{Q}_1 \hat{R}_1, \quad (KAK)^T = KA^T K = \hat{Q}_2 \hat{R}_2, \quad (3.16)$$

donde \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 son γ -matrices ortogonales y \hat{R}_1, \hat{R}_2 son TP triangulares superiores no singulares.

Recordemos que $K^{-1} = K$ y entonces, por (3.16), tenemos que $A = K(\hat{Q}_1 \hat{R}_1)K = (K\hat{Q}_1 K)(K\hat{R}_1 K)$, donde la matriz $R_1 := K\hat{R}_1 K$ es SBD con signatura ε por el Teorema 3.3.

Además, se tiene que $Q_1 := K\hat{Q}_1 K$ es ortogonal (por serlo \hat{Q}_1) y, puesto que \hat{Q}_1 es γ -matriz, tenemos

$$\begin{aligned} Q_1 &= K\hat{Q}_1 K = K(L_1 D_1 U_1)K = (K(L_1 D_1)K)(KU_1 K) \\ &= (KL_1 K)(KD_1 K)(KU_1 K), \end{aligned}$$

donde $K(L_1 D_1)K$ es SBD con signatura ε , por el Teorema 3.3 y por ser $L_1 D_1$ una matriz TP. Observemos también que $(KU_1 K)^{-1} = KU_1^{-1} K$ es una matriz SBD con signatura ε , puesto que U_1^{-1} es TP (por ser \hat{Q}_1 una γ -matriz) y de nuevo por el Teorema 3.3. Por lo tanto, Q_1 es una γ_{SBD} -matriz con signatura ε .

Análogamente se demuestra que $A^T = Q_2 R_2$, con Q_2 una γ_{SBD} -matriz con signatura ε ortogonal y R_2 una matriz SBD con signatura ε triangular superior.

Para demostrar el recíproco denotaremos $Q_1 = L_1 D_1 U_1$ y $Q_2 = L_2 D_2 U_2$ a las descomposiciones de las γ_{SBD} -matrices con signatura ε , Q_1 y Q_2 respectivamente. También definiremos la matriz K de acuerdo a las condiciones (3.2). Observemos que la matriz $KQ_1 K = K(L_1 D_1 U_1)K = (K(L_1 D_1)K)(KU_1 K)$ es ortogonal por serlo Q_1 . Además, por el Teorema 3.3, sabemos que $KL_1 D_1 K$ es TP (notemos que $L_1 D_1$ es SBD con signatura ε).

De nuevo por el Teorema 3.3, y teniendo en cuenta que Q_1 es una γ_{SBD} -matriz con signatura ε (y por tanto, U_1^{-1} es una matriz SBD con signatura ε), tenemos que la matriz $(KU_1K)^{-1} = KU_1^{-1}K$ es TP. De manera que la matriz KQ_1K es una γ_{SBD} -matriz con signatura ε . Análogamente se demuestra que KQ_2K es una γ_{SBD} -matriz con signatura ε .

Puesto que tanto R_1 como R_2 son matrices SBD con signatura ε , sabemos, por el Teorema 3.3, que KR_1K y KR_2K son matrices TP no singulares. De manera que tenemos

$$KAK = (KQ_1K)(KR_1K), \quad (KAK)^T = KA^TK = (KQ_2K)(KR_2K),$$

donde KQ_1K, KQ_2K son γ -matrices ortogonales y KR_1K, KR_2K son matrices TP no singulares triangulares superiores. Por tanto, por el Teorema 4.7 de [52], sabemos que la matriz KAK es TP. De modo que, por el Teorema 3.3, concluimos que A es SBD con signatura ε .

□

Las γ -matrices han sido estudiadas bajo diversos puntos de vista (véase [27], [29], [40], [52], [76]). Terminamos esta sección observando que las γ_{SBD} -matrices se pueden caracterizar en términos de las γ -matrices.

Proposición 3.23. *Una matriz A es una γ_{SBD} -matriz con signatura ε si y sólo si KAK es una γ -matriz, donde K es una matriz diagonal cumpliendo (3.2).*

Demostración. Por definición, una matriz A es una γ_{SBD} -matriz con signatura ε si admite una descomposición LDU , $A = LDU$, con LD y U^{-1} matrices SBD con signatura ε . Esto último equivale, por el Teorema 3.3, a que $KLDK$ y $KU^{-1}K$ son TP. Como $KAK = (KLDK)(KUK)$ y $(KUK)^{-1} = KU^{-1}K$, lo anterior equivale a que KAK es γ -matriz.

□

3.3. Matrices Jacobi SBD

En esta sección nos centraremos en las matrices que, además de pertenecer a la clase de las matrices SBD, son Jacobi (tridiagonales). Estudiaremos

3.3. Matrices Jacobi SBD

la relación de estas matrices con otras clases de matrices, como las M-matrices no singulares o las H-matrices signo simétricas. También veremos propiedades sobre el producto de Hadamard de matrices SBD.

El siguiente resultado demuestra que las M-matrices no singulares Jacobi son matrices SBD con signatura $(-1, \dots, -1)$.

Proposición 3.24. *Si A es una M-matriz no singular Jacobi, entonces A es una matriz SBD con signatura $(-1, \dots, -1)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.49, sabemos que la matriz inversa de una M-matriz no singular Jacobi es TP. Por lo tanto, el resultado se demuestra aplicando el Corolario 3.5.

□

Notemos que una matriz signo simétrica $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ cumple que $a_{ij}a_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j$. En el siguiente resultado se caracteriza a las H-matrices no singulares Jacobi con esta propiedad y con entradas diagonales positivas.

Proposición 3.25. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz Jacobi no singular con $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Se tiene que las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i) *A es una H-matriz no singular que cumple que $a_{ij}a_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j$.*
- (ii) *A es SBD.*
- (iii) *A es una H-matriz no singular signo simétrica.*

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Como A es una matriz Jacobi con $a_{ij}a_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j$, existe una matriz diagonal K_1 con ± 1 en su diagonal de manera que $K_1AK_1 = \mathcal{M}(A)$ (matriz de comparación de A , véase Definición 1.51), que es una M-matriz no singular por ser A una H-matriz no singular. Por la Proposición 3.24 tenemos que K_1AK_1 es SBD con signatura $(-1, \dots, -1)$ y por el Teorema 3.3, sabemos que existe una matriz diagonal K_2 que alterna 1 y -1 en su diagonal de manera que la matriz $K_2(K_1AK_1)K_2 = |K_1AK_1|$

(= $|A|$) es TP. Puesto que K_1K_2 es una matriz diagonal con ± 1 en su diagonal, se tiene por el Corolario 3.4, que A es SBD.

(ii) \Rightarrow (iii) Si se cumple (ii), entonces A es signo simétrica por la Proposición 3.11. Por el Corolario 3.4, sabemos que existe una matriz diagonal (no singular) K_1 de manera que la matriz $K_1AK_1 = |A|$ es TP. Como A es signo simétrica, se tiene que $a_{ij}a_{ji} \geq 0$ para todo $i \neq j$ y como A es Jacobi, existe una matriz diagonal K_2 con ± 1 en su diagonal de manera que $K_2AK_2 = \mathcal{M}(A)$. Notemos que los menores principales de la matriz $\mathcal{M}(A)$ son de la forma

$$(\det K_2[\alpha])^2 \det A[\alpha] = \det(K_2AK_2)[\alpha], \quad (3.17)$$

donde $\alpha \in Q_{k,n}$ para todo $k \leq n$, y que como $|A|$ es TP no singular, sus menores principales son positivos por la Proposición 1.32. Por tanto,

$$0 < \det |A|[\alpha] = \det(K_1AK_1)[\alpha] = (\det K_1[\alpha])^2 \det A[\alpha]. \quad (3.18)$$

Teniendo en cuenta (3.17) y (3.18), podemos concluir que todos los menores principales de la matriz de comparación $\mathcal{M}(A)$ son positivos, y por tanto, por el Teorema 1.48, se tiene que $\mathcal{M}(A)$ es una M-matriz no singular. De manera que A es una H -matriz no singular.

(iii) \Rightarrow (i) Basta con aplicar la condición de signo simetría a las submatrices 1×1 de A .

□

Recordemos que dada $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una M-matriz diagonal dominante, podemos calcular sus valores singulares con alta precisión relativa siempre que conozcamos sus entradas extradiagonales y $a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ para todo $i = 1, \dots, n$ (véase Sección 4.1). Sea A una M-matriz no singular Jacobi. Por otro lado, por la Proposición 3.24 sabemos que dada una M-matriz no singular Jacobi, existe una $\mathcal{BD}(A)$. Se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_1^{(n-1)} & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & l_{n-1}^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_1^{(n-1)} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & u_{n-1}^{(n-1)} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Si conocemos $\mathcal{BD}(A)$, entonces podemos aplicar los métodos con alta precisión relativa de la Subsección 3.1.3. De hecho, por la Proposición 3.25,

podemos aplicar dichos métodos a cualquier H–matriz no singular Jacobi signo simétrica y con entradas diagonales positivas. En conclusión, para las M–matrices no singulares Jacobi tenemos dos vías alternativas de realizar cálculos con alta precisión relativa dependiendo de los parámetros que conozcamos.

En lo que resta de sección, demostraremos desigualdades con el producto de Hadamard de matrices Jacobi SBD, que el producto de Hadamard de las mismas es una matriz con las mismas propiedades y que no se pueden obtener extensiones análogas de los resultados para matrices SR. Recordemos que el problema de encontrar condiciones que aseguren que el producto de Hadamard de matrices TP es cerrado tiene importantes aplicaciones (véase [49] y [91]).

Recordemos que una matriz TP no singular $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es oscilatoria si y sólo si $a_{i, i+1} > 0$ y $a_{i+1, i} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$ (véase Teorema 1.42). Además, puesto que las matrices oscilatorias son TP y no singulares, por la Proposición 1.32 sabemos que $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. De manera que una matriz Jacobi oscilatoria $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ cumple que $a_{ij} \neq 0$ para $|i - j| \leq 1$.

El núcleo de Hadamard de las matrices $n \times n$ TP viene dado por

$$CTP := \{A : B \text{ es TP} \Rightarrow A \circ B \text{ es TP}\}. \quad (3.19)$$

El siguiente resultado corresponde al Corolario 8.3.2 de [42].

Proposición 3.26. *Sea A una matriz $n \times n$ TP que pertenece al CTP y sea B una matriz $n \times n$ TP. Se tiene que $\det(A \circ B) \geq \det(AB)$.*

Por el Teorema 8.2.5 de [42], sabemos que las matrices Jacobi TP pertenecen al CTP. De manera que, por la Proposición 3.26, podemos deducir el siguiente resultado.

Proposición 3.27. *Sea A una matriz $n \times n$ Jacobi TP y sea B una matriz $n \times n$ TP. Se tiene que $\det(A \circ B) \geq \det A \det B$.*

Por la Proposición 4.12 de [84] (véase también el Corolario 2.7 de [31], Corolario 8.2.6 de [42]), sabemos que el conjunto de las matrices Jacobi TP es un semigrupo para el producto de Hadamard. Considerando que la no

singularidad de las matrices Jacobi TP se conserva al hacer producto de Hadamard (véase Proposición 3.27), podemos deducir que el conjunto de las matrices Jacobi TP no singulares es un subsemigrupo del conjunto de matrices Jacobi TP, con respecto a la operación del producto de Hadamard. Esto generaliza el Teorema 1.44 para las matrices Jacobi oscilatorias a la clase de matrices Jacobi TP no singulares.

Proposición 3.28. *Sean A y B dos matrices Jacobi TP no singulares. Se tiene que la matriz $A \circ B$ es Jacobi TP no singular.*

A diferencia con el caso de las matrices Jacobi TP no singulares de la Proposición 3.28, el siguiente ejemplo muestra que el producto de Hadamard no es cerrado para matrices Jacobi SR no singulares.

Ejemplo 3.29. *Consideremos las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices Jacobi no singulares son SR con la misma signatura $\varepsilon = (1, 1, -1)$. Tenemos que el producto de Hadamard de A y B es la matriz

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix},$$

que es singular porque $\det(A \circ B) = 0$. De hecho, este ejemplo también muestra que la Proposición 3.27 tampoco puede ser extendida a las matrices SR.

Extenderemos ahora la Proposición 3.28 a la clase de matrices SBD. Análogamente a (3.19), definimos el núcleo de Hadamard de las matrices $n \times n$ SBD como

$$CSBD := \{A : B \text{ es SBD} \Rightarrow A \circ B \text{ es SBD}\}. \quad (3.20)$$

El siguiente resultado muestra que las matrices Jacobi SBD pertenecen al CSBD.

Proposición 3.30. *Sea A una matriz $n \times n$ Jacobi SBD y sea B una matriz $n \times n$ SBD. Se tiene que la matriz $A \circ B$ es SBD.*

3.3. Matrices Jacobi SBD

Demostración. Puesto que tanto $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ como $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ son matrices SBD, sabemos, por el Teorema 3.3 que existen dos matrices $K^{(A)} = \text{diag}(k_1^{(A)}, \dots, k_n^{(A)})$ y $K^{(B)} = \text{diag}(k_1^{(B)}, \dots, k_n^{(B)})$ tales que $K^{(A)}AK^{(A)} = |A|$, $K^{(B)}BK^{(B)} = |B|$ son matrices Jacobi TP no singulares. De esta manera, por la Proposición 3.28, sabemos que la matriz $|A| \circ |B|$ es Jacobi TP no singular. Notemos que además $|A| \circ |B| = |A \circ B|$. Definamos la matriz $K := K^{(A)}K^{(B)}$ ($= K^{(B)}K^{(A)}$), entonces tenemos que

$$K(A \circ B)K = (k_i^{(A)}k_i^{(B)}a_{ij}b_{ij}k_j^{(A)}k_j^{(B)})_{1 \leq i, j \leq n} = (|a_{ij}||b_{ij}|)_{1 \leq i, j \leq n} = |A| \circ |B|,$$

y así tenemos que $0 < \det(|A| \circ |B|) = \det(K(A \circ B)K) = \det(A \circ B)$. Por tanto, de nuevo por el Teorema 3.3, concluimos que la matriz $A \circ B$ es SBD.

□

El conjunto de matrices Jacobi SBD forma un semigupo con respecto al producto de Hadamard, tal y como muestra el siguiente corolario. Este corolario es una consecuencia directa de la proposición anterior.

Corolario 3.31. *Sean A y B dos matrices $n \times n$ Jacobi SBD. Se tiene que la matriz $A \circ B$ es Jacobi SBD.*

El resultado anterior no es válido para matrices SBD que son Jacobi tal y como muestra el siguiente ejemplo. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1,1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1,1 \end{pmatrix},$$

que es TP y no singular. Por tanto, por el Teorema 3.3, sabemos que A es SBD. Sin embargo, la matriz

$$A \circ A^T = \begin{pmatrix} 1,1^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1,1^2 \end{pmatrix}$$

tiene determinante igual a $-0,9559 < 0$. De modo que $A \circ A^T$ no es una P-matriz y por tanto, no puede ser SBD. Recordemos que en la Proposición 3.8 probamos que las matrices SBD son P-matrices.

3.4. Desigualdades relacionadas con el mínimo valor propio y el producto de Hadamard

En esta sección estudiaremos desigualdades relacionadas con el mínimo valor propio de matrices signo consistentes (y por tanto, también válidas para matrices SR) y de matrices SBD. También presentaremos una clase de matrices, matrices SSTP, que contiene a las matrices SBD y veremos desigualdades que involucran al complemento de Schur y al producto de Hadamard de dichas matrices SSTP.

Denotaremos por λ_* a un valor propio de valor absoluto mínimo de una matriz A , es decir $|\lambda_*| \leq |\lambda_i|$ para todos los valores propios λ_i de A . Recordemos (véase la Proposición 1.29) que una matriz TP no singular tiene todos sus valores propios positivos. Por tanto, si A es una matriz TP no singular, entonces podemos tomar $\lambda_* > 0$. En [83], se obtuvo una cota para este λ_* para matrices TP no singulares, mejorando la cota dada por el conocido Teorema de Gershgorin para la localización de valores propios. En esta sección extenderemos dicha cota a más clases de matrices, como las matrices SR o las matrices SBD.

El siguiente resultado caracteriza a las matrices $n \times n$ que son simultáneamente SC_1 y SC_{n-1} (véase Definición 1.45).

Proposición 3.32. *Sea A una matriz $n \times n$ no singular. Se tiene que las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i) A es SC_1 y SC_{n-1} .
- (ii) Tanto $JA^{-1}J$ como A son SC_1 .
- (iii) $JA^{-1}J$ es SC_1 y SC_{n-1} .

Demostración. Observemos que la demostración de las implicaciones (i) \Rightarrow (ii) y (ii) \Rightarrow (iii) se puede obtener fácilmente utilizando la fórmula (1.5).

(iii) \Rightarrow (i). Al aplicar la fórmula (1.5) a la matriz $JA^{-1}J$ se tiene

$$\det(J(JA^{-1}J)^{-1}J)[\alpha | \beta] = \det A[\alpha | \beta] = \frac{\det(JA^{-1}J)(\beta | \alpha)}{\det(JA^{-1}J)},$$

3.4. Desigualdades sobre el mínimo valor propio y el producto Hadamard

para $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$. Puesto que la matriz $JA^{-1}J$ es SC_1 y SC_{n-1} por hipótesis, se cumple (i).

□

Recordemos que el conocido Teorema de los discos de Gershgorin (véase Teorema 1.8) proporciona una cota inferior para un valor propio con valor absoluto mínimo λ_* de una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$:

$$|\lambda_*| \geq \min_i \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}.$$

El siguiente resultado mejora esta cota para ciertas matrices. Esta cota inferior extiende la cota obtenida en el Teorema 4.4 de [83] para matrices TP no singulares a una clase de matrices más amplia. Aunque las cotas inferiores para valores propios con valor absoluto mínimo son más útiles que las cotas superiores, el siguiente teorema también proporciona una cota superior. En el próximo resultado se utilizarán los siguientes subconjuntos de índices: dado $i \in \{1, \dots, n\}$ sean

$$J_i := \{j \mid |j - i| \text{ es impar}\}, \quad K_i := \{j \mid |j - i| \text{ es par}\}. \quad (3.21)$$

Teorema 3.33. *Sea A una matriz $n \times n$ no singular que es SC_1 y SC_{n-1} con signos ε_1 y ε_{n-1} respectivamente. Sea ε_n el signo del determinante de A . Se tiene que A tiene un valor propio real λ_* con valor absoluto mínimo y además*

$$\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n |\lambda_*| \geq \min_i \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j \in J_i} |a_{ij}| \right\} \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n |\lambda_*| \leq \max_i \left\{ |a_{ii}| + \sum_{j \in K_i} |a_{ij}| \right\}. \quad (3.23)$$

Demostración. Notemos que, por la fórmula (1.5), la matriz $JA^{-1}J$ es SC_1 con signo $\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$. Por el Teorema de Perron–Frobenius, podemos encontrar $\hat{\lambda}$ un valor propio real de $JA^{-1}J$ con valor absoluto mínimo, de manera que

$$\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \hat{\lambda} \geq 0, \quad (3.24)$$

y un vector propio no negativo x de $JA^{-1}J$ asociado a $\hat{\lambda}$. En ese caso, x también es un vector propio de la matriz $(JA^{-1}J)^{-1} = JAJ$ asociado a

$\lambda_* := 1/\hat{\lambda}$, un valor propio de JAJ con valor absoluto mínimo. De esta manera, λ_* es un valor propio de A con valor absoluto mínimo. Observemos que, por (3.24), tenemos que $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n\lambda_* \geq 0$.

Dado $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ el vector propio no negativo de JAJ , consideremos un índice $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_i = \max_{1 \leq j \leq n} \{x_j\} (\neq 0)$. En ese caso tenemos que $\frac{1}{x_i}x$ también es un vector propio no negativo de JAJ . De hecho, podemos tomar el vector x (que es no negativo) de manera que $x_i = 1$ y $0 \leq x_j \leq 1$ para todo $j \neq i$. Si tomamos la componente i -ésima de $(JAJ)x = \lambda_*x$, tenemos que

$$\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n|\lambda_*| = \lambda_* = a_{ii} + \sum_{j \in K_i} a_{ij}x_j - \sum_{j \in J_i} a_{ij}x_j.$$

Por tanto, tenemos que

$$\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n|\lambda_*| = \varepsilon_1a_{ii} + \sum_{j \in K_i} \varepsilon_1a_{ij}x_j - \sum_{j \in J_i} \varepsilon_1a_{ij}x_j.$$

Como $(\varepsilon_1A =)|A| \geq 0$, $x \geq 0$ y $x_j \leq 1$ para todo $j \neq i$, podemos deducir que

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n|\lambda_*| &\geq |a_{ii}| - \sum_{j \in J_i} |a_{ij}|, \\ \varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n|\lambda_*| &\leq |a_{ii}| + \sum_{j \in K_i} |a_{ij}|. \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que se cumple el resultado. □

Observemos que el resultado anterior sólo proporciona cotas cuando $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$. Sin embargo, cuando $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$, podemos deducir a partir del Teorema 3.33 una consecuencia sobre las entradas de la matriz, tal y como muestra la siguiente nota.

Nota 3.34. *Sea A una matriz $n \times n$ no singular de manera que A es SC_1 y SC_{n-1} con signos ε_1 y ε_{n-1} respectivamente. Sea ε_n el signo del determinante de A . Si $\varepsilon_1\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$, entonces la cota (3.22) del Teorema 3.33 implica que $|a_{ii}| \leq \sum_{j \in J_i} |a_{ij}|$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, donde J_i es el subconjunto de índices definido por (3.21).*

3.4. Desigualdades sobre el mínimo valor propio y el producto Hadamard

Observemos que el Teorema 3.33 también es válido para matrices SR.

Recordemos que, por la equivalencia entre (i) y (ii) del Teorema 3.3, las matrices SBD son semejantes a las matrices TP. Por lo tanto podemos concluir, al igual que en el caso de las matrices TP no singulares, que un valor propio con valor absoluto mínimo de una matriz SBD es positivo. El siguiente resultado extiende el Teorema 4.4 de [83] a la clase de matrices SBD.

Corolario 3.35. *Sea A una matriz SBD de tamaño $n \times n$ y sea λ_* un valor propio de A con valor absoluto mínimo. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea J_i el subconjunto de índices definido en (3.21). Se tiene que*

$$\lambda_* \geq \min_i \left\{ a_{ii} - \sum_{j \in J_i} |a_{ij}| \right\}. \quad (3.25)$$

Demostración. Por el Teorema 3.3, sabemos que la matriz KAK (que es semejante a A) es una matriz TP no singular. Recordemos que A y KAK tienen los mismos valores propios. Por tanto, podemos aplicar el Teorema 3.33 a la matriz KAK (con $\varepsilon_1 = \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n = 1$) y el resultado se deriva a partir de (3.22). Notemos que una matriz SBD tiene entradas diagonales positivas y entonces $|a_{ii}| = a_{ii}$.

□

Los siguientes ejemplos muestran que las cotas del Corolario 3.35 y del Teorema 3.33 no se pueden mejorar.

Ejemplo 3.36. *Consideremos la siguiente matriz SBD*

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -7 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene los valores propios 12, 9 y 5. Puesto que la cota dada por (3.25) es $\lambda_ \geq 5$ y es alcanzada por el valor propio más pequeño, dicha cota no se puede mejorar. Observemos que la cota inferior dada por el Teorema de Gershgorin es $\lambda_* \geq \min\{4, 5, 5\} = 4$, que es peor que la anterior.*

Dada la matriz TP no singular

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

que tiene el valor propio 12 (con multiplicidad 3), observemos que la cota dada por (3.23) es $\lambda_* \leq 12$. Esta cota no se puede mejorar y además mejora la cota superior dada por el Teorema de Gershgorin, $\lambda_* \leq 12 + 7 = 19$.

Si A es no singular, recordemos la siguiente fórmula sobre complementos de Schur de sus submatrices principales (corresponde a la fórmula (1.2) aplicada a submatrices principales):

$$(A/A[\alpha])^{-1} = A^{-1}(\alpha) = A^{-1}[\alpha^c]. \quad (3.26)$$

En la Proposición 1.5.1 de [42] se muestra que el complemento de Schur de submatrices principales $A[\alpha]$ que utilizan conjuntos de índices consecutivos α de una matriz TP no singular, es TP. Desafortunadamente, este resultado no es válido para complementos de Schur en general de matrices TP. Sin embargo, los complementos de Schur en general de submatrices principales de las matrices SBD también son SBD, tal y como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 3.37. *Sea A una matriz SBD. Se tiene que el complemento de Schur de $A[\alpha]$ en A , $A/A[\alpha]$, es SBD.*

Demostración. Puesto que A es SBD y por el Teorema 3.3, sabemos que la matriz A^{-1} es SBD. Como las submatrices principales de las matrices SBD son SBD (véase Corolario 3.9), tenemos que la matriz $A^{-1}(\alpha)$ es SBD para todo α . Por (3.26), tenemos que $A^{-1}(\alpha) = (A/A[\alpha])^{-1}$ y entonces, de nuevo por el Teorema 3.3, concluimos que $A/A[\alpha]$ es SBD.

□

Recordemos que las matrices SBD son no singulares. Ahora presentaremos una clase de matrices que contiene a las matrices SBD y también a algunas matrices singulares.

Recordemos que una matriz diagonal es una *matriz signatura* si todas sus entradas diagonales son ± 1 . Diremos que dos matrices A y B de tamaño $n \times n$ son *semejantes por signatura* si $A = SBS^{-1} = SBS$, donde S es una matriz signatura.

Definición 3.38 (SSTP). *Diremos que una matriz A es semejante por signatura a una TP con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$, y lo denotaremos por*

3.4. Desigualdades sobre el mínimo valor propio y el producto Hadamard

SSTP con signatura ε , si $A = KBK$, donde B es TP, K es una matriz signatura y ε satisface las condiciones (3.2).

A partir del Teorema 3.3, podemos obtener el siguiente resultado que muestra que la clase de las matrices SSTP contiene a las matrices SBD.

Proposición 3.39. *Una matriz A es SBD con signatura ε si y sólo si A es SSTP con signatura ε y no singular.*

En la Proposición 3.10, probamos las propiedades del siguiente resultado para matrices SBD. Por la Proposición 3.39, dichas propiedades también son válidas para matrices SSTP. Para la demostración del resultado véanse la Proposición 3.10 y la Proposición 3.7.

Lema 3.40. *Sean A, B dos matrices SSTP con la misma signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$. Se tiene que*

- (i) $A^\#$ es una matriz SSTP con signatura $(\varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_1)$.
- (ii) AB es una matriz SSTP con signatura ε .
- (iii) Si A es no singular, entonces $A = LDU$, donde L (U , respectivamente) es una matriz triangular inferior (superior, respectivamente) SBD con signatura ε y con unos en la diagonal y D es una matriz diagonal con entradas diagonales positivas.

Recordemos que, dada una matriz A , decimos que una descomposición $A = BC$ es una *descomposición UL* si B es triangular superior y C es triangular inferior. El siguiente lema proporciona una caracterización de las matrices SBD en términos de su descomposición UL.

Proposición 3.41. *Una matriz A $n \times n$ es SBD con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ si y sólo si existen dos matrices A_L y A_U triangular inferior y superior, respectivamente, y ambas son SSTP con signatura ε , de manera que $A = A_U A_L$.*

Demostración. Por el Lema 3.40 sabemos que la matriz converso de una matriz SSTP es de nuevo SSTP. De modo que, por el Lema 3.40, tenemos que $A^\# = LDU = L(DU)$ con L y U matrices triangulares inferior y superior

respectivamente y ambas SBD con la misma signatura $(\varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_1)$. Por tanto, por la Proposición 3.39 y el Lema 3.40, tenemos que $A = L^\#(DU)^\# = A_U A_L$, donde $A_U := L^\#$ es una matriz triangular superior SSTP con signatura ε y $A_L := (DU)^\#$ es una matriz triangular inferior SSTP con signatura ε . Como A_U y A_L son no singulares, y por la Proposición 3.39, sabemos que también son SBD. La otra implicación se deriva del apartado (ii) del Lema 3.40 y de la Proposición 3.39.

□

El siguiente resultado tiene una demostración inmediata.

Lema 3.42. *Sea A una matriz SSTP con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ y sea $\alpha = \{1, \dots, k\}$. Se tiene que $A[\alpha]$ es SSTP con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$.*

El siguiente resultado extiende el Teorema 2.3 de [92], válido para matrices TP, a la clase de matrices SSTP.

Teorema 3.43. *Sea A una matriz $n \times n$ no singular SSTP con signatura ε y sea $A(\alpha)$ no singular para $\alpha = \{1, \dots, k\}$ ($k < n$), entonces se tiene que*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A[\alpha|\alpha]A(\alpha)^{-1}A(\alpha|\alpha] & A[\alpha|\alpha] \\ A(\alpha|\alpha] & A(\alpha) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

es SSTP con signatura ε .

Demostración. Por la Proposición 3.39, sabemos que A es SBD con signatura ε . Por la Proposición 3.41, A tiene una descomposición UL , $A = A_U A_L$, y por tanto podemos escribir

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A[\alpha] & A[\alpha|\alpha] \\ A(\alpha|\alpha] & A(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_U[\alpha]A_L[\alpha] + A_U[\alpha|\alpha]A_L(\alpha|\alpha] & A_U[\alpha|\alpha]A_L(\alpha) \\ A_U(\alpha)A_L(\alpha|\alpha] & A_U(\alpha)A_L(\alpha) \end{pmatrix} = A_U A_L, \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde $A_U = \begin{pmatrix} A_U[\alpha] & A_U[\alpha|\alpha] \\ 0 & A_U(\alpha) \end{pmatrix}$ y $A_L = \begin{pmatrix} A_L[\alpha] & 0 \\ A_L(\alpha|\alpha] & A_L(\alpha) \end{pmatrix}$ son matrices SSTP con signatura ε .

Por el Lema 3.42, el Lema 3.40, la Definición 1.3 y (3.28), deducimos que

$$A/A[\alpha^c] = A/A(\alpha) = A[\alpha] - A[\alpha|\alpha]A(\alpha)^{-1}A(\alpha|\alpha] = A_U[\alpha]A_L[\alpha] \quad (3.29)$$

3.4. Desigualdades sobre el mínimo valor propio y el producto Hadamard

es SSTP con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$.

Considerando (3.28) y (3.29), obtenemos la siguiente igualdad

$$A[\alpha|\alpha]A(\alpha)^{-1}A(\alpha|\alpha] = A[\alpha] - A/A(\alpha) = A_U[\alpha|\alpha]A_L(\alpha|\alpha]. \quad (3.30)$$

Además, por (3.28), tenemos que $A[\alpha|\alpha] = A_U[\alpha|\alpha]A_L(\alpha)$, $A(\alpha|\alpha] = A_U(\alpha)A_L(\alpha|\alpha]$ y $A(\alpha) = A_U(\alpha)A_L(\alpha)$. Por tanto, teniendo en cuenta (3.30), concluimos que

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A[\alpha|\alpha]A(\alpha)^{-1}A(\alpha|\alpha] & A[\alpha|\alpha] \\ A(\alpha|\alpha] & A(\alpha) \end{pmatrix} = BC, \quad (3.31)$$

donde

$$B := A_U[1, \dots, n|\alpha] = \begin{pmatrix} A_U[\alpha|\alpha] \\ A_U(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$C := A_L(\alpha|1, \dots, n] = (A_L(\alpha|\alpha] \ A_L(\alpha)).$$

Puesto que A_U y A_L son SSTP con signatura ε , sabemos por la Definición 3.38 que las matrices $KA_UK = |A_U|$ y $KA_LK = |A_L|$ son TP. Por lo tanto, las matrices $|B|$ y $|C|$ son TP. Teniendo en cuenta que el producto de matrices TP es una matriz TP (véase Teorema 1.28) y (3.31), podemos deducir que

$$|B||C| = (KBK(\alpha))(K(\alpha)CK) = KBCK = K\hat{A}K$$

es una matriz TP y entonces $\hat{A} = K|B||C|K$. Por lo tanto, por la Definición 3.38, tenemos que \hat{A} es SSTP con signatura ε .

□

El siguiente ejemplo muestra que no podemos mejorar el enunciado del teorema anterior de manera que la conclusión sea que la matriz \hat{A} es SBD.

Ejemplo 3.44. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y sea $\alpha = \{1\}$. Notemos que A es una matriz SBD puesto que A es TP. Sin embargo, la matriz $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no puede ser SBD porque es singular.

A continuación presentamos el núcleo de Hadamard de las matrices SSTP de tamaño $n \times n$:

$$CSSTP := \{A : B \text{ es SSTP} \Rightarrow A \circ B \text{ es SSTP}\}. \quad (3.32)$$

Corolario 3.45. *Si A es una matriz Jacobi SSTP con signatura ε , entonces $\hat{A} \in CSSTP$.*

Demostración. Por el Teorema 3.43, sabemos que \hat{A} también es SSTP con signatura ε . Puesto que $\hat{A} = KCK$, con C una matriz Jacobi TP, y teniendo en cuenta que las matrices Jacobi TP están en el núcleo de Hadamard de las matrices TP (véase Teorema 8.2.5 de [42]), podemos deducir fácilmente que \hat{A} pertenece al CSSTP. □

Demostraremos ahora un resultado para el complemento de Schur de $A(\alpha)$ con $\alpha = \{1, \dots, k\}$ en matrices SSTP.

Lema 3.46. *Sea A una matriz SSTP con signatura $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$, $\alpha = \{1, \dots, k\}$ y sea $A(\alpha)$ no singular. Se tiene que $A/A(\alpha)$ es SSTP con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$.*

Demostración. Por la Proposición 3.41 tenemos que $A = A_U A_L$, donde A_U y A_L son matrices SSTP con la misma signatura ε . También sabemos, por (3.29), que $A/A(\alpha) = A_U[\alpha]A_L[\alpha]$. Observemos que, por el Lema 3.42, las submatrices $A_U[\alpha]$ y $A_L[\alpha]$ son SSTP con la misma signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$. De manera que, utilizando el apartado (ii) del Lema 3.40, concluimos que $A/A(\alpha)$ es SSTP con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$. □

Sean $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ y $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ dos matrices. Diremos que $A \geq B$ si $a_{ij} \geq b_{ij}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Extendiendo a las matrices SSTP el Teorema 3.1 de [92], válido para matrices TP, tenemos las siguientes desigualdades.

Teorema 3.47. *Sean A, B dos matrices SBD con la misma signatura ε , $\alpha = \{1, \dots, k\}$, y sean $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ y $A(\alpha) \circ B(\alpha)$ no singulares. Si $\hat{A} \in CSSTP$ o $\hat{B} \in CSSTP$, entonces tenemos que*

$$\begin{aligned} (A \circ B)/(A(\alpha) \circ B(\alpha)) &\geq A/A(\alpha) \circ B[\alpha] + A[\alpha] \circ B/B(\alpha) \\ &\quad - A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha) \tag{3.33} \\ &\geq A/A(\alpha) \circ B[\alpha] \geq A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha), \end{aligned}$$

3.4. Desigualdades sobre el mínimo valor propio y el producto Hadamard

$$(A \circ B)/(A(\alpha) \circ B(\alpha)) \geq A[\alpha] \circ B/B(\alpha) \geq A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha). \quad (3.34)$$

Demostración. Primero definimos la matriz \hat{B} de manera análoga a como hemos definido \hat{A} en (3.27). Por el Teorema 3.43, sabemos que \hat{A} y \hat{B} son matrices SSTP con signatura ε . Notemos que, debido a la conmutatividad del producto de Hadamard, basta con demostrar el enunciado para $\hat{A} \in CSSTP$ (el caso $\hat{B} \in CSSTP$ se demuestra análogamente). Ahora, como $\hat{A} \in CSSTP$, tenemos que la siguiente matriz es SSTP

$$\hat{A} \circ \hat{B} = \begin{pmatrix} (A[\alpha] - A/A(\alpha)) \circ (B[\alpha] - B/B(\alpha)) & A[\alpha|\alpha] \circ B[\alpha|\alpha] \\ A(\alpha|\alpha) \circ B(\alpha|\alpha) & A(\alpha) \circ B(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz $\hat{A} \circ \hat{B}$ es TP excepto por el signo de algunas entradas. Además, como \hat{A} y \hat{B} son SSTP con la misma signatura, la matriz $\hat{A} \circ \hat{B}$ es no negativa y por tanto, TP. Considerando la ecuación anterior y la Definición 1.3, podemos deducir que

$$\begin{aligned} & (\hat{A} \circ \hat{B})/(A(\alpha) \circ B(\alpha)) \\ &= (A[\alpha] - A/A(\alpha)) \circ (B[\alpha] - B/B(\alpha)) \\ &\quad - (A[\alpha|\alpha] \circ B[\alpha|\alpha])(A(\alpha) \circ B(\alpha))^{-1}(A(\alpha|\alpha) \circ B(\alpha|\alpha)) \\ &= A[\alpha] \circ B[\alpha] - (A[\alpha|\alpha] \circ B[\alpha|\alpha])(A(\alpha) \circ B(\alpha))^{-1}(A(\alpha|\alpha) \circ B(\alpha|\alpha)) \\ &\quad - (A[\alpha] \circ B/B(\alpha) + A/A(\alpha) \circ B[\alpha] - A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha)) \\ &= (A \circ B)/(A(\alpha) \circ B(\alpha)) \\ &\quad - (A[\alpha] \circ B/B(\alpha) + A/A(\alpha) \circ B[\alpha] - A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha)). \end{aligned}$$

Puesto que $\hat{A} \circ \hat{B}$ es TP, por la Proposición 1.5.1 de [42] sabemos que $(\hat{A} \circ \hat{B})/(A(\alpha) \circ B(\alpha))$ es TP y, en particular, no negativa. Por tanto, tenemos que

$$(A \circ B)/(A(\alpha) \circ B(\alpha)) \geq A[\alpha] \circ B/B(\alpha) + A/A(\alpha) \circ B[\alpha] - A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha). \quad (3.35)$$

Observemos que las siguientes matrices son submatrices principales de \hat{A} y \hat{B} respectivamente:

$$\hat{A}[\alpha] = A[\alpha|\alpha]A(\alpha)^{-1}A(\alpha|\alpha), \quad \hat{B}[\alpha] = B[\alpha|\alpha]B(\alpha)^{-1}B(\alpha|\alpha). \quad (3.36)$$

Por tanto, por el Lema 3.42, estas matrices también son SSTP con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$. Además, por el Lema 3.46, tenemos que $A/A(\alpha)$ y $B/B(\alpha)$ son SSTP con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$. Notemos que $A[\alpha]$ y $B[\alpha]$ son SSTP con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ (de nuevo por el Lema 3.42). Por (3.30) y (3.36),

tenemos que $A[\alpha] - A/A(\alpha) = \hat{A}[\alpha]$, que es SSTP con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$. Puesto que $B/B(\alpha)$ es SSTP con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ por el Lema 3.46, concluimos que $(A[\alpha] - A/A(\alpha)) \circ B/B(\alpha)$ es no negativa. Análogamente podemos deducir que $A/A(\alpha) \circ B[\alpha]$ y $A/A(\alpha) \circ \hat{B}[\alpha]$ también son no negativas. De manera que las matrices de (3.36) son no negativas. Por lo tanto, a partir de (3.30) y (3.36), podemos deducir que

$$\begin{aligned} & A/A(\alpha) \circ B[\alpha] + A[\alpha] \circ B/B(\alpha) - A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha) \\ &= A/A(\alpha) \circ B[\alpha] + (A[\alpha] - A/A(\alpha)) \circ B/B(\alpha) \\ &\geq A/A(\alpha) \circ B[\alpha] \\ &= A/A(\alpha) \circ (B/B(\alpha) + B[\alpha|\alpha]B(\alpha)^{-1}B(\alpha|\alpha]) \\ &= A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha) + A/A(\alpha) \circ \hat{B}[\alpha] \geq A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha). \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando las desigualdades anteriores y (3.35), obtenemos (3.33).

Análogamente podemos obtener (3.34) a partir de

$$\begin{aligned} & A/A(\alpha) \circ B[\alpha] + A[\alpha] \circ B/B(\alpha) - A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha) \\ &= A[\alpha] \circ B/B(\alpha) + A/A(\alpha) \circ (B[\alpha] - B/B(\alpha)) \\ &\geq A[\alpha] \circ B/B(\alpha) \\ &= A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha) + (A[\alpha|\alpha]A(\alpha)^{-1}A(\alpha|\alpha]) \circ B/B(\alpha) \\ &= A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha) + \hat{A}[\alpha] \circ B/B(\alpha) \geq A/A(\alpha) \circ B/B(\alpha). \end{aligned}$$

□

Por último, consideremos el caso en el que una de las matrices es Jacobi.

Corolario 3.48. Sean A, B dos matrices SBD con la misma signatura ε , $\alpha = \{1, \dots, k\}$ y sean $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ y $A(\alpha) \circ B(\alpha)$ no singulares. Si A es Jacobi o B es Jacobi, entonces se cumplen las desigualdades (3.33) y (3.34).

Demostración. Si A o B son matrices Jacobi SBD, entonces por el Corolario 3.45 sabemos que $\hat{A} \in CSSTP$ o $\hat{B} \in CSSTP$. Por lo tanto, por el Teorema 3.47, tenemos que se cumplen las desigualdades (3.33) y (3.34).

□

3.5. Estabilidad backward de la eliminación Gaussiana

En esta sección veremos que podemos garantizar la estabilidad backward, sin realizar pivotaje en la eliminación Gaussiana, de un sistema $Ax = b$, donde A es una matriz ε -BD (véase Definición 3.12) y b es cualquier vector. Aunque habíamos visto en la Sección 3.1 que, si conocemos las entradas de la $\mathcal{BD}(A)$ podemos resolver ciertos sistemas lineales con alta precisión relativa dependiendo de los signos de b , ahora veremos que la estabilidad backward de la eliminación Gaussiana siempre la vamos a poder garantizar.

Como es bien sabido (véase Sección 1.6), el error backward de la eliminación Gaussiana depende de su factor de crecimiento. Se han utilizado muchas medidas para calcular dicho factor. Por ejemplo, mencionaremos el factor de crecimiento clásico presentado por Wilkinson, o el factor de crecimiento que aparece en (3.37) del siguiente resultado e involucra a las matrices triangulares L y U . Para más información y comparaciones de estos y otros factores de crecimiento véase el Capítulo 9 de [57] y [25].

Teorema 3.49. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz ε -BD. Se tiene que $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es la matriz triangular superior que se obtiene al realizar la eliminación Gaussiana de A , cumpliendo además*

$$\frac{\| |L| |U| \|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} = 1. \quad (3.37)$$

Demostración. Notemos que si denotamos por $L := L^{(1)} \dots L^{(n-1)}$ y $U := DU^{(n-1)} \dots U^{(1)}$ a los productos de las matrices de (1.14), tenemos la descomposición LU del enunciado. Además, a consecuencia del signo de las entradas de L y U (véase Proposición 3.7) tenemos que

$$|A| = |LU| = |L| |U|, \quad (3.38)$$

que a su vez implica (3.37). □

Observemos que el resultado anterior muestra que el factor de crecimiento

de la eliminación Gaussiana para matrices ε -BD es óptimo ya que, en general,

$$\frac{\|L\|U\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} \geq 1.$$

Por la fórmula (3.38) y el Teorema 2.2 de [75], tenemos que el no intercambiar filas es la estrategia de pivotaje parcial escalado óptima para cualquier norma estrictamente monótona para las matrices ε -BD. Además, tal y como veremos más adelante en esta misma sección, el hecho de que la última igualdad de la fórmula (3.38) pueda garantizarse también para los factores triangulares calculados \hat{L} , \hat{U} implica estabilidad backward de la eliminación Gaussiana sin intercambio de filas para las matrices ε -BD. Pero para ver esto, necesitamos algunos resultados adicionales sobre los patrones de ceros en las matrices ε -BD y los factores triangulares.

El siguiente resultado auxiliar muestra que los menores principales directores de las matrices ε -BD son no nulos. Esto se puede deducir de que una matriz ε -BD es, por la Definición 3.12, SBD u opuesta de SBD y de que las matrices SBD son P-matrices por la Proposición 3.8. Sin embargo, incluimos una demostración directa ya que es muy corta.

Lema 3.50. *Sea A una matriz ε -BD. Se tiene que $\det A[1, \dots, k] \neq 0$ para todo $k \leq n$.*

Demostración. Observemos que si denotamos por $L := L^{(1)} \dots L^{(n-1)}$ y $U := U^{(n-1)} \dots U^{(1)}$ a los productos de las matrices de (1.14), podemos descomponer $A = LDU$, donde L, U son matrices triangulares inferior y superior respectivamente, con unos en su diagonal y D es una matriz diagonal con entradas diagonales no nulas. En ese caso, es sabido que

$$A[1, \dots, k] = L[1, \dots, k]D[1, \dots, k]U[1, \dots, k]$$

para todo $k \leq n$. Por la identidad de Cauchy-Binet (véase (1.3)), podemos concluir que $\det A[1, \dots, k] = \det D[1, \dots, k] \neq 0$ para todo $k \leq n$.

□

El siguiente lema es una extensión del Lema 1 de [48], válido para matrices TP, a la clase de matrices ε -BD.

3.5. Estabilidad backward de la eliminación Gaussiana

Lema 3.51. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz ε -BD con signatura $(\varepsilon, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ tal que*

$$\det A[1, \dots, p-1, q|1, \dots, p] = 0. \quad (3.39)$$

Se tiene que $a_{qk} = 0$ para todo $1 \leq k \leq p$ y $q > p$.

Demostración. Por el Lema 3.50, tenemos que $\det A[1, \dots, k] \neq 0$ para todo $k \leq n$. Puesto que $\det A[1, \dots, p-1] \neq 0$ y considerando (3.39), observamos que las primeras $p-1$ filas de la submatriz $A[1, \dots, p-1, q|1, \dots, p]$ son linealmente independientes y la fila q -ésima es una combinación lineal de esas $p-1$ filas, es decir

$$a_{qk} = \sum_{h=1}^{p-1} \lambda_h a_{hk}, \quad 1 \leq k \leq p.$$

Veamos ahora que $\lambda_h = 0$ para todo $1 \leq h \leq p-1$. Para cada $1 \leq h \leq p-1$, tenemos que

$$\det A[1, \dots, h-1, h+1, \dots, p-1, q|1, \dots, p-1] = (-1)^{p-h-1} \lambda_h \det A[1, \dots, p-1]$$

y

$$\det A[1, \dots, h-1, h+1, \dots, p, q|1, \dots, p] = (-1)^{p-h} \lambda_h \det A[1, \dots, p].$$

Por el Teorema 3.17, sabemos que los menores de la parte izquierda de las ecuaciones anteriores tienen el mismo signo $S := (\varepsilon_n)^p (\varepsilon_h \cdots \varepsilon_{q-1})$. De manera que, como $S(-1)^{p-h-1} \lambda_h \geq 0$ y $S(-1)^{p-h} \lambda_h \geq 0$, podemos concluir que $\lambda_h = 0$ para todo $1 \leq h \leq p-1$.

□

El siguiente resultado extiende la Proposición 2 de [32], válida para matrices TP, a las matrices ε -BD y será útil para demostrar el resultado sobre estabilidad backward anunciado.

Proposición 3.52. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz ε -BD con signatura $(\varepsilon, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ y consideremos la descomposición triangular $A = LU$, donde $L = (l_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es una matriz triangular superior no singular. Se tiene que, para $i > j$, $\varepsilon_j \cdots \varepsilon_{i-1} l_{ij} \geq 0$ con igualdad si y sólo si $a_{qp} = 0$ para $p \geq i$, $q \leq j$. Además, para $i < j$, $\varepsilon_i \cdots \varepsilon_{j-1} u_{ij} \geq 0$ con igualdad si y sólo si $a_{qp} = 0$ para $p \leq i$, $q \geq j$.*

Demostración. La descomposición LU del enunciado ha sido probada en la demostración del Teorema 3.49. Como L es el único factor triangular inferior con unos en la diagonal principal de una factorización LDU de A , deducimos del hecho de que A es ε -BD (véase Definición 3.12) que L es ε_L -BD, donde $\varepsilon_L = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, 1)$. Notemos que, para $i > j$, tenemos que

$$a_{ik} = l_{i1}u_{1k} + \dots + l_{ik}u_{kk}, \quad (3.40)$$

para todo $1 \leq k \leq j$. Veamos ahora que $a_{i1} = \dots = a_{ij} = 0$ si y sólo si $l_{ij} = 0$ para todo $i > j$. Si $a_{i1} = \dots = a_{ij} = 0$ entonces, por (3.40) y como $u_{hh} \neq 0$ para todo $h \leq n$, podemos demostrar de manera recursiva que $l_{i1} = \dots = l_{ij} = 0$. Si $l_{ij} = 0$, consideremos un $k < j$. Observemos que $\det L[j, i|k, j] = l_{jk}l_{ij} - l_{jj}l_{ik} = -l_{jj}l_{ik} = -l_{ik}$. Por el Teorema 3.17, sabemos que el signo del menor es

$$\prod_{l=k}^{j-1} \varepsilon_l \prod_{l=j}^{i-1} \varepsilon_l = \prod_{l=k}^{i-1} \varepsilon_l. \quad (3.41)$$

Sin embargo, por el Corolario 3.18, el signo de $-l_{ik}$ es

$$-\prod_{l=k}^{i-1} \varepsilon_l. \quad (3.42)$$

De manera que (3.41) y (3.42) implican que $l_{ik} = 0$ para todo $k \leq j$. Por tanto, por (3.40), tenemos que $a_{i1} = \dots = a_{ij} = 0$. Como L es ε_L -BD, por el Corolario 3.18 tenemos que $(\varepsilon_j \cdots \varepsilon_{i-1})l_{ij} \geq 0$ con igualdad si y sólo si $a_{i1} = \dots = a_{ij} = 0$. Supongamos que se tiene la igualdad. En ese caso, como A es no singular, sabemos que existe un índice $r > j$ de manera que $a_{ir} \neq 0$. Consideremos el menor $\det A[i, p|q, r] = -a_{ir}a_{pq}$ para $p > i$ y $q \leq j$. Supongamos que $q < r < i < p$ (los casos $q < i < r < p$ y $q < i < p < r$ son similares). Por el Teorema 3.17, tenemos que el signo del menor es

$$(\varepsilon_n)^2 \prod_{k=\min(i,q)}^{\max(i-1,q-1)} \varepsilon_k \prod_{k=\min(p,r)}^{\max(p-1,r-1)} \varepsilon_k = \prod_{k=q}^{i-1} \varepsilon_k \prod_{k=r}^{p-1} \varepsilon_k = \prod_{k=q}^{p-1} \varepsilon_k \prod_{k=r}^{i-1} \varepsilon_k. \quad (3.43)$$

Sin embargo, por el Corolario 3.18, el signo de $-a_{ir}a_{pq}$ es

$$-\left(\varepsilon_n \prod_{k=\min(i,r)}^{\max(i-1,r-1)} \varepsilon_k \right) \left(\varepsilon_n \prod_{k=\min(p,q)}^{\max(p-1,q-1)} \varepsilon_k \right) = -\prod_{k=r}^{i-1} \varepsilon_k \prod_{k=q}^{p-1} \varepsilon_k,$$

que coincide con el opuesto de (3.43).

3.5. Estabilidad backward de la eliminación Gaussiana

Por lo tanto, tenemos que $a_{pq} = 0$ para $p \geq i$ y $q \leq j$. Análogamente, podemos demostrar el resultado para U .

□

Veamos ahora que, al trabajar con aritmética de precisión finita con una unidad de redondeo u suficientemente pequeña, las matrices triangulares calculadas \hat{L} , \hat{U} también cumplen la segunda igualdad de (3.38), y por tanto podemos obtener un resultado de estabilidad backward con una cota backward muy pequeña.

Teorema 3.53. *Sea A una matriz ε -BD de tamaño $n \times n$. Supongamos que LU es la descomposición triangular de A del Teorema 3.49 y que llevamos a cabo eliminación Gaussiana sin cambios de filas en aritmética de precisión finita, obteniendo los factores calculados \hat{L} , \hat{U} y la solución calculada \hat{x} del sistema $Ax = b$. Sean E y ΔA matrices tales que $\hat{L}\hat{U} = A + E$ y $(A + \Delta A)\hat{x} = b$. Se tiene que, para una unidad de redondeo u suficientemente pequeña,*

$$(i) \quad |\hat{L}||\hat{U}| = |\hat{L}\hat{U}|$$

$$(ii) \quad |E| \leq \frac{\gamma_n}{1-\gamma_n}|A|, \quad |\Delta A| \leq \frac{\gamma_{3n}}{1-\gamma_n}|A|$$

donde $\gamma_n := \frac{nu}{1-nu}$, siempre que $nu < 1$.

Demostración. (i) Si $l_{ij} = 0$ para algún $i > j$, entonces hemos visto en el resultado anterior que $a_{pq} = 0$ para $p \geq i$, $q \leq j$ y debemos tener $\hat{l}_{pq} = 0$ para $p \geq i$, $q \leq j$. De manera que L y \hat{L} sólo pueden diferir en las entradas no nulas de L . Análogamente, U y \hat{U} sólo se diferencian en las entradas no nulas de U . Es sabido que $\hat{L} \rightarrow L$ y $\hat{U} \rightarrow U$ cuando $u \rightarrow 0$. Por tanto, para una unidad de redondeo u suficientemente pequeña, todas las entradas no nulas de \hat{L} y de \hat{U} tendrán el mismo signo que las entradas de L y U respectivamente. Por último, considerando la ecuación (3.38), podemos concluir que

$$|\hat{L}\hat{U}| = |\hat{L}||\hat{U}|,$$

para una u suficientemente pequeña.

(ii) Por la fórmula (9.6) de [57] sabemos que

$$|E| \leq \gamma_n |\hat{L}||\hat{U}|. \quad (3.44)$$

Ademas, hemos visto en (i) que $|\hat{L}||\hat{U}| = |\hat{L}\hat{U}|$. Por tanto, tenemos que

$$|\hat{L}||\hat{U}| = |\hat{L}\hat{U}| = |A + E| \leq |A| + \gamma_n |\hat{L}||\hat{U}|,$$

lo que implica que

$$|\hat{L}||\hat{U}| \leq \frac{1}{1 - \gamma_n} |A|. \quad (3.45)$$

Teniendo esto en cuenta y (3.44), concluimos que $|E| \leq \frac{\gamma_n}{1 - \gamma_n} |A|$. La desigualdad $|\Delta A| \leq \frac{\gamma_{3n}}{1 - \gamma_n} |A|$ es consecuencia de (3.45) y del Teorema 9.4 de [57], donde se muestra que $|\Delta A| \leq \gamma_{3n} |\hat{L}||\hat{U}|$.

□

A continuación presentamos experimentos numéricos que ilustran la precisión de la eliminación Gaussiana sin cambios de filas (GE) y el hecho de que es mejor que la eliminación Gaussiana con pivotaje parcial para la resolución de sistemas lineales con matrices ε -BD. Calcularemos la solución exacta x del sistema lineal $Ax = b$ utilizando el comando `LinearSolve` de Mathematica y usaremos dicha solución para comparar la precisión de los resultados obtenidos con MATLAB mediante un algoritmo de eliminación Gaussiana sin cambios de filas y el comando `A\b` de MATLAB, que utiliza pivotaje parcial.

Calculamos el error relativo de una solución x del sistema lineal $Ax = b$ mediante la siguiente fórmula:

$$err = \frac{\|x - \hat{x}\|_2}{\|x\|_2},$$

donde \hat{x} es la solución calculada.

Ejemplo 3.54. Sea A la siguiente matriz ε -BD

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 16 & -32 & -32 & 64 & 192 & -192 & -384 \\ 16 & 38 & -88 & -124 & 284 & 888 & -960 & -1992 \\ -32 & -82 & 201 & 312 & -735 & -2316 & 2538 & 5298 \\ -96 & -258 & 655 & 1079 & -2610 & -8380 & 9620 & 20844 \\ 96 & 282 & -761 & -1401 & 3642 & 12472 & -16584 & -39972 \\ 0 & 0 & -4 & -72 & 444 & 2458 & -5920 & -18556 \\ 0 & 0 & 20 & 360 & -2220 & -12300 & 29684 & 93332 \\ 0 & 0 & 20 & 360 & -2220 & -12342 & 30052 & 95855 \end{pmatrix}.$$

3.5. Estabilidad backward de la eliminación Gaussiana

b_i	GE	$A \setminus b_i$
b_1	6.3184e-015	7.6074e-010
b_2	1.1155e-014	7.4450e-010
b_3	6.1846e-016	7.6540e-010

Tabla 3.1: Errores relativos

Sean b_1 , b_2 y b_3 los vectores

$$\begin{aligned} b_1^T &= [6, 5, -4, 3, -1, -1, -3, 5]^T, \\ b_2^T &= [5, 5, 7, 5, 4, 3, 0, -1]^T, \\ b_3^T &= [9, -2, 3, -5, -4, 2, -3, -1]^T. \end{aligned}$$

En la Tabla 3.1 podemos encontrar los errores relativos obtenidos al utilizar la estrategia sin intercambio de filas (columna GE de la Tabla 3.1) y pivotaje parcial (columna $A \setminus b_i$ de la Tabla 3.1) para resolver los sistemas $Ax = b_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Observemos que, mientras que el orden de los errores relativos al utilizar pivotaje parcial es alrededor de 10^{-10} , el orden de los errores relativos al no utilizar intercambios de filas oscila entre 10^{-14} y 10^{-16} .

Ejemplo 3.55. Hemos generado 100 sistemas lineales ($A_i x = b_i$) de manera aleatoria, donde las matrices A_i de tamaño $n \times n$ son matrices ε -BD:

- 40 matrices y vectores para $n = 8$.
- 40 matrices y vectores para $n = 10$.
- 20 matrices y vectores para $n = 16$.

Las matrices han sido generadas en MATLAB, multiplicando factores bidiagonales elementales como los de (3.8). La entrada $l_i^{(k)}$ ($u_i^{(k)}$) de cada matriz bidiagonal elemental $E_{i+1}(l_i^{(k)})$ ($E_{i+1}^T(u_i^{(k)})$) es un número aleatorio que cumple la condición 2 de la Definición 3.2.

En la Tabla 3.2 podemos encontrar la media de los errores relativos obtenidos al utilizar la estrategia sin intercambio de filas (columna GE de la Tabla 3.2) y pivotaje parcial (columna $A_i \setminus b_i$ de la Tabla 3.2) para resolver los sistemas $A_i x = b_i$ para $i = 1, \dots, 100$.

n	GE	$A_i \setminus b_i$
8	3.3616e-015	9.1664e-010
10	2.5172e-014	4.3218e-007
16	2.9305e-012	2.570883242

Tabla 3.2: Media de los errores relativos

Observemos que el orden de los errores relativos al utilizar pivotaje parcial crece muy rápido al aumentar el tamaño de los sistemas. Sin embargo, el crecimiento del orden de los errores relativos al no utilizar intercambios de filas es más moderado. Además, la estrategia sin intercambios de filas proporciona errores relativos mucho mejores que la estrategia de pivotaje parcial; por ejemplo, tenemos errores de orden 10^{-14} comparados con errores de orden 10^{-7} para sistemas de tamaño $n = 10$.

3.6. Algoritmos de corte de esquinas y cálculos precisos

Dentro del Diseño Geométrico Asistido por Ordenador, la familia de algoritmos más importante es la formada por los algoritmos de corte de esquinas (véase Definición 1.20). En esta sección demostraremos que un algoritmo de corte de esquinas nos permitirá obtener, con alta precisión relativa, la descomposición bidiagonal de la matriz asociada al corte de esquinas. Por tanto, se pueden realizar, con esa matriz, los cálculos con alta precisión relativa vistos en la Sección 3.1.

La importancia de los algoritmos de corte de esquinas dentro del Diseño Geométrico Asistido por Ordenador se debe principalmente a dos propiedades: su estabilidad numérica y sus buenas interpretaciones geométricas. Estos algoritmos están relacionados con la descomposición de matrices estocásticas (véase Definición 1.13) TP no singulares.

El siguiente resultado, que corresponde al Teorema 4.5 de [55], muestra que un algoritmo de corte de esquinas descrito por una matriz estocástica TP no singular puede ser expresado como producto de matrices bidiagonales estocásticas TP no singulares.

Teorema 3.56. *Una matriz A $n \times n$ no singular es estocástica y TP si y*

Teorema 3.57. *Consideremos un algoritmo de corte de esquinas asociado a la descomposición (3.46) de una matriz A TP no singular. Si conocemos las entradas de $F_i, G_i, i = 1, \dots, n-1$, con alta precisión relativa, entonces podemos calcular una descomposición bidiagonal $\mathcal{BD}(A)$ con alta precisión relativa utilizando $\frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3$ productos y $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$ cocientes.*

Demostración. Demostraremos que se puede calcular

$$\mathcal{BD}(A) = \hat{F}_{n-1} \cdots \hat{F}_1 D \hat{G}_1 \cdots \hat{G}_{n-1}, \quad (3.48)$$

a partir de las entradas de (3.46) sin realizar restas.

Primero, veamos que podemos escribir para $i = n-1, \dots, 1$

$$F_{n-1} \cdots F_i = \hat{F}_{n-1} \cdots \hat{F}_i D_i^{(F)} \quad (3.49)$$

con $D_i^{(F)} = \text{diag}(F_{n-1}) \cdots \text{diag}(F_i)$, donde $\text{diag}(F_j)$ denota a la matriz diagonal cuyas entradas diagonales coinciden con las de F_j .

Tenemos que $F_{n-1} = \hat{F}_{n-1} D_{n-1}^{(F)}$, donde

$$\hat{F}_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha_{n1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, se puede comprobar que, para todo $i = n-1, \dots, 2$, se tiene que $D_i^{(F)} F_{i-1} = \hat{F}_{i-1} D_{i-1}^{(F)}$, donde

$$\hat{F}_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & \alpha_{i+1,1} & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & \frac{\alpha_{i+2,2}(1-\alpha_{i+2,1})}{1-\alpha_{i+1,1}} & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \frac{(1-\alpha_{n1}) \cdots (1-\alpha_{n,n-i-1}) \alpha_{n,n-i}}{(1-\alpha_{n-1,1}) \cdots (1-\alpha_{n-1,n-i-1})} & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene la entrada $\alpha_{i+1,1}$ en la posición $(i+1, i)$. De esta manera, concluimos que $F_{n-1} \cdots F_1 = \hat{F}_{n-1} \cdots \hat{F}_1 D_1^{(F)}$.

3.6. Algoritmos de corte de esquinas y cálculos precisos

De manera análoga, podemos deducir que $G_1 \cdots G_{n-1} = D_1^{(G)} \hat{G}_1 \cdots \hat{G}_{n-1}$, donde $D_1^{(G)}$ es una matriz diagonal y \hat{G}_j una matriz bidiagonal triangular superior con unos en la diagonal. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= F_{n-1} \cdots F_1 G_1 \cdots G_{n-1} = \hat{F}_{n-1} \cdots \hat{F}_1 D_1^{(F)} D_1^{(G)} \hat{G}_1 \cdots \hat{G}_{n-1} \\ &= \hat{F}_{n-1} \cdots \hat{F}_1 D \hat{G}_1 \cdots \hat{G}_{n-1} = \mathcal{BD}(A), \end{aligned}$$

donde $D := D_1^{(F)} D_1^{(G)}$.

Si denotamos por $f_j^{(i)}$ a la entrada $(j, j-1)$ de la matriz \hat{F}_i , se puede comprobar que es posible calcular la entrada $f_j^{(i)}$ a partir de $f_j^{(i+1)}$ utilizando la siguiente fórmula para $j = 2, \dots, n$ y $i = 1, \dots, j-2$,

$$f_j^{(i)} = \frac{\alpha_{j,j-i}(1 - \alpha_{j,j-i-1})}{\alpha_{j,j-i-1}(1 - \alpha_{j-1,j-i-1})} f_j^{(i+1)}. \quad (3.50)$$

Existe una fórmula análoga para las entradas de \hat{G}_i . Por la fórmula anterior y las condiciones (3.47), se puede comprobar que los patrones de ceros de la Definición 1.19 se cumplen para \hat{F}_i , \hat{G}_i y D y, por tanto, tenemos la $\mathcal{BD}(A)$.

Además, como hemos calculado las entradas de \hat{F}_i , \hat{G}_i y D a partir de las entradas de F_j y G_j ($j = i+1, \dots, n$) sin utilizar restas, hemos calculado la descomposición con alta precisión relativa.

Considerando (3.50) y la definición de la matriz D , podemos concluir que para calcular la descomposición bidiagonal $\mathcal{BD}(A)$ son necesarios $n(n+2) + \sum_{j=n}^2 \sum_{i=j-2}^1 3 = \frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3$ productos y $\sum_{j=n}^2 \sum_{i=j-2}^1 1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$ cocientes.

□

Terminaremos con el algoritmo correspondiente a la demostración del resultado anterior para calcular $\mathcal{BD}(A)$ a partir de la descomposición (3.46) (véase Algoritmo 3). Recordemos que hemos denotado por $f_j^{(i)}$ a la entrada $(j, j-1)$ de \hat{F}_i y por $g_j^{(i)}$ a la entrada $(j-i, j)$ de \hat{G}_i . Inicializaremos la matriz $D := \text{diag}(G_1(1, 1), \dots, G_n(n, n))$.

Algoritmo 3 Calcula la descomposición bidiagonal de un algoritmo de corte de esquinas

Entradas: entradas no triviales de las matrices F_i y G_i de (3.46).

```

1: Calcular las matrices  $\hat{F}_{n-1}$  y  $\hat{G}_{n-1}$ 
2: for  $i = n - 2, \dots, 1$  do
3:    $f_{i+1}^{(i)} = \alpha_{i+1,1}$ 
4:    $g_{i+1}^{(i)} = \frac{\alpha_{1,i+1}(1-\alpha_{1,i+2})}{1-\alpha_{1,i+1}}$ 
5: end for
6: for  $j = n, \dots, 2$  do
7:   for  $i = j - 2, \dots, 2$  do
8:      $f_j^{(i)} = \frac{\alpha_{j,j-i}(1-\alpha_{j,j-i-1})}{\alpha_{j,j-i-1}(1-\alpha_{j-1,j-i-1})} f_j^{(i+1)}$ 
9:      $g_j^{(i)} = \frac{\alpha_{j-i,j}(1-\alpha_{j-i,j+1})}{\alpha_{j-i-1,j}(1-\alpha_{j-i,j})} g_j^{(i+1)}$ 
10:  end for
11:  for  $k = 1, \dots, j - 1$  do
12:     $D(j, j) = D(j, j) \cdot F_k(j, j) \cdot G_k(j, j)$ 
13:  end for
14: end for

```

Salidas: matrices \hat{F}_i , D y \hat{G}_i de (3.48).

3.7. Conclusiones

Algunos de los resultados de este capítulo han sido publicados o aceptados para su publicación en [11], [14], [15] y en [17].

Presentamos los objetivos más significativos alcanzados en este capítulo:

- Definición y caracterizaciones de las matrices SBD.
- Procedimiento para realizar cálculos con alta precisión relativa con matrices SBD y sus opuestas a partir de su descomposición bidiagonal: valores propios, valores singulares, matriz inversa, ciertos sistemas lineales y descomposición LDU .
- Propiedades de las matrices SBD: trasposición, producto, conversión, propiedades de signo, producto Hadamard, complemento de Schur, Lema de las sombras, etc.
- Caracterización de las matrices SBD por medio de sus descomposiciones LDU y QR .

3.7. Conclusiones

- Relación con otras clases de matrices: matrices TP, P-matrices, M-matrices, H-matrices, matrices signo simétricas.
- Cotas para el menor valor propio de matrices SR y matrices SBD.
- Extensión de desigualdades para matrices TP a matrices SBD (y a la clase más amplia de matrices SSTP).
- Demostración de la estabilidad backward de la eliminación Gaussiana en matrices SBD.
- Cálculo con alta precisión relativa de la descomposición bidiagonal de una matriz a partir del algoritmo de corte de esquinas asociado a la matriz.

Capítulo 4

Z–matrices y dominancia diagonal

En este capítulo se estudiarán algunas clases de matrices relacionadas con las Z–matrices: la subclase de las M–matrices diagonal dominantes y otras clases relacionadas, como las Z–matrices cuasi–diagonal dominantes o las cuasi–M–matrices no singulares. En la Sección 4.1 se presentará un algoritmo para calcular con alta precisión relativa la descomposición *LDU* de M–matrices diagonal dominantes por filas. Este algoritmo utilizará una estrategia de pivotaje de dominancia diagonal débil por columnas, que también será presentada en dicha sección. También se estudiarán las propiedades y ventajas del algoritmo presentado y se comparará con los existentes. Después, en la Sección 4.2 consideraremos una clase de matrices, las Z–matrices cuasi–diagonal dominantes, y una nueva estrategia de pivotaje basada en una variante del pivotaje de la sección anterior, pivotaje de cuasi–dominancia diagonal débil por columnas. También se obtendrá un algoritmo para calcular con alta precisión la descomposición *LDU* de dichas matrices. En la Sección 4.3 se introducirán las cuasi–M–matrices no singulares y se verán varias caracterizaciones de las mismas. También se presentarán otras clases de matrices relacionadas y se estudiarán algunas de sus propiedades. Finalmente, en la Sección 4.4 se presentarán las conclusiones principales de este capítulo.

Parte del material presentado en este capítulo ha sido publicado o aceptado para su publicación en [13], [16] y [18].

4.1. Descomposición LDU de M -matrices diagonal dominantes

En esta sección estudiaremos la descomposición LDU de M -matrices diagonal dominantes, pero antes recordaremos los resultados obtenidos sobre este aspecto hasta el momento. En [2] se puede encontrar un algoritmo para calcular con alta precisión relativa la descomposición LDU de una M -matriz $n \times n$ diagonal dominante por filas, siempre y cuando se conozcan sus entradas extradiagonales y las sumas de sus filas. La clave radica en modificar la eliminación Gaussiana para calcular las entradas extradiagonales y las sumas de filas de cada complemento de Schur sin realizar restas. Además, en [36] se utiliza pivotaje completo simétrico para conseguir unas matrices L y U bien condicionadas (de hecho, la matriz U es diagonal dominante por filas). Esta descomposición es un caso especial de descomposición reveladora del rango. Recordemos que en [35] se vio, con el correspondiente algoritmo, que la descomposición en valores singulares se puede calcular de forma precisa y eficiente para matrices que admiten una descomposición reveladora del rango. Para implementar el pivotaje completo simétrico, el algoritmo de [36] calcula todas las entradas diagonales y todos los complementos de Schur, lo que incrementa el coste de la eliminación Gaussiana en $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones elementales. En [82] se utilizó otra estrategia de pivotaje que tampoco utiliza restas y con un coste computacional similar, pero obteniendo matrices triangulares L y U diagonal dominantes por columnas y por filas respectivamente, con lo que se mejora el condicionamiento de la matriz triangular inferior L de [36]. En el Subapartado 4.1.1 de esta sección recordaremos cotas para el número de condición de estas matrices L y U (véase también [77] o [81]).

En el Subapartado 4.1.2 presentaremos una descomposición $PAP^T = LDU$ de una M -matriz diagonal dominante A , donde L es una matriz triangular inferior diagonal dominante por columnas con unos en la diagonal y U es triangular superior diagonal dominante por filas con unos en la diagonal. Para ello, desarrollaremos un algoritmo que añade $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones elementales al coste de la eliminación Gaussiana. El algoritmo presentado en esta sección, así como el de [36] y el de [82], no utilizan restas. De entre todos, el del Subapartado 4.1.2 es el de menor coste computacional: es el único caso en que la implementación de la estrategia de pivotaje es de menor orden (cuadrático) que el de la eliminación Gaussiana (cúbico).

En la Nota 4.4 veremos que nuestro método también es válido para matrices diagonal dominantes que cumplan ciertos patrones de signos: aquellas con entradas extradiagonales con el mismo signo o aquellas que tengan un patrón ajedrezado de signos. En la Subsección 4.1.3 presentaremos ejemplos numéricos que muestran que las matrices triangulares inferiores obtenidas con nuestro método pueden estar mucho mejor condicionadas que aquellas obtenidas con pivotaje completo simétrico. Por último, recordemos que el problema de calcular una descomposición LDU eficiente de matrices diagonal dominantes generales ha sido considerado en [93] y también en [38].

4.1.1. Pivotaje de dominancia diagonal débil por columnas

Recordemos que la eliminación Gaussiana aplicada a una matriz no singular A (véase Sección 1.3 del Capítulo 1) da lugar a una sucesión de matrices como la siguiente:

$$A = A^{(1)} \longrightarrow \tilde{A}^{(1)} \longrightarrow A^{(2)} \longrightarrow \tilde{A}^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow A^{(n)} = \tilde{A}^{(n)} = DU. \quad (4.1)$$

Cada matriz $\tilde{A}^{(t)} = (\tilde{a}_{ij}^{(t)})_{1 \leq i, j \leq n}$ se obtiene reordenando las filas y/o columnas $t, t+1, \dots, n$ de la matriz $A^{(t)}$ de acuerdo a una estrategia de pivotaje dada, de manera que $\tilde{a}_{tt}^{(t)} \neq 0$. Pero si la matriz A es singular, entonces puede suceder que $\tilde{a}_{tt}^{(t)} = 0$ en las matrices de (4.1). En ese caso, la fila y la columna correspondientes serán nulas (tal y como veremos más adelante en esta misma subsección):

$$\tilde{A}^{(t)}[t, \dots, n|t] = 0, \quad \tilde{A}^{(t)}[t|t, \dots, n] = 0, \quad (4.2)$$

y continuaremos el proceso de eliminación con $A^{(t+1)}[t+1, \dots, n] = \tilde{A}^{(t)}[t+1, \dots, n]$.

A continuación, vamos a presentar algunas estrategias de pivotaje simétricas para matrices diagonal dominantes por filas. Pero antes tengamos en cuenta que, puesto que la dominancia diagonal por filas se hereda al hacer complementos de Schur en la eliminación Gaussiana, dicho proceso de eliminación con una estrategia de pivotaje simétrica preservará esta propiedad; es decir, todas las matrices $A^{(t)}$ de (4.1) son diagonal dominantes (en particular DU , y por tanto U).

Por lo tanto, basta con describir la elección del primer pivote $\tilde{a}_{11} = a_{kk}$. Por un lado, la estrategia simétrica que elige como pivote la entrada más

grande en valor absoluto de la diagonal será equivalente al pivotaje completo simétrico y fue utilizado en [36]. Esta estrategia proporciona una matriz U que es diagonal dominante por filas, y por tanto está bien condicionada, y una matriz L que normalmente también está bien condicionada.

Por otro lado, puesto que A es diagonal dominante por filas, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n |a_{ii}| \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|,$$

y entonces existe un entero k tal que la columna k -ésima de A es diagonal dominante, es decir,

$$|a_{kk}| \geq \sum_{i=1, i \neq k}^n |a_{ik}|. \quad (4.3)$$

En [82], se elegía el primer pivote $\tilde{a}_{11} = a_{kk}$ de manera que se tuviese la mayor dominancia diagonal posible en (4.3), es decir, la mayor diferencia entre el valor absoluto de una entrada diagonal y la suma de los valores absolutos de las entradas extradiagonales de esa fila. Esta estrategia es un caso particular de pivotaje de dominancia diagonal por columnas. En esta sección vamos a utilizar una estrategia que llamaremos *pivotaje de dominancia diagonal débil por columnas*: es una estrategia de pivotaje simétrica que elige como primer pivote una entrada $\tilde{a}_{11} = a_{kk}$, que satisface (4.3), sin la imposición de que sea distinto de cero. Si $\tilde{a}_{11} = 0$, entonces la dominancia diagonal por filas y columnas implica que dichas fila y columna son nulas, y continuaremos el proceso de eliminación con $A^{(2)}[2, \dots, n] = A[2, \dots, n]$ (tal y como habíamos anunciado para el t -ésimo pivote en (4.2)). Para determinar de manera unívoca esta estrategia, elegiremos el primer índice k que cumpla (4.3).

Observemos que el pivotaje de dominancia diagonal débil por columnas proporciona una matriz U que es diagonal dominante por filas y una matriz L que es diagonal dominante por columnas. Por lo tanto, ambas matrices triangulares son siempre bien condicionadas. De hecho, el siguiente resultado agrupa la Proposición 2.1 y la Nota 2.2 de [82] para darnos una cota para sus números de condición.

Proposición 4.1. *Sea T una matriz de tamaño $n \times n$, triangular, con unos en la diagonal y diagonal dominante por columnas. Entonces*

$$\kappa_{\infty}(T) = \|T\|_{\infty} \|T^{-1}\|_{\infty} \leq n^2 \quad y \quad \kappa_1(T) = \|T\|_1 \|T^{-1}\|_1 \leq 2n. \quad (4.4)$$

Si T es diagonal dominante por filas en lugar de por columnas, entonces

$$\kappa_{\infty}(T) \leq 2n \quad y \quad \kappa_1(T) \leq n^2.$$

4.1. Descomposición LDU de M–matrices diagonal dominantes

Por el contrario, el pivotaje completo simétrico proporciona una matriz L que aunque normalmente está bien condicionada, no es necesariamente diagonal dominante por columnas y no tiene por qué satisfacer las cotas (4.4).

Para finalizar esta subsección, veamos a grandes rasgos cómo calcular sin restas (y por tanto, por lo visto en la Sección 1.6, con alta precisión relativa) la descomposición LDU de M–matrices diagonal dominantes por filas y M–matrices diagonal dominantes por filas y columnas, a partir de las entradas extradiagonales y las sumas de filas. Consideremos una matriz $n \times n$ A , que es M–matriz diagonal dominante por filas, y el vector $e := (1, \dots, 1)^T$, diremos que

$$r := Ae \tag{4.5}$$

es el vector de sumas de filas de A . Resumiendo el proceso del Algoritmo 1 de [2], se empieza con (4.5) y en cada iteración de la eliminación sólo será necesario actualizar las entradas extradiagonales de la matriz y el vector r , en ambos casos sin usar restas. Se verá que las entradas diagonales de la matriz no han de ser calculadas en cada paso (excepto el pivote) y por lo tanto el coste computacional añadido al de la eliminación Gaussiana es del orden de $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones elementales. Observemos que podemos calcular también con alta precisión relativa la matriz inversa de una M–matriz no singular diagonal dominante A : primero se obtiene la descomposición LDU de A de manera precisa y después podemos calcular la inversa de L y la de U sin utilizar restas (véase la Sección 13.2 de [57]). De esta manera podemos calcular $A^{-1} = U^{-1}D^{-1}L^{-1}$ con alta precisión relativa.

Si A es una M–matriz diagonal dominante por filas y columnas entonces no se necesita ninguna estrategia de pivotaje para calcular de manera precisa una descomposición LDU con L y U diagonal dominantes por columnas y filas respectivamente. Esto se debe a que la matriz L hereda la dominancia diagonal por columnas de A al realizar la eliminación Gaussiana. De hecho, se puede aplicar la eliminación Gaussiana sin intercambios de filas ni de columnas y entonces, para cada $t = 1, \dots, n - 1$, tendremos que $A^{(t)} = \tilde{A}^{(t)}$ (véase (4.1)) y todas las matrices $A^{(t)}[t, \dots, n]$ serán diagonal dominantes por filas y columnas. En resumen, dadas las entradas extradiagonales de una M–matriz diagonal dominante por filas y por columnas $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ y dado el vector r con las sumas de sus filas (véase (4.5)), podemos calcular con alta precisión relativa la descomposición LDU de A , siendo L una matriz diagonal dominante por columnas y U diagonal dominante por filas. Además, este cálculo se realiza sin utilizar restas durante el proceso y por lo tanto, con alta precisión relativa.

4.1.2. Algoritmo para calcular la descomposición LDU de M-matrices diagonal dominantes

En esta subsección veremos un algoritmo preciso y eficiente para calcular la descomposición LDU (con L diagonal dominante por columnas y U diagonal dominante por filas) de una M-matriz diagonal dominante por filas, siempre que conozcamos sus entradas extradiagonales y sus sumas de filas. Utilizando A^T en lugar de A , podremos calcular también la descomposición LDU de una M-matriz diagonal dominante por columnas, si conocemos sus entradas extradiagonales y sus sumas de columnas. En la Nota 4.3, podemos ver una comparación con el coste computacional de los métodos presentados en [36] y en la Sección 4 de [82]. Nuestro algoritmo obtiene una matriz U con un condicionamiento similar al obtenido en los dos trabajos mencionados, ya que U también es diagonal dominante por filas; la matriz L será en general mejor condicionada que en [36] (y puede serlo mucho mejor, como podrá verse con las matrices de (4.33) en la siguiente subsección) y satisface las cotas (4.4) porque es diagonal dominante por columnas. En el Algoritmo 4, podemos encontrar nuestro método para calcular la descomposición LDU de una M-matriz diagonal dominante por filas.

El siguiente resultado demuestra las buenas propiedades del Algoritmo 4.

Teorema 4.2. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una M-matriz diagonal dominante por filas, r el vector de sumas de filas de A (ver (4.5)) y P la matriz de permutación asociada a una estrategia de pivotaje de dominancia diagonal débil por columnas utilizada al realizar eliminación Gaussiana en A . Si conocemos las entradas extradiagonales de A y el vector r , entonces podemos calcular con alta precisión relativa (utilizando el Algoritmo 4) la descomposición LDU de PAP^T , donde L (U , respectivamente) es diagonal dominante por columnas (filas, respectivamente). Además, este cálculo se lleva a cabo sin realizar restas y con un coste computacional que excede al de la eliminación Gaussiana en a lo más $(7n^2 - 11n + 6)/2$ sumas, $n(n - 1)$ productos, $n(n - 1)/2$ cocientes y $n(n - 1)/2$ comparaciones.*

Demostración. Utilizando el vector r con las sumas de filas de A , consideremos el sistema lineal $Ae = r$ (donde $e := (1, \dots, 1)^T$) (véase (4.5)) y la sucesión de matrices (4.1). De esta manera, podemos obtener la siguiente sucesión de vectores en \mathbb{R}^n :

$$r = r^{(1)} \longrightarrow \tilde{r}^{(1)} \longrightarrow r^{(2)} \longrightarrow \tilde{r}^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow r^{(n)}, \quad (4.6)$$

4.1. Descomposición LDU de M-matrices diagonal dominantes

Algoritmo 4 Calcula la descomposición LDU de una M-matriz diagonal dominante (por filas)

Entradas: $A = (a_{ij})$ ($i \neq j$) y $r = (r_i) \geq 0$

```

1: for  $i = 1, \dots, n$  do
2:    $p_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$ 
3:    $a_{ii} = r_i - p_i$ 
4:    $s_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ji}$ 
5:    $h_i = a_{ii}$ 
6: end for
7: Elegir una matriz de permutación  $P_1$  tal que  $A = P_1 A P_1^T$  satisfice
    $h_1 \geq -s_1$ , donde  $h = P_1 h$ ,  $s = P_1 s$ 
8: Inicializar:  $P = P_1$ ;  $L = I$ ;  $D = \text{diag}(d_i)_{i=1}^n = \text{diag}(h_1, 0, \dots, 0)$ ;  $r = P_1 r$ 
9: for  $k = 1, \dots, n - 1$  do
10:  if  $d_k = 0$  then
11:    for  $i = k + 1, \dots, n$  do
12:       $l_{ik} = 0$ 
13:       $n_{ki} = 0$ 
14:    end for
15:  else
16:    for  $i = k + 1, \dots, n$  do
17:       $l_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$ 
18:       $n_{ki} = a_{ki} / a_{kk}$ 
19:       $r_i = r_i - l_{ik} r_k$ 
20:       $h_i = h_i - n_{ki} h_k$ 
21:       $s_i = s_i - n_{ki} s_k$ 
22:      for  $j = k + 1, \dots, n$  do
23:        if  $i \neq j$  then
24:           $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} a_{kj}$ 
25:        end if
26:      end for
27:    end for
28:  end if
29:  Elegir una matriz de permutación  $P_2$  tal que  $A = P_2 A P_2^T$  satisfice
    $h_{k+1} \geq -s_{k+1}$ , donde  $h = P_2 h$ ,  $s = P_2 s$ 
30:   $P = P_2 P$ ;  $r = P_2 r$ 
31:   $p_{k+1} = \sum_{j=k+2}^n a_{k+1, j}$ 
32:   $a_{k+1, k+1} = r_{k+1} - p_{k+1}$ 
33:   $d_{k+1} = a_{k+1, k+1}$ 
34: end for

```

Salidas: $P A P^T = L D U$. Las entradas no triviales de la matriz U están almacenadas en $N = (n_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$.

donde cada $r^{(k)}$ y $\tilde{r}^{(k)}$ contienen las sumas de filas de las matrices $A^{(k)}$ y $\tilde{A}^{(k)}$ respectivamente, ya que e es la solución de $Ax = r$ y también de los sistemas equivalentes $A^{(k)}x = r^{(k)}$ y $\tilde{A}^{(k)}x = \tilde{r}^{(k)}$. Observemos que para cada $k = 1, \dots, n-1$ tal que $\tilde{a}_{kk}^{(k)} \neq 0$ y para cada $j = k+1, \dots, n$, tenemos que

$$r_j^{(k+1)} = \tilde{r}_j^{(k)} - \frac{\tilde{a}_{jk}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}} \tilde{r}_k^{(k)}. \quad (4.7)$$

Consideremos también el vector $p^{(k)} = (p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})^T$, donde cada $p_i^{(k)}$ es la suma de los elementos extradiagonales de la fila i -ésima de $A^{(k)}$ (para todo $k \leq n$),

$$p_i^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Ahora presentaremos una sucesión de vectores en \mathbb{R}^n de manera análoga a (4.6):

$$c^{(1)} \longrightarrow \tilde{c}^{(1)} \longrightarrow c^{(2)} \longrightarrow \tilde{c}^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow c^{(n)} = \tilde{c}^{(n)}, \quad (4.9)$$

donde las últimas $n - k + 1$ entradas de los vectores $c^{(k)}$ y $\tilde{c}^{(k)}$ contienen las sumas de columnas de las matrices $A^{(k)}[k, \dots, n]$ y $\tilde{A}^{(k)}[k, \dots, n]$ respectivamente; recordemos que las matrices $A^{(k)}$ y $\tilde{A}^{(k)}$ tienen ceros bajo la diagonal principal en las primeras $k - 1$ columnas. Por otro lado, tenemos que

$$c_j^{(k)} := \tilde{c}_j^{(k-1)}, \quad j < k. \quad (4.10)$$

Notemos que si $\tilde{a}_{kk}^{(k)} = 0$, entonces $c_j^{(k+1)} = \tilde{c}_j^{(k)}$ para todo j .

Estudiemos la relación entre las últimas $n - k$ entradas $c_j^{(k+1)}$ ($j = k+1, \dots, n$) del vector $c^{(k+1)}$ y las correspondientes entradas del vector $\tilde{c}^{(k)}$ ($k = 1, \dots, n-1$) cuando $\tilde{a}_{kk}^{(k)} \neq 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} c_j^{(k+1)} &= \sum_{i=k+1}^n a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{i=k+1}^n \left(\tilde{a}_{ij}^{(k)} - \frac{\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}} \tilde{a}_{kj}^{(k)} \right) \\ &= \sum_{i=k+1}^n \tilde{a}_{ij}^{(k)} - \tilde{a}_{kj}^{(k)} \left(\sum_{i=k+1}^n \frac{\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\sum_{i=k+1}^n \frac{\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}} = \frac{\tilde{c}_k^{(k)} - \tilde{a}_{kk}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}},$$

4.1. Descomposición LDU de M-matrices diagonal dominantes

podemos deducir de (4.11) que

$$c_j^{(k+1)} = \sum_{i=k}^n \tilde{a}_{ij}^{(k)} - \frac{\tilde{a}_{kj}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}} \tilde{c}_k^{(k)}. \quad (4.12)$$

Por lo tanto, se tiene que

$$c_j^{(k+1)} = \tilde{c}_j^{(k)} - \frac{\tilde{a}_{kj}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}} \tilde{c}_k^{(k)}, \quad j = k + 1, \dots, n. \quad (4.13)$$

También consideraremos las sumas de los elementos extradiagonales de cada columna de $A = A^{(1)}$,

$$s_j^{(1)} = \sum_{i=1, i \neq j}^n a_{ij}^{(1)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.14)$$

Recordemos que la matriz $A = A^{(1)}$ es una M-matriz diagonal dominante por filas. Estas dos propiedades se heredan al realizar un intercambio de filas y el mismo cambio de columnas y es bien sabido que ambas propiedades también se preservan al hacer complementos de Schur (véase [44]). Puesto que nuestro algoritmo utiliza una estrategia de pivotaje simétrica, dichas propiedades serán heredadas por todas las matrices $A^{(t)}[t, \dots, n]$ y $\tilde{A}^{(t)}[t, \dots, n]$ para $t = 1, \dots, n$. Observemos que la dominancia diagonal por filas, junto con la no negatividad de las entradas diagonales de A y la no positividad de las entradas extradiagonales, implican que todos los vectores de sumas de filas $r^{(t)}, \tilde{r}^{(t)}$ (véase (4.6)) son no negativos,

$$r^{(t)}, \tilde{r}^{(t)} \geq 0, \quad t = 1, \dots, n. \quad (4.15)$$

Sabemos, por (4.3), que nuestra estrategia de pivotaje elige un índice $j_t \in \{t, \dots, n\}$ que cumple la siguiente propiedad:

$$a_{j_t j_t}^{(t)} \geq \sum_{i=t, i \neq j_t}^n |a_{ij_t}^{(t)}|. \quad (4.16)$$

Si tenemos en cuenta los signos de las entradas de $A^{(t)}[t, \dots, n]$ y el hecho de que las últimas $n - k + 1$ entradas $c_j^{(t)}$ del vector $c^{(t)}$ contienen las sumas de columnas de $A^{(t)}[t, \dots, n]$, veremos que (4.16) es equivalente a

$$c_{j_t}^{(t)} \geq 0. \quad (4.17)$$

Observemos que si $(\tilde{a}_{tt}^{(t)} =) a_{j_t j_t}^{(t)} = 0$, entonces la columna $A^{(t)}[t, \dots, n \mid j_t]$ es nula, por (4.16), y la fila $A^{(t)}[j_t \mid t, \dots, n]$ también es nula, por la dominancia diagonal por filas de $A^{(t)}[t, \dots, n]$ (tal y como ya se dijo en (4.2)). Cada *multiplicador* l_{it} y cada cociente n_{ti} ($i > t$) vienen dados por

$$l_{it} := \frac{\tilde{a}_{it}^{(t)}}{\tilde{a}_{tt}^{(t)}} \quad \text{y} \quad n_{ti} := \frac{\tilde{a}_{ti}^{(t)}}{\tilde{a}_{tt}^{(t)}} \quad (4.18)$$

si $\tilde{a}_{tt}^{(t)} \neq 0$, y por $l_{it} := 0$ y $n_{ti} := 0$ si $\tilde{a}_{tt}^{(t)} = 0$. Debido a los signos de las entradas de $\tilde{A}^{(t)}[t, \dots, n]$, podemos concluir que todos los elementos definidos en (4.18) son no positivos. Además, de (4.10) y de (4.13) (cuando $\tilde{a}_{tt}^{(t)} \neq 0$) podemos deducir que

$$c_j^{(t+1)} = \tilde{c}_j^{(t)} - n_{tj} \tilde{c}_t^{(t)}, \quad j = t + 1, \dots, n, \quad (4.19)$$

y por (4.7), se tiene que

$$r_j^{(t+1)} = \tilde{r}_j^{(t)} - l_{jt} \tilde{r}_t^{(t)}. \quad (4.20)$$

Definamos ahora dos sucesiones de vectores que nos serán de utilidad a la hora de elegir el pivote. Puesto que

$$c_j^{(1)} = a_{jj}^{(1)} + s_j^{(1)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

vamos a denotar $h_j^{(1)} := a_{jj}^{(1)}$, $h^{(1)} = (h_1^{(1)}, \dots, h_n^{(1)})^T$ y $s^{(1)} = (s_1^{(1)}, \dots, s_n^{(1)})^T$, de modo que podemos escribir

$$c^{(1)} = h^{(1)} + s^{(1)}. \quad (4.21)$$

Ahora podemos generar dos sucesiones de vectores de manera análoga a lo hecho en (4.9):

$$h^{(1)} \longrightarrow \tilde{h}^{(1)} \longrightarrow h^{(2)} \longrightarrow \tilde{h}^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow h^{(n)} = \tilde{h}^{(n)} \quad (4.22)$$

y

$$s^{(1)} \longrightarrow \tilde{s}^{(1)} \longrightarrow s^{(2)} \longrightarrow \tilde{s}^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow s^{(n)} = \tilde{s}^{(n)}, \quad (4.23)$$

donde $\tilde{h}^{(t)}$ y $\tilde{s}^{(t)}$ se obtienen a partir de $h^{(t)}$ y $s^{(t)}$ respectivamente, utilizando la misma permutación de índices que la usada para obtener $\tilde{c}^{(k)}$ a partir de $c^{(k)}$. Además, $h^{(t+1)}$ y $s^{(t+1)}$ se obtienen a partir de $\tilde{h}^{(t)}$ y $\tilde{s}^{(t)}$ de manera análoga a (4.19). De hecho, se tiene que

$$h_j^{(t+1)} = \tilde{h}_j^{(t)} - n_{tj} \tilde{h}_t^{(t)}, \quad j = t + 1, \dots, n \quad (4.24)$$

4.1. Descomposición LDU de M-matrices diagonal dominantes

y

$$s_j^{(t+1)} = \tilde{s}_j^{(t)} - n_{tj}\tilde{s}_t^{(t)}, \quad j = t + 1, \dots, n. \quad (4.25)$$

Observemos que entonces podemos escribir

$$\tilde{c}^{(t)} = \tilde{h}^{(t)} + \tilde{s}^{(t)}, \quad c^{(t)} = h^{(t)} + s^{(t)}, \quad t = 1, \dots, n. \quad (4.26)$$

Teniendo en cuenta que los multiplicadores son no positivos y que $h^{(1)} \geq 0$ y $s^{(1)} \leq 0$, podemos concluir que

$$\tilde{h}^{(t)}, h^{(t)} \geq 0, \quad \tilde{s}^{(t)}, s^{(t)} \leq 0, \quad t = 1, \dots, n. \quad (4.27)$$

Recordemos que nuestra estrategia de pivotaje simétrica elige siempre un índice $j_t \in \{t, \dots, n\}$ que satisface (4.17), y esto, teniendo en cuenta (4.26) y (4.27), es equivalente a

$$h_{j_t}^{(t)} \geq |s_{j_t}^{(t)}|. \quad (4.28)$$

Por último, hablaremos de los principales pasos del algoritmo y del coste computacional que añade al de la eliminación Gaussiana. Vamos a mostrar que, si conocemos el vector $r = r^{(1)}$ con las sumas de las filas de A y las entradas extradiagonales de A , entonces cada paso del algoritmo puede llevarse a cabo sin utilizar restas y por lo tanto, con alta precisión relativa. En el siguiente párrafo hablaremos los primeros pasos del algoritmo, que sólo se ejecutarán una vez, utilizando la matriz inicial. El resto de pasos han de repetirse en cada iteración de la eliminación Gaussiana.

Primero calculamos el vector $p^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)})^T$ con las sumas de las entradas extradiagonales de cada fila de $A = A^{(1)}$ como se hace en (4.8) para $k = 1$. Este cálculo se hace sin utilizar restas porque todas las entradas extradiagonales de A son no negativas. Esto supone $n(n-2)$ sumas. Después calculamos las entradas diagonales de $A = A^{(1)}$: $a_{jj}^{(1)} = r_j^{(1)} - p_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, n$. Puesto que el vector $r^{(1)}$ es no negativo y $p^{(1)}$ es no positivo, dichos cálculos se hacen sin usar restas y requieren exactamente n sumas. También calculamos el vector $s^{(1)} = (s_1^{(1)}, \dots, s_n^{(1)})^T$, que contiene las sumas de las entradas extradiagonales de las columnas de $A = A^{(1)}$, como se hace en (4.14). De nuevo, el cálculo se hace sin utilizar restas porque todas las entradas extradiagonales de A son no positivas. Esto supone otras $n(n-2)$ sumas.

Después utilizamos (4.28) con $t = 1$ para elegir un índice j_1 para el primer pivote. Notemos que estamos usando las entradas diagonales $h_j^{(1)} = a_{jj}^{(1)}$ de A y las sumas $s_j^{(1)}$ de entradas extradiagonales de las columnas de A . Esto

requiere $n-1$ comparaciones. Si el primer pivote $\tilde{a}_{11}^{(1)} = 0$, entonces $\tilde{A}^{(1)} = A^{(2)}$ y tenemos que $l_{i1} := 0$ y $n_{1i} := 0$. Pero si $\tilde{a}_{11}^{(1)} \neq 0$, entonces utilizaremos (4.18) con $t = 1$ para calcular (sin utilizar restas) los multiplicadores l_{i1} (de la eliminación Gaussiana) y los cocientes n_{1i} ($i > 1$). Este procedimiento para calcular los elementos n_{ki} en cada iteración k -ésima de la eliminación Gaussiana, utiliza $n - k$ cocientes. Ahora calculamos las últimas $n - (k - 1)$ entradas del vector $r^{(k)}$ con las sumas de filas de la matriz $A^{(k)}[k, \dots, n]$, que viene dado (según (4.7)) por

$$r_j^{(k)} = \tilde{r}_j^{(k-1)} - l_{j,k-1} \tilde{r}_{k-1}^{(k-1)}, \quad j = k, \dots, n.$$

Este cálculo no implica realizar restas, ya que $\tilde{r}^{(k-1)}$ es no negativo y los multiplicadores son no positivos. Observemos además que el cálculo supone el mismo coste computacional que el de actualizar las entradas diagonales de la matriz durante la eliminación Gaussiana. Después calculamos las últimas $n - (k - 1)$ entradas del vector $h^{(k)}$ usando (4.24). De nuevo esto no implica realizar restas porque $\tilde{h}^{(k-1)}$ es no negativo y los multiplicadores son no positivos. Este cálculo requiere $n - k$ sumas y $n - k$ productos. Análogamente, el cálculo de las últimas $n - (k - 1)$ entradas del vector $s^{(k)}$ usando (4.25) se realiza sin usar restas porque tanto $\tilde{s}^{(k-1)}$ como los multiplicadores son magnitudes no positivas. Esto supone otras $n - k$ sumas y $n - k$ productos. Las entradas extradiagonales de $A^{(k)}[k, \dots, n]$ las calculamos igual que en la eliminación Gaussiana: $a_{ij}^{(k)} = \tilde{a}_{ij}^{(k-1)} - l_{i,k-1} \tilde{a}_{k-1,j}^{(k-1)}$ (notemos que tanto $\tilde{a}_{ij}^{(k-1)}$ como $-l_{i,k-1} \tilde{a}_{k-1,j}^{(k-1)}$ son no positivos). Para elegir el índice del k -ésimo pivote utilizaremos (4.28) con $t = k$, que usa las entradas $h_j^{(k)}$ de A y los elementos $s_j^{(k)}$. La elección de ese k -ésimo pivote conlleva $n - k$ comparaciones. Calculamos ahora el pivote k -ésimo $\tilde{a}_{kk}^{(k)} = a_{j_k j_k}^{(k)} = r_{j_k}^{(k)} - p_{j_k}^{(k)}$ sin utilizar restas, ya que $r_{j_k}^{(k)}$ es no negativo y $p_{j_k}^{(k)}$ es no positivo. Notemos también que $p_{j_k}^{(k)}$ se ha obtenido como suma de números no positivos (véase (4.8) con $i = j_k$). De modo que el cálculo del k -ésimo pivote requiere $n - (k + 1)$ sumas.

Tal y como hemos visto antes, todas las matrices $A^{(t)}[t, \dots, n]$ son M-matrices diagonal dominantes por filas. De manera que podemos repetir el procedimiento descrito en los párrafos anteriores y obtendremos una sucesión de matrices

$$A^{(2)}[2, \dots, n], \dots, A^{(n-1)}[n-1, n],$$

hasta conseguir L y DU . A partir de esta última matriz, podemos recuperar sin usar restas las matrices D y U . Además, nuestro método tiene un coste computacional que excede al de la eliminación Gaussiana sin intercambio de

4.1. Descomposición LDU de M-matrices diagonal dominantes

filas ni de columnas en $(7n^2 - 11n + 6)/2$ sumas, $n(n-1)$ productos, $n(n-1)/2$ cocientes y $n(n-1)/2$ comparaciones.

□

Nota 4.3. *El método descrito en el Teorema 4.2 tiene un coste computacional menor que el presentado en [36] (que utiliza pivotaje completo simétrico) y que el presentado en [82] puesto que el algoritmo de esta subsección tiene un coste computacional que excede al de la eliminación Gaussiana en $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones elementales, mientras que los otros dos métodos exceden dicho coste con $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones elementales. El motivo de este menor coste computacional radica en el hecho de que, en contraste con los dos métodos mencionados, en el algoritmo de esta subsección no es necesario calcular, para cada $t > 1$, todas las entradas diagonales $a_{jj}^{(t)}$ ($j \geq t$) de las matrices $A^{(t)}[t, \dots, n]$ para poder elegir el pivote $\tilde{a}_{tt}^{(t)}$.*

Nota 4.4. *El Teorema 4.2 se puede aplicar a cualquier matriz diagonal dominante $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ que cumpla*

$$\text{sign}(a_{ij}) \leq 0, \quad j \neq i, \quad \text{sign}(a_{ii}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.29)$$

siempre que conozcamos sus entradas extradiagonales y su vector r con las sumas de filas (véase (4.5)). De esta forma, el procedimiento de [35] nos permite calcular de manera precisa todos sus valores singulares. También podemos aplicar el Teorema 4.2 (y por tanto, el procedimiento de [35] para calcular de manera precisa sus valores singulares) a cualquier matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ diagonal dominante por filas que cumpla alguna de las siguientes condiciones:

$$\text{sign}(a_{ij}) = (-1)^{i+j+1}, \quad j \neq i, \quad \text{sign}(a_{ii}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.30)$$

$$\text{sign}(a_{ij}) \geq 0, \quad j \neq i, \quad \text{sign}(a_{ii}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.31)$$

$$\text{sign}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}, \quad j \neq i, \quad \text{sign}(a_{ii}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.32)$$

Notemos que para poder aplicar el Teorema 4.2 a dicha matriz, necesitamos conocer sus entradas extradiagonales y el vector con las sumas de filas de su matriz de comparación $\mathcal{M}(A)$. De hecho, recordemos la matriz $n \times n$ $J = \text{diag}(1, -1, \dots, (-1)^{n-1})$ y observemos que $J^{-1} = J$. Ahora, si A verifica (4.30), entonces la matriz $J^{-1}AJ = JAJ = \mathcal{M}(A)$ cumple (4.29) y tienen los mismos valores singulares que A . Por lo tanto, podemos calcular la descomposición LDU de $\mathcal{M}(A)$ usando el método del Teorema 4.2 y calcular sus valores propios mediante el procedimiento de [35]. Análogamente,

si A verifica (4.31) o (4.32), entonces aplicaremos el Teorema 4.2 a las matrices $-A$ o $J(-A)J$ respectivamente. Recordemos, finalmente, que matrices diagonal dominantes con patrones de signos arbitrarios fueron estudiadas en [38] y en [93].

4.1.3. Experimentación numérica

Hemos llevado a cabo experimentos numéricos con M-matrices diagonal dominantes generadas aleatoriamente. Aunque para el pivotaje completo (simétrico) no hay cotas satisfactorias para el número de condición de L como las de (4.4), tras la experimentación numérica podemos concluir que las matrices L obtenidas al utilizar pivotaje completo durante la eliminación Gaussiana (algoritmo de [36]), en general están bien condicionadas. Sin embargo, vamos a presentar una familia de matrices para las que el número de condición de L , $\kappa_\infty(L)$, puede ser mucho peor utilizando pivotaje completo que utilizando pivotaje de dominancia diagonal débil por columnas. Consideremos la matriz $n \times n$ ($n \geq 2$)

$$A_n = \begin{pmatrix} n-1 & -(n-1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & n & -1 & \cdots & -1 & -2 \\ \vdots & -(n-1) & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 & 0 \\ 0 & -(n-1) & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Estas matrices son M-matrices diagonal dominantes. Hemos calculado la descomposición LDU de A_n utilizando el algoritmo de la Subsección 4.1.2 y el algoritmo de [36] (que utiliza pivotaje completo) y vamos a comparar los números de condición de las matrices L_1 (algoritmo de la Subsección 4.1.2) y L_2 (pivotaje completo).

En la descomposición $P_1 A_n P_1 = L_1 D_1 U_1$ que se obtiene al aplicar el

4.1. Descomposición LDU de M-matrices diagonal dominantes

Algoritmo 4 se tiene

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & & \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{2}{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que $\|L_1\|_\infty = \|L_1^{-1}\|_\infty = 2$ para todo $n \geq 5$. La descomposición análoga correspondiente al pivotaje completo nos proporciona la siguiente matriz

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -\frac{n-1}{n} & 1 & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & -\frac{1}{n-1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\frac{n-1}{n} & 0 & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

que cumple $\|L_2\|_\infty = \frac{2n-1}{n} + \sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{i}$ y $\|L_2^{-1}\|_\infty = \frac{2n-1}{3}$.

Por lo tanto, concluimos que el número de condición de L_1 es $\kappa_\infty(L_1) = \|L_1\|_\infty \|L_1^{-1}\|_\infty = 4$ para todo $n \geq 5$, mientras que el número de condición de L_2 puede ser arbitrariamente grande cuando aumentamos n .

En la Tabla 4.1, tenemos los números de condición de las matrices L_1 (segunda columna) y L_2 (tercera columna) para los tamaños $n = 10, 20, 30, 40$ y 50 . En la Tabla 4.2 podemos ver los errores relativos de las matrices de la descomposición LDU de nuestras matrices A_n (para tamaños $n = 10, 20, 30, 40$ y 50) calculadas con el algoritmo de [36], es decir, con pivotaje completo. A las matrices exactas las denotamos L_2, D_2, U_2 y a las matrices calculadas las denotamos $\hat{L}_2, \hat{D}_2, \hat{U}_2$. Observemos que el error relativo para esas matrices calculadas por el algoritmo de [36] es pequeño. También hemos llevado a cabo cálculos análogos utilizando el algoritmo de la Subsección 4.1.2 y las matrices calculadas L_1, D_1 y U_1 coinciden exactamente con las reales, es decir, el error relativo es 0.

n	$\kappa_\infty(L_1)$	$\kappa_\infty(L_2)$
10	4	20.4501
20	4	51.9706
30	4	87.0903
40	4	124.5183
50	4	163.6538

Tabla 4.1: Números de condición.

n	$\ \hat{L}_2 - L_2\ _2/\ L_2\ _2$	$\ \hat{D}_2 - D_2\ _2/\ D_2\ _2$	$\ \hat{U}_2 - U_2\ _2/\ U_2\ _2$
10	1.8922e-017	1.7764e-016	7.6823e-017
20	3.5440e-017	3.5527e-016	1.2123e-016
30	3.9756e-017	5.9212e-016	1.7154e-016
40	4.3490e-017	8.8818e-016	2.1188e-016
50	4.8376e-017	8.5265e-016	2.3833e-016

Tabla 4.2: Errores relativos con pivotaje completo.

4.2. Descomposición LDU de Z–matrices cuasi–diagonal dominantes

En esta sección estudiaremos la descomposición LDU de Z–matrices cuasi–diagonal dominantes por filas $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ con $a_{nn} < 0$ y $a_{ii} > 0$ para todo $i \neq n$. En particular, extenderemos a este problema la técnica de la sección anterior, donde presentábamos un algoritmo con alta precisión relativa para el cálculo de la descomposición LDU de M–matrices diagonal dominantes, siempre y cuando conociésemos las sumas de filas y las entradas extradiagonales de la matriz. El método propuesto tiene un coste computacional que excede al de la eliminación Gaussiana en $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones elementales.

En la Subsección 4.2.1 presentaremos nuestra clase de matrices y la estrategia de pivotaje que utilizaremos en nuestro algoritmo, al que incluiremos en la Subsección 4.2.2. En el Teorema 4.8 demostraremos que el algoritmo no utiliza restas y tiene un coste computacional similar al de la sección anterior. Tal y como veremos en la Nota 4.9, si eliminamos la hipótesis $a_{nn} < 0$, entonces perderemos la garantía de la alta precisión relativa, aunque se pueden mantener otras de las ventajas. En la Subsección 4.2.3 veremos ejemplos numéricos que muestran que las descomposiciones LDU obtenidas son descomposiciones reveladoras del rango y que para ciertas

familias de matrices, dichas descomposiciones mejoran en este sentido a las obtenidas mediante eliminación Gaussiana con pivotaje completo o con pivotaje completo simétrico, que es más natural que el pivotaje completo clásico para estas clases de matrices.

4.2.1. Cuasi-dominancia diagonal y estrategias de pivotaje

Empezaremos este subapartado presentando la nueva clase de matrices que serán objeto de estudio en esta sección.

Definición 4.5 (Cuasi-diagonal dominante (por filas)). *Diremos que una matriz A $n \times n$ es cuasi-diagonal dominante por filas si la submatriz $A[1, \dots, n-1|1, \dots, n]$ es diagonal dominante por filas.*

Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, recordemos que en la estrategia de pivotaje llamada *pivotaje completo*, en cada iteración t de la eliminación Gaussiana se elige como pivote una entrada de la matriz con el mayor valor absoluto; es decir, el t -ésimo pivote es $\tilde{a}_{tt}^{(t)} := \max_{t \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(t)}|$ (véase la sucesión de matrices (4.1)).

Recordemos que una estrategia de pivotaje es simétrica cuando se realizan los mismos intercambios de filas que de columnas. Una de estas estrategias simétricas es la llamada estrategia de *pivotaje completo diagonal*, la cual elige como pivote la (primera) entrada diagonal de la matriz correspondiente ($A^{(t)}[t, \dots, n]$) con el mayor valor absoluto. Si la matriz es diagonal dominante (como ocurría en la sección anterior), el pivotaje completo diagonal es un caso particular de pivotaje simétrico.

A continuación presentaremos la estrategia de pivotaje utilizada en el algoritmo que se propone en esta sección. Esta estrategia surge al intentar extender la estrategia de dominancia diagonal débil por columnas presentada en la sección anterior a la clase de matrices estudiada esta sección. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es una matriz no singular cuasi-diagonal dominante por filas, entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} |a_{ii}| \geq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|,$$

y existe un entero $k \in \{1, \dots, n-1\}$ de manera que la columna k -ésima de $A[1, \dots, n-1|1, \dots, n]$ es diagonal dominante, es decir,

$$|a_{kk}| \geq \sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} |a_{ik}|. \quad (4.34)$$

Si elegimos como primer pivote \tilde{a}_{11} a la primera entrada a_{kk} ($\neq 0$) que cumpla (4.34), intercambiando para ello las correspondientes filas y columnas, entonces la matriz $\tilde{A}^{(1)}$ será de nuevo no singular cuasi-diagonal dominante por filas y puesto que la no singularidad y la dominancia diagonal por filas se heredan al hacer complementos de Schur durante la eliminación Gaussiana, la matriz $A^{(2)}[2, \dots, n]$ será también no singular y cuasi-diagonal dominante por filas. Este razonamiento se puede aplicar a cualquier iteración de la eliminación Gaussiana. Diremos que esta estrategia de pivotaje simétrica es de *cuasi-dominancia diagonal débil por columnas*. Observemos que la última fila de las matrices no puede ser intercambiada en todo el proceso. Como hemos dicho en la sección anterior, el proceso de eliminación Gaussiana con una estrategia de pivotaje simétrica preserva la dominancia diagonal por filas. Por lo tanto, si tenemos una matriz A no singular cuasi-diagonal dominante por filas y aplicamos un pivotaje de cuasi-dominancia diagonal por columnas, entonces todas las matrices $A^{(t)}$ de (4.1) y en particular, D y U , serán no singulares cuasi-diagonal dominantes por filas. De hecho, como U también es triangular superior, se tiene que es diagonal dominante por filas.

En esta sección vamos a presentar un algoritmo con alta precisión relativa para Z -matrices no singulares cuasi-diagonal dominantes por filas con todas sus entradas diagonales positivas excepto la última (que es negativa). El siguiente lema nos garantiza que todas esas propiedades se conservan al realizar la eliminación Gaussiana con una estrategia de pivotaje de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas.

Lema 4.6. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una Z -matriz no singular cuasi-diagonal dominante por filas con las primeras $n-1$ entradas diagonales positivas y supongamos que aplicamos eliminación Gaussiana con una estrategia de pivotaje de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

- (i) *Todas las matrices $A^{(t)}, \tilde{A}^{(t)}$, $t = 1, \dots, n$ de (4.1) son Z -matrices no singulares cuasi-diagonal dominantes por filas con las primeras $n-1$ entradas diagonales positivas.*

4.2. Descomposición LDU de Z -matrices cuasi-diagonal dominantes

(ii) Si además $a_{nn} < 0$, entonces las entradas (n, n) de todas las matrices $A^{(t)}$, $\tilde{A}^{(t)}$ son negativas.

Demostración. (i) Claramente, el intercambio de filas y columnas con los mismos índices conserva las hipótesis, siempre y cuando la última fila no sea intercambiada. Por lo tanto, basta con comprobar que un paso de la eliminación Gaussiana (por ejemplo, el paso $\tilde{A}^{(1)} \rightarrow A^{(2)}$) con un pivote $a_{tt} = \tilde{a}_{11}^{(1)}$ (no nulo) también preserva las hipótesis.

Consideremos cualquier entrada $a_{ij}^{(2)}$ con $i \neq j$ y $i, j \in \{2, \dots, n\}$. Como

$$a_{ij}^{(2)} = \tilde{a}_{ij}^{(1)} - \frac{\tilde{a}_{i1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}} \tilde{a}_{1j}^{(1)},$$

es fácil ver, teniendo en cuenta las hipótesis sobre el signo de las entradas, que $\tilde{a}_{ij}^{(2)} \leq 0$. Por tanto, todas las entradas extradiagonales de $A^{(2)}$ son no negativas. Tal y como hemos recordado antes, tanto la no singularidad como la dominancia diagonal se conservan al realizar la eliminación Gaussiana. De manera que $A^{(2)}$ es no singular cuasi-diagonal dominante por filas. Sólo falta demostrar que todas las entradas diagonales de $A^{(2)}$, excepto la última, son positivas.

Consideremos cualquier entrada diagonal $\tilde{a}_{jj}^{(1)}$ con $1 < j < n$ y la submatriz $\tilde{A}^{(1)}[1, j]$. Como esta submatriz es diagonal dominante y tanto $\tilde{a}_{11}^{(1)}$ como $\tilde{a}_{jj}^{(1)}$ son positivos, tenemos que

$$\det \tilde{A}^{(1)}[1, j] = \tilde{a}_{11}^{(1)} \tilde{a}_{jj}^{(1)} - \tilde{a}_{1j}^{(1)} \tilde{a}_{j1}^{(1)} \geq 0.$$

Tras realizar un paso de eliminación Gaussiana tendremos la matriz $A^{(2)}$, que es cuasi-diagonal dominante por filas con $a_{j1}^{(2)} = 0$ y $\det A^{(2)}[1, j] = \det \tilde{A}^{(1)}[1, j] \geq 0$. De modo que tenemos $\det A^{(2)}[1, j] = a_{11}^{(2)} a_{jj}^{(2)} \geq 0$ y, como $a_{11}^{(2)} = \tilde{a}_{11}^{(1)} > 0$, podemos deducir que $a_{jj}^{(2)} \geq 0$. Si $a_{jj}^{(2)} = 0$, y debido a la cuasi-dominancia diagonal por filas de $A^{(2)}$, su fila j -ésima sería nula, lo que contradice la no singularidad de $A^{(2)}$. Por tanto, $a_{jj}^{(2)} > 0$ y queda demostrado (i).

(ii) De nuevo basta con comprobar que un paso de la eliminación Gaussiana (por ejemplo el paso $\tilde{A}^{(1)} \rightarrow A^{(2)}$) con un pivote no nulo conserva

esta propiedad. Observemos que, como

$$a_{nn}^{(2)} = \tilde{a}_{nn}^{(1)} - \frac{\tilde{a}_{n1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}} \tilde{a}_{1n}^{(1)},$$

podemos deducir de la hipótesis que $a_{nn}^{(2)} \leq \tilde{a}_{nn}^{(1)} < 0$, y así queda demostrado (ii). □

Nota 4.7. Si observamos la demostración del Lema 4.6, podemos deducir que dicho lema también es válido para cualquier estrategia de pivotaje simétrica que no intercambie la última fila. Bajo las hipótesis del Lema 4.6, denotaremos por P a la matriz de permutación asociada a la estrategia de pivotaje de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas. De esta manera, la correspondiente descomposición LDU viene dada por $PAP^T = LDU$. El hecho de que la estrategia de pivotaje sea de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas, implica, debido a su elección de los pivotes, que la matriz $L[1, \dots, n-1]$ es diagonal dominante por columnas.

En la siguiente subsección presentamos una implementación de la eliminación Gaussiana con la estrategia de pivotaje de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas con muchas propiedades deseables.

4.2.2. Algoritmo para calcular la descomposición LDU de Z-matrices cuasi-diagonal dominantes

En esta subsección, daremos un algoritmo preciso y eficiente para calcular la descomposición LDU de $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, una Z-matriz no singular cuasi-diagonal dominante por filas con sus primeras $n-1$ entradas diagonales positivas y $a_{nn} < 0$, siempre que conozcamos sus entradas extradiagonales, las sumas de sus primeras $n-1$ filas y a_{nn} . De hecho, el algoritmo no utilizará verdaderas restas y, por tanto, podrá realizarse con alta precisión relativa (véase Sección 1.6). También consideraremos el caso de las Z-matrices no singulares cuasi-diagonal dominantes por filas con todas sus entradas diagonales positivas ($a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$).

Consideremos el vector $e := (1, \dots, 1)^T$ y sea

$$r := A[1, \dots, n-1 | 1, \dots, n]e \tag{4.35}$$

4.2. Descomposición LDU de Z -matrices cuasi-diagonal dominantes

el vector con las sumas de las primeras $n-1$ filas de A . Recordemos que, en la sección anterior, denotábamos por r al vector con las sumas de todas las filas de una M -matriz diagonal dominante. En esa sección vimos un algoritmo para calcular la descomposición LDU de dichas matrices, tomando como parámetros las entradas extradiagonales de la matriz y las sumas de sus filas. Estos parámetros son los que se suelen considerar habituales para esa clase de matrices, tal y como puede verse en [1], [2], [13], [36] y [82]. Para Z -matrices no singulares cuasi-diagonal dominantes por filas, utilizaremos los siguientes parámetros: entradas extradiagonales de la matriz, r y la entrada a_{nn} .

Ahora presentaremos un algoritmo con similitudes al visto en la Subsección 4.1.2 pero para Z -matrices no singulares cuasi-diagonal dominantes por filas. La idea principal es la siguiente: empezaremos con (4.35) y en cada iteración de la eliminación Gaussiana, actualizaremos el vector r . No es necesario calcular las entradas diagonales de la matriz en cada iteración (excepto en la primera iteración y el pivote y la entrada (n, n) , que sí se calculan en cada iteración) y el coste computacional que se añade al de la eliminación Gaussiana es de orden de $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones elementales. El resto de los detalles se explicarán en el siguiente teorema. Sin embargo, vamos a presentar algunas de las variables que aparecen en el Algoritmo 5 y en el Teorema 4.8. Como hemos visto, $r = (r_1, \dots, r_{n-1})^T$ es el vector con las sumas de las primeras $n-1$ filas de A . Las sumas de las entradas extradiagonales de las primeras $n-1$ filas de A están almacenadas en el vector $p = (p_1, \dots, p_{n-1})^T$. Consideremos también el vector $c = (c_1, \dots, c_{n-1})^T$, que contiene las sumas de las columnas de la submatriz $A[1, \dots, n-1]$ y las correspondientes sumas de las entradas extradiagonales de sus columnas, almacenadas en $s = (s_1, \dots, s_{n-1})^T$. Por último, definamos $h = (h_1, \dots, h_{n-1})^T := (a_{11}, \dots, a_{n-1, n-1})^T$. Observemos que en cada iteración $t \in \{1, \dots, n-1\}$ de la eliminación Gaussiana, actualizaremos las variables r y p , de manera que $r^{(t)}$, $p^{(t)}$ y $\tilde{r}^{(t)}$, $\tilde{p}^{(t)}$ contendrán las sumas de filas y las sumas de las entradas extradiagonales de las filas de las submatrices $A^{(t)}[1, \dots, n-1|1, \dots, n]$ y $\tilde{A}^{(t)}[1, \dots, n-1|1, \dots, n]$ respectivamente. El vector c también será actualizado, de manera que las últimas $n-t$ entradas de los vectores $c^{(t)}$ y $\tilde{c}^{(t)}$ contengan las sumas de columnas de las matrices $A^{(t)}[t, \dots, n-1]$ y $\tilde{A}^{(t)}[t, \dots, n-1]$ respectivamente. También transformaremos las variables s y h durante el proceso de eliminación Gaussiana en las variables $s^{(t)}$, $h^{(t)}$ y $\tilde{s}^{(t)}$, $\tilde{h}^{(t)}$.

El siguiente resultado muestra las propiedades del Algoritmo 5: tanto su bajo coste computacional como el hecho de que no utilice restas y, por tanto, se pueda llevar a cabo con alta precisión relativa (véase Sección 1.6).

Algoritmo 5 Calcula la descomposición LDU de una Z -matriz cuasi-diagonal dominante (por filas)

Entradas: $A = (a_{ij})$ ($i \neq j$), $r = (r_1, \dots, r_{n-1}) \geq 0$ y $a_{nn} < 0$

```

1: for  $i = 1, \dots, n - 1$  do
2:    $p_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$ 
3:    $a_{ii} = r_i - p_i$ 
4:    $s_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} a_{ji}$ 
5:    $h_i = a_{ii}$ 
6: end for
7: Elegir una matriz de permutación  $P_1$  tal que  $P_1(n, n) = 1$  y  $A = P_1 A P_1^T$ 
   satisfice  $h_1 \geq -s_1$ , donde  $h = P_1[1, \dots, n - 1]h$ ,  $s = P_1[1, \dots, n - 1]s$ 
8: Inicializar:  $P = P_1$ ;  $L = I$ ;  $D = \text{diag}(d_i)_{i=1}^n = \text{diag}(h_1, 0, \dots, 0)$ ;
    $r = P_1[1, \dots, n - 1]r$ 
9: for  $k = 1, \dots, (n - 1)$  do
10:  for  $i = k + 1, \dots, n$  do
11:     $l_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ 
12:     $n_{ki} = a_{ki}/a_{kk}$ 
13:    if  $i \neq n$  then
14:       $r_i = r_i - l_{ik}r_k$ 
15:       $h_i = h_i - n_{ki}h_k$ 
16:       $s_i = s_i - n_{ki}s_k$ 
17:    end if
18:    for  $j = k + 1, \dots, n$  do
19:      if  $i \neq j$  then
20:         $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$ 
21:      end if
22:    end for
23:  end for
24:   $a_{nn} = a_{nn} - l_{nk}a_{kn}$ 
25:  if  $k < n - 1$  then
26:    Elegir una matriz de permutación  $P_2$  tal que  $P_2(n, n) = 1$  y
     $A = P_2 A P_2^T$  satisfice  $h_{k+1} \geq -s_{k+1}$ , donde  $h = P_2[1, \dots, n - 1]h$ ,
     $s = P_2[1, \dots, n - 1]s$ 
27:     $P = P_2 P$ ;  $r = P_2[1, \dots, n - 1]r$ 
28:     $p_{k+1} = \sum_{j=k+2}^n a_{k+1, j}$ 
29:     $a_{k+1, k+1} = r_{k+1} - p_{k+1}$ 
30:  end if
31:   $d_{k+1} = a_{k+1, k+1}$ 
32: end for

```

Salidas: $P A P^T = L D U$. Las entradas no triviales de la matriz U están almacenadas en $N = (n_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$.

4.2. Descomposición LDU de Z -matrices cuasi-diagonal dominantes

Teorema 4.8. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una Z -matriz no singular cuasi-diagonal dominante por filas con $a_{ii} > 0$ para todo $i \leq n - 1$ y $a_{nn} < 0$ y sea P la matriz de permutación asociada a una estrategia de pivotaje de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas utilizada al realizar eliminación Gaussiana en A . Si conocemos las entradas extradiagonales de A , a_{nn} y el vector $r = (r_1, \dots, r_{n-1})$ con las primeras $n - 1$ sumas de filas de A (véase (4.35)), entonces podemos calcular con alta precisión relativa (utilizando el Algoritmo 5) la descomposición LDU de PAP^T . Además, este cálculo se lleva a cabo sin realizar restas y con un coste computacional que excede al de la eliminación Gaussiana en a lo más $(7n^2 - 25n + 22)/2$ sumas, $n^2 - 5n + 6$ productos, $(n^2 - n)/2$ cocientes y $(n^2 - n - 2)/2$ comparaciones.*

Demostración. Vamos a describir los pasos principales del Algoritmo 5 y el coste computacional que añaden al de la eliminación Gaussiana. Veremos que cada paso se lleva a cabo sin utilizar restas, y por tanto con alta precisión relativa. Los pasos iniciales, estudiados en el siguiente párrafo, sólo se llevan a cabo una vez utilizando la matriz inicial, mientras que el resto de pasos se repetirán en cada iteración de la eliminación Gaussiana.

Primero calcularemos el vector $p^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_{n-1}^{(1)})^T$ con las sumas de las entradas extradiagonales de las filas de la matriz $A[1, \dots, n-1 | 1, \dots, n] = A^{(1)}[1, \dots, n-1 | 1, \dots, n]$. Esto requiere $(n-1)(n-2)$ sumas. Después utilizaremos $p^{(1)}$ y $r^{(1)} := r$ para calcular las entradas diagonales de $A = A^{(1)}$: $a_{jj}^{(1)} = r_j^{(1)} - p_j^{(1)}$, para $j = 1, \dots, n-1$; recordemos que inicialmente conocemos a_{nn} . Este cálculo supone $n-1$ sumas. También calcularemos el vector $s^{(1)} = (s_1^{(1)}, \dots, s_{n-1}^{(1)})^T$ con las sumas de las entradas extradiagonales de las columnas de la matriz $A^{(1)}[1, \dots, n-1]$. Esto requiere $(n-1)(n-3)$ sumas. Notemos que como las entradas extradiagonales de A y el vector $p^{(1)}$ son no positivos y $r^{(1)}$ es no negativo, todos estos cálculos se realizan sin utilizar verdaderas restas y, por tanto, con alta precisión relativa.

Recordemos que denotamos por $c = c^{(1)}$ y por $\tilde{c}^{(1)}$ a las sumas de columnas de $A[1, \dots, n-1] = A^{(1)}[1, \dots, n-1]$ y de $\tilde{A}[1, \dots, n-1] = \tilde{A}^{(1)}[1, \dots, n-1]$ respectivamente. Además obtendremos la siguiente sucesión de vectores en \mathbb{R}^{n-1}

$$c^{(1)} \longrightarrow \tilde{c}^{(1)} \longrightarrow c^{(2)} \longrightarrow \tilde{c}^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow c^{(n)} \longrightarrow \tilde{c}^{(n)}, \quad (4.36)$$

donde las últimas $n - t$ entradas de los vectores $c^{(t)}$ y $\tilde{c}^{(t)}$ contienen las sumas de columnas de las matrices $A^{(t)}[t, \dots, n-1]$ y $\tilde{A}^{(t)}[t, \dots, n-1]$

respectivamente. Para cada $j < t$, se tiene que $c_j^{(t)} := \tilde{c}_j^{(t-1)}$. Puesto que $\tilde{a}_{tt}^{(t)} \neq 0$ por ser A no singular, tenemos

$$c_j^{(t+1)} = \sum_{i=t+1}^n a_{ij}^{(t+1)} = \sum_{i=t+1}^n \left(\tilde{a}_{ij}^{(t)} - \frac{\tilde{a}_{it}^{(t)}}{\tilde{a}_{tt}^{(t)}} \tilde{a}_{tj}^{(t)} \right) = \sum_{i=t+1}^n \tilde{a}_{ij}^{(t)} - \tilde{a}_{tj}^{(t)} \left(\sum_{i=t+1}^n \frac{\tilde{a}_{it}^{(t)}}{\tilde{a}_{tt}^{(t)}} \right). \quad (4.37)$$

Como $\sum_{i=t+1}^n (\tilde{a}_{it}^{(t)} / \tilde{a}_{tt}^{(t)}) = (\tilde{c}_t^{(t)} - \tilde{a}_{tt}^{(t)}) / \tilde{a}_{tt}^{(t)}$, podemos deducir de (4.37) que

$$c_j^{(t+1)} = \sum_{i=t}^n \tilde{a}_{ij}^{(t)} - \frac{\tilde{a}_{tj}^{(t)}}{\tilde{a}_{tt}^{(t)}} \tilde{c}_t^{(t)} = \tilde{c}_j^{(t)} - \frac{\tilde{a}_{tj}^{(t)}}{\tilde{a}_{tt}^{(t)}} \tilde{c}_t^{(t)} \quad (4.38)$$

para todo $j = t + 1, \dots, n$.

Recordemos que por (4.34), nuestra estrategia de pivotaje elige un índice $j_t \in \{t, \dots, n-1\}$ de manera que la columna j_t de $A^{(t)}[t, \dots, n-1]$ es diagonal dominante, lo que es equivalente a decir que

$$c_{j_t}^{(t)} \geq 0. \quad (4.39)$$

El *multiplador* l_{it} y el cociente n_{ti} ($i > t$) vienen definidos por

$$l_{it} := \frac{\tilde{a}_{it}^{(t)}}{\tilde{a}_{tt}^{(t)}}, \quad n_{ti} := \frac{\tilde{a}_{tj}^{(t)}}{\tilde{a}_{tt}^{(t)}}. \quad (4.40)$$

Utilizar este método para calcular los elementos n_{ti} en cada iteración de la eliminación Gaussiana supone como mucho $n - t$ cocientes.

De la ecuación (4.38), podemos deducir que

$$c_j^{(t+1)} = \tilde{c}_j^{(t)} - n_{tj} \tilde{c}_t^{(t)}, \quad j = t + 1, \dots, n. \quad (4.41)$$

Considerando al mismo tiempo el sistema lineal $A[1, \dots, n-1|1, \dots, n]e = r$ (recordemos que $e := (1, \dots, 1)^T$) y la sucesión de matrices (4.1), podemos definir la siguiente sucesión de vectores en \mathbb{R}^{n-1}

$$r = r^{(1)} \longrightarrow \tilde{r}^{(1)} \longrightarrow r^{(2)} \longrightarrow \tilde{r}^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow r^{(n-1)}, \quad (4.42)$$

donde los vectores $r^{(t)}$ y $\tilde{r}^{(t)}$ contienen las sumas de filas de las matrices $A^{(t)}[1, \dots, n-1|1, \dots, n]$ y $\tilde{A}^{(t)}[1, \dots, n-1|1, \dots, n]$ respectivamente, pues

4.2. Descomposición LDU de Z -matrices cuasi-diagonal dominantes

el vector e es una solución de $A[1, \dots, n-1|1, \dots, n]x = r$ y por tanto de los sistemas $A^{(t)}[1, \dots, n-1|1, \dots, n]x = r^{(t)}$ y $\tilde{A}^{(t)}[1, \dots, n-1|1, \dots, n]x = \tilde{r}^{(t)}$. Además, para cada $t = 2, \dots, n-1$ y para cada $j = t+1, \dots, n-1$, tenemos, por (4.40), que

$$r_j^{(t)} = \tilde{r}_j^{(t-1)} - l_{j,t-1}\tilde{r}_{t-1}^{(t-1)}. \quad (4.43)$$

Como A es una Z -matriz no singular cuasi-diagonal dominante por filas con sus primeras $n-1$ entradas diagonales positivas y hemos aplicado una estrategia de pivotaje de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas, el Lema 4.6 nos garantiza que todas las matrices $A^{(t)}, \tilde{A}^{(t)}$ para $t = 1, \dots, n$ de (4.1) heredan estas propiedades de A . Por tanto, todos los vectores $r^{(t)}, \tilde{r}^{(t)}$ son no negativos ($t = 1, \dots, n-1$). Esta no negatividad junto a la no positividad de los multiplicadores l_{ij} hacen que el cálculo de $r_j^{(t)}$ se realice mediante (4.43) sin utilizar restas.

También calcularemos, para cada $t = 2, \dots, n$, la entrada $a_{nn}^{(t)}$ tal y como se hace en la eliminación Gaussiana habitualmente

$$a_{nn}^{(t)} = \tilde{a}_{nn}^{(t-1)} - l_{n,t-1}\tilde{a}_{t-1,n}^{(t-1)}. \quad (4.44)$$

Notemos que este cálculo se realiza sin utilizar restas y que, junto con el cálculo de todos los $r_j^{(t)}$, supone el mismo coste computacional que la actualización de las entradas diagonales durante la eliminación Gaussiana habitual.

Consideremos las sumas de las entradas extradiagonales de las columnas de $A[1, \dots, n-1] = A^{(1)}[1, \dots, n-1]$:

$$s_j^{(1)} = \sum_{i=1, i \neq j}^{n-1} a_{ij}^{(1)}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Vamos a definir dos nuevas sucesiones de vectores que serán útiles en la elección de los pivotes. Como $c_j^{(1)} = a_{jj}^{(1)} + s_j^{(1)}$ para $j = 1, \dots, n-1$, denotaremos $h_j^{(1)} := a_{jj}^{(1)}$, $h^{(1)} = (h_1^{(1)}, \dots, h_{n-1}^{(1)})^T$ y $s^{(1)} = (s_1^{(1)}, \dots, s_{n-1}^{(1)})^T$. De esta manera, podemos escribir

$$c^{(1)} = h^{(1)} + s^{(1)}.$$

Actualizaremos los vectores $h^{(t)}$ y $s^{(t)}$ en cada iteración t de la eliminación Gaussiana de la siguiente manera: los vectores $\tilde{h}^{(t)}$ y $\tilde{s}^{(t)}$ se obtienen a partir

de $h^{(t)}$ y $s^{(t)}$ respectivamente, con el mismo intercambio de índices utilizado para obtener $\tilde{c}^{(t)}$ a partir de $c^{(t)}$ y se puede comprobar que es posible actualizar estos vectores usando los parámetros de (4.40):

$$h_j^{(t)} = \tilde{h}_j^{(t-1)} - n_{t-1,j} \tilde{h}_{t-1}^{(t-1)}, \quad j = t+1, \dots, n-1 \quad (4.45)$$

y

$$s_j^{(t)} = \tilde{s}_j^{(t-1)} - n_{t-1,j} \tilde{s}_{t-1}^{(t-1)}, \quad j = t+1, \dots, n-1. \quad (4.46)$$

Además se tiene que

$$\tilde{c}^{(t)} = \tilde{h}^{(t)} + \tilde{s}^{(t)}, \quad c^{(t)} = h^{(t)} + s^{(t)},$$

para $t = 1, \dots, n-1$. Puesto que los multiplicadores son no positivos y que tenemos que $h^{(1)} > 0$ y $s^{(1)} \leq 0$, concluimos que todos los vectores $\tilde{h}^{(t)}, h^{(t)}$ son positivos y que $\tilde{s}^{(t)}, s^{(t)}$ son no positivos para $t = 1, \dots, n-1$. Como hemos visto antes, nuestra estrategia de pivotaje simétrica elige un índice $j_t \in \{t, \dots, n-1\}$ que satisface (4.39), lo que es equivalente a decir que

$$h_{j_t}^{(t)} \geq |s_{j_t}^{(t)}|. \quad (4.47)$$

El cálculo de las últimas $n-t$ entradas del vector $h^{(t)}$ mediante (4.45) requiere $n-(t+1)$ sumas y otros tantos productos. El cálculo de las últimas $n-t$ entradas del vector $s^{(t)}$ mediante (4.46) supone $n-(t+1)$ sumas y productos. De nuevo, todos estos cálculos se realizan sin utilizar restas, debido al signo de los elementos implicados. Ahora calcularemos las entradas extradiagonales de $A^{(t)}[t, \dots, n]$ de igual forma que en la eliminación Gaussiana: $a_{ij}^{(t)} = \tilde{a}_{ij}^{(t-1)} - l_{i,t-1} \tilde{a}_{t-1,j}^{(t-1)}$. Elegiremos el índice j_t del t -ésimo ($t < n$) pivote a partir de (4.47), que utiliza los elementos $h_{j_t}^{(t)}$ y los elementos $s_{j_t}^{(t)}$. La elección del t -ésimo pivote supone $n-(t+1)$ comparaciones. Para calcular dicho t -ésimo pivote usaremos $\tilde{a}_{tt}^{(t)} = a_{j_t j_t}^{(t)} = r_{j_t}^{(t)} - p_{j_t}^{(t)}$. Este cálculo no conlleva restas porque $r_{j_t}^{(t)}$ es no negativo y $p_{j_t}^{(t)}$ es no positivo. Además, $p_{j_t}^{(t)}$ también se calcula de forma precisa como suma de números no positivos. Por tanto, el cálculo del pivote t -ésimo supone $n-(t+1)$ sumas.

Si repetimos el proceso descrito anteriormente, obtendremos las matrices L y DU . A partir de esta última matriz podemos calcular de forma precisa D y U . Como conclusión tenemos que el Algoritmo 5 se lleva a cabo sin realizar restas y que tiene un coste computacional que excede al de la eliminación Gaussiana sin intercambios de filas ni de columnas en, como

4.2. Descomposición LDU de Z -matrices cuasi-diagonal dominantes

mucho, $(7n^2 - 25n + 22)/2$ sumas, $(n - 2)(n - 3)$ productos, $n(n - 1)/2$ cocientes y $n^2 - n - 2/2$ comparaciones.

□

Nota 4.9. *Teniendo en cuenta el apartado (i) del Lema 4.6, podemos deducir que es posible calcular de forma precisa (excepto la entrada (n, n) de la matriz D) y tal y como se ha visto en el Algoritmo 5 y en el Teorema 4.8, la descomposición LDU de una Z -matriz no singular cuasi-diagonal dominante por filas con todas sus entradas positivas, $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. De hecho, actualizar las entradas (n, n) utilizando (4.44) es el único cálculo en el que se realizan verdaderas restas.*

4.2.3. Experimentación numérica

Consideremos las matrices L y U asociadas al Algoritmo 5. Por un lado, por el Lema 4.6 sabemos que la matriz U es diagonal dominante por filas y por tanto satisface las cotas presentadas en la Proposición 4.1. Por otro lado, aunque la matriz L no es necesariamente diagonal dominante por columnas, normalmente también está bien condicionada (tal y como veremos en los experimentos numéricos de esta subsección). De hecho, la elección de los pivotes en nuestra estrategia de pivotaje nos asegura que la submatriz $L[1, \dots, n-1]$ siempre es diagonal dominante por columnas (véase Nota 4.7).

Los experimentos numéricos que presentamos en esta subsección utilizan las dos clases de Z -matrices no singulares cuasi-diagonal dominantes por filas mencionadas en la subsección anterior:

- *Clase 1:* con las primeras $n-1$ entradas diagonales positivas y la entrada (n, n) negativa.
- *Clase 2:* con todas las entradas diagonales positivas (véase Nota 4.9).

Primero, hemos calculado la descomposición LDU (utilizando la estrategia de pivotaje de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas) para matrices de estas clases generadas de manera aleatoria. En la Tabla 4.3 podemos encontrar la media de los números de condición de las matrices L ($\kappa_\infty(L)$) y U ($\kappa_\infty(U)$) obtenidos para cien matrices de la Clase 1 generadas

n	$\kappa_{\infty}(L)$	$\kappa_{\infty}(U)$
10	15.9216	5.8668
20	40.5940	7.2213
50	118.1117	9.0687

Tabla 4.3: Números de condición de matrices aleatorias. Clase 1.

n	$\kappa_{\infty}(L)$	$\kappa_{\infty}(U)$
10	18.1248	5.9310
20	40.9506	7.2643
50	120.0142	9.0857

Tabla 4.4: Números de condición de matrices aleatorias. Clase 2.

de manera aleatoria. Hemos realizado los cálculos para tamaños $n = 10, 20$ y 50 . En la Tabla 4.4, encontraremos experimentos análogos con matrices de la Clase 2. Teniendo en cuenta los resultado de la Tabla 4.3 y la Tabla 4.4, podemos deducir que el condicionamiento de las matrices U es mejor que el de las matrices L , pero incluso estas últimas satisfacen las cotas presentadas en la Proposición 4.1.

Por último, presentaremos tres familias de matrices que representan a las dos clases de matrices anteriores y para las que el condicionamiento de las matrices triangulares de las descomposiciones LDU obtenidas al utilizar un pivotaje de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas es mucho menor que el de las matrices triangulares asociadas al pivotaje completo o al pivotaje completo diagonal. El hecho de que el pivotaje completo normalmente proporciona descomposiciones reveladoras del rango (véase Sección 1.6) es bien conocido. Fijado un tamaño n ($n > 3$), consideremos dos familias de matrices $n \times n$ de la Clase 1:

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 0 & -1 & \cdots & -1 & -2 \\ -(n-1) & n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -(n-1) & \vdots & & \ddots & n-1 & 0 \\ -(n-1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{-(n-1)}{3} \end{pmatrix},$$

4.2. Descomposición LDU de Z -matrices cuasi-diagonal dominantes

$$C_n = \begin{pmatrix} 2n & 0 & -2 & \cdots & -2 & -4 \\ -(n-1) & 2(n-1) & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -(n-1) & \vdots & & \ddots & 2(n-1) & -1 \\ -(n-1) & -1 & \cdots & \cdots & -1 & \frac{-2(n-1)}{3} \end{pmatrix},$$

y una familia de matrices de la Clase 2:

$$B_n = \begin{pmatrix} n & 0 & -1 & \cdots & -1 & -2 \\ -(n-1) & n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -(n-1) & \vdots & & \ddots & n-1 & 0 \\ -(n-1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n-1}{3} \end{pmatrix}.$$

Hemos calculado las descomposiciones LDU de las matrices A_n , B_n y C_n utilizando tres estrategias de pivotaje distintas: pivotaje de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas (*awcddp*), pivotaje completo (*cp*), y pivotaje completo diagonal (*cdp*)¹. A diferencia de lo que ocurre con las matrices consideradas en la Sección 4.1, estas estrategias podrían diferir en general para las matrices consideradas en esta Sección 4.2. Una vez fijado el tamaño n , denotaremos por $P_s A_n P_s = L_s D_s U_s$ la descomposición LDU de A (procederemos de manera análoga con B_n y C_n). Si utilizamos el subíndice $s = 1$ para las matrices obtenidas al utilizar la estrategia *awcddp*, el subíndice $s = 2$ para las obtenidas al usar *cp* y el subíndice $s = 3$ para las matrices de *cdp*, entonces podemos concluir que:

- las matrices triangulares obtenidas al utilizar *awcddp* para A_n y para B_n sólo difieren en el signo de una entrada y tienen el mismo número de condición. De hecho,

$$\kappa_\infty(L_1) = 4 \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^2, \quad \kappa_\infty(U_1) = 4^2, \quad (4.48)$$

¹Las siglas asociadas a cada estrategia de pivotaje provienen del nombre de las estrategias escrito en inglés.

	n	$\kappa_\infty(L_1)$	$\kappa_\infty(L_2)$	$\kappa_\infty(L_3)$
A_n	10	5.98	16.60	16.60
	20	4.89	41.58	41.58
	50	4.33	129.34	129.34
B_n	10	5.98	20.45	20.45
	20	4.89	51.97	51.97
	50	4.33	163.65	163.65
C_n	10	6.86	17.64	17.64
	20	6.94	33.28	33.28
	50	7.07	103.65	103.65

Tabla 4.5: Números de condición de las matrices inferiores.

- con la estrategia cp obtenemos, para las matrices A_n :

$$\begin{aligned}\kappa_\infty(L_2) &= \frac{2n-1}{4} \left(\frac{n-2}{n} + \frac{8}{5} + \sum_{i=4}^n \frac{1}{i} \right), \\ \kappa_\infty(U_2) &= \frac{2n-1}{n} \left(\frac{31}{60} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right),\end{aligned}\tag{4.49}$$

y para las matrices B_n :

$$\begin{aligned}\kappa_\infty(L_2) &= \frac{2n-1}{3} \left(\frac{2n-2}{n} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{i} \right), \\ \kappa_\infty(U_2) &= \frac{2n-1}{n} \left(\frac{4}{3} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{i} \right).\end{aligned}\tag{4.50}$$

Notemos que los números de condición de (4.49) y (4.50) pueden ser arbitrariamente grandes, al contrario de lo que sucede con los números de condición (4.48) obtenidos al utilizar la estrategia $awcddp$. La descomposición LDU de estas matrices obtenida con la estrategia cpd es la misma que la obtenida con la estrategia cp .

En la Tabla 4.5 obtuvimos con MATLAB los números de condición de las matrices triangulares inferiores obtenidas al utilizar la estrategia $awcddp$ ($\kappa_\infty(L_1)$), *pivotaje completo* ($\kappa_\infty(L_2)$) y *pivotaje completo diagonal* ($\kappa_\infty(L_3)$). En la Tabla 4.6 encontraremos los resultados correspondientes a las matrices triangulares superiores.

4.3. Caracterizaciones y test para cuasi-M-matrices

	n	$\kappa_\infty(U_1)$	$\kappa_\infty(U_2)$	$\kappa_\infty(U_3)$
A_n	10	16	4.65	4.65
	20	16	6.07	6.07
	50	16	7.95	7.95
B_n	10	16	5.25	5.25
	20	16	6.69	6.69
	50	16	8.58	8.58
C_n	10	10.96	5.32	5.32
	20	13.03	6.15	6.15
	50	14.67	8.07	8.07

Tabla 4.6: Números de condición de las matrices superiores.

4.3. Caracterizaciones y test para cuasi-M-matrices

Recordemos que las M-matrices son muy importantes en diversas aplicaciones: economía, sistemas dinámicos, programación lineal, análisis numérico, etc. (véase [19]). Además tienen muchas caracterizaciones diferentes como ya vimos en el Teorema 1.48 del Capítulo 1. Las M-matrices también son una de las pocas clases de matrices para las que se tienen algoritmos con alta precisión relativa; por ejemplo para calcular sus valores singulares (como hemos visto en la Sección 4.1 y puede verse en [13], [36] y [82]), para calcular su valor propio más pequeño (véase [2]), para calcular su matriz inversa (véase [1]).

En esta sección introduciremos el concepto de *cuasi-M-matriz no singular* y otras clases de matrices relacionadas. Demostraremos que estas matrices heredan, con adaptaciones naturales, muchas de las propiedades y caracterizaciones de las M-matrices no singulares.

En la Subsección 4.3.1 presentaremos los conceptos principales y caracterizaremos a las cuasi-M-matrices no singulares de diferentes formas. La caracterización del apartado (vi) del Teorema 4.16 nos proporcionará un test práctico (de $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones elementales) para verificar si una matriz $n \times n$ es una cuasi-M-matriz no singular. En la Subsección 4.3.2 analizaremos algunas subclases de matrices de las cuasi-M-matrices no singulares que añaden propiedades de simetría o de dominancia diagonal. Como aplicación para esta última subclase de matrices, daremos un sencillo test (de $\mathcal{O}(n^2)$)

operaciones elementales) para verificar si una matriz de tamaño $n \times n$ tiene determinante negativo.

4.3.1. Caracterizaciones de cuasi- M -matrices

Empezaremos presentando la definición de la clase de matrices principal de esta sección.

Definición 4.10 (Cuasi- M -matriz no singular). *Diremos que una Z -matriz no singular $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es una cuasi- M -matriz no singular si A no es una M -matriz y $A[1, \dots, n-1]$ es una M -matriz no singular.*

Nota 4.11. *Observemos que las Z -matrices no singulares cuasi-diagonal dominantes por filas con $a_{ii} > 0$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $a_{nn} < 0$ de la sección anterior, son un caso particular de las cuasi- M -matrices no singulares.*

El siguiente resultado muestra que las cuasi- M -matrices no singulares tienen descomposición LDU en la que L y U son M -matrices.

Teorema 4.12. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una Z -matriz. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) A es una cuasi- M -matriz no singular.
- (ii) $A = LDU$, donde L (U , respectivamente) es una M -matriz triangular inferior (superior, respectivamente) con unos en la diagonal y la matriz $D = \text{diag}(d_i)_{i=1}^n$ tiene $d_i > 0$ para todo $i < n$ y $d_n < 0$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Como $A[1, \dots, n-1]$ es una M -matriz no singular sabemos, por el Teorema 1.48, que todos sus menores principales directores son positivos y como A es no singular y no es una M -matrix, se tiene que $\det A < 0$, de nuevo por el Teorema 1.48. Puesto que A también es no singular, todos sus menores principales directores son no nulos y entonces se sabe que $A = LDU$, donde L (U , respectivamente) es una matriz triangular inferior (superior, respectivamente) con unos en la diagonal y la matriz $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ tiene $d_1 = a_{11} (> 0)$ y $d_i = \det A[1, \dots, i] / \det A[1, \dots, i-1] (> 0)$ para cada $i = 2, \dots, n-1$. Además, se tiene la siguiente descomposición LDU para $A[1, \dots, n-1]$:

$$A[1, \dots, n-1] = L[1, \dots, n-1]D[1, \dots, n-1]U[1, \dots, n-1]. \quad (4.51)$$

4.3. Caracterizaciones y test para cuasi-M-matrices

Es bien conocido que en una descomposición LU de una M-matriz no singular, tanto la matriz triangular inferior como la triangular superior se pueden tomar M-matrices (véase [46] y [63]). Por tanto, tenemos que tanto $L[1, \dots, n-1]$ como $D[1, \dots, n-1]U[1, \dots, n-1]$ (y por tanto $U[1, \dots, n-1]$) son M-matrices no singulares. De manera que $l_{ij}, u_{ji} \leq 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ tales que $i > j$.

Probemos ahora que $l_{nj} \leq 0$ para todo $j = 1, \dots, n-1$, por inducción sobre j . Tenemos que $a_{n1} = l_{n1}d_1$, y puesto que $a_{n1} \leq 0$ y $d_1 > 0$ por hipótesis, deducimos que $l_{n1} \leq 0$. Supongamos ahora que $l_{nk} \leq 0$ para todo $k \leq j-1$. Sabemos que

$$0 \geq a_{nj} = \sum_{k=1}^j l_{nk}d_k u_{kj} = l_{nj}d_j u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{nk}d_k u_{kj} = l_{nj}d_j + \sum_{k=1}^{j-1} l_{nk}d_k u_{kj}.$$

Teniendo en cuenta que $l_{nk}, u_{kj} \leq 0$ para todo $k = 1, \dots, j-1$ y $d_j > 0$ para todo $j = 1, \dots, n-1$, podemos concluir que $l_{nj} \leq 0$ para todo $j \leq n-1$. Análogamente podemos demostrar que $u_{jn} \leq 0$ para todo $j = 1, \dots, n-1$.

En conclusión, L y U son Z-matrices triangulares con unos en la diagonal y entonces, por el Teorema 1.48, tanto L como U son M-matrices no singulares. Por último, observemos que

$$d_n = \frac{\det A}{\det A[1, \dots, n-1]} < 0,$$

y así queda demostrado (ii).

(ii) \Rightarrow (i) Como A es una Z-matriz por hipótesis, tenemos que $A[1, \dots, n-1]$ es una Z-matriz. Los menores principales directores, $\det A[1, \dots, k]$, de A son $d_1 \cdots d_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, n-1$. Por tanto, por la implicación (ii) \Rightarrow (i) del Teorema 1.48, tenemos que la submatriz $A[1, \dots, n-1]$ es una M-matriz no singular. Por último, tenemos que $\det A = d_1 \cdots d_n < 0$ y entonces A no puede ser M-matriz (de nuevo por el Teorema 1.48), quedando así demostrado el apartado (i).

□

Podemos extender el teorema anterior a la siguiente clase de matrices, que es una generalización de las cuasi-M-matrices no singulares.

Definición 4.13 (Cuasi- M -matriz no singular generalizada). *Diremos que A es una cuasi- M -matriz no singular generalizada si existe una matriz de permutación P tal que PAP^T es una cuasi- M -matriz no singular.*

Teorema 4.14. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una Z -matriz. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) *A es una cuasi- M -matriz no singular generalizada.*
- (ii) *Existe una matriz de permutación P tal que $PAP^T = LDU$, donde L (U , respectivamente) es una M -matriz triangular inferior (superior, respectivamente) con unos en la diagonal y la matriz $D = \text{diag}(d_i)_{i=1}^n$ tiene $d_i > 0$ para todo $i < n$ y $d_n < 0$.*

Demostración. Basta con aplicar el Teorema 4.12 a la matriz PAP^T , que es una cuasi- M -matriz no singular.

□

Presentamos una clase de matrices que extiende a las P -matrices, definidas en el Capítulo 1, se trata de las cuasi- P -matrices.

Definición 4.15 (Cuasi- P -matriz). *Diremos que una matriz A no singular es una cuasi- P -matriz si A no es una P -matriz pero $A[1, \dots, n-1]$ es una P -matriz.*

En el siguiente teorema demostraremos que para las Z -matrices, los conceptos de cuasi- P -matriz y cuasi- M -matriz no singular son equivalentes. También veremos más propiedades equivalentes para esta clase de matrices. En particular, el apartado (v) caracteriza las cuasi- M -matrices no singulares en términos de sus menores principales directores y el apartado (vi) a través de la eliminación Gaussiana.

Teorema 4.16. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una Z -matriz. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) *A es una cuasi- M -matriz no singular.*
- (ii) *$\det A < 0$ y $A[1, \dots, n-1]$ es una M -matriz no singular.*

4.3. Caracterizaciones y test para cuasi-M-matrices

- (iii) *A es no singular y tiene un número impar de valores propios negativos. Además todos los valores propios de $A[1, \dots, n-1]$ tienen parte real positiva.*
- (iv) *A es una cuasi-P-matriz.*
- (v) *$\det A < 0$ y $\det A[1, \dots, k] > 0$ para todo $k < n$.*
- (vi) *Es posible aplicar eliminación Gaussiana a A sin intercambios de filas y los pivotes d_i satisfacen $d_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$ y $d_n < 0$.*

Demostración. (i) \Leftrightarrow (ii) Esta equivalencia se puede deducir utilizando el Teorema 1.48. En particular, si $\det A < 0$ entonces A no puede ser una M-matriz no singular por tener un menor principal negativo.

(ii) \Leftrightarrow (iii) Como ya vimos en el Teorema 1.48 (equivalencia (i) \Leftrightarrow (v)), la Z-matriz $A[1, \dots, n-1]$ será una M-matriz no singular si y sólo si $A[1, \dots, n-1]$ tiene todos sus valores propios con parte real positiva. Además, como $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A , concluimos que $\det A < 0$ si y sólo si A tiene un número impar de valores propios negativos.

(ii) \Rightarrow (iv) Por el Teorema 1.48 tenemos que la submatriz $A[1, \dots, n-1]$ es una M-matriz no singular si y sólo si $\det A[\alpha] > 0$ para todo α tal que $n \notin \alpha$, es decir, $A[1, \dots, n-1]$ es una P-matriz. Por tanto, si se cumple (ii) (notemos que en ese caso $\det A < 0$) entonces A es una cuasi-P-matriz.

(iv) \Rightarrow (ii) Tal y como acabamos de ver, $A[1, \dots, n-1]$ es una M-matriz no singular si y sólo si $A[1, \dots, n-1]$ es una P-matriz. Sólo falta demostrar que si una Z-matriz no singular A no es una P-matriz y $A[1, \dots, n-1]$ es una P-matriz no singular, entonces $\det A < 0$. Observemos que, en caso contrario tendríamos que $\det A > 0$, y por el Teorema 1.48 A sería una M-matriz no singular por tener todos sus menores principales directores positivos. Por tanto, de nuevo por el Teorema 1.48, todos los menores principales de A serían positivos, lo que contradice el hecho de que A no sea una P-matriz.

(ii) \Leftrightarrow (v) Esta equivalencia se puede deducir aplicando el Teorema 1.48 a la submatriz $A[1, \dots, n-1]$.

(v) \Leftrightarrow (vi) Recordemos que la eliminación Gaussiana se puede llevar a cabo sin intercambios de filas si y sólo si los primeros $n-1$ menores principales

directores de la matriz son no nulos y que en ese caso, los pivotes vienen dados por $d_1 = a_{11}$ y $d_i = \det A[1, \dots, i] / \det A[1, \dots, i - 1]$ para $i = 2, \dots, n$.

□

Notemos que la condición (vi) proporciona un test de $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones elementales para verificar si una Z-matriz $n \times n$ es una cuasi-M-matriz no singular.

4.3.2. Algunas subclases de cuasi-M-matrices no singulares

En esta subsección estudiaremos dos clases de cuasi-M-matrices no singulares y presentaremos una aplicación para la segunda clase.

Recordemos que una matriz simétrica con entradas reales es *definida positiva* si y sólo si todos sus menores principales directores son positivos. Por tanto, una Z-matriz es una matriz de Stieltjes (véase Definición 1.50) si y sólo si es definida positiva. Si A es una Z-matriz no singular simétrica tal que $A[1, \dots, n - 1]$ es una matriz de Stieltjes y A no es una matriz de Stieltjes, entonces diremos que A es una *cuasi-matriz de Stieltjes*. Evidentemente, una matriz es una cuasi-matriz de Stieltjes si y sólo si es una cuasi-M-matriz no singular simétrica. En el siguiente resultado caracterizamos a las cuasi-matrices de Stieltjes.

Teorema 4.17. *Sea A una Z-matriz $n \times n$ simétrica. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) A es una cuasi-matriz de Stieltjes.
- (ii) $\det A < 0$ y $A[1, \dots, n - 1]$ es una matriz de Stieltjes.
- (iii) $A = LDL^T$, donde L es una M-matriz triangular inferior con unos en la diagonal y la matriz $D = \text{diag}(d_i)_{i=1}^n$ tiene $d_i > 0$ para todo $i < n$ y $d_n < 0$.
- (iv) A tiene $n - 1$ valores propios positivos y 1 valor propio negativo y $A[1, \dots, n - 1]$ tiene todos sus valores propios positivos.

4.3. Caracterizaciones y test para cuasi-M-matrices

(v) *A es una cuasi-P-matriz.*

Demostración. (i) \Leftrightarrow (ii) Esta equivalencia es consecuencia del Teorema 4.16.

(ii) \Rightarrow (iii) Notemos que una matriz A que cumpla (ii) es, por el Teorema 4.16, una cuasi-M-matriz no singular. Por tanto, sabemos que la descomposición LDU de A cumple la condición (ii) del Teorema 4.12. Como A es simétrica, se tiene que $U = L^T$ y la descomposición LDU de A es $A = LDL^T$ y así queda demostrado (iii).

(iii) \Rightarrow (iv) Si $A = LDL^T$, entonces las matrices A y D son congruentes y por tanto, según la ley de inercia de Sylvester (véase Teorema 4.5.8 de [58], [89]), tienen el mismo número de valores propios positivos (y negativos). Además se cumple (4.51) (con $L^T[1, \dots, n-1]$ en lugar de $U[1, \dots, n-1]$) y, de nuevo por la ley de inercia de Sylvester, todos los valores propios de $A[1, \dots, n-1]$ son positivos.

(iv) \Rightarrow (ii) Por (iv), sabemos que $\det A < 0$. Como todos los valores propios de $A[1, \dots, n-1]$ son positivos, esta submatriz es definida positiva y por tanto una matriz de Stieltjes.

(ii) \Leftrightarrow (v) Esta equivalencia es consecuencia de la equivalencia (ii) \Leftrightarrow (iv) del Teorema 4.16.

□

Diremos que una matriz A es una *cuasi-matriz de Stieltjes generalizada* si existe una matriz de permutación P tal que la matriz PAP^T es una cuasi-matriz de Stieltjes. Tal y como hicimos con el Teorema 4.14, podemos deducir del Teorema 4.17 el siguiente resultado.

Teorema 4.18. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una Z-matriz simétrica. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) *A es una cuasi-matriz de Stieltjes generalizada.*
- (ii) *Existe una matriz de permutación P tal que $PAP^T = LDL^T$, donde L es una M-matriz triangular inferior con unos en la diagonal y la matriz $D = \text{diag}(d_i)_{i=1}^n$ tiene $d_i > 0$ para todo $i < n$ y $d_n < 0$.*

Si una matriz no singular A no es estrictamente diagonal dominante pero la submatriz $A[1, \dots, n-1]$ sí es estrictamente diagonal dominante, diremos que A es una matriz *estrictamente cuasi-diagonal dominante*. También diremos que A es una matriz *estrictamente cuasi-diagonal dominante generalizada* si existe una matriz de permutación P tal que la matriz PAP^T es estrictamente cuasi-diagonal dominante.

Recordemos que utilizando el Teorema de Levy-Desplanques (véase Teorema 2.19) obtuvimos el Corolario 2.20, que asegura que las matrices estrictamente diagonal dominantes con entradas diagonales positivas tienen el determinante positivo. El siguiente resultado ofrece una condición suficiente para la negatividad del determinante de las matrices estrictamente cuasi-diagonal dominantes generalizadas.

Teorema 4.19. *Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una Z -matriz y sea $A(k)$ la submatriz principal de A resultante de eliminar la fila y la columna k -ésimas. Si $t \in \{1, \dots, n\}$, $a_{tt} < 0$, $a_{kk} > 0$ para todo $k \neq t$ y $A(k)$ es una matriz estrictamente diagonal dominante, entonces $\det A < 0$.*

Demostración. Consideremos la matriz de permutación P que intercambia las filas t y n de A (notemos que si $t = n$, entonces P es la matriz identidad y no se intercambian filas) y sea $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} := PAP^T$. Recordemos que, por el Teorema 1.48, una Z -matriz estrictamente diagonal dominante es una M -matriz no singular. De modo que tenemos que la matriz $B[1, \dots, n-1]$ es una M -matriz no singular. Como la entrada (n, n) (que es una submatriz principal) de B es negativa por hipótesis, podemos concluir por el Teorema 1.48 que B no es una M -matriz.

Puesto que la matriz $B[1, \dots, n-1]$ es una Z -matriz con menores principales directores positivos, resulta sencillo comprobar que se puede llevar a cabo la eliminación Gaussiana sin intercambios de filas hasta obtener una matriz triangular superior U con las primeras $n-1$ entradas diagonales d_1, \dots, d_{n-1} positivas y con las entradas extradiagonales no positivas (de hecho, $B[1, \dots, n-1]$ es una M -matriz no singular y se sabe que la eliminación Gaussiana conserva esta propiedad). Veamos ahora que en cada iteración de la eliminación Gaussiana, la entrada (n, n) disminuye y denotemos por $d_n := b_{nn}^{(n)}$ a la entrada (n, n) de la matriz $B^{(n)} = U$. Basta con demostrarlo para la primera iteración $B^{(1)} \rightarrow B^{(2)}$ (análogamente se demuestra para el resto de iteraciones). La entrada (n, n) de la matriz $B = B^{(1)}$ se actualiza de

4.4. Conclusiones

la siguiente manera

$$b_{nn}^{(2)} = b_{nn}^{(1)} - \frac{b_{n1}^{(1)}}{b_{11}^{(1)}} b_{1n}^{(1)},$$

donde $b_{n1}, b_{1n} \leq 0$ y $b_{11} > 0$. De este modo tenemos que $b_{nn}^{(2)} \leq b_{nn}$ (< 0) y, prosiguiendo con la eliminación Gaussiana, podemos comprobar que $d_n = b_{nn}^{(n)} \leq b_{nn}^{(n-1)} \leq \dots \leq b_{nn}^{(2)} \leq b_{nn} < 0$. Por último, tenemos que $\det A = \det B = d_1 \cdots d_n < 0$.

□

Observemos que comprobar si una Z -matriz $n \times n$ satisface las hipótesis del Teorema 4.19 conlleva $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones elementales.

La siguiente matriz nos proporciona un ejemplo ilustrativo del criterio para la negatividad del determinante del Teorema 4.19:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & -1 & -8 \\ -2 & -5 & 8 & -7 \\ 0 & -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Según el Teorema 4.19, esta matriz tiene determinante negativo. Si calculamos el determinante veremos que, efectivamente, $\det A = -5586$.

4.4. Conclusiones

Algunos de los resultados de este capítulo han sido publicados o aceptados para su publicación en [13], [16] y en [18].

Presentamos los objetivos más significativos alcanzados en este capítulo:

- Algoritmo con alta precisión relativa y de bajo coste computacional ($\mathcal{O}(n^2)$ operaciones elementales sobre el coste de la eliminación Gaussiana) para calcular, con una adecuada estrategia de pivotaje, una descomposición LDU de M -matrices diagonal dominantes, que es descomposición reveladora del rango si son no singulares y da lugar a L diagonal dominante por columnas y U diagonal dominante por filas.

- Algoritmo con alta precisión relativa para calcular, con una adecuada estrategia de pivotaje, una descomposición LDU para una clase de Z-matrices cuasi-diagonal dominantes. Esta descomposición presenta ventajas similares a la del punto anterior.
- Nuevas estrategias de pivotaje para la eliminación Gaussiana: pivotaje de dominancia diagonal débil por columnas y pivotaje de cuasi-dominancia diagonal débil por columnas.
- Caracterización de las cuasi-M-matrices no singulares y las cuasi-M-matrices no singulares generalizadas.
- Caracterización de las cuasi-matrices de Stieltjes y las cuasi-matrices de Stieltjes generalizadas.
- Condición suficiente (de complejidad cuadrática) para la negatividad del determinante.

Apéndice A

Aplicación para la experimentación numérica

En este apéndice presentaremos una aplicación (software) que puede ser muy útil para facilitar la tarea de la experimentación numérica en situaciones como las de esta tesis doctoral. Se trata de un programa que pretende ayudar a trabajar con distintos entornos de cálculo matemático y comparar los resultados procedentes de dichos sistemas. El carácter de este apéndice sigue una metodología propia del campo de la informática. Más información sobre esta aplicación se puede consultar en [10].

A.1. Motivación

Debido a los experimentos numéricos de los capítulos 3 y 4 surgió la necesidad de utilizar dos entornos de cálculo diferentes (Mathematica y Octave) y comparar sus resultados. El papel de Octave y MATLAB es intercambiable entre ellos ya que tienen una sintaxis similar. Dicha necesidad se debe a la naturaleza de los entornos: uno de cálculo simbólico (Mathematica) y el otro de cálculo numérico (Octave). Se observó que tanto los lenguajes de esos entornos como los formatos de las salidas que ofrecen son muy distintos. Esto hace muy tedioso el trabajo de comparar datos procedentes de los dos entornos, ya que conlleva mucho trabajo repetitivo y éste ha de ser hecho por el usuario. Además, este tipo de tareas realizadas

“manualmente” por el usuario es una fuente habitual de errores.

El siguiente ejemplo nos ayudará a comprender mejor la situación.

Ejemplo A.1. *Consideremos una matriz A de tamaño 10×10 generada de manera aleatoria. Supongamos que queremos estudiar una estrategia de pivotaje para la eliminación Gaussiana (como hemos visto en el Capítulo 3) para resolver un sistema lineal $Ax = b$. Para ello, es habitual resolver dicho sistema en un entorno de cálculo simbólico (en nuestro caso, Mathematica), que se toma como la solución exacta, y en otro entorno de cálculo numérico (en nuestro caso, Octave). Esto conlleva tener que generar la matriz de manera aleatoria en uno de los entornos y copiarla manualmente en el otro entorno de cálculo matemático. Además, una vez implementada la estrategia y resuelto el sistema lineal utilizando ambos entornos, habrá que comparar, de nuevo de forma manual, ambas soluciones (en el caso de este ejemplo, un vector de tamaño 10×1). Si se quiere realizar el experimento con 100 sistemas lineales diferentes habrá que repetir todo el proceso 100 veces.*

Debido a los inconvenientes que planten situaciones como la descrita en el ejemplo anterior, se decidió desarrollar una aplicación que ayudase a realizar esta labor de experimentación numérica.

A.2. Antecedentes

En algunos entornos de cálculo matemático existen formas de traducir el código escrito en sus propios lenguajes a otros lenguajes de programación, por ejemplo C++. Esto podría resultar de ayuda ante el problema de tener que lidiar con diferentes lenguajes de programación al mismo tiempo, aunque no lo resuelve por completo e implica más trabajo (hace falta tratar e interpretar la información escrita en lenguaje C++). Además, queda sin resolver el problema de realizar de manera sencilla comparaciones entre las soluciones obtenidas por los distintos entornos de cálculo.

Aunque bien es cierto que SAGE (véase [86]) ofrece la posibilidad de trabajar con diferentes tipos de entornos, no es posible trabajar con los mencionados (Mathematica y Octave). No se han encontrado antecedentes de software que ayude a trabajar con los entornos mencionados, unificando

el lenguaje que el usuario debe utilizar y facilitando la comparación de las soluciones obtenidas mediante los diferentes sistemas de cálculo.

A.3. Definición de la aplicación

Ante la situación descrita en la Sección A.1, la solución que se propuso fue desarrollar una aplicación que ayude al usuario a realizar experimentación numérica. Se pretende centralizar distintos sistemas para el cálculo matemático de manera que el usuario pueda trabajar con un único lenguaje de programación, evitando realizar trabajo repetitivo en dichos sistemas.

Los problemas que pueden resolverse mediante la aplicación, que se encuentran dentro de los vistos en los capítulos 3 y 4, los indicaremos más adelante.

La aplicación ofrece al usuario la posibilidad de introducir sus propios métodos y datos para trabajar con los problemas a resolver.

Nota A.2. *En lo sucesivo, cada uno de los algoritmos que resuelve un problema o define una matriz se denominará método y puesto que los datos que maneja la aplicación son matrices (o vectores) podremos referirnos a ellos como datos o matrices. Se utilizará esta notación durante el resto del apéndice, evitando repeticiones sobre a qué conceptos se refiere cada una de ellas.*

Además, existe una lista de métodos y datos clásicos ya almacenados para ser utilizados en los estudios en los que se precisen.

La aplicación facilita la comparación de los resultados obtenidos mediante los distintos entornos. El usuario puede elegir la forma en que desea presentar la comparación de resultados (veremos los tipos de comparación en la Sección A.6).

Por supuesto, es posible editar los métodos y datos ya almacenados y guardar las modificaciones realizadas. Por último, el usuario puede acceder y visualizar cualquier información almacenada en la aplicación de manera sencilla y rápida.

Requisitos

A continuación presentamos, de forma esquemática, los requisitos que la aplicación cumple:

- **Realizar estudio.**

Se pueden realizar diferentes estudios: cálculo de valores propios, cálculo de valores singulares, resolución de sistemas, descomposición LDU e inversión de matrices. Como resultado de esos estudios se obtiene una comparación de los datos calculados por los distintos sistemas. El usuario puede elegir la forma en la que desea que se comparen.

- **Introducir información.**

La aplicación consta de un editor mediante el cual el usuario puede introducir fácilmente métodos para resolver los estudios antes mencionados y los datos necesarios. Esto se hace utilizando un pseudocódigo cómodo y sencillo que unifica los lenguajes de entrada de la aplicación.

- **Editar información.**

Mediante el editor antes mencionado, el usuario puede modificar y guardar los cambios realizados en diferentes métodos y datos almacenados en la aplicación.

- **Visualizar información.**

El usuario puede visualizar de manera fácil y rápida cualquier información, bien sea un método o un dato, almacenados en la aplicación.

- **Facilidad de uso.**

El usuario no debe preocuparse por las características particulares de los lenguajes utilizados por cada sistema en el que se vayan a realizar los cálculos. Por ello la información entre la aplicación y el usuario se transmite en pseudocódigo o de manera gráfica (en el caso de las matrices).

- **Interfaz simple.**

Las interfaces son simples y claras. Se pretende que el uso de la aplicación sea intuitivo y apenas sea necesario un manual de usuario.

No obstante, y con el fin de facilitar el proceso de aprendizaje, puede encontrarse un manual de usuario en la Sección A.6.

A.4. Tecnología empleada

Hasta ahora se ha implementado la aplicación utilizando un único sistema de cálculo. Así, se utilizó **Mathematica** como entorno simbólico de cálculo matemático, dejando el entorno numérico Octave para un futuro trabajo. No obstante, el trabajo a realizar para poder trabajar de manera funcional con el sistema Octave se reduce a programar el parser (función que traduce el pseudocódigo al código de Octave, véase Subsección A.4.1), de manera análoga a lo hecho para Mathematica. Para la programación de la aplicación se utilizó el lenguaje **Java**. Y en cuanto a la representación de la información necesaria (matrices, métodos y problemas matemáticos) se eligió el lenguaje **MathML** (para una presentación más detallada de MathML véase la Subsección A.4.1).

A.4.1. MathML

Para almacenar la información referente a matrices y métodos utilizados por la aplicación se escogió el lenguaje MathML. Se trata de un lenguaje de marcado basado en XML y pensado para representar objetos matemáticos.

Las ventajas que ofrece el uso de este lenguaje son la simplificación del sistema de ficheros a utilizar y el hecho de facilitar la ampliación de la aplicación (por tratarse de un estándar).

El sistema de ficheros queda simplificado porque para cada elemento (matriz o método) únicamente se crea un fichero de texto escrito en MathML. Este único fichero es utilizado por cada uno de los sistemas para extraer la información necesaria.

El hecho de que toda la información esté almacenada en el mismo lenguaje, facilita la posibilidad de trabajar con más sistemas de cálculo en el futuro. Únicamente habría que implementar las funciones que traducen esa información al lenguaje del sistema deseado. Estas funciones

se llaman **parser**.

Muchos sistemas de cálculo son capaces de trabajar con lenguaje XML, incluso con MathML. Sin embargo, y debido a la naturaleza de la información que necesita utilizar la aplicación, ha sido necesaria la definición de nuevos objetos (nuevas etiquetas) dentro de este lenguaje. De esta forma, se ha completado el lenguaje MathML con las etiquetas necesarias.

La representación de los métodos en la aplicación (métodos que resuelven los problemas matemáticos) ha sido la mayor fuente de nuevas etiquetas dentro del lenguaje MathML. A continuación se presentan algunos ejemplos de representación de algunos datos (matrices y métodos) utilizando este lenguaje de marcado.

Ejemplo A.3. *La representación utilizada en MathML para la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sería:

```
<matrix>
  <name> A </name>
  <matrixrow> <mn>1</mn> <mn>2</mn> </matrixrow>
  <matrixrow> <mn>3</mn> <mn>4</mn> </matrixrow>
</matrix>
```

Ejemplo A.4. *Dado un sencillo ejemplo de método (escrito en pseudocódigo) que devuelve el máximo de las entradas de un vector v con n entradas:*

```
+ Entradas: v,n
+ Método:
    max=v(1)
    for(i=2..n)
      aux=v(i)
      if(max<aux)
        max = aux
      end_if
    end_for
+ Salidas: max
```

A.4. Tecnología empleada

su representación en MathML sería:

```
<method>
  <input>
    <mi>v</mi>
    <mi>n</mi>
  </input>
  <body>
    <mi>max</mi> <mo>=</mo> <mi>v(1)</mi>
    <for>
      <condition>
        <mi>i</mi>
        <mo>=</mo>
        <mn>2</mn>
        <mo>,</mo>
        <mi>i</mi>
        <mo>&#x2264;</mo>
        <mi>n</mi>
        <mo>,</mo>
        <mi>i</mi>
        <mo>=</mo>
        <mi>i</mi>
        <mo>+</mo>
        <mn>1</mn>
      </condition>
      <do>
        <mi>aux</mi>
        <mo>=</mo>
        <mat>
          <name>v</name>
          <marow>
            <marowini> <mn>1</mn> </marowini>
            <marowfin> <mn>1</mn> </marowfin>
          </marow>
          <macolumn>
            <macolumnini> <mn>i</mn> </macolumnini>
            <macolumnfin> <mn>i</mn> </macolumnfin>
          </macolumn>
        </mat>
      </do>
    </if>
  </body>
  <output> <mi>max</mi> </output>
</method>
```

Las etiquetas `<method>`, `<input>`, `<body>` y las correspondientes etiquetas de cierre han sido definidas a partir de las necesidades de la aplicación. Además, ha sido necesario definir etiquetas en MathML para representar estructuras como while, if o for, para representar submatrices de una matriz y para representar algunas funciones especiales (una función que genera una matriz llena de ceros).

A.5. Funcionamiento de la aplicación

En este apartado se hablará del funcionamiento interno de la aplicación y quedará reflejada la comunicación entre la aplicación y los distintos sistemas de cálculo matemático. En la Figura A.1 puede verse un esquema que resume la forma en que esta relación tiene lugar.

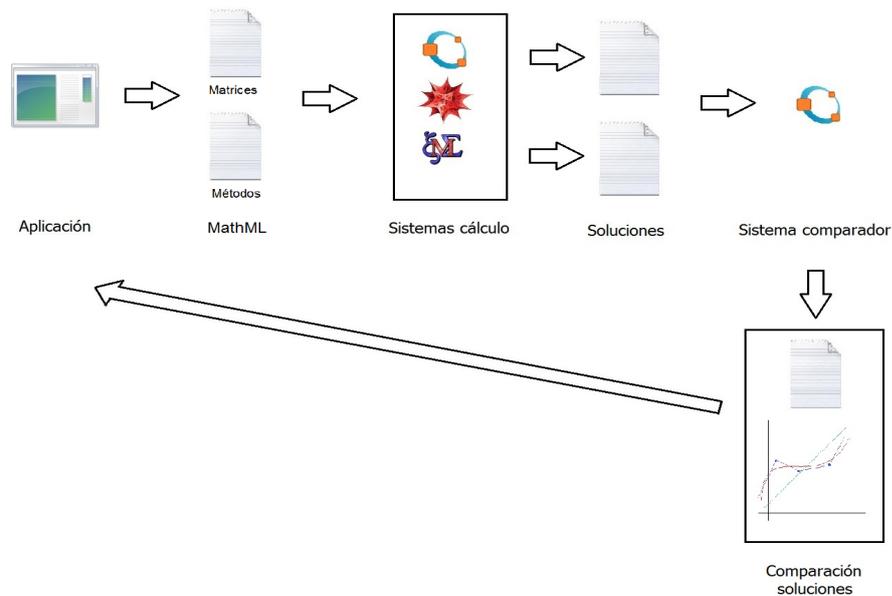


Figura A.1: Relación entre la aplicación y los sistemas de cálculo.

La aplicación genera ficheros de texto en lenguaje MathML (XML) con las matrices y métodos que tiene almacenados. Notemos que esta información que la aplicación genera para resolver un problema no está duplicada. No importa el número de sistemas en los que se quiere resolver dicho problema, sólo existe un único fichero para cada matriz o método (esto facilita en gran

medida la posibilidad de añadir en el futuro otros sistemas de cálculo con los que trabajar).

Después, cada sistema de cálculo traduce esa información a su propio lenguaje (mediante una función parser), ejecuta las instrucciones recibidas y genera otro fichero de texto que contiene la solución al problema.

Las distintas soluciones son comparadas en el sistema de cálculo utilizado para tal fin. Este sistema genera, en función de los métodos de comparación elegidos por el usuario, los ficheros (de texto o gráficos) que contienen dicha comparación.

Finalmente, la aplicación presenta al usuario la comparación de los resultados del problema planteado.

A.6. Manual de usuario

En esta sección se explicará cómo utilizar correctamente la aplicación. Para ello, se utilizarán imágenes y ejemplos ilustrativos y se indicarán sencillos pasos a seguir para: crear y editar matrices, crear y editar métodos, visualizar datos y resolver problemas.

El uso de la aplicación es muy intuitivo, pero la introducción de datos por parte del usuario ha de realizarse utilizando un determinado lenguaje (denominado a lo largo de todo el apéndice como pseudocódigo). Por ello, se van a mostrar ejemplos que presenten dicho lenguaje y ayuden al usuario a aprender este pseudocódigo empleado.

A.6.1. Ventana Principal

La Figura A.2 muestra la ventana principal de la aplicación. Para visualizar una matriz introducida previamente basta con seleccionarla en el panel superior izquierdo de la ventana; las entradas de la matriz se mostrarán en el panel superior derecho. Lo mismo sucede con los métodos, que se encuentran en el panel inferior izquierdo. Observemos que los métodos se muestran indicando sus entradas, sus salidas y el cuerpo del algoritmo en

pseudocódigo.

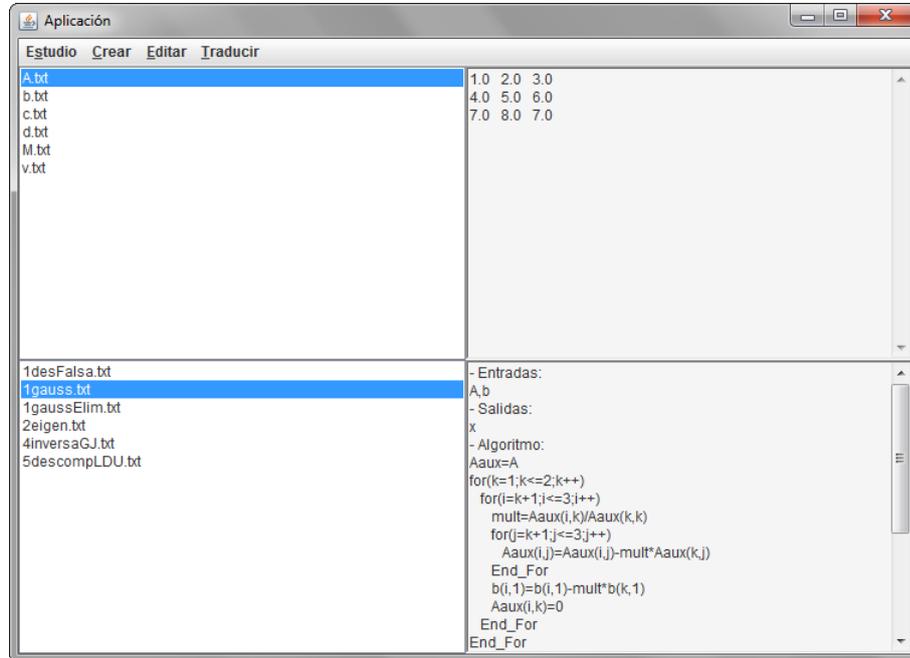


Figura A.2: Ventana Principal.

Nota A.5. *Observemos que los métodos aparecen listados con un código numérico que precede a su nombre. Este código indica de una manera rápida y cómoda el tipo de problema que ese método resuelve: 1. Sistema Lineal, 2. Valores Propios, 3. Valores Singulares, 4. Matriz Inversa, 5. Descomposición LDU, 6. Crear Matriz implícita.*

A.6.2. Crear Matrices

La ventana para crear una matriz puede verse en la Figura A.3. Es importante introducir el nombre que se desea dar a la matriz, así como sus dimensiones y el modo en que se van a introducir sus entradas (de manera implícita o explícita). A la hora de crear una matriz de manera explícita deberemos tener en cuenta los siguientes aspectos:

- las filas se separan mediante el operador punto y coma: ;

- los elementos de una fila se separan mediante una coma: ,
- la coma de los números decimales se representa mediante un punto: .
- se pueden utilizar los espacios y saltos de línea que se deseen, dando el formato que le sea más cómodo al usuario a la hora de introducir los datos

Definir una matriz de manera implícita significa hacerlo mediante un método. Esta técnica es útil por ejemplo para definir matrices aleatorias o para algunas matrices estructuradas de gran tamaño (matrices de Vandermonde, TP, SBD, etc.).

En la mencionada Figura A.3 puede verse un ejemplo de definición de matriz de manera explícita.

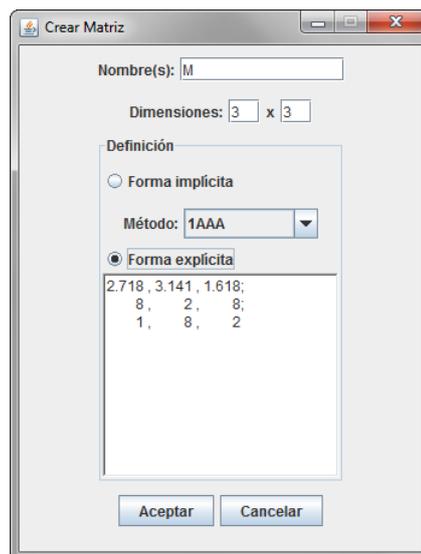


Figura A.3: Crear Matriz.

A.6.3. Crear Métodos

Para crear un método debemos introducir su nombre, el tipo de problema que resuelve, sus entradas, sus salidas y el algoritmo, tal y como puede verse en la Figura A.4.

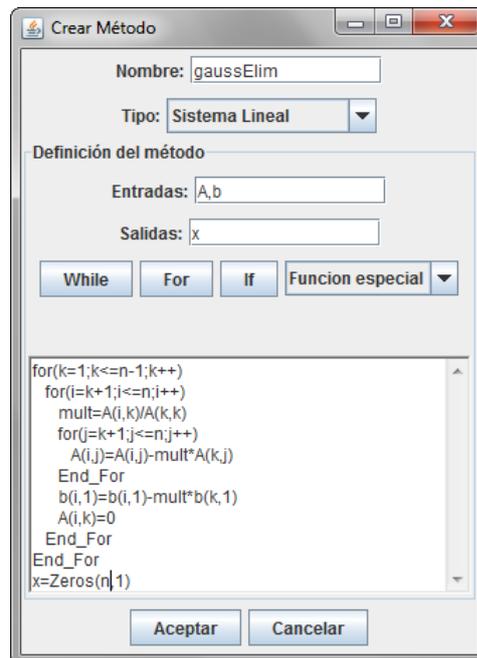


Figura A.4: Crear Metodo.

A continuación se presentan diferentes ejemplos de programación en pseudocódigo, que serán muy útiles a la hora de programar los métodos que se deseen introducir. Como es habitual, los operadores básicos de suma, resta, producto y cociente se representarán mediante los símbolos: +, -, *, /.

- Estructura **For**

```
for(i=1;i<=n;i++)
    cuerpo del for
End_For
```

En el ejemplo, la variable i se va incrementando en 1 en cada paso, pero por supuesto podría disminuir en cada paso con la orden $i--$. La condición de finalización también podría ser distinta: en lugar de utilizar menor o igual (\leq), podría ser menor ($<$), mayor ($>$), mayor o igual (\geq) que un número o una variable.

- Estructura **If**

```
if((i<n)&(fin==false))
    cuerpo del if
else
    cuerpo del else
End_Else
End_If
```

Como es lógico, una estructura `if` puede carecer de su estructura `else`; en este caso, simplemente habrá que omitir el cuerpo del `else` y las palabras clave `else`, `End_Else`. A la hora de programar condiciones de entrada en una estructura `if` (o en un `while`) conviene saber que el operador lógico AND se representa mediante el símbolo `&`, el operador lógico OR se representa mediante el símbolo `|`; mientras que las constantes booleanas se representan mediante las palabras clave `true` y `false` respectivamente. La comparación de elementos se realiza utilizando el doble igual `==` y para comprobar si dos elementos son distintos se utiliza el operador `!=`.

- Estructura **While**

```
while((encontrado!=true)|(restantes>0))
    cuerpo del while
End_While
```

Para programar la condición de entrada en una estructura `while` hay que tener en cuenta las indicaciones hechas en el apartado anterior (estructura `If`).

- **Matrices**

Para trabajar con matrices contamos con la función `Zeros(n,m)`, que sirve para construir una matriz de ceros de n filas y m columnas. Además se pueden construir nuevas matrices, idénticas a otras existentes mediante asignación: `nueva_matriz = matriz_existente`. Para acceder a la entrada (i, j) de la matriz A se utiliza la sintaxis: `A(i, j)`. Incluso se puede acceder a una submatriz de A que contenga las filas desde $i0$ hasta ik y las columnas desde $j0$ hasta jk : `A(i0:ik, j0:jk)`.

De esta forma podremos asignar el valor $1/7$ a la entrada $(2, 3)$ de la matriz A : `A(2,3)=1/7`; o almacenar en la variable `aux` la primera columna de la matriz A : `aux=A(1:n,1)`.

A.6.4. Editar Matrices y Métodos

Editar una matriz o un método existente es una tarea similar a la de crear dichos elementos. Al elegir editar una matriz (lo mismo sucede al editar un método o una matriz implícita) aparecerá una ventana como la de la Figura A.5. Lo primero que hay que hacer es seleccionar la matriz que se desea editar, entonces automáticamente se rellenarán todos los campos con la información actual de dicha matriz; sólo habrá que cambiar los datos que se deseen editar y así se guardará la nueva información. Observemos que una matriz creada de manera explícita no puede editarse para que pase a ser una matriz creada de manera implícita (y viceversa); para eso será necesario crear una nueva matriz.

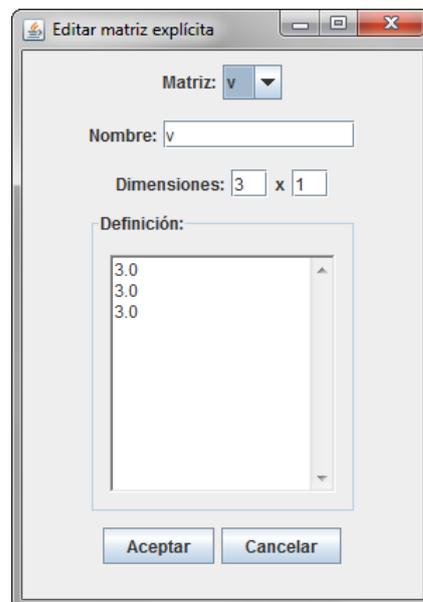


Figura A.5: Editar Matriz.

A.6.5. Resolver problema (Sistema Lineal)

Para crear un nuevo Problema se abrirá una ventana como la de la Figura A.6. Esta ventana sirve para crear un problema del tipo Sistema Lineal; para otros problemas sería una ventana análoga.

Simplemente habrá que elegir los datos de entrada (en este caso matriz de

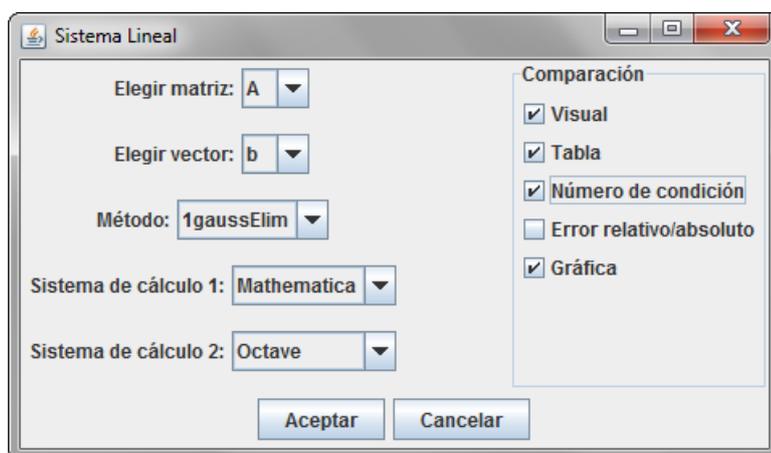


Figura A.6: Sistema Lineal.

coeficientes y vector independiente), el método que lo resuelve (observemos que sólo se nos ofrecen los métodos que resuelven el tipo de problema correspondiente), los sistemas de cálculo en los que queremos resolverlo y los métodos de comparación de las soluciones (de nuevo, únicamente se ofrecen las opciones propias de cada problema, ya que no todas las formas de comparación son posibles en todos los problemas, como veremos en la siguiente subsección).

Una vez introducida toda esa información, se mostrarán tantas ventanas como opciones de comparación hayan sido seleccionadas.

A.6.6. Comparación de soluciones

La solución para cada uno de los problemas a tratar es de un tipo de dato diferente. Por ejemplo, los valores singulares y la resolución de sistemas tienen como solución un vector de valores reales, en los valores propios la solución es un vector pero de números complejos, la inversión tiene como solución una matriz, y la solución de la descomposición LDU son tres matrices.

Para cada tipo de dato será interesante una comparación distinta. En este subapartado veremos las diferentes formas de comparar soluciones.

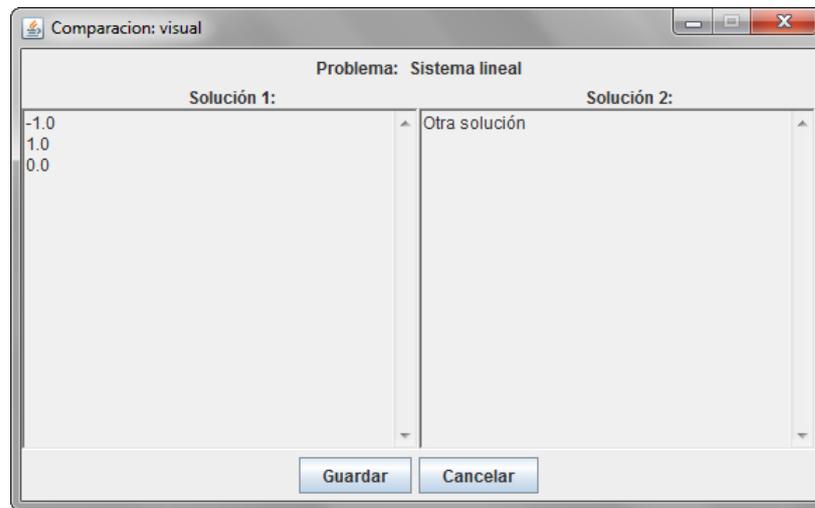


Figura A.7: Comparación visual.

Visualización directa

Es la forma más básica de comparar resultados. Consiste en la visualización directa de los distintos datos a comparar. Aunque no es el mejor método para realizar una comparación fiable, permite observar la estructura de los objetos a comparar y nociones que se perderían con los otros métodos. Un ejemplo de comparación visual puede encontrarse en la Figura A.7.

- *Problemas en los que es aplicable:* todos.

Tabla de valores

Consiste en elaborar una tabla con los distintos resultados a comparar. En este caso, la comparación también se hace de forma visual aunque de un modo más cómodo y estructurado. Un ejemplo de comparación mediante una tabla se encuentra en la Figura A.8.

- *Problemas en los que es aplicable:* Valores propios, valores singulares y resolución de sistemas.

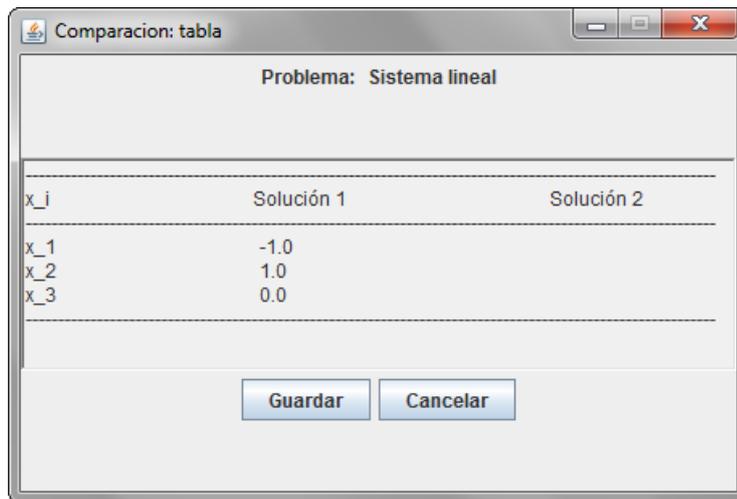


Figura A.8: Comparación tabla.

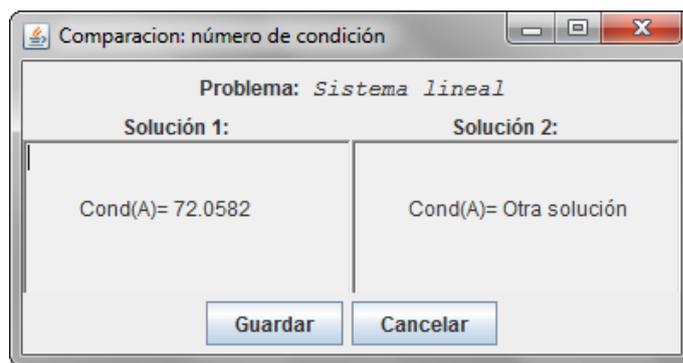


Figura A.9: Comparación número condición.

Número de condición de una matriz

Consiste en comparar el número de condición de las matrices implicadas en el problema. Por ejemplo, el número de condición de las matrices L , D y U en el problema de calcular la descomposición LDU, o el de la matriz A al resolver un sistema lineal $Ax = b$. En la Figura A.9 podemos ver un ejemplo de comparación del número de condición.

- *Problemas en los que es aplicable:* descomposición LDU, inversa de una matriz, resolución de sistemas.

Gráfica

Método que consiste en representar gráficamente los resultados como puntos. De esta forma es muy sencillo comparar los resultados de una forma muy visual. Un ejemplo de comparación mediante gráfica lo podemos encontrar en la Figura A.10.

- *Problemas en los que es aplicable:* Valores singulares y resolución de sistemas. También valores propios si son todos números reales.

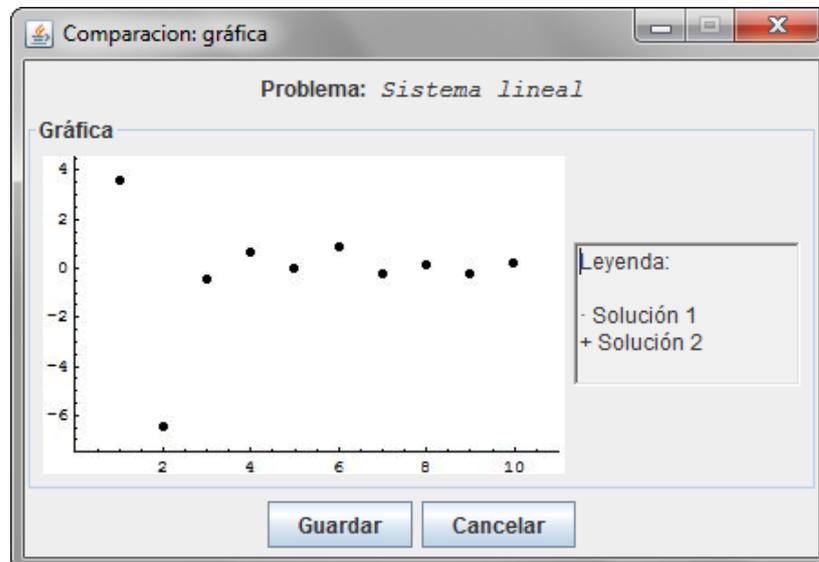


Figura A.10: Comparación gráfica.

Bibliografía

- [1] A.S. Alfa, J. Xue, and Q. Ye, *Entrywise perturbation theory for diagonally dominant M -matrices with applications*, Numer. Math. **90** (1999), 401–414.
- [2] A.S. Alfa, J. Xue, and Q. Ye, *Accurate computation of the smallest eigenvalue of a diagonally dominant M -matrix*, Math. Comp. **71** (2001), 217–236.
- [3] P. Alonso, J. Delgado, R. Gallego, and J.M. Peña, *A collection of examples where Neville elimination outperforms Gaussian elimination*, Appl. Math. Comput. **216** (2010), 2525–2533.
- [4] P. Alonso, J. Delgado, R. Gallego, and J.M. Peña, *Neville elimination: an efficient algorithm with application to chemistry*, J. Math. Chem. **48** (2010), 3–20.
- [5] P. Alonso, J. Delgado, R. Gallego, and J.M. Peña, *Growth factors of pivoting strategies associated with Neville elimination*, J. Comput. Appl. Math. **235** (2011), 1755–1762.
- [6] P. Alonso, J. Delgado, R. Gallego, and J.M. Peña, *Conditioning and accurate computations with Pascal matrices*, J. Comput. Appl. Math. **252** (2013), 21–26.
- [7] P. Alonso, M. Gasca, and J.M. Peña, *Backward error analysis of Neville elimination*, Appl. Numer. Math. **23** (1997), 193–204.
- [8] P. Alonso, M. Gasca, and J.M. Peña, *Forward error analysis of Neville elimination*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.) **92** (1998), 1–8.
- [9] T. Ando, *Totally positive matrices*, Linear Algebra Appl. **90** (1987), 165–219.

-
- [10] A. Barreras, *Aplicación para la experimentación numérica y simbólica matricial*, Proyecto fin de carrera (Ingeniería Técnica en Informática de Gestión). URL: http://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/R000001694.pdf.
- [11] A. Barreras and J.M. Peña, *Bidiagonal decompositions, minors and applications*, Electron. J. Linear Algebra **25** (2012), 60–71.
- [12] A. Barreras and J.M. Peña, *Characterizations of Jacobi sign regular matrices*, Linear Algebra App. **436** (2012), 381–388.
- [13] A. Barreras and J.M. Peña, *Accurate and efficient LDU decomposition of diagonally dominant M-matrices*, Electronic J. Linear Algebra, Special issue for the 2011 Directions in Matrix Theory Conference **24** (2012/13), 152–167.
- [14] A. Barreras and J.M. Peña, *Accurate computations of matrices with bidiagonal decomposition using methods for totally positive matrices*, Numer. Linear Algebra Appl. **20** (2013), 413–424.
- [15] A. Barreras and J.M. Peña, *Matrices with bidiagonal decomposition, accurate computations and corner cutting algorithms*, in Concrete Operators, Spectral Theory, Operators in Harmonic Analysis and Approximation, Operator Theory: Advances and Applications **236**, Birkhauser (2014), 43–51.
- [16] A. Barreras and J.M. Peña, *Accurate and efficient LDU decomposition of almost diagonally dominant Z-matrices*, BIT (DOI: 10.1007/s10543-013-0461-1).
- [17] A. Barreras and J.M. Peña, *On the extension of some total positivity inequalities*, Linear Algebra Appl. (DOI: 10.1016/j.laa.2014.01.024).
- [18] A. Barreras and J.M. Peña, *Characterizations and tests for almost M-matrices*, Proceedings of the Twelfth International Conference Zaragoza-Pau 2012 (to appear).
- [19] A. Berman and R.J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, Classics in Applied Mathematics, 9, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [20] L.D. Brown, I.M. Johnstone, and K.B. MacGibbon, *Variation diminishing transformations: a direct approach to total positivity and its statistical applications*, J. Amer. Statist. Assoc. **76** (1981), 824–832.

- [21] R. Cantó, P. Koev, B. Ricarte, and A.M. Urbano, *LDU factorization of nonsingular totally nonpositive matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **30** (2008), 777–782.
- [22] R. Cantó, B. Ricarte, and A.M. Urbano, *Full rank factorization in echelon form of totally nonpositive (negative) rectangular matrices*, Linear Algebra Appl. **431** (2009), 2213–2227.
- [23] R. Cantó, B. Ricarte, and A.M. Urbano, *Some characterizations of totally nonpositive (totally negative) matrices*, Electron. J. Linear Algebra **20** (2010), 241–253.
- [24] R. Cantó, B. Ricarte, and A.M. Urbano, *Quasi-LDU factorization of nonsingular totally nonpositive matrices*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), 836–851.
- [25] V. Cortés and J.M. Peña, *Growth factor and expected growth factor of some pivoting strategies*, J. Comput. Appl. Math. **202** (2007), 292–303.
- [26] V. Cortés and J.M. Peña, *Sign regular matrices and Neville elimination*, Linear Algebra Appl. **421** (2007), 53–62.
- [27] V. Cortés and J.M. Peña, *Decompositions of strictly sign regular matrices*, Linear Algebra Appl. **429** (2008), 1071–1081.
- [28] V. Cortés and J.M. Peña, *A stable test for strict sign regularity*, Math. Comp. **77** (2008), 2155–2171.
- [29] V. Cortés and J.M. Peña, *Factorizations of totally negative matrices*, Numerical methods for structured matrices and applications, in Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel **199** (2010), 221–227.
- [30] V. Cortés and J.M. Peña, *Required nonzero patterns for nonsingular sign regular matrices*, Linear Algebra App. **432** (2010), 1990–1994.
- [31] A.S. Crans, S.M. Fallat, and C.R. Johnson, *The Hadamard core of the totally nonnegative matrices*, Linear Algebra Appl. **328** (2001), 203–222.
- [32] C. de Boor and A. Pinkus, *Backward error analysis for totally positive linear systems*, Numer. Math. **27** (1976/77), 485–490.
- [33] C. de Boor and A. Pinkus, *The approximation of a totally positive band matrix by a strictly banded totally positive one*, Linear Algebra Appl. **42** (1982), 81–98.

-
- [34] J. Delgado and J.M. Peña, *Accurate computations with collocation matrices of rational bases*, Appl. Math. Comput. **219** (2013), 4354–4364.
- [35] J. Demmel, M. Gu, S. Eisenstat, I. Slapnicar, K. Veselic, and Z. Drmac, *Computing the singular value decomposition with high relative accuracy*, Linear Algebra Appl. **299** (1999), 21–80.
- [36] J. Demmel and P. Koev, *Accurate SVDs of weakly diagonally dominant M -matrices*, Numer. Math. **98** (2004), 99–104.
- [37] J. Demmel and P. Koev, *The accurate and efficient solution of a totally positive generalized Vandermonde linear system*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **27** (2005), 142–152.
- [38] F.M. Dopico and P. Koev, *Perturbation theory for the LDU factorization and accurate computations for diagonally dominant matrices*, Numer. Math. **119** (2001), 337–371.
- [39] F.M. Dopico and P. Koev, *Accurate symmetric rank revealing and eigendecompositions of symmetric structured matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **28** (2006), 1126–1156.
- [40] F.M. Dopico and P. Koev, *Bidiagonal decompositions of oscillating systems of vectors*, Linear Algebra Appl. **428** (2008), 2536–2548.
- [41] S.M. Fallat, *Bidiagonal factorizations of totally nonnegative matrices*, Amer. Math. Monthly **108** (2001), 697–712.
- [42] S.M. Fallat and C.R. Johnson, *Totally Nonnegative Matrices*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2011.
- [43] S.M. Fallat and P. van den Driessche, *On matrices with all minors negative*, Electron. J. Linear Algebra **7** (2000), 92–99.
- [44] K. Fan, *Note on M -matrices*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **11** (1961), 43–49.
- [45] M. Fekete and G. Pólya, *Über ein problem von Laguerre*, Rend. C. M. Palermo **34** (1912), 89–120.
- [46] M. Fiedler and V. Pták, *On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors*, Czechoslovak Math. J. **12** (1962), 382–400.

- [47] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Total positivity: tests and parametrizations*, Math. Intelligencer **22** (2000), 23–33.
- [48] F.P. Gantmacher and M.G. Krein, *Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems, revised ed.*, AMS Chelsea, Providence, RI, 2002.
- [49] J. Garloff and D.G. Wagner, *Hadamard products of stable polynomials are stable*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 797–809.
- [50] M. Gasca and C.A. Micchelli (eds.), *Total positivity and its applications*, Proceedings of the meeting held in Jaca, September 26–30, 1994. Mathematics and its Applications, 359. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [51] M. Gasca and J.M. Peña, *Total positivity and Neville elimination*, Linear Algebra Appl. **165** (1992), 25–44.
- [52] M. Gasca and J.M. Peña, *Total positivity, QR factorization, and Neville elimination*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **14** (1993), 1132–1140.
- [53] M. Gasca and J.M. Peña, *A matricial description of Neville elimination with applications to Total Positivity*, Linear Algebra Appl. **202** (1994), 33–53.
- [54] M. Gasca and J.M. Peña, *A test for strict sign-regularity*, Linear Algebra Appl. **197/198** (1994), 133–142.
- [55] M. Gasca and J.M. Peña, *On factorizations of totally positive matrices*, in Total positivity and its applications (M. Gasca and C.A. Micchelli, Eds.), Math. Appl. **359**, Kluwer Acad. Publ. (1996), 109–130.
- [56] T.N.T. Goodman and C.A. Micchelli, *Corner cutting algorithms for the Bézier representation of free form curves*, Linear Algebra Appl. **99** (1988), 225–252.
- [57] N.J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, second ed.*, SIAM, Philadelphia, PA, 2002.
- [58] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [59] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

-
- [60] R. Huang, *On parametrization of totally nonpositive matrices and applications*, Numer. Linear Algebra Appl. **19** (2012), 742–753.
- [61] R. Huang, *Sign structure preserves for m -banded factorizations of sign regular matrices*, Linear Algebra Appl. **436** (2012), 1990–2000.
- [62] R. Huang and D. Chu, *Total nonpositivity of nonsingular matrices*, Linear Algebra Appl. **432** (2010), 2931–2941.
- [63] C.R. Johnson, *Closure properties of certain positivity classes of matrices under various algebraic operations*, Linear Algebra Appl. **97** (1987), 243–247.
- [64] S. Karlin, *Total positivity, Vol. I*, Stanford University Press, Stanford, 1968.
- [65] P. Koev, *TNTool*, URL: <http://www-math.mit.edu/~plamen/software>.
- [66] P. Koev, *Accurate eigenvalues and SVDs of totally nonnegative matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **27** (2005), 1–23.
- [67] P. Koev, *Accurate computations with totally nonnegative matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **29** (2007), 731–751.
- [68] M. Lewin, *Totally nonnegative, M -, and Jacobi matrices*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods **1** (1980), 419–421.
- [69] A. Marco and J.J. Martínez, *A fast and accurate algorithm for solving Bernstein-Vandermonde linear systems*, Linear Algebra Appl. **422** (2007), 616–628.
- [70] A. Marco and J.J. Martínez, *Accurate computations with Said-Ball-Vandermonde matrices*, Linear Algebra Appl. **432** (2010), 2894–2908.
- [71] T.L. Markham, *A semigroup of totally nonnegative matrices*, Linear Algebra and Appl. **3** (1970), 157–164.
- [72] K. Metelmann, *Ein Kriterium für den Nachweis der Totalnichtnegativität von Bandmatrizen*, Linear Algebra Appl. **7** (1973), 163–171.
- [73] J.M. Peña, *M -matrices whose inverses are totally positive*, Linear Algebra Appl. **221** (1995), 189–193.
- [74] J.M. Peña, *Matrices with sign consistency of a given order*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **16** (1995), 1100–1106.

- [75] J.M. Peña, *Pivoting strategies leading to small bounds of the errors for certain linear systems*, IMA J. Numer. Anal. **16** (1996), 141–153.
- [76] J.M. Peña, *On the Schur and singular value decompositions of oscillatory matrices*, Linear Algebra Appl. **261** (1997), 307–315.
- [77] J.M. Peña, *Pivoting strategies leading to diagonal dominance by rows*, Numer. Math. **81** (1998), 293–304.
- [78] J.M. Peña (ed.), *Shape Preserving Representations in Computer Aided–Geometric Design*, Nova Science Publishers, Commack (NY), 1999.
- [79] J.M. Peña, *Sign regular matrices of order two*, Linear Multilinear Algebra **50** (2002), 91–97.
- [80] J.M. Peña, *On nonsingular sign regular matrices*, Linear Algebra Appl. **359** (2003), 91–100.
- [81] J.M. Peña, *Scaled pivots and scaled partial pivoting strategies*, SIAM J. Numer. Anal. **41** (2003), 1022–1031.
- [82] J.M. Peña, *LDU decompositions with L and U well conditioned*, Electron. Trans. Numer. Anal. **18** (2004), 198–208.
- [83] J.M. Peña, *Eigenvalue bounds for some classes of P -matrices*, Numer. Linear Algebra Appl. **16** (2009), 871–882.
- [84] A. Pinkus, *Totally positive matrices*, Cambridge Tracts in Mathematics, Num. 181, Cambridge University Press, 2010.
- [85] H. Prautzsch and C.A. Michelli, *Computing curves invariant under halving*, Computer-Aided Geom. Design **4** (1987), 133–140.
- [86] SAGE, URL: <http://www.sagemath.org>.
- [87] I. Schoenberg, *Über variationsvermindernde lineare transformationen*, Math. Z. **32** (1930), 321–328.
- [88] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, New York-London, 1976.
- [89] J.J. Sylvester, *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares*, Phil. Mag. **4** (1852), 138–142.

- [90] R.S. Varga, *Geršgorin and his circles*, in Springer Ser. Comput. Math., 36, Springer-Verlag, Berlin (2004).
- [91] D.G. Wagner, *Total positivity of Hadamard products*, J. Math. Anal. Appl. **163** (1992), 459–483.
- [92] Z. Yang and X. Feng, *On a Schur complement inequality for the Hadamard product of certain totally nonnegative matrices*, Electron. J. Linear Algebra **22** (2011), 214–224.
- [93] Q. Ye, *Computing singular values of diagonally dominant matrices to high relative accuracy*, Math. Comp. **77** (2008), 2195–2230.

