

Elvis Javier Lacruz Calderón

Problema de Lambert para órbitas  
perturbadas : aplicación a la  
búsqueda de órbitas  
cuasiestacionarias

Departamento  
Matemática Aplicada

Director/es  
Abad Medina, Alberto José

<http://zaguan.unizar.es/collection/Tesis>



**Universidad**  
Zaragoza

Tesis Doctoral

PROBLEMA DE LAMBERT PARA ÓRBITAS  
PERTURBADAS : APLICACIÓN A LA BÚSQUEDA  
DE ÓRBITAS CUASIESTACIONARIAS

Autor

Elvis Javier Lacruz Calderón

Director/es

Abad Medina, Alberto José

**UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA**

Matemática Aplicada

2014



# Problema de Lambert para órbitas perturbadas. Aplicación a la búsqueda de órbitas cuasiestacionarias

Elvis Javier Lacruz Calderón



---

**IUMA - Universidad de Zaragoza**







# Problema de Lambert para órbitas perturbadas. Aplicación a la búsqueda de órbitas cuasiestacionarias

Elvis Javier Lacruz Calderón

Memoria presentada para optar al grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas.

Dirigida por Dr. Alberto J. Abad Medina.



---

**IUMA - Universidad de Zaragoza**







---

# Agradecimientos

Han sido muchas las personas las que han contribuido de manera directa en indirecta en el desarrollo de esta memoria.

En primer lugar, quiero agradecer al Dr. D. Alberto Abad Medida por la propuesta del tema que se ha abordado en esta tesis. Fundamentalmente, a su dedicación exclusiva en la dirección y formación académica que he recibido, que en extendidas conversaciones, opiniones certeras y consejos han sido vitales para alcanzar lo que se ha plasmado en esta memoria doctoral. Además por haberme mostrado e introducido en tan agradables áreas, como lo han sido para mi, la Mecánica Celeste y la Astrodinámica. Estoy muy agradecido por tu ayuda, gracias Dr. Alberto Abad.

También quiero agradecer al Dr. D. Antonio Elipe Sánchez y al Dr. D. Carlos Abad Hiraldo, siendo ellos con quienes se dieron los primeros pasos para incursionar en temas relacionados al movimiento orbital y observación de satélites artificiales, en la realización de la tesis de Licenciatura (2008) y la de Maestría (2010). Gracias por aquellos consejos aportados y experiencias que de una u otra forma han contribuido en mi formación.

Agradecer al Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones (IUMA) de la Universidad de Zaragoza (UZ), por la adjudicación del financiamiento de los dos primeros años de formación, asociada al proyecto de investigación CEFCA con referencia N°. 150-04, y al Fondo de Investigaciones para el Desarrollo de las Telecomunicaciones (FIDETEL), por la adjudicación financiera de los dos últimos años, asociada al proyecto de investigación FID, con referencia N°. FID-003-2012. Al igual que al Centro de Investigaciones de Astronomía (CIDA) y la Agencia Bolivariana para Actividades Espaciales (ABAE), de la República Bolivariana de Venezuela.

A los integrantes del Grupo de Mecánica Espacial de la Universidad de Zaragoza,

en particular al Dr. D. Roberto Barrio, y Departamento de Matemática Aplicada, en particular a Beatriz Nuevo. A la Ing. Coromoto Gorrin y a la Ing. Sol Negrette por su ayuda y colaboración desde el MPPCTI de Venezuela.

Gracias a aquellas personas que durante este tiempo he conocido y que de una u otra forma me han acompañado durante este tiempo, con las que he compartido momentos muy agradables. Especial gratitud a mis compañeros de despacho y los del café por la mañana en el (IUMA).

Gracias a mi familia por haber entendido que tenia que marchar de casa. Particularmente a mi madre, por su apoyo incondicional ofrecido durante todo este tiempo y que a pesar de la gran distancia, seguir aportandome su gran hidalguía. A mis hermanos Argenis, Yescenia, Alejandra, y en especial a Yelitza. A mis sobrinas, Xhia, Kenia, Salomé y Sabrina. Agradecimiento a Carlos, Shelia y José por estar presentes.

Incondicionalmente a mi esposa Fabiola por su comprensión y paciencia que desde el inicio hasta el final ha mostrado. Por su gran fortaleza presente en los momentos más complicados, además por su actitud al aceptar estar separados durante todo este tiempo de formación personal académica para ambos. Agradezco, su gran aportación en las extensos debates de ideas que compartimos vía telefónica dadas las circunstancias. Mis profundos y más sinceros agradecimientos por soportar esta travesía. Gracias.

Por último, a aquellas personas que de una u otra forma colaboraron, a todos ellos, gracias.

Lacruz Calderón Elvis Javier  
Zaragoza, 11 de noviembre de 2013

*“No podemos resolver problemas usando el mismo tipo de pensamiento que usamos cuando los creamos”.*

ALBERT EINSTEIN



---

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Movimiento orbital</b>	<b>1</b>
1.1. Movimiento kepleriano y orbital . . . . .	1
1.1.1. Movimiento kepleriano . . . . .	1
1.1.2. Movimiento orbital . . . . .	3
1.1.3. Órbitas keplerianas . . . . .	4
1.1.4. Órbitas . . . . .	7
1.2. Sistemas de referencia . . . . .	8
1.2.1. Sistemas de referencia espacial y planetocéntrico . . . . .	8
1.2.2. Órbita relativa . . . . .	10
1.2.3. Posición, velocidad y aceleración en un sistema no inercial . . . . .	13
1.3. Ecuaciones fundamentales . . . . .	16
1.3.1. Ecuaciones del movimiento de un satélite artificial . . . . .	16
1.3.2. Ecuaciones variacionales . . . . .	19
<b>2. Diferenciación automática y cálculo de perturbaciones</b>	<b>23</b>

2.1. Diferenciación automática . . . . .	23
2.2. Potencial gravitacional de un planeta . . . . .	28
2.2.1. Modelos gravitacionales . . . . .	29
2.2.2. Esquema de cálculo del potencial gravitatorio de un planeta . . . . .	33
2.2.3. Cálculo de derivadas parciales del potencial gravitatorio . . . . .	41
2.2.4. Test numéricos . . . . .	46
2.3. Otras fuerzas . . . . .	51
2.3.1. Fuerzas conservativas . . . . .	51
2.3.2. Fuerzas no conservativas . . . . .	54
<b>3. Arcos orbitales y problema de Lambert</b>	<b>59</b>
3.1. Arcos keplerianos. Problema clásico de Lambert . . . . .	59
3.1.1. Órbitas keplerianas que pasan por dos puntos . . . . .	59
3.1.2. Transferencias orbitales . . . . .	60
3.1.3. Problema y teorema de Lambert . . . . .	64
3.1.4. Método de Battin para la resolución del problema de Lambert . . . . .	66
3.2. Arcos orbitales. Problema de Lambert generalizado . . . . .	72
3.2.1. Problema de Lambert para un modelo orbital perturbado . . . . .	72
3.2.2. Método de corrección de órbitas periódicas . . . . .	72
3.2.3. Extensión del método de corrección de órbitas . . . . .	76
3.2.4. Método de Lambert generalizado . . . . .	78

---

3.2.5. Aplicación: búsqueda de arcos orbitales alrededor de la Tierra y de la Luna . . . . .	79
<b>4. Arcos orbitales cerrados</b>	<b>85</b>
4.1. Arcos keplerianos cerrados . . . . .	86
4.1.1. Coordenadas planetocéntricas de un punto de la órbita relativa	88
4.1.2. Algunas propiedades de los arcos keplerianos cerrados . . . . .	90
4.1.3. Órbitas que repiten la traza con un arco kepleriano cerrado: órbitas tipo Molniya . . . . .	93
4.2. Órbitas cuasiestacionarias . . . . .	96
4.2.1. Órbitas cuasiestacionarias en la Luna . . . . .	100
4.3. Arcos orbitales cerrados: mantenimiento de órbitas cuasiestacionarias	107
 <b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	 <b>113</b>



---

# Introducción

Kepler, a comienzos del siglo XVII, enunció tres leyes que describen el movimiento de los planetas. A finales del mismo siglo, Newton da un paso más allá y formula la ley de gravitación universal, que reúne los principios de la Mecánica y del Cálculo Diferencial para dar una sólida teoría sobre el movimiento de los cuerpos en el espacio. La Mecánica Celeste recoge todos los esfuerzos de los principales matemáticos de los siglos XVIII al XX en el estudio de las características de este movimiento.

El año 1957 supone un punto de inflexión en este tema. El 4 de octubre de 1957, la antigua Unión Soviética lanzó al espacio, con éxito, el satélite *Sputnik*<sup>1</sup>-1, desde la base de Kazajistán. Este hecho marca el inicio de la era espacial y con él nace la Astrodinámica, que extiende los conocimientos de la Mecánica Celeste a movimientos en el espacio de cuerpos no naturales. La Astrodinámica no solo extiende el rango y complejidad de los problemas de la Mecánica Celeste añadiendo nuevas perturbaciones al modelo propuesto por Kepler, sino que también introduce otros problemas nuevos como es, por ejemplo, el diseño de complejas trayectorias que permitan a una nave viajar por todo el sistema solar o incluso, en el futuro, modificar la órbita de objetos naturales como los asteroides potencialmente peligrosos para la Tierra.

Desde entonces, y a lo largo de estas últimas cinco décadas, se han realizado una gran variedad de misiones espaciales, algunas con objetivos muy diferentes. Una de las partes fundamentales de cada proyecto es el *análisis de misión* o la determinación previa de la órbita que seguirá el orbitador para cumplir las especificaciones de la misión (Wertz and Larson, 2010). El poder imponer para una órbita el cumplimiento de determinadas cualidades, particulares o generales, ha permitido alcanzar con éxito muchos de los objetivos de las misiones ejecutadas hasta hoy. Con ello ha habido un

---

<sup>1</sup>Cuatro días antes del lanzamiento, en el Comité Spécial de l'Anné Géophysique Internationale organizado en Whashington, el Profesor Segei M. Poloskov en su presentación titulada "Sputnik Zemli", dió a entender que eran capaces de lanzar un satélite al espacio en las siguientes semanas.

incremento progresivo del espectro de posibilidades para misiones espaciales.

De entre toda la variedad de órbitas de satélites artificiales terrestres las más conocidas son las llamadas órbitas geoestacionarias. Estas órbitas pertenecen a un conjunto más amplio, que llamaremos *órbitas síncronas*<sup>2</sup>, caracterizado por su sincronía con la rotación del cuerpo central, esto es, porque el valor de su periodo orbital coincide con el de el periodo de rotación del planeta (o la Luna en su caso). Si el cuerpo central es la Tierra las órbitas son llamadas geosíncronas y su periodo orbital debe ser igual a un día sidéreo, o lo que es igual a  $23^h56^m4^s09$ , lo que equivale a decir que su semieje mayor debe medir 42164 km. Las órbitas estacionarias<sup>3</sup> son aquellas órbitas síncronas cuya excentricidad e inclinación son nulas. Las órbitas estacionarias aparecen siempre, para un observador situado en la superficie del cuerpo central, como un punto fijo en el ecuador celeste.

Las primeras ideas sobre la órbita geoestacionaria fueron publicadas por el austro-húngaro Herman Potočnik en 1928 en su trabajo titulado “*El problema del viaje espacial-El motor cohete*”. Años después, en 1945, el británico Arthur C. Clarke hace mención a las ventajas que puede tener el uso de esta órbita para las comunicaciones, pues con solo tres satélites es suficiente establecer comunicación con cualquier punto del planeta, exceptuando regiones cerca de los polos. En el año 1963 es lanzado, y puesto en órbita, el *Syncom-2* que es el primer satélite de comunicaciones en órbita geoestacionaria. Esto confirma las ideas de Arthur C. Clarke y constituye un avance fundamental en distintas disciplinas o áreas del conocimiento como son: las telecomunicaciones, climatología, oceanografía, geodesia, militar, entre muchas otras más.

Desde el éxito de la misión del *Syncom-2* se han puesto centenares de satélites en esta órbita. Debido a las peculiaridades de las órbitas geoestacionarias, podemos pensar en éstas como restringidas a una zona del espacio que forma un aro o anillo ecuatorial alrededor de la Tierra, delimitado por unos pocos kilómetros desde la propia órbita geoestacionaria (Flohrer et al., 2011), por ello, existen grandes limitaciones al número máximo de satélites geoestacionarios posibles, lo que obliga a retirar los que quedan inactivos a una *órbita cementerio* para dejar un hueco a nuevos satélites. Cincuenta años después del primer satélite geoestacionario, la franja ecuatorial, donde se encuentran, comienza a estar congestionada (a día de hoy existen 416 satélites geoestacionarios activos). Estudios realizados por Milani et al.

---

<sup>2</sup>Geosíncronas, areosíncronas y selenosíncronas para la Tierra, Marte y la Luna respectivamente.

<sup>3</sup>Geoestacionarias, areoestacionaria y selenoestacionarias para la Tierra, Marte y la Luna respectivamente.

---

(2011) describen cómo es la distribución de los orbitadores en esta zona del espacio, en base a datos obtenidos por medios ópticos y telemétricos, los cuales han permitido catalogarlos como satélites activos, no activos y los que no están controlados con tamaños superiores a 1 cm.

A fines prácticos la zona geoestacionaria, o el anillo que forma, se ha dividido a su vez en pequeñas ventanas continuas con espacio disponible para albergar uno o varios satélites. Existen razones que justifican este hecho como son: evitar el cruce de las señales de emisión y recepción entre una estación terrena y el orbitador (Maral and Bousquet, 2009), también para evitar colisiones entre sí, realizando las maniobras necesarias para corregir su posición nominal, producto de la deriva ocasionada por las perturbaciones orbitales. Estos desplazamientos han sido estudiados con modelos teóricos o pueden ser calculados con métodos observacionales (Montejo et al., 2011; Montejo et al.; Lacruz and Abad, 2008). Un estudio detallado de las características fundamentales que determinan la órbita geoestacionaria lo podemos encontrar en Soop (1994). El tamaño habitual de las ventanas suele ser del orden de  $1^\circ$  para la longitud (dirección Este-Oeste) y de  $[-0.1^\circ, +0.1^\circ]$  para latitud (dirección Norte-Sur) (Capderou, 2005), sin embargo, algunas ventanas llegan a ser de tamaños más reducidos, del orden de  $0.05^\circ$  en longitud y latitud, equivalente a unos  $(35 \times 35)$  km., siendo éstos, casos muy especiales como lo indica Evans (1999).

En virtud del escenario que se presenta actualmente en relación al uso de la zona geoestacionaria, y en vista del crecimiento de la demanda requerida, principalmente en el uso de las telecomunicaciones, que además se incrementa si consideramos la mala cobertura de estos satélites para zonas de latitud alta, han surgido planteamientos que conducen a indagar si existe alguna otra área espacial que permita extender la zona geoestacionaria, y si existe, bajo qué condiciones está sujeta o condicionada.

La alternativa más usada para comunicaciones en lugares de latitud alta han sido las órbitas de tipo Molniya. Estas órbitas fueron ideadas en la Unión Soviética en el año 1960, aunque la primera misión con éxito fue lanzada en el año 1963. Sus características fundamentales son: un periodo de medio día sidéreo, excentricidad muy alta e inclinación crítica. El periodo consigue una traza que se repite cada dos vueltas, sobrevolando siempre las mismas zonas de la superficie terrestre. La alta excentricidad indica que el satélite se encuentra, durante la mayor parte de su periodo, cerca del apoastro. Finalmente, debido a la inclinación crítica, la posición del apoastro se mantiene estable. Si situamos tres satélites en esta órbita nos aseguramos de que en todo momento uno de los satélites se encuentra muy próximo al apoastro, que supondremos situado por encima del lugar de la Tierra donde estable-

cer las comunicaciones. Con este método nos aseguramos una misión con un coste de lanzamiento mucho menor que la órbita geoestacionaria, aunque se precisan tres satélites para una completa cobertura, sin embargo, para su seguimiento se necesita una antena móvil, pues la ventana que ocupa el satélite, desde el punto de vista del observador, es muy grande, de hecho, un satélite determinado termina saliendo de esta ventana aunque siempre habrá alguno de los tres visible.

Este tipo de satélite permite avanzar en la idea de que las órbitas que repiten la traza pueden constituir una buena solución para las comunicaciones, siempre que se consiga una ventana de visibilidad que sea pequeña o en la que siempre aparezca algún satélite de la misión. Este tipo de misiones ha sido también propuesta (Laínez and Romay, 2009; Laínez et al., 2009) como una alternativa a las grandes constelaciones, tipo GPS, para dar cobertura precisa a una región pequeña con un pequeño número de satélites.

Otra alternativa, que recientemente ha comenzado a estudiarse, se basa en el uso de fuerzas externas (motores de bajo impulso, velas solares, etc.) para construir órbitas exóticas, no-keplerianas, que McInnes (1999) llama *órbitas desplazadas*. Estas órbitas tienen la peculiaridad de situarse en un plano orbital paralelo al ecuatorial con una rotación sincronizada con el planeta para aparecer, desde la superficie, como un punto estacionario fuera del ecuador. En los trabajos realizados por McKay et al. (2009); Anderson and Macdonald (2010), se estudia la estabilidad de familias de órbitas desplazadas y se demuestra que es posible diseñarlas aplicando una pequeña fuerza producida por un sistema de propulsión de bajo empuje, cuya magnitud sea constante y su dirección sea siempre la misma.

La posibilidad de utilizar impulsos discretos para conseguir órbitas desplazadas aparece en un artículo de Nock (1984). Con objeto de observar los anillos de Saturno desde las sondas *Voyager*<sup>4</sup>, Nock propuso el uso de pequeños impulsos discretos en intervalos de tiempos cortos que desplazaban la órbita, en las proximidades del anillo, pero impidiéndole cruzarlo. Posteriormente McInnes (2011) considera el uso de impulsos discretos, en lugar de usar motores de bajo empuje de forma continua, para generar desplazamientos más grandes y poder formar familias de órbitas desplazadas no ecuatoriales y circulares.

La propuesta de C.R. McInnes consiste en generar una órbita desplazada aplicando una serie de maniobras orbitales realizadas a intervalos de tiempo constantes, cada vez que el satélite pase por un punto fijo del sistema de referencia planetocéntri-

---

<sup>4</sup>Las sondas espaciales *Voyager* 1 y 2 fueron lanzadas en 1977 desde Cabo Cañaveral.

co (que rota con el planeta). De esta forma, la órbita está formada por arcos cerrados en el sistema planetocéntrico que se convierten en arcos abiertos en el sistema espacial (inercial). La trayectoria final en el sistema espacial no es exactamente paralela al ecuador, como en el caso de empuje continuo, sino que está formada por una especie de “corona” representada por arcos que tienen su vértice en un paralelo. Visto desde la superficie, el satélite no ocupa un punto fijo, sino que se desplaza describiendo un arco cerrado cuya magnitud puede variar.

La obtención de cada uno de los arcos, y la maniobra necesaria para recorrerlos, viene expresada en términos del movimiento relativo a un punto de la trayectoria. Para ello, si llamamos  $\mathbf{u}_0$  a un punto cualquiera de la trayectoria, expresado en el sistema planetocéntrico en un cierto instante inicial  $t_0$ , y  $\mathbf{u}$  a la posición del orbitador en otro instante cualquiera, podremos llamar  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ , a la posición relativa del orbitador respecto de su posición inicial. La ecuación diferencial que rige la evolución del vector  $\boldsymbol{\rho}$ , expresada en el sistema rotante, será:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + (2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}) + (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})) = - \left. \frac{\partial \nabla \mathcal{V}_K}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \boldsymbol{\rho} - \nabla \mathcal{V}_K(\mathbf{u}_0) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_0),$$

donde  $\mathcal{V}_K$  es el potencial kepleriano,  $-\left. \frac{\partial \nabla \mathcal{V}_K}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$  es la matriz hessiana evaluada en  $\mathbf{u}_0$  y el vector  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_\odot)$ , donde  $\omega_\odot$  es la velocidad angular que define el movimiento del planeta en torno a su eje de rotación.

Como se ha dicho antes, la órbita propuesta por McInnes representa, en el sistema planetocéntrico, un arco cerrado, por lo que si partimos de un punto  $\mathbf{u}_0$ , el valor inicial de  $\boldsymbol{\rho}$  será cero, mientras que al final del arco  $\boldsymbol{\rho}$  debe ser de nuevo igual a cero. Para buscar las órbitas, McInnes desarrolla un método numérico que parte de la linealización de la ecuación diferencial anterior y obtiene la expresión final en términos de la matriz de transición.

Este tipo de órbitas vistas desde el sistema planetocéntrico no aparecen como un punto del espacio sino como un arco que se cierra. Este arco depende del punto donde se cierra, al que llamaremos *vértice del arco* y del tiempo que se tarde en recorrerlo. A este tipo de órbita le llamaremos *órbita cuasiestacionaria* si desde un lugar de la Tierra el orbitador siempre es visible. En cierto modo, es similar a una órbita estacionaria situada en cualquier punto de la Tierra, no solo en el ecuador, pero cuya ventana es en general mucho más amplia que la ventana de una órbita geoestacionaria.

McInnes presenta un método numérico para el cálculo de este tipo de órbitas,

válido para el modelo kepleriano, pero no realiza un estudio de cómo son dichas órbitas, ni responde a la pregunta de cuántas hay. En esta memoria hemos pretendido partir de la idea de McInnes y realizar un estudio profundo de dichas órbitas que permita saber cuántas existen y clasificarlas en función de sus propiedades, así como relacionar estos conceptos y propiedades con los de otro tipo de órbitas como las órbitas que repiten la traza, etc. Para ello, en lugar de un método numérico adaptado para este problema, hemos utilizado un método clásico muy estudiado y contrastado y del que se conocen sus propiedades de forma exhaustiva, el problema de Lambert. Además, hemos extendido las órbitas, no solo a modelos orbitales keplerianos, sino a cualquier modelo orbital que considere todo tipo de perturbaciones.

El proceso de estudio de dichas órbitas nos ha obligado a considerar otros problemas en los que hemos realizado nuevas aportaciones, que complementan las herramientas necesarias para completar nuestro estudio. Una de las nuevas cuestiones abordadas es la extensión del problema de Lambert a modelos orbitales perturbados. Por otro lado, con vistas a la evaluación del modelo de fuerzas, hemos desarrollado un nuevo método de evaluación de las derivadas, basado en el método de diferenciación automática. Este método, que ha sido publicado recientemente (Abad and Lacruz, 2013), permite evaluar las derivadas de cualquier orden del potencial, de una forma muy rápida, lo que nos da las componentes de la fuerza de un modelo completo de potencial planetario, así como la matriz hessiana, útil para la integración de las ecuaciones variacionales, sin necesidad de programar largas y complejas expresiones analíticas.

Una gran parte del trabajo realizado para completar esta memoria ha sido la creación del software necesario para la implementación de los métodos desarrollados, así como su aplicación sistemática para reproducir los ejemplos y casos mostrados. Algunos de los algoritmos programados dentro de este software están contenidos en muchos otras aplicaciones o librerías, sin embargo, debido en unas ocasiones a su alto coste por ser programas profesionales, en otras a su “desconocida” fiabilidad para librerías de dominio público y al lenguaje de programación que, en ocasiones, resulta inadecuado para nuestros propósitos, hemos preferido, salvo en caso del método de integración numérica, desarrollar nuestro propio software, que ha sido escrito en lenguaje C, y al que hemos llamado ORBITSC.

ORBITSC utiliza el integrador `dopri8`<sup>5</sup>, desarrollado por Hairer et al. (1993), para integrar las ecuaciones del movimiento de un satélite artificial, tanto en un sistema inercial como en un sistema rotante. Además, integra las ecuaciones variacionales,

---

<sup>5</sup><http://www.unige.ch/hairer/software.html>

---

también en ambos sistemas. El modelo de fuerzas y potenciales perturbadores incluye tanto un modelo de potencial gravitatorio planetario, hasta cualquier grado y orden, otras fuerzas, como perturbaciones producidas por un tercer cuerpo, radiales, tangenciales, normales, etc. Tanto las fuerzas, como los potenciales y sus derivadas, son calculados por el método de diferenciación automática y el tiempo de evaluación puede ser mejorado si se utiliza un ordenador con varios procesadores en paralelo. Este software ha sido integrado en *Orbits*<sup>6</sup> que es un paquete de *Mathematica* que está siendo desarrollado por A. Abad y mediante el cual, se han realizado la mayor parte de las gráficas orbitales presentadas en la memoria.

La memoria está estructurada en cuatro capítulos y un apartado de conclusiones y trabajos futuros.

En la primera parte del capítulo 1 introducimos los conceptos elementales de la Astrodinámica y la notación que utilizaremos a lo largo de esta memoria. Detalles de los conceptos básicos los podemos encontrar en cualquier libro de Mecánica Celeste y Astrodinámica como son: Multon (1970); Prussing (1979); Battin (1999); Vallado (2001); Abad (2012), cualquiera de ellos nos ofrecen estudios específicos de éstos. La notación utilizada presenta, de forma compacta y elegante, las ecuaciones fundamentales que representan el movimiento orbital de un satélite artificial, tanto dentro de un modelo kepleriano, como de un modelo orbital o perturbado.

Las fuerzas que actúan sobre un modelo orbital vienen expresadas en unas ocasiones en el sistema espacial (inercial) y en otras en el sistema planetocéntrico (no inercial). Ejemplo de la primera es una fuerza radial o la perturbación de un tercer cuerpo. El potencial planetario, si se consideran los términos tesorales, es ejemplo de las segundas. En cualquier caso si se utilizan las ecuaciones diferenciales formuladas en uno de los sistemas y el potencial o la fuerza viene formulada en el otro, o bien, si se aplican varias fuerzas que están formuladas en sistemas diferentes, es necesario expresar todas las fuerzas, y sus derivadas si se tratan las ecuaciones variacionales, en el mismo sistema de referencia, y que éste coincida con el sistema en el que se integra. En el capítulo primero se sistematizan todas estas transformaciones de forma que el algoritmo y el software correspondiente, se formula automáticamente en el sistema adecuado.

Normalmente las ecuaciones variacionales se expresan de forma distinta para cada problema porque se formulan a través de las expresiones analíticas de las derivadas de la fuerza respecto de las coordenadas, o las derivadas segundas del potencial.

---

<sup>6</sup><http://gme.unizar.es/software/orbitfiles/orbits.html>

Cuando la expresión del potencial es muy complicada, como en el caso del potencial planetario, estas ecuaciones se hacen muy pesadas de escribir e implementar en un ordenador. En el capítulo primero se establece la expresión general de las ecuaciones variacionales para cualquier fuerza y se aprovechan los métodos de cálculo de derivadas, desarrollados en el segundo capítulo, para construir automáticamente, con el ordenador, las ecuaciones variacionales para cualquier modelo de fuerzas.

En el capítulo 2 se presenta la estrategia implementada para la evaluación de las fuerzas perturbadoras y sus derivadas. Esta estrategia se basa en la *diferenciación automática*, (Rall and Corliss, 1996; Griewank and Walther, 2008; Neidinger, 1992) que nos permitirá obtener el valor numérico de las derivadas de una función, sin necesidad de conocer de forma explícita sus expresiones analíticas ni aplicar ninguna técnica de aproximación numérica, siendo estas dos las técnicas clásicas de obtención de la derivada.

La fuerza más importante y compleja del modelo orbital es la producida por el potencial gravitacional de un planeta, cuya expresión, dada por Heiskanen and Moritz (1967) en términos de los polinomios asociados de Legendre, muestra la complejidad que presentarán sus derivadas. El problema de la evaluación de las derivadas del potencial gravitacional es un importante problema de la Astrodinámica y la Geodesia. Se han desarrollado muchos métodos que llegan a obtener expresiones analíticas de las derivadas, tanto respecto a las coordenadas cartesianas, como a las coordenadas polares–esféricas. Estas últimas presentan singularidades en los polos. Los métodos más conocidos para las coordenadas cartesianas son los generados por Pines (1973) y Cunningham (1970), este último mejorado por Metris et al. (1998) y para las coordenadas polares–esféricas el dado por Casotto and Fantino (2007).

Mediante la diferenciación automática generalizaremos el proceso del cálculo de las derivadas parciales de orden superior, introduciendo una notación que nos permita de forma sistemática realizar el proceso. El algoritmo desarrollado es un algoritmo paralelizable mediante el uso de herramientas como OpenMP (Chandra et al., 2001). De esta forma se ha podido reducir notablemente el tiempo de CPU de la evaluación para modelos de alto grado y orden. En el capítulo 2 se presenta el algoritmo, con indicación de que parte puede ser paralelizada y un estudio del ahorro en tiempo de CPU del uso de estas técnicas.

Finalmente en el capítulo 2 se presenta la aplicación de la diferenciación automática para otros modelos de perturbaciones: fuerza producida por un tercer cuerpo; fuerza producida por un tercer cuerpo en una posición fija (caso de la Tierra para

---

un satélite lunar); fuerzas radiales, transversales y normales.

En el capítulo 3 se introducen los conceptos de *arco kepleriano* y *arco orbital* como conexión de dos puntos en órbita kepleriana y perturbada, respectivamente. La búsqueda de un arco kepleriano se transforma, cuando se conoce el tiempo de recorrido del arco, en el clásico problema de Lambert. La obtención del arco kepleriano constituirá el punto de partida para la búsqueda de los arcos orbitales, por lo que revisaremos uno de los métodos de resolución del problema de Lambert más conocidos (Battin, 1999).

Para la búsqueda de un arco orbital, recorrido en un tiempo dado, desarrollaremos un método que hemos llamado *método de Lambert generalizado*. Este método está basado en una modificación del método de mejora de órbitas periódicas desarrollado en Abad et al. (2011) consistente en la búsqueda iterativa de la corrección de las variables y el periodo de una órbita periódica aproximada. La modificación consiste, por un lado, en el cambio de la condición de periodicidad y por otro en la posibilidad de mantener constantes algunas de las variables iniciales de la órbita periódica.

Finalmente se comprueba la validez del método con la búsqueda de una serie de arcos orbitales, tanto para satélites artificiales terrestres como satélites lunares. En ambos casos se ha usado un modelo de potencial gravitacional completo. En el caso de la Luna se ha tenido en cuenta, además, la perturbación en la órbita de sus satélites producida por la gravedad terrestre.

En el capítulo 4 se define y analiza con rigor el concepto de *arco kepleriano cerrado*. Se efectúa un estudio exhaustivo de los arcos cerrados para extraer las características y propiedades que los representan y para analizar su utilidad en distintas misiones espaciales. En base a esto, se combinan los conceptos de órbita con un arco cerrado y órbita que repite la traza para diseñar órbitas con “visibilidad regional”. Como ejemplo, se buscan las condiciones y los rangos de valores de los parámetros orbitales, que debe tener una órbita, para cumplir las especificaciones de las órbitas de tipo Molniya.

Como aplicación de los arcos keplerianos cerrados se introduce el concepto de *órbita cuasiestacionaria* como aquella órbita que recorre continuamente un arco kepleriano cerrado, aplicando un impulso, o  $\Delta v$ , en el punto inicial y final del arco, y que siempre es visible para un observador situado en la superficie del planeta. Además, se caracterizan dichas órbitas en función de dos parámetros: el coste y el

ángulo del arco. Como aplicación se realiza un exhaustivo estudio de todos los arcos keplerianos posibles para órbitas alrededor de la Luna.

Finalmente, se extiende el concepto de arco kepleriano cerrado al de arco orbital cerrado, mediante el uso del método de Lambert generalizado desarrollado en el capítulo anterior. Además, se estudia la viabilidad de las órbitas cuasiestacionarias para un modelo perturbado y se aplica esto a las órbitas cuasiestacionarias lunares.

La memoria finaliza enumerando las conclusiones más importantes de los resultados a los que se ha llegado, así como las futuras líneas de investigación derivadas del trabajo ya realizado.

---

# Capítulo 1

## Movimiento orbital

### 1.1. Movimiento kepleriano y orbital

#### 1.1.1. Movimiento kepleriano

La descripción del movimiento de los planetas fue dada por el alemán Johannes Kepler (1571-1630), utilizando los datos observacionales recabados por el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), siendo éstos los datos de mayor precisión que se tenían para la época<sup>1</sup>. Kepler dedujo el movimiento que rige a los planetas en sus tres leyes del movimiento que dicen lo siguiente:

1. Los planetas se mueven en órbitas planas alrededor del Sol, siendo las áreas descritas proporcionales a los tiempos empleados en describirlas.
2. Las órbitas descritas por los planetas son elipses, de las cuales, el Sol ocupa uno de los focos.
3. Los cubos de los semiejes mayores de las órbitas planetarias son proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlas.

Con estas tres leyes se llega a dar una descripción geométrica y matemática exacta al movimiento de los planetas, no obstante, no logran determinar el factor

---

<sup>1</sup>Kepler empleo tablas logarítmicas para preparar nuevas tablas astronómicas logrando obtener una precisión en los cálculos del orden de un minuto de arco. Las tablas fueron publicadas en 1627 con el nombre de *Tablas Rudolfinas*, y sustituyeron a las *Tablas Prusianas* usadas anteriormente.

o propiedad física que hace que los cuerpos celestes tengan tal comportamiento. Sir Isaac Newton, en la segunda mitad del siglo XVII, da el paso definitivo para explicar y dar respuestas al origen del movimiento de cualquier planeta respecto al Sol, enunciando así la *ley de gravitación universal*, como:

*La fuerza que ejerce el Sol sobre cualquier planeta es atractiva, lleva la dirección de ambos cuerpos celestes y es proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.*

Esta ley es expresada matemáticamente como:

$$\mathbf{F} = \mathcal{G} \frac{m_{\odot} m_{\oplus}}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad (1.1)$$

donde,  $\mathbf{F}$  es la fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre el planeta,  $m_{\odot}$  y  $m_{\oplus}$ , son las masas respectivas del Sol y del planeta,  $\mathbf{x}$  y  $r = \|\mathbf{x}\|$  el vector posición y la distancia del planeta respecto al centro del Sol, y finalmente  $\mathcal{G}$  la constante de gravitación.

En Mecánica Celeste se llama *problema de dos cuerpos* al estudio del movimiento de dos masas puntuales sometidas a su mutua atracción gravitacional. Combinando la *ley de gravitación universal* y la *segunda ley de Newton*, obtenemos la ecuación para la aceleración de cada una de las partículas respecto a la otra y de ahí las ecuaciones del movimiento de los dos cuerpos. Puede demostrarse fácilmente que el centro de masas de dos cuerpos sometidos a su atracción gravitacional se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme. De esta forma, el sistema de ecuaciones se reduce, desde un punto de vista dinámico, al estudio del movimiento relativo de una de las partículas respecto de la otra, que será llamado *movimiento orbital kepleriano*, o simplemente *movimiento kepleriano*.

El problema kepleriano no es más que el estudio del movimiento de una partícula  $P$ , que llamaremos *orbitador*<sup>2</sup>, relativo a otra partícula  $O$ , que llamaremos cuerpo central<sup>3</sup>. Las ecuaciones del movimiento kepleriano están representadas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_k = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x}, \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{F}_k(\mathbf{x}, \mu)$ , es la fuerza kepleriana, siendo  $\mathbf{x} = \overline{OP}$  el vector de posición de  $P$  respecto de  $O$ ,  $r = \|\mathbf{x}\|$  la distancia y  $\mu = \mathcal{G}(m_O + m_P)$  la constante gravitacional

<sup>2</sup>Entre los distintos tipos de orbitadores nos encontramos: planetas, asteroides, cometas, satélites, tanto naturales como artificiales, sondas espaciales, etc.

<sup>3</sup>Sol, planeta, etc.

de la órbita, con  $m_O$  y  $m_P$  las masas respectivas del cuerpo central y el orbitador. Si introducimos el vector velocidad  $\mathbf{X}$  podemos expresar estas ecuaciones como un conjunto de ecuaciones diferenciales de orden uno en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_k. \quad (1.3)$$

Fácilmente puede demostrarse que el movimiento del orbitador, resultante de la integración de estas ecuaciones, cumple las leyes de Kepler, (Abad, 2012).

### 1.1.2. Movimiento orbital

En la realidad, además de la fuerza kepleriana, aparecen una serie de perturbaciones que modifican las ecuaciones y la trayectoria de la órbita, entre las que podemos destacar:

- Potencial gravitatorio del cuerpo central debido a la forma no esférica de los cuerpos celestes.
- Atracción gravitacional de otros cuerpos del sistema distintos del central: la Luna y el Sol en el caso de órbitas terrestre, la Tierra para órbitas lunares, etc.
- Rozamiento o resistencia de la atmósfera en aquellos cuerpos que la poseen.
- Presión de radiación solar.
- Efectos de mareas, relatividad y otros.

Las anteriores perturbaciones pueden formularse por medio de una fuerza adicional  $\mathcal{P}$  que modifica las ecuaciones del movimiento (1.3), en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_k + \mathcal{P}. \quad (1.4)$$

El movimiento que se deduce de dichas ecuaciones será llamado *movimiento orbital* y coincide con el movimiento kepleriano cuando el vector perturbación vale cero,  $\mathcal{P} = 0$ .

En general, se verifica la relación  $\|\mathcal{P}\| \ll \|\mathbf{F}_k\|$ , por lo que la descripción y propiedades del movimiento orbital son muy próximas a las del movimiento kepleriano, sirviendo éste como primera aproximación para comprender y estudiar el movimiento de los cuerpos en el espacio. Por ello, en las secciones que siguen será estudiado en detalle el concepto de órbita kepleriana.

### 1.1.3. Órbitas keplerianas

Llamaremos *órbita kepleriana* y la denotaremos con el símbolo  $\mathcal{O}$ , a la solución de las ecuaciones del problema kepleriano (1.3) para unas condiciones iniciales dadas. Entenderemos por órbita, no solo la trayectoria del orbitador, sino todos sus parámetros, tanto estáticos o constantes, como dinámicos o variables.

Las ecuaciones del problema kepleriano (1.3) constituyen un sistema de seis ecuaciones diferenciales de orden uno. De acuerdo con la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias una solución de dicho sistema vendrá dada como  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{C})$ , donde  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$  representa un vector de seis constantes independientes que llamaremos *variables de estado* porque permiten determinar cualquier parámetro de la órbita en cualquier instante, es decir, caracterizan la órbita.

Los seis elementos que componen las variables de estado son constantes de la órbita o variables dinámicas particularizadas para un instante dado. En este último caso hay que dar el valor de éstas así como el instante  $t_0$  en que han sido calculadas.

Una vez determinado el conjunto de variables de estado, la órbita quedará caracterizada por éste y, pondremos  $\mathcal{O}(\mathbf{C})$  si los elementos del vector de estado son constantes de la órbita y  $\mathcal{O}(t_0, \mathbf{C})$  si son variables particularizadas en  $t_0$ .

Las variables de estado pueden ser elegidas de diversas maneras. La más natural, desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales, es a través de los valores del vector de posición,  $\mathbf{x}_0$ , y velocidad,  $\mathbf{X}_0$ , para un instante dado. Al vector de dimensión seis compuesto por las componentes de los vectores  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{X}_0$  se le llama *vector de estado*. De esta forma una órbita kepleriana podrá ser representada como  $\mathcal{O}(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{X}_0)$ .

Cada aspecto y propiedad de una órbita kepleriana  $\mathcal{O}$  puede ser representado por un *parámetro orbital* o *variable dinámica*. Estos parámetros pueden ser constantes, como la excentricidad  $e$  o la norma del momento angular  $G$  o variables como el vector de posición  $\mathbf{x}$  o la anomalía verdadera  $f$ . Una vez conocidos los seis o siete elementos que caracterizan la órbita, ésta queda completamente determinada junto con todos sus parámetros. En el caso de que un parámetro, que de forma genérica llamaremos  $\sigma$ , sea constante, utilizaremos la notación  $\sigma(\mathcal{O})$ , pues este parámetro solo depende de la órbita, sin embargo, cuando el parámetro sea variable dependerá a su vez del instante  $t$  en que sea calculado, por lo que pondremos  $\sigma(t, \mathcal{O})$ .

Para representar una órbita de forma mucho más descriptiva, tanto desde un punto de vista geométrico, como astronómico y dinámico, se utilizan unas variables de estado que se adaptan completamente a la descripción del movimiento dada por las leyes de Kepler: los *elementos orbitales*.

En primer lugar tomaremos los dos elementos que caracterizan la forma de la cónica, esto es, el *semieje mayor*  $a$  (o el semilado recto<sup>4</sup>  $p$ ) y la *excentricidad*  $e$ , que caracterizan la forma y dimensiones de la cónica.

Para completar la información sobre la trayectoria necesitaremos situarla en el espacio, para lo cual basta observar la figura 1.1 y recordar que la órbita está contenida en un plano perpendicular al vector momento angular  $\mathbf{G} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{X}}$  o lo que es igual a su dirección  $\mathbf{n}$ . Supondremos, por ahora, que la órbita no coincide con el plano  $Oxy$  del sistema espacial, esto es, que  $\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3 \neq 0$ .

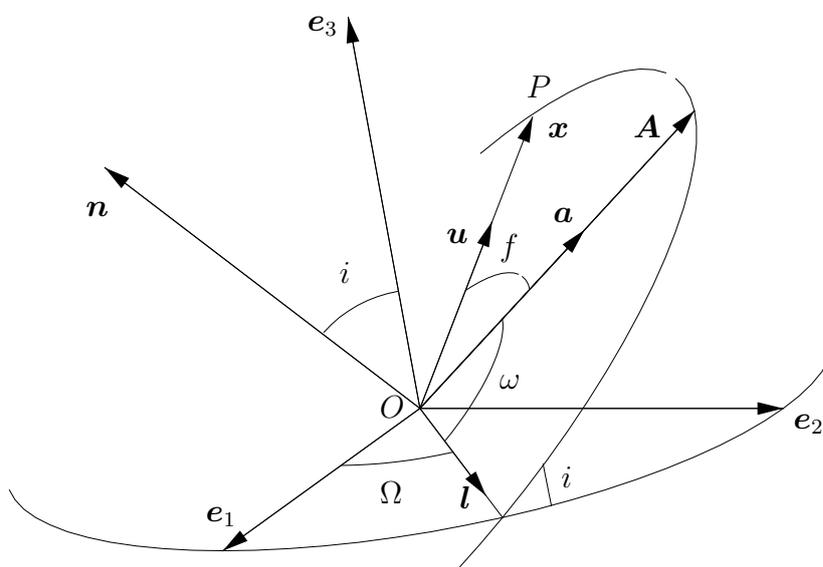


Figura 1.1: Órbita kepleriana en el espacio.

Puesto que el plano de la órbita y el plano fundamental del sistema espacial  $Oxy$  no son paralelos, necesariamente se cortarán en una recta que pasa por  $O$  y pertenece a ambos planos y que llamaremos *línea de los nodos*. Tomaremos como dirección positiva de dicha recta la que contiene el nodo ascendente, o punto de la órbita en el que el orbitador pasa de coordenadas  $z$  negativas a positivas. El vector unitario  $\mathbf{l}$  define la línea de los nodos y forma un ángulo  $\Omega$ , *ángulo del nodo*, con  $\mathbf{e}_1$ . El ángulo  $\Omega$  puede tomar cualquier valor entre 0 y  $2\pi$ .

El ángulo que forman el vector  $\mathbf{n}$  con  $\mathbf{e}_3$  será llamado *inclinación*, y denotado

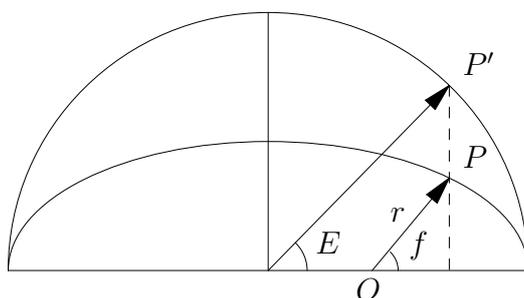
<sup>4</sup>El semieje mayor no está definido para la parábola.

por  $i$ , y representa también el ángulo entre el plano  $Oxy$  y el de la órbita. El ángulo  $i$  puede tomar un valor cualquiera entre  $0$  y  $\pi$ .

El vector  $\mathbf{n}$  representa también el sentido de la rotación de la partícula alrededor del eje definido por  $\mathbf{n}$ , pues debido a su definición ésta tiene siempre lugar en sentido contrario a las agujas del reloj si se observa desde el extremo de  $\mathbf{n}$ . Así pues, el ángulo que forma  $\mathbf{n}$  con  $\mathbf{e}_3$  indica también el sentido de giro observado desde un punto cualquiera de la parte positiva del eje  $Oz$ . Un ángulo  $i$  entre  $0$  y  $\pi/2$  indicará una órbita directa (sentido de giro contrario a las agujas del reloj), mientras que una inclinación entre  $\pi/2$  y  $\pi$  indicará una órbita retrógrada (sentido de giro igual al de las agujas del reloj).

Los dos ángulos,  $\Omega$  e  $i$  representan la posición del plano de la órbita en el espacio, pero para poder representar con exactitud la forma de la cónica, hay que situar la dirección del eje de la misma dentro de su plano. El eje de la cónica lleva la dirección de la línea de los ápsides,  $\mathbf{a}$ , que forma un ángulo  $\omega$  con la línea de los nodos. Dicho ángulo será llamado *argumento del periastro*, representa la posición relativa de la cónica en su plano y es la tercera variable angular de la órbita. El argumento del periastro toma un valor cualquiera entre  $0$  y  $2\pi$ .

Se han completado así los cinco elementos que caracterizan la geometría de la órbita, esto es, la forma, dimensiones y situación de la curva que recorre el orbitador. Para completar la caracterización de la órbita bastará un elemento que describa la dinámica, o lo que es igual, que nos informe en qué punto de la curva o trayectoria se encuentra el orbitador en cada instante  $t$ .



**Figura 1.2:** Anomalías en el movimiento kepleriano.

Para ello recordemos que si se elige un sistema de coordenadas polares,  $(r, f)$ , en el plano de la órbita (ver figura 1.2), con centro en el cuerpo central  $O$ , y eje de coordenadas polares la dirección del periastro, entonces la ecuación de una cónica

nos da la relación

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad (1.5)$$

donde  $f$  es llamada *anomalía verdadera*. Para encontrar la relación de  $f$  con  $t$  se introducen dos nuevas variables angulares  $E$  (anomalía excéntrica) y  $\ell$  (anomalía media) a través de las relaciones

$$\ell = E - e \sin E, \quad \text{y} \quad \tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}, \quad (1.6)$$

que permiten obtener  $f$  en función de  $\ell$ . Finalmente, para encontrar la posición del orbitador en cada instante basta tener en cuenta la relación  $\ell = n(t - T)$ , siendo  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  el movimiento medio y  $T$  la época o instante de paso del orbitador por el periastro.

Para caracterizar su dinámica basta considerar finalmente la constante<sup>5</sup>  $T$ .

Llamaremos *elementos orbitales* al conjunto de seis constantes  $(a, e, i, \Omega, \omega, T)$ . La obtención de los elementos orbitales a partir de las condiciones iniciales  $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{X}_0)$  y viceversa, cuya demostración puede verse en Abad (2012), demuestra la equivalencia entre ambos, y en consecuencia los elementos orbitales constituyen un conjunto de variables de estado. Por tanto la órbita kepleriana se puede caracterizar como  $\mathcal{O}(a, e, i, \Omega, \omega, T)$  o bien como  $\mathcal{O}(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{X}_0)$ .

#### 1.1.4. Órbitas

Cuando aparezca una pequeña perturbación en el modelo, en la forma formulada en las ecuaciones (1.4), dejaremos de usar la palabra kepleriana y pasaremos a llamar órbita perturbada o simplemente *órbita* a la solución.

El pequeño valor de la fuerza perturbadora frente a la fuerza kepleriana hace que una órbita pueda ser considerada como una órbita osculatriz instantáneamente kepleriana, esto es, que sus propiedades se pueden estudiar, para un instante dado, como los de una órbita kepleriana, pero de forma que los parámetros que caracterizan esta órbita kepleriana (los elementos orbitales) dejan de ser constantes y varían con el tiempo:  $a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t)$  y  $T(t)$ .

---

<sup>5</sup>Aunque el elemento  $T$  es constante hay que tener en cuenta que, para órbitas elípticas, éste varía de una vuelta a otra aumentando en una cantidad igual al periodo orbital  $P$ .

Siguiendo con la notación introducida en el apartado anterior podremos caracterizar una órbita bien a partir de sus condiciones iniciales  $\mathcal{O}(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{X}_0)$  (al igual que para órbitas keplerianas) o bien a partir del valor de los elementos orbitales para el instante inicial  $\mathcal{O}(t_0, a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, T_0)$ .

## 1.2. Sistemas de referencia

### 1.2.1. Sistemas de referencia espacial y planetocéntrico

Para representar el movimiento de una partícula  $P$  en el espacio es necesario determinar, en cada instante  $t$ , el vector  $\overline{OP} \in \mathbb{R}^3$  que une un punto fijo  $O$ , que se toma como origen, con la posición de la partícula en dicho instante. Si elegimos una base ortonormal  $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ , existe un conjunto de tres componentes:  $y_1, y_2, y_3$ , de forma que se puede expresar como combinación lineal de los vectores directores de la base, como sigue:

$$\overline{OP} = \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{s}_i. \quad (1.7)$$

De aquí en adelante usaremos indistintamente la notación anterior y la expresión de un vector dada por la matriz columna  $3 \times 1$  dada por  $\overline{OP} = (y_1, y_2, y_3)^T$ .

Llamaremos *sistema de referencia* al conjunto  $\mathcal{S} = \{O, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$  formado por el origen y la base. En lo que sigue tomaremos siempre el centro de masas del cuerpo central como origen, por lo que no volveremos a considerarlo e identificaremos el sistema de referencia únicamente con la base elegida.

La misión para la que está diseñado un satélite artificial depende, en buena medida, de su posición sobre la superficie del cuerpo que orbita, por lo que es imprescindible considerar la forma y movimientos de este cuerpo a la hora de analizar la órbita. En general todos los cuerpos del Sistema Solar sobre los que, ahora o en un futuro, se pretende situar satélites artificiales tienen aproximadamente la misma forma y movimiento. Podemos considerar un planeta<sup>6</sup> como un elipsoide de revolución (figura 1.3) que gira con velocidad angular constante  $\omega_\odot$ , alrededor de un eje fijo, perpendicular a un plano fijo que, de forma genérica llamaremos ecuador.

---

<sup>6</sup>Hablaremos de planeta en forma genérica aunque esto se puede extender de forma genérica a cualquiera de las grandes lunas de los planetas.

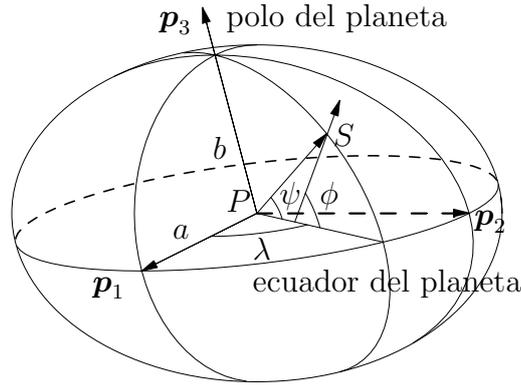


Figura 1.3: Sistema de referencia planetocéntrico.

Para determinar la posición de un satélite con respecto a la superficie del planeta es necesario establecer un sistema de coordenadas basado en un sistema de referencia que sea fijo con respecto al planeta. Para ello estableceremos el llamado *sistema planetocéntrico*,  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ , donde:  $\mathbf{p}_3$  representa la dirección del eje de rotación fijo; el plano formado por  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  coincide con el plano del ecuador; la dirección de  $\mathbf{p}_1$  representa la dirección de un meridiano de referencia llamado *primer meridiano* o *meridiano cero*; y finalmente  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_1$ .

Por otro lado, las ecuaciones (1.3) o (1.4), están referidas a un sistema de referencia inercial<sup>7</sup>,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , que llamaremos *sistema espacial*<sup>8</sup>, tal que el plano fundamental, formado por  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$ , representa el ecuador del planeta, con  $\mathbf{e}_1$  señalando una dirección fija en el espacio<sup>9</sup>. El vector  $\mathbf{e}_3$  representa la dirección del polo del planeta, por lo que coincide con  $\mathbf{p}_3$ . De esta manera el vector  $\mathbf{x}(t)$ , que señala la posición del orbitador,  $\overline{OP}$ , en cada instante, tiene sus componentes referidas al sistema espacial como:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i. \quad (1.8)$$

La relación entre los dos sistemas de referencia viene dada a través de una rotación elemental, respecto al eje  $Oz$ , y de ángulo  $\theta$ , que en forma vectorial puede ponerse como

$$\mathbf{p}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{e}_3, \quad (1.9)$$

donde el ángulo  $\theta$  entre los vectores  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{p}_1$ , viene dado por la expresión

$$\theta = \omega_{\odot} t + \theta_0, \quad (1.10)$$

<sup>7</sup>Ver el siguiente apartado.

<sup>8</sup>Si consideramos órbitas alrededor del Sol el sistema espacial coincide con el sistema eclíptico

<sup>9</sup>La dirección de  $\mathbf{e}_1$  es la intersección del ecuador celeste con el ecuador del planeta. Para la Tierra, es el equinoccio  $\gamma$ .

siendo  $\omega_{\odot}$  la velocidad angular constante del planeta y  $\theta_0$  el ángulo entre  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{p}_1$  en el instante inicial. El ángulo  $\theta$ , que varía de 0 a  $2\pi$  en una rotación o día sidéreo del planeta, representa el reloj de tiempo sidéreo del planeta<sup>10</sup>.

En lo que sigue llamaremos

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^3 u_i \mathbf{p}_i, \quad (1.11)$$

al vector de posición del orbitador,  $\overline{OP}$ , referido al sistema planetocéntrico.

### 1.2.2. Órbita relativa

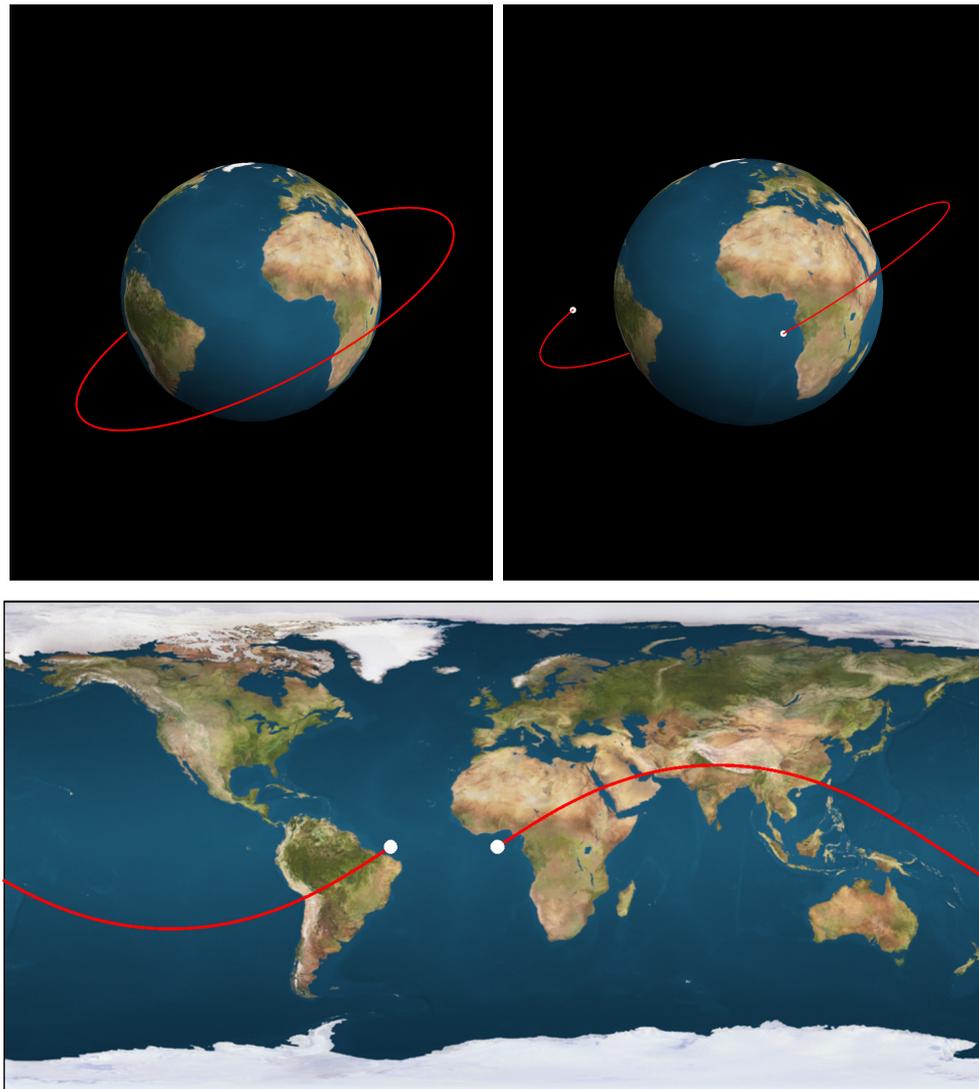
Las órbitas, vistas como la curva  $\mathbf{x}(t)$  solución de las ecuaciones (1.3) o (1.4), representan una cónica, que es una curva cerrada. Puesto que esta curva se observa desde el sistema espacial, la llamaremos, de aquí en adelante *órbita espacial*. La parte superior izquierda de la figura 1.4, muestra una de estas órbitas donde se ve que al final del periodo orbital la posición del orbitador coincide con el punto inicial.

Cuando la misma curva se representa en el sistema planetocéntrico,  $\mathbf{u}(t)$ , la rotación del sistema produce que el punto final de la órbita no coincida con el inicial, por lo que la curva no se cierra al final del periodo, como puede verse en la parte derecha de la figura 1.4. A la órbita referida al sistema planetocéntrico le llamaremos *órbita planetocéntrica*.

La proyección de la órbita relativa sobre un mapa plano que representa la superficie del planeta, en este caso la Tierra, se le llama *traza* de la órbita. La parte inferior de la misma figura 1.4, muestra la traza de la misma órbita espacial donde se ve más claramente el hecho de la pérdida de periodicidad de la órbita planetocéntrica.

Debido a lo dicho, es conveniente clarificar el concepto de *periodo* que será usado a lo largo de esta memoria. En general, cuando hablemos de periodo orbital, nos referimos al periodo de una órbita espacial kepleriana, que siempre existe. Para una órbita (no kepleriana) el concepto de periodicidad puede generalizarse igual que el resto de parámetros constantes de la órbita que se transforman en parámetros variables, así podremos hablar del una función  $P(t)$  que representa en cada instante el periodo de la órbita kepleriana osculatriz.

<sup>10</sup>Para la Tierra  $\theta$  representa el tiempo sidéreo medio en Greenwich.



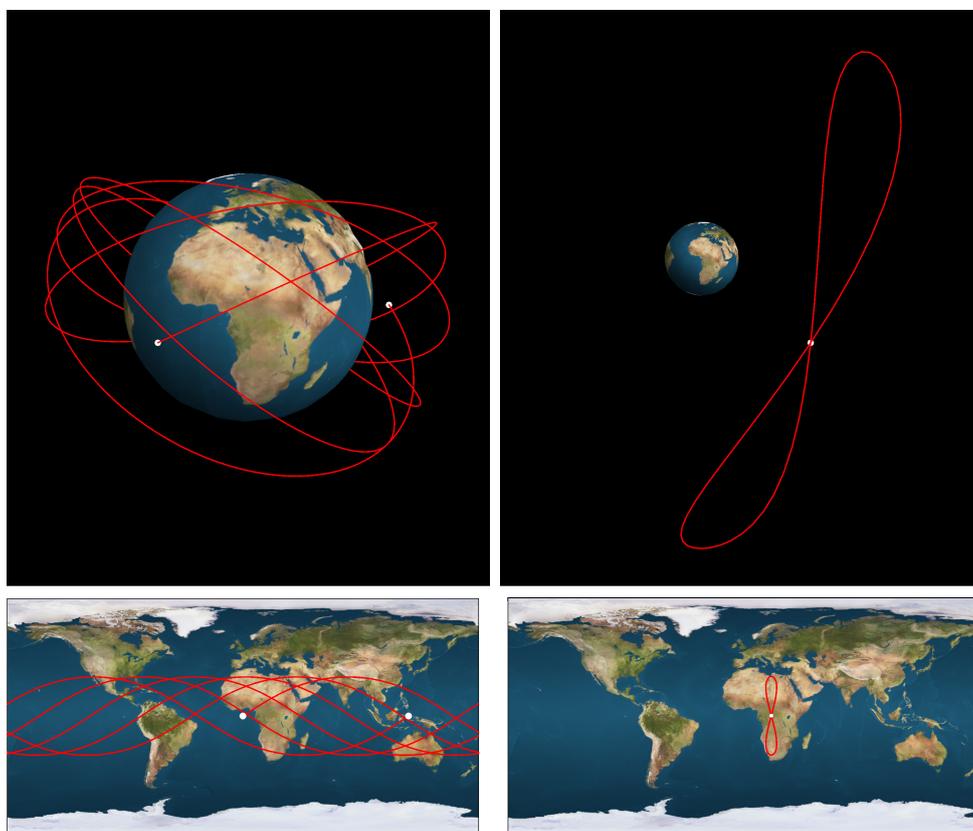
**Figura 1.4:** Izquierda: órbita referida al sistema espacial. Derecha: órbita relativa o referida al sistema planetocéntrico. Abajo: traza o proyección de la misma órbita sobre un mapa plano de la superficie terrestre.

Una órbita planetocéntrica puede ser periódica o no serlo, pero dicho periodo, si existe, no será igual al periodo orbital correspondiente. La única excepción a la afirmación anterior la constituyen las órbitas de periodo orbital igual al periodo de rotación del planeta u órbitas planetosíncronas.

Para que una órbita planetocéntrica sea periódica tienen que existir dos números enteros  $n$  y  $m$ , tales que  $nP - mR = 0$ , siendo  $P$  el periodo orbital y  $R$  el periodo de rotación del planeta.

La figura 1.5 representa dos órbitas planetocéntricas diferentes. La de la parte superior izquierda no es periódica y puede verse, tanto en la figura tridimensional como en la traza, que al cabo de seis periodos orbitales no se ha cerrado y, además va formando una curva que va llenando todos los puntos de la Tierra entre dos latitudes límite. Por ello, a una órbita de este tipo se le llama *órbita densa*.

En la parte superior derecha de la figura 1.5 aparece una órbita planetocéntrica periódica (en este caso geosíncrona), que aunque representa también seis periodos orbitales siempre se repite, su proyección sobre un mapa plano sobre la superficie de la Tierra se aprecia en la parte inferior derecha de la misma figura.



**Figura 1.5:** Izquierda: la imagen superior corresponde a seis vueltas de una órbita densa y su respectiva proyección sobre la superficie en la parte inferior. Derecha: la imagen superior corresponde a seis vueltas de una órbita relativa periódica y su respectiva proyección equivale a la imagen inferior.

### 1.2.3. Posición, velocidad y aceleración en un sistema no inercial

Si  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  es el *vector de posición* de un punto en un instante  $t$ , entonces llamaremos *velocidad* y *aceleración* del punto a los vectores

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{y}} = \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2}. \quad (1.12)$$

El concepto de velocidad y aceleración como derivada de un vector es absoluto si atendemos a su carácter vectorial, sin embargo, al representar el vector a partir de sus componentes, en un sistema de referencia dado, la velocidad y aceleración dan lugar a dos conceptos diferentes en función de las propiedades del sistema de referencia.

En efecto, si suponemos que  $\mathbf{y} = \sum_{i=0}^3 y_i \mathbf{s}_i$ , y derivamos  $\mathbf{y}$ , obtendremos

$$\dot{\mathbf{y}} = \sum_{i=0}^3 \dot{y}_i \mathbf{s}_i + \sum_{i=0}^3 y_i \dot{\mathbf{s}}_i. \quad (1.13)$$

El primer sumatorio, que denotaremos como

$$\mathbf{y}' = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \mathbf{s}_i, \quad (1.14)$$

representa exclusivamente la variación de las componentes del vector, por lo que será llamado *velocidad relativa* al sistema  $\mathcal{S}$ , en contraposición con  $\dot{\mathbf{y}}$  que será la *velocidad absoluta*.

Llamaremos *sistema de referencia inercial* a un sistema en el que las derivadas de los vectores de la base son nulas  $\dot{\mathbf{s}}_i = 0$ , con  $i = 1, 2, 3$ . De esta forma, para un sistema de referencia inercial las velocidades absoluta y relativa coinciden,  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}'$ .

Si el sistema no es inercial deberemos conocer el valor de los vectores  $\dot{\mathbf{s}}_i$  para obtener la relación entre ambas velocidades. Para ello, si tenemos en cuenta que  $\dot{\mathbf{s}}_i$ , como todo vector, puede expresarse en la base  $\mathcal{S}$  en la forma  $\dot{\mathbf{s}}_i = \sum_{j=1}^3 b_{ij} \mathbf{s}_j$ , se tendrá que  $b_{ij} = \dot{\mathbf{s}}_i \cdot \mathbf{s}_j$ . Al ser una base ortonormal la que define el sistema de referencia, se verifican las relaciones  $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_i = 1$  y  $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j = 0$ , que al ser derivadas conducen, respectivamente, a las expresiones  $b_{ii} = 0$  y  $b_{ij} + b_{ji} = 0$ . De esta forma, podremos poner lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{s}}_1 \\ \dot{\mathbf{s}}_2 \\ \dot{\mathbf{s}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \end{pmatrix}.$$

Llamando  $\omega_1 = b_{23}$ ,  $\omega_2 = -b_{13}$ , y  $\omega_3 = b_{12}$ , podemos definir el vector  $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{s}_i$ , que será llamado *velocidad angular de rotación* del sistema de referencia, y que verifica las relaciones

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i, \quad (1.15)$$

llamadas comúnmente *fórmulas de Poisson*. Estas ecuaciones caracterizan el movimiento de los sistemas de referencia no inerciales, o rotantes.

Asociada al vector  $\boldsymbol{\omega}$  aparece la matriz  $\mathcal{W}$  definida en la forma

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

y que verifica, para cualquier vector  $\mathbf{y}$ , la relación

$$\mathcal{W} \cdot \mathbf{y} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}. \quad (1.17)$$

De esta forma, de la ecuación (1.13) tenemos la relación entre la velocidad absoluta y relativa en un sistema rotante, la cual puede expresarse como:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}' + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}) = \mathbf{y}' + \mathcal{W} \cdot \mathbf{y}. \quad (1.18)$$

Derivando de nuevo la ecuación (1.18) se obtendrá que:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}} &= \frac{d\mathbf{y}'}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y})}{dt}, \\ &= (\mathbf{y}'' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}') + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{y} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{y}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.19)$$

y finalmente,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}} &= \mathbf{y}'' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{y} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}), \\ &= \mathbf{y}'' + 2\mathcal{W} \cdot \mathbf{y}' + \mathcal{W}' \cdot \mathbf{y} + \mathcal{W}^2 \cdot \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

que nos da la relación entre la *aceleración absoluta*,  $\ddot{\mathbf{y}}$ , y la *aceleración relativa*,  $\mathbf{y}'' = \sum_{i=1}^3 \ddot{y}_i \mathbf{s}_i$ .

Como se ha visto antes, la posición de un satélite artificial puede darse en dos sistemas de referencia distintos: el sistema espacial y el sistema planetocéntrico. Mientras que el sistema espacial constituye un sistema inercial, el sistema planetocéntrico, que se define a partir de una rotación, es un sistema no inercial. La rotación del sistema planetocéntrico se realiza alrededor del eje polar  $Oz$  con una velocidad angular constante  $\omega_\odot = \dot{\theta}$ , de forma que el vector que define la velocidad angular de la rotación puede expresarse como

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_\odot \mathbf{p}_3 = \omega_\odot \mathbf{e}_3, \quad (1.21)$$

y su matriz asociada  $\mathcal{W}$  como:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{\mathcal{O}} & 0 \\ \omega_{\mathcal{O}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

El valor constante de la velocidad angular permite decir que, para estos sistemas, se tiene  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}' = 0$ ,  $\mathcal{W}' = \mathbf{0}$ .

Un cambio entre dos bases ortonormales,  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  de  $\mathbb{R}^3$ , con la misma orientación es llamado *rotación del sistema de referencia*. Este cambio viene caracterizado por la llamada *matriz de rotación*<sup>11</sup>, que es una matriz ortogonal<sup>12</sup>  $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2}$ , que permite pasar de las componentes de un vector  $\mathbf{x}_{\mathcal{I}_1}$  representado en la base  $\mathcal{I}_1$ , a las del mismo vector,  $\mathbf{x}_{\mathcal{I}_2}$ , representado en la base  $\mathcal{I}_2$ , a través de la relación

$$\mathbf{x}_{\mathcal{I}_1} = \mathcal{R}_{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{I}_2}. \quad (1.23)$$

El cambio entre los sistemas espacial y planetocéntrico es un caso particular de *rotación elemental* alrededor del eje  $\mathbf{e}_3$ . La matriz de rotación, en este caso, es la matriz

$$\mathcal{R}_{\mathcal{EP}} = \mathcal{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

siendo  $c_\theta = \cos \theta$  y  $s_\theta = \sin \theta$ . La inversa de esta matriz viene dada por:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{PE}} = \mathcal{R}_{\mathcal{EP}}^T = \mathcal{R}_3(-\theta). \quad (1.25)$$

El sistema de referencia elegido para formular el problema del satélite depende del problema particular que estemos tratando. Para clarificar el tratamiento del problema en uno u otro sistema usaremos, a lo largo de esta memoria, la notación introducida en las ecuaciones (1.8) y (1.11). De esta forma, el vector de posición de un satélite será llamado  $\mathbf{x}$  o  $\mathbf{u}$  según se exprese en el sistema espacial o planetocéntrico

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^3 x_i \mathbf{e}_i \quad \text{o} \quad \mathbf{u} = \sum_{i=0}^3 u_i \mathbf{p}_i. \quad (1.26)$$

La transformación entre uno y otro vendrá dada por las expresiones:

$$\mathbf{x} = \mathcal{R}_{\mathcal{EP}} \mathbf{u} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \mathcal{R}_{\mathcal{PE}} \mathbf{x}. \quad (1.27)$$

<sup>11</sup>La definición de matriz de rotación no es unívoca. En muchos libros y artículos se utiliza otro convenio con el que se llama matriz de rotación a la traspuesta de la usada aquí.

<sup>12</sup>Una matriz ortogonal se caracteriza porque su inversa es igual a su traspuesta.

Para el vector velocidad tenemos cuatro elementos diferentes pues los vectores velocidad absoluta y relativa pueden expresarse en ambos sistemas de referencia. Llamaremos  $\mathbf{X}$  a la velocidad absoluta expresada en el sistema espacial, que se determinará como

$$\mathbf{X} = \sum_{i=0}^3 X_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=0}^3 \dot{x}_i \mathbf{e}_i, \quad (1.28)$$

mientras que  $\mathbf{U}$ , será la velocidad relativa en el sistema planetocéntrico

$$\mathbf{U} = \sum_{i=0}^3 U_i \mathbf{p}_i = \sum_{i=0}^3 \dot{u}_i \mathbf{p}_i. \quad (1.29)$$

La relación entre ambas velocidades, dada en la ecuación (1.18), es una relación vectorial que puede ponerse de dos maneras distintas según se exprese en el sistema espacial:

$$\mathbf{X} = \mathcal{R}_{\mathcal{EP}} (\mathbf{U} + \boldsymbol{\mathcal{W}} \cdot \mathbf{u}), \quad (1.30)$$

o en el sistema planetocéntrico:

$$\mathbf{U} = \mathcal{R}_{\mathcal{PE}} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mathcal{W}} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.31)$$

donde se ha tenido en cuenta que las componentes del vector velocidad angular,  $\boldsymbol{\omega}$ , coinciden en ambos sistemas.

## 1.3. Ecuaciones fundamentales

### 1.3.1. Ecuaciones del movimiento de un satélite artificial

Las ecuaciones (1.4), que describen el movimiento orbital de un satélite artificial, pueden ponerse como

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t; \mathbf{x}, \mathbf{X}), \quad (1.32)$$

o bien, reduciendo el orden del sistema, y expresándolo en sus componentes, se tendrá:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = X_i, \\ \dot{X}_i = F^i, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (1.33)$$

donde  $\mathbf{F}(t; \mathbf{x}, \mathbf{X}) = \sum_{i=0}^3 F^i \mathbf{e}_i$ , es la suma de la fuerza kepleriana y la de las perturbaciones orbitales y está expresada en el sistema de referencia espacial.

El teorema fundamental de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales garantiza que existe una y sólo una solución, dadas unas condiciones iniciales  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_0)$  en un instante de tiempo  $t = t_0 \in \mathbb{R}$ .

Alguna de las fuerzas que actúan sobre el satélite, por ejemplo, la fuerza de atracción gravitacional de un planeta no esférico, sólo puede ser calculada en términos de la posición y velocidad de éste en el sistema planetocéntrico, y referida al mismo. A estas fuerzas las representaremos en la forma  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t; \mathbf{u}, \mathbf{U}) = \sum_{i=0}^3 \mathcal{F}^i \mathbf{p}_i$ .

En estos casos, podemos expresar la ecuación (1.32) en la forma

$$\mathbf{U}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \mathcal{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{U}), \quad (1.34)$$

que viene de sustituir, en la ecuación (1.32), la fuerza  $\mathbf{F}$  por  $\mathcal{F}$  y la expresión de  $\ddot{\mathbf{x}}$  por la parte derecha de (1.20) expresada en el sistema planetocéntrico. El término que contiene  $\boldsymbol{\omega}'$  se anula por ser constante la velocidad angular. Estas ecuaciones, expresadas en sus componentes, nos conducen a:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = U_1, & \dot{U}_1 = u_1 \omega_\odot^2 + 2\omega_\odot U_2 + \mathcal{F}^1, \\ \dot{u}_2 = U_2, & \dot{U}_2 = u_2 \omega_\odot^2 - 2\omega_\odot U_1 + \mathcal{F}^2, \\ \dot{u}_3 = U_3, & \dot{U}_3 = \mathcal{F}^3, \end{cases} \quad (1.35)$$

que representan las ecuaciones del movimiento en un sistema rotante. Observemos que estas ecuaciones son las mismas que las del problema restringido circular, por lo que todos los métodos que iremos desarrollando en esta memoria se pueden extender a dicho problema.

Al igual que en un sistema espacial, podemos caracterizar la órbita para un sistema planetocéntrico. Así, a través de las relaciones anteriormente expuestas, tenemos que la órbita se podrá representar como  $\mathcal{O}(t_0, \mathbf{u}, \mathbf{U})$ , para unas condiciones iniciales dadas en el sistema planetocéntrico.

Para integrar el problema del satélite usaremos (1.33) o (1.35) en función de la expresión de las fuerzas que actúen sobre él. En ocasiones las fuerzas aparecerán mezcladas por lo que, antes de integrar, deberemos expresar todas las fuerzas en el mismo sistema, para ello, tendremos en cuenta las relaciones (1.27), (1.30) y (1.31) al igual que, para cualquier vector, la relación entre las fuerzas en ambos sistemas, con lo que obtendremos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{X}) &= \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} \mathcal{F}(t, \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}} \mathbf{x}, \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mathcal{W}} \cdot \mathbf{x})), \\ \mathcal{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{U}) &= \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}} \mathbf{F}(t, \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} \mathbf{u}, \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} (\mathbf{U} + \boldsymbol{\mathcal{W}} \cdot \mathbf{u})). \end{aligned} \quad (1.36)$$

La mayor parte de las fuerzas que aparecen en el problema del movimiento orbital son fuerzas conservativas que derivan de un potencial. Pondremos

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}) \quad \text{o} \quad \mathcal{F}(\mathbf{u}) = -\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{V}(\mathbf{u}), \quad (1.37)$$

según el sistema de referencia donde estén definidas. El potencial planetario es un ejemplo de potencial  $\mathcal{V}$  que se calcula en el sistema planetocéntrico. Si en el potencial planetario se consideran únicamente los armónicos zonales, entonces el potencial puede considerarse indistintamente como del tipo  $V$  o  $\mathcal{V}$ , pues su valor coincide al depender únicamente de la tercera componente del vector de posición. De esta forma, en la expresión (1.33) sustituiremos cada término  $F^i$  por su valor  $V_{x_i}$ , mientras que en (1.35) sustituiremos  $\mathcal{F}^i$  por su valor  $\mathcal{V}_{u_i}$ . Las relaciones entre las derivadas de la función potencial, necesarias para usar en las ecuaciones diferenciales cuando integramos en un sistema distinto al que se calcula el potencial, vendrá dada por<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}) &= \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} \nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{V}(\mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}} \mathbf{x}), \\ \nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{V}(\mathbf{u}) &= \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}} \nabla_{\mathbf{x}}V(\mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Cuando las fuerzas son conservativas, esto es, cuando existe una función  $V$  o  $\mathcal{V}$  que verifica (1.37), el sistema dinámico formulado en el sistema inercial posee la clásica integral de la energía

$$E = T + V = \frac{1}{2} \mathbf{X}^2 + V(\mathbf{x}), \quad (1.39)$$

que se transforma en la constante de Jacobi<sup>14</sup>

$$J = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})^2 - 2\mathcal{V}(\mathbf{u}) - \mathbf{U}^2, \quad (1.40)$$

cuando trabajamos en el sistema rotante.

<sup>13</sup>Es necesario clarificar en este punto una pequeña inconsistencia de notación que es fácilmente subsanable estableciendo un nuevo convenio. Hemos establecido anteriormente en el apartado 1.2.3 que en notación matricial un vector será considerado como una matriz columna, de manera que la expresión,  $\nabla_{\mathbf{x}}V$ , del gradiente y con ella las relaciones (1.37) y (1.38) se entienden como igualdades entre matrices columna. Por otro lado, si tenemos  $\mathbf{x}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m$ , con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , llamaremos matriz jacobiana, y la denotaremos con  $\mathbf{x}_{\mathbf{y}}$ , a la matriz  $m \times n$  cuyo elemento de la fila  $i$  y la columna  $j$  viene dado por  $\partial x_i / \partial y_j$ . De esta forma si  $\mathbf{y}$  es un escalar, por ejemplo el tiempo  $t$ , la matriz jacobiana,  $\mathbf{x}_t$  se transforma en una matriz columna ( $m \times 1$ ), mientras que si  $\mathbf{x}$  es un escalar, por ejemplo el potencial  $V$ , entonces  $V_{\mathbf{x}}$  será una matriz fila ( $1 \times n$ ) en contra de la definición anterior del gradiente como matriz columna. Para evitar esta contradicción usaremos de forma distinta, aunque representen lo mismo, los vectores  $V_{\mathbf{y}}$  y  $\nabla_{\mathbf{y}}V$ , y tendremos en cuenta que su relación viene dada por la expresión  $V_{\mathbf{y}}^T = \nabla_{\mathbf{y}}V$ .

<sup>14</sup>La demostración de que esta expresión es constante se deduce fácilmente del cálculo de su derivada y la comprobación de que, al aplicarle las relaciones (1.35), se obtiene un valor igual a cero.

Para sistemas conservativos se utiliza habitualmente una formulación hamiltoniana, en la que el movimiento en el sistema rotante viene caracterizado por un hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{U}) + \mathcal{V}(\mathbf{u}), \quad (1.41)$$

donde las componentes de  $\mathbf{u}$  representan las coordenadas, que corresponden a la posición expresada en el sistema rotante, mientras que las componentes del vector  $\mathbf{U}$  son sus momentos asociados.

Las ecuaciones de Hamilton se expresarán en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{U} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \\ \mathbf{U}' &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} - \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

y, como puede observarse, no coinciden con las ecuaciones (1.35) que describen el movimiento en el sistema relativo. Para comprender esta discrepancia basta observar la primera de las expresiones (1.42) y compararla con (1.31), donde  $\mathbf{U} = \mathbf{u}'$ , lo que lleva a concluir que el vector  $\mathbf{U}$ , de momentos, coincide con  $\mathcal{R}_{\mathcal{PE}} \mathbf{X}$ , esto es la velocidad absoluta expresada en el sistema rotante y no con la velocidad relativa  $\mathbf{U}$ .

### 1.3.2. Ecuaciones variacionales

La matriz de transición de estado, esto es, la variación de las componentes de la solución del sistema con respecto a sus condiciones iniciales resulta de gran interés en la corrección y determinación de la estabilidad de las órbitas periódicas. El método de Lambert generalizado, que desarrollaremos en el capítulo 3, requiere también del uso de esta matriz, que será obtenida por integración de las ecuaciones variacionales del problema.

En este apartado plantearemos las ecuaciones variacionales del movimiento de un satélite. Para ello partiremos de las ecuaciones del problema como ecuaciones (autónomas o no) de orden uno:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}_0 = \tilde{\mathbf{y}}(t_0), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^6, \quad (1.43)$$

donde  $\mathbf{y}$  puede ser  $(\mathbf{x}, \mathbf{X})$  o  $(\mathbf{u}, \mathbf{U})$  según formulemos el problema en el sistema espacial o planetocéntrico respectivamente. La expresión de  $\mathbf{f}$  será distinta en cada caso.

Para encontrar la variación de la solución de (1.43) con respecto a las condiciones iniciales, derivaremos, con respecto a ellas, la propia ecuación (1.43) obteniéndose la ecuación

$$\dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{y}_0} = \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{y}_{\mathbf{y}_0}, \quad (1.44)$$

que, tras llamar  $\Phi = \mathbf{y}_{\mathbf{y}_0}$ , se transforma en

$$\dot{\Phi} = \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \cdot \Phi, \quad (1.45)$$

y representa la ecuación variacional del sistema (1.43).

Para obtener las ecuaciones variacionales en el sistema espacial tendremos en cuenta en primer lugar que

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{x}_0} & \mathbf{x}_{\mathbf{X}_0} \\ \mathbf{X}_{\mathbf{x}_0} & \mathbf{X}_{\mathbf{X}_0} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

mientras que, atendiendo a la expresión (1.33), tendremos

$$\mathbf{f}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{x}} & \mathbf{F}_{\mathbf{X}} \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

siendo  $\mathbf{O}$  e  $\mathbf{I}$  las matrices nulas e identidad de orden 3,  $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$  y  $\mathbf{F}_{\mathbf{X}}$ , respectivamente, las matrices de derivadas del vector fuerza respecto de la posición y de la velocidad expresadas en el sistema espacial.

Si el sistema es conservativo la fuerza deriva de un potencial  $V(\mathbf{x})$  y la matriz  $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}$  tomará la forma

$$\mathbf{f}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

siendo  $\mathbf{V}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$  la matriz hessiana de  $V$ .

En el sistema planetocéntrico tendremos que

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{u}_0} & \mathbf{u}_{\mathbf{U}_0} \\ \mathbf{U}_{\mathbf{u}_0} & \mathbf{U}_{\mathbf{U}_0} \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

mientras que, atendiendo a la expresión (1.35), tendremos

$$\mathbf{f}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathcal{F}_{\mathbf{u}} - \mathcal{W}^2 & \mathcal{F}_{\mathbf{U}} - 2\mathcal{W} \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

siendo,  $\mathbf{O}$  e  $\mathbf{I}$  las matrices nula e identidad de orden 3,  $\mathcal{F}_u$  y  $\mathcal{F}_U$ , respectivamente, las matrices de derivadas del vector fuerza respecto de la posición y de la velocidad expresadas en el sistema planetocéntrico, y  $\mathcal{W}$  la matriz (1.22), asociada a la rotación del sistema.

Si el sistema es conservativo la fuerza deriva de un potencial  $\mathcal{V}(\mathbf{u})$  y la matriz  $\mathbf{f}_y$  tomará la forma

$$\mathbf{f}_y = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathcal{V}_{uu} - \mathcal{W}^2 & -2\mathcal{W} \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

siendo,  $\mathcal{V}_{uu}$  la matriz hessiana de  $\mathcal{V}$ .

Las expresiones (1.36) y (1.38) permiten expresar la fuerza y el potencial en el sistema de referencia adecuado cuando la expresión de la fuerza o el potencial es calculada en un sistema distinto al de la formulación de las ecuaciones diferenciales o cuando se mezclan fuerzas o potenciales expresados en ambos sistemas. Con las ecuaciones variacionales podemos tener el mismo problema, por lo que debemos poder expresar las matrices  $\mathbf{F}_x$  y  $\mathbf{F}_X$ , en términos de  $\mathcal{F}_u$  y  $\mathcal{F}_U$  y viceversa, así como  $\mathcal{V}_{x_y x}$ , en términos de  $\mathcal{V}_{u_y u}$ .

Para ello, si atendemos a la primera expresión dada en (1.36) obtendremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} (\mathcal{F}_u \cdot \mathbf{u}_x + \mathcal{F}_U \cdot \mathbf{U}_x), \\ \mathbf{F}_X &= \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} (\mathcal{F}_u \cdot \mathbf{u}_x + \mathcal{F}_U \cdot \mathbf{U}_x), \end{aligned} \quad (1.52)$$

donde debemos sustituir  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_X$ ,  $\mathbf{U}_x$  y  $\mathbf{U}_X$  por sus valores obtenidos por derivación de las relaciones (1.27), (1.30) y (1.31). Así, tendremos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x &= \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}}, & \mathbf{u}_X &= 0, \\ \mathbf{U}_x &= -\mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}} \cdot \mathcal{W}, & \mathbf{U}_X &= \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

por lo que finalmente, podremos poner

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} \cdot (\mathcal{F}_u - \mathcal{F}_U \cdot \mathcal{W}) \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}}, \\ \mathbf{F}_X &= \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} \cdot \mathcal{F}_U \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

así como,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u &= \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}} \cdot (\mathbf{F}_x + \mathbf{F}_X \cdot \mathcal{W}) \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}}, \\ \mathcal{F}_U &= \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}} \cdot \mathbf{F}_X \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Cuando las fuerzas derivan de un potencial tendremos las relaciones

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{x}\mathbf{x}} &= \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}} \cdot \mathcal{V}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}}, \\ \mathcal{V}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} &= \mathcal{R}_{\mathcal{P}\mathcal{E}} \cdot V_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{E}\mathcal{P}}, \end{aligned} \tag{1.56}$$

que se obtienen aplicando las propiedades del hessiano de una función.

La expresión de  $\mathbf{f}_y$ , dada por las ecuaciones (1.47), (1.48), (1.50) y (1.51), se obtiene de forma analítica para cada problema. Esto conduce a reformular las ecuaciones variacionales del problema del satélite en cada modelo de perturbación.

El método de diferenciación automática desarrollado en el siguiente capítulo (capítulo 2), permite el cálculo numérico de las derivadas, de cualquier orden, de una función cualquiera sin necesidad de sus expresiones analíticas ni de métodos aproximados. De esta forma, la formulación dada en este apartado nos permite obtener automáticamente las ecuaciones variacionales para cualquier modelo de perturbaciones.

---

## Capítulo 2

# Aplicación de la diferenciación automática a la evaluación de las perturbaciones orbitales

### 2.1. Diferenciación automática

El cálculo simbólico de la derivada de una función resulta, en general, una tarea relativamente sencilla, cuya mayor complicación radica en la complejidad de la expresión explícita de la función a derivar y de la propia derivada. Por otro lado, la obtención numérica de la derivada en un punto, basada en el método de las diferencias finitas, resulta mucho menos precisa que otros métodos numéricos. La técnica conocida como diferenciación automática permite simplificar notablemente la obtención del valor numérico de la derivada sin utilizar la expresión simbólica explícita de ésta, ni aplicar ninguna técnica numérica de aproximación.

La *diferenciación automática*, también conocida como diferenciación computacional o algorítmica es una herramienta mediante la cual, utilizando técnicas propias del cálculo simbólico, podemos construir, sin necesidad de aplicar ninguna técnica de aproximación, el valor numérico de la derivada de una función en un punto. Para ello la función a derivar debe descomponerse en una serie de operaciones y funciones elementales (e.g. suma, producto, sin, cos, log, exp), a las que poder aplicar sistemáticamente, y de forma numérica, la regla de la cadena, (Neidinger, 1992; Rall and Corliss, 1996; Tsukanov and Hall, 2003; Griewank and Walther, 2008).

Esta técnica puede también aplicarse al cálculo de derivadas parciales y de esta forma, aplicándola junto con propiedades sencillas de cálculo vectorial, extenderla para la obtención del gradiente de una función  $f(\mathbf{x})$  de varias variables, con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Para ello, llamando  $\nabla_{\mathbf{x}} f$  al vector de derivadas parciales de  $f$  respecto de  $\mathbf{x}$ , bastará extender las reglas de derivación basadas en la regla de la cadena al gradiente de una función, en la forma

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{x}}(uv) &= u \nabla_{\mathbf{x}} v + v \nabla_{\mathbf{x}} u, \\
 \nabla_{\mathbf{x}}(u+v) &= \nabla_{\mathbf{x}} u + \nabla_{\mathbf{x}} v, \\
 \nabla_{\mathbf{x}}(\alpha u) &= \alpha \nabla_{\mathbf{x}} u, \\
 \nabla_{\mathbf{x}}(u^\alpha) &= \alpha u^{\alpha-1} \nabla_{\mathbf{x}} u, \\
 \nabla_{\mathbf{x}}(\sin u) &= \cos u \nabla_{\mathbf{x}} \sin u, \\
 \nabla_{\mathbf{x}}(\cos u) &= -\sin u \nabla_{\mathbf{x}} \cos u,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde,  $\alpha$  es un número real constante,  $u$  y  $v$  funciones de  $\mathbf{x}$ . Para poder evaluar el gradiente es necesario, al igual que para el cálculo de una derivada, la descomposición de la función en funciones y operaciones simples, unarias y binarias, para las que tengamos alguna relación como las dadas en (2.1).

A fin de ilustrar como opera en método de diferenciación automática para la evaluación de una función y su gradiente, consideremos la función  $f(x, y, z)$ , con  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , una función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por la expresión:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + z\sqrt{y} + 5z^2}{\sin x^2 + 3}. \tag{2.2}$$

En la parte izquierda del esquema (2.3) vemos una sucesión de expresiones  $s_i$ , con  $i = 1, \dots, 14$  que sucesivamente evaluadas, partiendo de los valores de  $s_1 = x$ ,  $s_2 = y$ ,  $s_3 = z$ , permiten llegar finalmente a la expresión de  $s_{14}$ , que representa la función  $f$ . Observemos que dicho esquema de evaluación es óptimo en el sentido de que no se repite ninguna operación.

Por ejemplo, en la función aparece dos veces el término  $x^2$ , una en el numerador y otra en el denominador, en el esquema de evaluación este término se calcula una única vez en  $s_4$  y, su valor se usa posteriormente en el cálculo del denominador,  $s_{10}$ , y el numerador,  $s_{12}$ . La obtención de un esquema de cálculo eficiente, que efectúe el número mínimo de operaciones, constituye una parte muy importante del esquema de evaluación.

El siguiente esquema muestra como puede realizarse la evaluación de la función,

así como la evaluación de su gradiente.

$$\begin{array}{llll}
s_1 & \leftarrow x, & \nabla_{\mathbf{x}} s_1 & \leftarrow (1, 0, 0), \\
s_2 & \leftarrow y, & \nabla_{\mathbf{x}} s_2 & \leftarrow (0, 1, 0), \\
s_3 & \leftarrow z, & \nabla_{\mathbf{x}} s_3 & \leftarrow (0, 0, 1), \\
s_4 = x^2 & \leftarrow s_1 s_1, & \nabla_{\mathbf{x}} s_4 & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(s_1 s_1), \\
s_5 = \sqrt{y} & \leftarrow s_2^{(1/2)}, & \nabla_{\mathbf{x}} s_5 & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(s_2^{(1/2)}), \\
s_6 = z^2 & \leftarrow s_3 s_3, & \nabla_{\mathbf{x}} s_6 & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(s_3 s_3), \\
s_7 = 5z^2 & \leftarrow 5s_6, & \nabla_{\mathbf{x}} s_7 & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(5s_6), \\
s_8 = z\sqrt{y} & \leftarrow s_3 s_5, & \nabla_{\mathbf{x}} s_8 & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(s_3 s_5), \\
s_9 = \sin x^2 & \leftarrow \sin s_4, & \nabla_{\mathbf{x}} s_9 & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(\sin s_4), \\
s_{10} = \sin x^2 + 3 & \leftarrow s_9 + 3, & \nabla_{\mathbf{x}} s_{10} & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(s_9 + 3), \\
s_{11} = 1/(\sin x^2 + 3) & \leftarrow s_{10}^{(-1)}, & \nabla_{\mathbf{x}} s_{11} & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(s_{10}^{(-1)}), \\
s_{12} = x^2 + z\sqrt{y} & \leftarrow s_4 + s_8, & \nabla_{\mathbf{x}} s_{12} & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(s_4 + s_8), \\
s_{13} = x^2 + z\sqrt{y} + 5z^2 & \leftarrow s_8 + s_7, & \nabla_{\mathbf{x}} s_{13} & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(s_8 + s_7), \\
s_{14} = (x^2 + z\sqrt{y} + 5z^2)/(\sin x^2 + 3) & \leftarrow s_{13} s_{11}, & \nabla_{\mathbf{x}} s_{14} & \leftarrow \nabla_{\mathbf{x}}(s_{13} s_{11}).
\end{array} \tag{2.3}$$

Si en lugar de comenzar con  $s_1 = x, s_2 = y, s_3 = z$ , comenzamos con valores numéricos en lugar de  $(x, y, z)$  el resultado final será el valor de la función  $f$  evaluada para esos valores numéricos. Este esquema, que permite evaluar esta función de forma eficiente, puede extenderse a la evaluación de cualquier operador del que conozcamos las reglas de evaluación para las funciones elementales en que se descompone  $f$ .

Las expresiones (2.1) extienden a este caso el operador gradiente, lo que permite calcular el valor del gradiente de la función sin más que aplicar el mismo esquema con este operador. Para ello, como se ve en la parte derecha de (2.3) partiremos del valor del gradiente de las variables, esto es  $\nabla_{\mathbf{x}} x = (1, 0, 0)$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}} y = (0, 1, 0)$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}} z = (0, 0, 1)$ , y continuaremos el mismo esquema de evaluación hasta llegar al gradiente de la función. En este caso las relaciones (2.1) dependen tanto del gradiente como del valor de las funciones por lo que para obtener el resultado final debe calcularse, en primer lugar, la parte izquierda de (2.3), y con estos valores evaluar, posteriormente la parte derecha.

En lo que sigue generalizaremos este proceso para extenderlo al cálculo de las derivadas parciales de cualquier orden y, al contrario de lo que se ha explicado hasta aquí, realizar en cada paso, para cada  $s_i$ , el cálculo simultáneo de la función  $s_i$  y todas sus derivadas hasta el orden deseado. Para ello en primer lugar introduciremos la notación que nos ayudará en este proceso.

Sea  $f(\mathbf{x})$  una función diferenciable, donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , entonces usaremos el vector  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$ , para denotar el índice que representa la derivada parcial :

$$f_{\mathbf{i}} = \frac{\partial^{\mathcal{O}(\mathbf{i})} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}}, \quad (2.4)$$

donde,  $\mathcal{O}(\mathbf{i}) = i_1 + i_2 + \dots + i_n$ , corresponde al orden de la derivada. De esta forma, el conjunto de los índices de todas las derivadas hasta el orden  $o \in \mathbb{N}$ , quedará definido por

$$\mathcal{I}(o) = \{\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n) \mid \mathcal{O}(\mathbf{i}) \leq o, 0 \leq i_j \leq o\}. \quad (2.5)$$

Podemos definir en este conjunto por una relación de orden total, tal que:

$$\mathbf{i} \prec \mathbf{j} \iff \begin{cases} \mathcal{O}(\mathbf{i}) < \mathcal{O}(\mathbf{j}), \\ \mathcal{O}(\mathbf{i}) = \mathcal{O}(\mathbf{j}), \quad i_k = j_k, \quad k = 0, \dots, m, \quad i_{m+1} < j_{m+1}. \end{cases}$$

Esta relación de orden nos permite identificar cualquier vector  $\mathbf{i}$  con un número entero entre 0 y  $\text{card}(\mathcal{I}(o))^1$ .

Dados dos elementos,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ , o índices de  $\mathcal{I}(o)$ , diremos, de aquí en adelante que:

- $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ , es el índice correspondiente al vector  $(i_1 - j_1, i_2 - j_2, \dots, i_n - j_n)$ .
- $\mathbf{i} \leq \mathbf{j} \iff i_k \leq j_k, k = 1, 2, \dots, n$ . Esto representa una nueva relación de orden, usada en la proposición 2.1, que da el conjunto de las derivadas parciales necesarias para evaluar una en particular.
- $\binom{\mathbf{i}}{\mathbf{j}} = \binom{i_1}{j_1} \binom{i_2}{j_2} \dots \binom{i_n}{j_n}$ .
- $\mathbf{i}^* = \mathbf{i} - \mathbf{1}_k$ , donde  $\mathbf{1}_k$ , es un vector con todos sus elementos igual a 0, excepto el  $k$ -ésimo elemento que es igual a 1.  $k$  puede ser cualquiera de las componentes distintas de cero del vector  $\mathbf{i}$ . Tsukanov and Hall (2003) muestran que la mejor elección para  $k$  es la posición del mínimo de las componentes  $\mathbf{i}$  distintas de cero.

Con la notación introducida para representar el conjunto de los índices de las derivadas, podemos agrupar todas las derivadas parciales de la función  $f(\mathbf{x})$ , hasta un orden de derivada  $o \in \mathbb{N}$ , en un conjunto que las represente. Para ello, definimos el conjunto de vectores de derivadas parciales de una función como:

$$\mathcal{D}_o(f) = \{f_{\mathbf{0}}, f_1, \dots, f_{\mathbf{i}}, \dots, f_{\mathbf{\ell}}\},$$

<sup>1</sup>Cardinalidad o número de elementos del conjunto  $\mathcal{I}(o)$ .

donde,  $f_{\mathbf{0}}$  corresponde a la función  $f$ , y con  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{i}$  y  $\ell$  representando el primer,  $\mathbf{i}$ -ésimo y último elemento del conjunto ordenado  $\mathcal{I}(o)$ . Podemos notar que el subíndice  $\ell$  es igual a  $\text{card}(\mathcal{I}(o)) - 1$ .

Así, una vez que tengamos la función descompuesta en sus operaciones elementales podemos aplicar las reglas de diferenciación a cualquier orden de derivadas. De esta manera, tenemos las siguientes proposiciones cuyas demostraciones pueden encontrarse en (Neidinger, 1992; Tsukanov and Hall, 2003; Griewank and Walther, 2008; Abad et al., 2012).

**Proposición 2.1** *Supongamos tres funciones  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , y*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_o(\mathcal{U}) &= \{\mathcal{U}_{\mathbf{0}}, \mathcal{U}_{\mathbf{1}}, \dots, \mathcal{U}_{\mathbf{i}}, \dots, \mathcal{U}_{\ell}\}, \\ \mathcal{D}_o(\mathcal{V}) &= \{\mathcal{V}_{\mathbf{0}}, \mathcal{V}_{\mathbf{1}}, \dots, \mathcal{V}_{\mathbf{i}}, \dots, \mathcal{V}_{\ell}\}, \\ \mathcal{D}_o(\mathcal{W}) &= \{\mathcal{W}_{\mathbf{0}}, \mathcal{W}_{\mathbf{1}}, \dots, \mathcal{W}_{\mathbf{i}}, \dots, \mathcal{W}_{\ell}\},\end{aligned}$$

*sus vectores de derivadas. Entonces tendremos:*

- Si  $\mathcal{W} = \alpha\mathcal{U} + \beta\mathcal{V}$ , el  $\mathbf{i}$ -ésimo elemento del vector  $\mathcal{D}_o(\mathcal{W})$  vendrá dado por

$$\mathcal{W}_{\mathbf{i}} = \alpha\mathcal{U}_{\mathbf{i}} + \beta\mathcal{V}_{\mathbf{i}}.$$

- Si  $\mathcal{W} = \mathcal{U}\mathcal{V}$ , el  $\mathbf{i}$ -ésimo elemento del vector  $\mathcal{D}_o(\mathcal{W})$  vendrá dado por

$$\mathcal{W}_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{v} \leq \mathbf{i}} \binom{\mathbf{i}}{\mathbf{v}} \mathcal{U}_{\mathbf{v}} \mathcal{V}_{\mathbf{i}-\mathbf{v}}.$$

- Si  $\mathcal{W} = \mathcal{U}^\alpha$ ,  $\alpha \neq 0$ , el  $\mathbf{i}$ -ésimo elemento del vector  $\mathcal{D}_o(\mathcal{W})$  vendrá dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\mathbf{0}} &= \mathcal{U}_{\mathbf{0}}^\alpha, \\ \mathcal{W}_{\mathbf{i}} &= \frac{1}{\mathcal{U}_{\mathbf{0}}} \sum_{\mathbf{v} \leq \mathbf{i}^*} \binom{\mathbf{i}^*}{\mathbf{v}} (\alpha \mathcal{W}_{\mathbf{v}} \mathcal{U}_{\mathbf{i}-\mathbf{v}} - \mathcal{U}_{\mathbf{v}} \mathcal{W}_{\mathbf{i}-\mathbf{v}}).\end{aligned}$$

Considerando las mismas condiciones de la proposición 2.1, se puede extender las reglas de la diferenciación automática para funciones elementales como el sin y el cos. Para estas funciones tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.2** *Considerando las mismas condiciones de la proposición 2.1, si  $\mathcal{V} = \sin \mathcal{U}$  y  $\mathcal{W} = \cos \mathcal{U}$ , entonces el  $\mathbf{i}$ -ésimo elemento de los vectores  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V})$  y  $\mathcal{D}_o(\mathcal{W})$  está dado por las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \sin \mathcal{U}_0, & \mathcal{W}_0 &= \cos \mathcal{U}_0, \\ \mathcal{V}_i &= \sum_{\mathbf{v} \leq \mathbf{i}^*} \binom{\mathbf{i}^*}{\mathbf{v}} \mathcal{W}_{\mathbf{v}} \mathcal{U}_{\mathbf{i}-\mathbf{v}}, & \mathcal{W}_i &= -\sum_{\mathbf{v} \leq \mathbf{i}^*} \binom{\mathbf{i}^*}{\mathbf{v}} \mathcal{V}_{\mathbf{v}} \mathcal{U}_{\mathbf{i}-\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

En esta proposición se observa que el cálculo de las derivadas de la funciones seno y coseno debe ser simultáneo, pues no se puede obtener uno sin el otro.

En lo que sigue aplicaremos las anteriores proposiciones a funciones de tres o seis variables. En la tabla 2.1 se muestran los conjuntos de índices necesarios para realizar todo el proceso de cálculo de derivadas hasta orden tres para funciones de tres variables. La primera columna presenta los índices de las derivadas correspondientes hasta el tercer orden de la función. La segunda muestra el número entero, asignado por la relación de orden total al vector  $\mathbf{i}$ . En la tercera, cuarta y quinta aparecen, respectivamente, los índices  $\mathbf{i}^*$ , los coeficientes  $\{\binom{\mathbf{i}}{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v} \leq \mathbf{i}\}$ , y el conjunto de los índices  $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \leq \mathbf{i}\}$ .

## 2.2. Potencial gravitacional de un planeta

El potencial gravitacional de un planeta<sup>2</sup> de masa  $M_\odot$  que actúa sobre un punto material externo (orbitador) definido en un sistema de coordenadas esféricas, puede ser representado por armónicos esféricos (Heiskanen and Moritz, 1967; Torge, 2001; Abad, 2012) a través de la expresión

$$\mathcal{V}(r, \lambda, \psi) = -\frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r_p}{r}\right)^n \left[ \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi) \right], \quad (2.6)$$

siendo,  $r$ ,  $\lambda$  y  $\psi$  las coordenadas planetocéntricas, o coordenadas polares esféricas relativas al sistema planetocéntrico,  $\mu = \mathcal{G}M_\odot$  el parámetro gravitacional del planeta, definido a partir de la constante de gravitación universal,  $\mathcal{G}$ , y la masa del planeta,  $M_\odot$ ,  $r_p$  el radio medio ecuatorial del planeta y finalmente  $P_{nm}$  los polinomios asociados de Legendre. Los índices  $n, m \in \mathbb{N}$  son llamados, respectivamente, grado y orden.

<sup>2</sup>Podemos extender los resultados de este apartado a cualquier cuerpo sólido que actúe como cuerpo central de una órbita, p. e. la Luna.

**Tabla 2.1:** Índices de las derivadas parciales (hasta orden tres) y sus valores asociados para una función de tres variables.

$(i_1, i_2, i_3)$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}^*$	$\{(\mathbf{i}) \mathbf{v} \leq \mathbf{i}\}$	$\{\mathbf{v} \mathbf{v} \leq \mathbf{i}\}$
(0,0,1)	1	0	{1, 1}	{0, 1}
(0,1,0)	2	0	{1, 1}	{0, 2}
(1,0,0)	3	0	{1, 1}	{0, 3}
(0,0,2)	4	1	{1, 2, 1}	{0, 1, 4}
(0,1,1)	5	1	{1, 1, 1, 1}	{0, 1, 2, 5}
(0,2,0)	6	2	{1, 2, 1}	{0, 2, 6}
(1,0,1)	7	1	{1, 1, 1, 1}	{0, 1, 3, 7}
(1,1,0)	8	2	{1, 1, 1, 1}	{0, 2, 3, 8}
(2,0,0)	9	3	{1, 2, 1}	{0, 3, 9}
(0,0,3)	10	4	{1, 3, 3, 1}	{0, 1, 4, 10}
(0,1,2)	11	4	{1, 2, 1, 1, 2, 1}	{0, 1, 2, 4, 5, 11}
(0,2,1)	12	6	{1, 1, 2, 2, 1, 1}	{0, 1, 2, 5, 6, 12}
(0,3,0)	13	6	{1, 3, 3, 1}	{0, 2, 6, 13}
(1,0,2)	14	4	{1, 2, 1, 1, 2, 1}	{0, 1, 3, 4, 7, 14}
(1,1,1)	15	5	{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}	{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 15}
(1,2,0)	16	6	{1, 2, 1, 1, 2, 1}	{0, 2, 3, 6, 8, 16}
(2,0,1)	17	9	{1, 1, 2, 2, 1, 1}	{0, 1, 3, 7, 9, 17}
(2,1,0)	18	9	{1, 1, 2, 2, 1, 1}	{0, 2, 3, 8, 9, 18}
(3,0,0)	19	9	{1, 3, 3, 1}	{0, 3, 9, 19}

### 2.2.1. Modelos gravitacionales

Los términos  $C_{nm}$  y  $S_{nm}$ , que aparecen en la expresión (2.6), son llamados *armónicos* del potencial o coeficientes de Stokes y representan un conjunto de constantes (adimensionales) que caracterizan un sólido y cuyo valor puede obtenerse por medio de las integrales siguientes:

$$C_{nm} = \frac{(2 - \delta_{0m})(n - m)!}{M_{\odot}(n + m)!} \int_{M_{\odot}} \left(\frac{s}{r_p}\right)^n P_{nm}(\sin \psi') \cos m\lambda' dM, \quad (2.7)$$

$$S_{nm} = \frac{(2 - \delta_{0m})(n - m)!}{M_{\odot}(n + m)!} \int_{M_{\odot}} \left(\frac{s}{r_p}\right)^n P_{nm}(\sin \psi') \sin m\lambda' dM, \quad (2.8)$$

donde,  $s$ ,  $\lambda'$  y  $\psi'$  corresponden a las coordenadas planetocéntricas de cualquier elemento diferencial de masa ( $dM$ ) del planeta, y  $\delta_{0m}$  la función delta de Kronecker que será igual a 1, cuando  $m = 0$  y a 0, cuando  $m \neq 0$ .

Entre todos los coeficientes presentados en (2.7) y (2.8) podemos distinguir aquellos para los que  $m$  es 0. De la ecuación (2.8) se tiene que  $S_{n0} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , por lo que, para  $m = 0$ , se tendrán únicamente los coeficientes  $J_n = -C_{n0}$ , que serán llamados *armónicos zonales*. Los armónicos zonales representan la distinta distribución de masas del planeta en cada zona o sección entre dos paralelos de latitud dada. En general, el término más importante es el segundo armónico  $J_2$  que indica el achatamiento o la no esfericidad del planeta.

El resto de términos  $C_{nm}, S_{nm}$ , para  $m \neq 0$  son llamados *armónicos teserales* y representan la distribución de masas del planeta en cada sección comprendida entre dos latitudes y dos longitudes. Una descripción detallada de las propiedades de los armónicos del potencial gravitatorio puede encontrarse en Kaula (1966); Milani et al. (1987); Vallado (2001); Chia-Chun (2005) y Abad (2012).

La propagación de una órbita a partir de las ecuaciones (1.33) o (1.35) requiere la evaluación de las derivadas de la expresión (2.6). La precisión obtenida en la evaluación de la fuerza gravitacional producida por un planeta depende del número de términos que se tomen en los sumatorios de la expresión (2.6) y de la precisión con que se conozcan los armónicos del planeta. Obviamente no podemos conocer los infinitos armónicos, por lo que definiremos y trabajaremos, para un planeta dado, con un modelo gravitacional  $N \times M$  (grado  $N$  y orden  $M$ ) definido por un conjunto finito de coeficientes de Stokes<sup>3</sup> en la forma:

$$\{C_{nm}, S_{nm} \mid n = 0, \dots, N, \quad m = 0, \dots, M\}, \quad (2.9)$$

donde  $N, M \in \mathbb{N}$  representan, respectivamente, el grado y orden del modelo. Puesto que la distribución interna de masas de un planeta es desconocida, los armónicos no pueden ser calculados a través de las expresiones (2.7) y (2.8), por lo que es necesario su cálculo a partir de las observaciones de las órbitas de los satélites artificiales.

Los datos arrojados por el Sputnik-1 después de su lanzamiento en 1957, permitieron a King-Hele, (King-Hele, 1958a,b), obtener valores para el coeficiente  $J_2$  con una precisión de 4 dígitos, mejorando así el que se tenía para este coeficiente hasta 1958. Poco después, con los datos del satélite Vanguard-1 en 1958, se pudo obtener el valor del término zonal  $J_3$ , el cual indica la asimetría norte-sur del planeta. Desde ese momento se ha avanzado mucho en el conocimiento del potencial terrestre

---

<sup>3</sup>En realidad los modelos presentan, en lugar de los armónicos  $C_{nm}, S_{nm}$ , los armónicos normalizados  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  que serán definidos más adelante. Simultáneamente a la obtención de los armónicos se determinan también los valores del parámetro orbital  $\mu$  y el radio ecuatorial medio  $r_p$  del planeta que son ajustados y presentados junto con el modelo.

aumentando progresivamente el grado y orden de los modelos del geopotencial, que ha mejorado notablemente con las últimas misiones GRACE, lanzada en el 2002, y GOCE, en el 2009.

Para obtener las medidas de los coeficientes de forma indirecta, fundamentalmente se tienen tres técnicas que se han utilizado, en combinación, para los distintos modelos gravitacionales existentes. La primera de ellas se basa en realización de observaciones y seguimiento de satélites desde estaciones terrenas, a partir de las perturbaciones que sufre la órbita causada por el campo gravitacional, de ahí una de las razones importantes para conocer la fuerza gravitacional. La segunda forma es mediante el uso de gravitómetros, que miden la aceleración gravitacional de forma local sobre la superficie. La tercera es mediante altímetros acoplados en satélites que una vez en órbita logran medir el nivel medio de la superficie del mar. Esta última técnica es la más utilizada y ha sido aplicada en las dos últimas misiones espaciales de los satélites mencionados anteriormente.

Los modelos gravitacionales, en el caso del planeta Tierra, han evolucionado a lo largo de estas últimas cinco décadas conforme han evolucionado las misiones espaciales. Los datos obtenidos se han combinado para generar los modelos con altas precisiones. En la tabla 2.2, se puede apreciar la evolución en el tiempo, con un crecimiento progresivo del grado y orden del modelo, de los más importantes modelos gravitacionales terrestres.

Entre los modelos más usados y conocidos actualmente tenemos el JGM-3 (Tapley et al., 1996) desarrollado por la Universidad de Texas, el cual alcanza grado y orden igual a 70, por lo que su tamaño es de  $70 \times 70$  coeficientes. El modelo EGM96 (Lemoine et al., 1998) fue desarrollado en colaboración con el National Imagery and Mapping Agency (NIMA), NASA Goddard Space Flight Center (GSFC), y la Universidad Estatal de Ohio y consta de  $360 \times 360$  coeficientes completos. El modelo gravitacional más reciente y completo es el EGM2008 (Pavlis et al., 2012) que es un modelo de  $2190 \times 2159$ . Los datos del modelo EGM2008 han sido los mejores datos obtenidos hasta la fecha y provienen del satélite GOCE.

Cada uno de los modelos gravitacionales está construido por el conjunto de coeficientes armónicos obtenidos por las diferentes técnicas señaladas previamente. Ya que estos coeficientes están asociados a los valores de la constante de gravitación  $\mu$ , el radio medio planetario  $r_p$  y en última instancia del achatamiento del planeta  $f_p$ ,

**Tabla 2.2:** Modelos gravitacionales más destacados del planeta Tierra.

Modelo	Año	$N \times M$	Referencia
J2	1957	$2 \times 0$	(Jacchia, 1958).
Kozai	1961	$3 \times 0$	(Kozai, 1961).
Kaula	1966	$4 \times 0$	(Kaula, 1966).
GEM-1	1972	$12 \times 12$	(Lerch et al., 1972).
GEM-9	1977	$20 \times 20$	(Lerch et al., 1979).
GEM-10B	1981	$36 \times 36$	(Lerch et al., 1981).
GRIM3-L1	1983	$36 \times 36$	(Reigber et al., 1985).
GRIM4-S2	1990	$50 \times 50$	(Reigber et al., 1993).
GEM-T3	1994	$50 \times 50$	(Lerch et al., 1994).
EGM96S	1996	$70 \times 70$	(Lemoine et al., 1996).
JGM-3	1996	$70 \times 70$	(Tapley et al., 1996).
EGM96	1998	$360 \times 360$	(Lemoine et al., 1998).
GRIM5-C1	2000	$121 \times 121$	(Gruber et al., 2000).
EGM2008	2012	$2190 \times 2159$	(Pavlis et al., 2012).

y por tanto en cada modelo los coeficientes tendrán valores diferentes, con mayor o menor precisión.

No solo se han logrado obtener modelos gravitacionales para la Tierra, sino también para otros cuerpos celestes como la Luna, Marte, Venus, entre otros, con diferentes misiones espaciales en cada caso. Para la Luna se tiene el GLGM-2, (Lemoine et al., 1997) construido de los datos de la misión Clementine y, que posteriormente se mejoró con el modelo LP75D, (Konopliv et al., 1998), de tamaño  $75 \times 75$ . Actualmente el modelo más utilizado es el LP165P, (Konopliv et al., 2001), siendo este el más completo de tamaño  $165 \times 165$ . El caso del planeta Marte se obtuvo, en primer lugar, el modelo GMM-1, (Smith et al., 1993), de tamaño  $50 \times 50$ , y posteriormente el GMM-2B, (Lemoine et al., 2001), de tamaño  $80 \times 80$ . Este último ha sido mejorado obteniéndose el MGM1025, (Neumann et al., 2003). Por último en el caso de Venus tenemos los modelos MGNP120P, (Konopliv and Yoder, 1996) y MGMP180U, (Konopliv et al., 1999), de tamaños 120 y 180, respectivamente.

Es importante resaltar de la tecnología en la precisión del cálculo de los armónicos. En las próximas décadas se tendrán modelos para otros cuerpos celestes que actualmente son de interés en la comunidad científica como son los casos de Europa, luna de Júpiter, y Encelado y Titán, lunas de Saturno. De igual forma se mejorarán

los modelos existentes en cada caso, como el caso de la Luna con la misión espacial MoonLITE<sup>4</sup> prevista para el año 2014.

### 2.2.2. Esquema de cálculo del potencial gravitatorio de un planeta

El método de diferenciación automática calcula las derivadas de una función a partir del mismo esquema de cálculo de la función, extendiendo a vectores las operaciones escalares realizadas en la evaluación de la función. Por esta razón analizaremos con detalle el cálculo del potencial gravitatorio y construiremos un esquema de cálculo eficiente que optimice éste para conseguir, no solo un mínimo número de operaciones, sino también un algoritmo paralelizable y de esta forma poder mejorar los tiempos de cálculo usando técnicas informáticas de paralelización.

La expresión (2.6), que define al potencial gravitatorio, puede ponerse en la forma

$$\mathcal{V}(r, \lambda, \psi) = \mathcal{V}_K + \mathcal{V}_P, \quad \mathcal{V}_P = -\frac{\mu}{r_p} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^{\min(n,M)} \mathcal{V}_{nm}, \quad (2.10)$$

donde se tiene que

$$\mathcal{V}_{nm}(r, \lambda, \psi) = \left(\frac{r_p}{r}\right)^{n+1} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi). \quad (2.11)$$

El sumando  $\mathcal{V}_K = V_K = -\mu/r$  es el *potencial kepleriano*<sup>5</sup> y representa el potencial que produciría la masa del sólido rígido al estar concentrada en el origen del sistema de coordenadas. El otro sumando,  $\mathcal{V}_P$ , representa el efecto de la no esfericidad y la no homogeneidad del planeta. El problema kepleriano (Battin, 1999; Abad, 2012), o problema del movimiento de una partícula bajo la acción de un potencial kepleriano, constituye la primera aproximación al movimiento orbital. El potencial  $\mathcal{V}_P$  representa una perturbación al movimiento kepleriano, cuya consideración, permite una mayor aproximación a la órbita de un satélite artificial respecto del planeta.

La expresión de cada término  $\mathcal{V}_{nm}$ , dada en (2.11), sugiere la necesidad de implementar un método de construcción iterativo que aproveche el cálculo de los términos de orden y grado menor y evite multiplicidades en el cálculo de algunos elementos.

<sup>4</sup>Misión en fase de desarrollo por el Reino Unido llamada The Moon Lightweight Interior and Telecoms Experiment.

<sup>5</sup>El valor del potencial kepleriano evaluado en el sistema espacial,  $V_K$ , es igual al evaluado en el sistema planetocéntrico,  $\mathcal{V}_K$ .

Para ello se construirá un algoritmo basado en las propiedades de las funciones circulares y los polinomios asociados de Legendre.

Los polinomios asociados de Legendre,  $P_{nm}$ , pueden ser sustituidos por las *funciones derivadas de Legendre*,  $Q_{nm}$ , (Lundberg and Schutzf, 1988), también llamadas *funciones de Helmholtz* (Balmino et al., 1991) a partir de las relaciones:

$$P_{nm}(t) = (1 - t^2)^{(m/2)} Q_{nm}(t), \quad Q_{nm}(t) = \frac{d^m}{dt^m} P_n(t), \quad (2.12)$$

donde, los  $P_n(t)$  son los propios polinomios de *Legendre*, (Danby, 1988). De esta forma, sustituyendo  $t$  por  $\sin \psi$ , podremos poner

$$P_{nm}(\sin \psi) = \cos^m \psi Q_{nm}(\sin \psi), \quad (2.13)$$

de donde, la expresión (2.11) se escribirá en la forma

$$\mathcal{V}_{nm} = \left(\frac{r_p}{r}\right)^{n+1} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \cos^m \psi Q_{nm}(\sin \psi). \quad (2.14)$$

Toda la formulación del potencial planetario ha sido efectuada en coordenadas polares esféricas, sin embargo, su evaluación, necesaria para integrar las ecuaciones del movimiento, dadas en el capítulo 1, debe ser efectuada en coordenadas cartesianas. Puesto que el potencial ha sido formulado en el sistema planetocéntrico usaremos el vector de posición  $\mathbf{u} = u \mathbf{p}_1 + v \mathbf{p}_2 + w \mathbf{p}_3$ , cuya relación con las coordenadas  $(r, \lambda, \psi)$  viene dada por

$$\begin{aligned} u &= r \cos \psi \cos \lambda, \\ v &= r \cos \psi \sin \lambda, \\ w &= r \sin \psi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

De esta forma podremos tratar la expresión de  $\mathcal{V}_{nm}$ , y como consecuencia la expresión de  $\mathcal{V}_P$ , como una función  $\mathcal{V}_P = \mathcal{V}_P(\mathbf{u})$ .

La relación (2.14) puede también ponerse en la forma

$$\mathcal{V}_{nm} = \rho_n (C_{nm} u_m + S_{nm} v_m) Q_{nm}(w_1), \quad (2.16)$$

donde,  $\rho_n, u_m, v_m$  y  $w$  están definidos por:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \left(\frac{r_p}{r}\right)^{(n+1)}, & w_1 &= \sin \psi = \frac{w}{r}, \\ u_m &= \cos m\lambda \cos^m \psi, & v_m &= \sin m\lambda \cos^m \psi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

La evaluación de cada elemento de la expresión (2.16) puede efectuarse de forma iterativa. Para ello, tendremos en cuenta, por un lado, la relación

$$\rho_0 = \frac{r_p}{r}, \quad \rho_n = \rho_{n-1} \rho_0, \quad (2.18)$$

para los términos  $\rho_n$ , mientras que para calcular  $u_m$ , y  $v_m$  haremos uso de las propiedades de las funciones circulares, que conducen a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, & v_0 &= 0, \\ u_1 &= u/r, & v_1 &= v/r, \\ u_m &= u_{m-1}u_1 - v_{m-1}v_1, & v_m &= v_{m-1}u_1 + u_{m-1}v_1, \quad m > 1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para completar la evaluación del potencial  $\mathcal{V}$  debemos sumar los términos  $\mathcal{V}_{nm}$ , lo que, teniendo en cuenta los valores entre los que varía el doble índice  $(n, m)$  puede hacerse de varias formas distintas. Para comprender esto mejor representaremos los términos  $\mathcal{V}_{nm}$  en una estructura bidimensional.

Con esta representación podemos ver, en primer lugar, que la suma de términos puede realizarse fila a fila (horizontalmente), o lo que es igual sumando cada vez todos los términos del mismo grado. Esta suma, que puede verse en la figura 2.1, se corresponde con la expresión dada por el doble sumatorio (2.10) o lo que es igual con la expresión (2.20), donde hemos llamado  $\mathcal{V}_n$  al término que representa la suma de todos los elementos de grado  $n$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V}_{20} & - & \mathcal{V}_{21} & - & \mathcal{V}_{22} & & \\ \mathcal{V}_{30} & \leftrightarrow & \mathcal{V}_{31} & \leftrightarrow & \mathcal{V}_{32} & \leftrightarrow & \mathcal{V}_{33} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\ \mathcal{V}_{n0} & - & \mathcal{V}_{n1} & - & \mathcal{V}_{n2} & - & \mathcal{V}_{n3} \quad \cdots \quad \mathcal{V}_{nn} \end{array} \quad \sum_{n=2}^N \mathcal{V}_n, \quad \mathcal{V}_n = \sum_{m=0}^{\min(n,M)} \mathcal{V}_{nm}, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_{30} + \mathcal{V}_{31} + \dots$$

**Figura 2.1:** Suma por grados (horizontal).

La suma puede realizarse también por columnas (verticalmente), o lo que es igual por órdenes, de esta forma tendremos el esquema mostrado en la figura 2.2. La suma por órdenes se representa por (2.21), donde hemos llamado  $\mathcal{V}_m$  a la suma de todos los elementos del orden  $m$ .

Finalmente, podemos sumar cada una de las diagonales en la forma en que se muestra en la figura 2.3. La suma por diagonales se representa por el sumatorio (2.22), donde hemos llamado  $\mathcal{V}_d$  a la suma de la diagonal  $d$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{V}_{20} & \mathcal{V}_{21} & \mathcal{V}_{22} & & & & \\
| & \updownarrow & | & & & & \\
\mathcal{V}_{30} & \mathcal{V}_{31} & \mathcal{V}_{32} & \mathcal{V}_{33} & & & \\
| & \updownarrow & | & | & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
| & \updownarrow & | & | & & & \\
\mathcal{V}_{n0} & \mathcal{V}_{n1} & \mathcal{V}_{n2} & \mathcal{V}_{n3} & \cdots & \mathcal{V}_{nn} & 
\end{array}
\quad \sum_{m=0}^M \mathcal{V}_m, \quad \mathcal{V}_m = \sum_{n=\max(2,m)}^N \mathcal{V}_{nm}, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_{21} + \mathcal{V}_{31} + \dots$$

**Figura 2.2:** Suma por órdenes (vertical).

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{V}_{20} & \mathcal{V}_{21} & \mathcal{V}_{22} & & & & \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & & & & \\
\mathcal{V}_{30} & \mathcal{V}_{31} & \mathcal{V}_{32} & \mathcal{V}_{33} & & & \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
\swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & \\
\mathcal{V}_{n0} & \mathcal{V}_{n1} & \mathcal{V}_{n2} & \mathcal{V}_{n3} & \cdots & \mathcal{V}_{nn} & 
\end{array}
\quad \sum_{d=0}^N \mathcal{V}_d, \quad \mathcal{V}_d = \sum_{i \geq \max(2,d)}^{\min(N, M+d)} \mathcal{V}_{i, i-d}, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_{20} + \mathcal{V}_{31} + \dots$$

**Figura 2.3:** Suma por diagonales.

Cualquiera de estas elecciones permitirá la evaluación del potencial planetario. Además si somos capaces de implementar cualquiera de ellas de manera que calcular un elemento (fila, columna o diagonal) sea independiente del cálculo de elementos del mismo tipo, entonces podremos construir un código que pueda ser paralelizado, con la consiguiente mejora en tiempo de CPU si lo ejecutamos en cualquier ordenador con múltiples procesadores y/o núcleos.

La elección de una u otra forma de sumar los términos  $\mathcal{V}_{nm}$  está fuertemente relacionada con el método de iteración elegido para evaluar las funciones derivadas de Legendre  $Q_{nm}$ . Según muestran Lundberg and Schutzf (1988) hay muchas fórmulas de recursión distintas para evaluar las estas funciones, sin embargo, imponiendo una serie de restricciones algebraicas, el número recursiones diferentes se reduce a siete, que pueden verse en la tabla 2.3.

Los coeficientes constantes  $\alpha_{nm}^i$  y  $\beta_{nm}^i$ , con  $i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  que acompañan a los dos términos en la combinación lineal de cada recurrencia dependen exclusivamente de los valores que tomen el grado y del orden. Cada  $\alpha_{nm}^i$  y  $\beta_{nm}^i$ , se muestra en la tabla 2.4 correspondiente a cada formulación de la tabla 2.3.

**Tabla 2.3:** Fórmulas de recurrencia para la evaluación de los  $Q_{nm}$ , para  $m < n - 1$ .

---



---

<b>I:</b>	$Q_{nm} =$	$\alpha_{nm}^1 t Q_{(n-1)m} - \beta_{nm}^1 Q_{(n-2)m},$
<b>II:</b>	$Q_{nm} =$	$\alpha_{nm}^2 t Q_{n(m+1)} + \beta_{nm}^2 (t^2 - 1) Q_{n(m+2)},$
<b>III:</b>	$Q_{nm} =$	$\alpha_{nm}^3 t Q_{(n-1)m} + \beta_{nm}^3 (t^2 - 1) Q_{(n-1)(m+1)},$
<b>IV:</b>	$Q_{nm} =$	$\alpha_{nm}^4 t Q_{n(m+1)} - \beta_{nm}^4 Q_{(n-1)(m+1)},$
<b>V:</b>	$Q_{nm} =$	$\alpha_{nm}^5 Q_{(n-2)m} + \beta_{nm}^5 (t^2 - 1) Q_{(n-1)(m+1)},$
<b>VI:</b>	$Q_{nm} =$	$\alpha_{nm}^6 Q_{(n-1)(m+1)} + \beta_{nm}^6 (t^2 - 1) Q_{n(m+2)},$
<b>VII:</b>	$Q_{nm} =$	$\alpha_{nm}^7 Q_{n(m+1)}/t + \beta_{nm}^7 (t^2 - 1) Q_{n(m+1)}.$

---

**Tabla 2.4:** Coeficientes  $\alpha_{nm}^i$  y  $\beta_{nm}^i$ , correspondientes a los siete esquemas de recurrencia de las funciones  $Q_{nm}$  con  $m < n - 1$  en la tabla 2.3.

---



---

<b>I:</b>	$\alpha_{nm}^1 = \frac{(2n-1)}{n-m},$	$\beta_{nm}^1 = \frac{(n+m-1)}{n-m},$
<b>II:</b>	$\alpha_{nm}^2 = \frac{2(m+1)}{(n-m)(n+m+1)},$	$\beta_{nm}^2 = \frac{1}{(n-m)(n+m+1)},$
<b>III:</b>	$\alpha_{nm}^3 = \frac{(n+m)}{(n-m)},$	$\beta_{nm}^3 = \frac{1}{(n-m)},$
<b>IV:</b>	$\alpha_{nm}^4 = \frac{1}{(n-m)},$	$\beta_{nm}^4 = \frac{1}{(n-m)},$
<b>V:</b>	$\alpha_{nm}^5 = \frac{(n+m)(n+m-1)}{(n-m-1)(n-m)},$	$\beta_{nm}^5 = \frac{(2n-1)}{(n-m-1)(n-m)},$
<b>VI:</b>	$\alpha_{nm}^6 = \frac{2(m+1)}{(n-m)(n-m-1)},$	$\beta_{nm}^6 = \frac{1}{(n-m)(n+m+1)},$
<b>VII:</b>	$\alpha_{nm}^7 = \frac{(n+m)}{(n-m)},$	$\beta_{nm}^7 = \frac{1}{(n-m)}.$

---

En todos los casos las recurrencias deben ser inicializadas por medio de las expresiones

$$Q_{nn} = (2n - 1) Q_{n-1,n-1} = (2n - 1)!!, \quad (2.23)$$

para los términos de la diagonal  $Q_{nn}$ , y con las expresiones

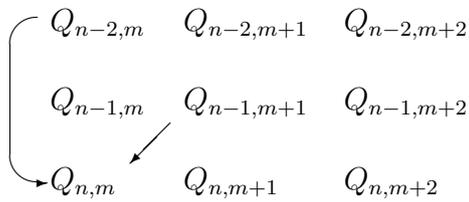
$$Q_{n(n-1)} = t Q_{nn} = (2n - 1) t Q_{n-1,n-1}, \quad (2.24)$$

para los términos de la subdiagonal  $Q_{n(n-1)}$ . Observemos que los términos de la diagonal son constantes numéricas que pueden obtenerse por iteración o bien direc-

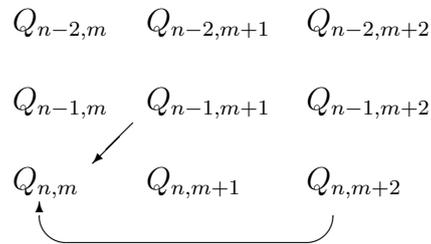
tamente a partir de la definición del doble factorial<sup>6</sup>, mientras que la subdiagonal se obtiene a partir del término anterior en la fila o en la columna.

De los siete esquemas de recurrencia de la tabla 2.3 eliminamos el esquema VII porque el término  $t$  aparece en el denominador de la expresión, lo que conducirá a una singularidad cuando intentemos evaluar la función  $Q_{nm}$  en el polo, esto es, para  $\sin \psi = 0$ .

Podemos ver en un gráfico bidimensional, figuras 2.4 y 2.5, como funcionan los esquemas V y VI. En ellos se observa que para calcular un elemento necesitamos otro un grado y orden menor y otro del mismo grado y dos órdenes anteriores (esquema V) y el mismo orden y dos grados anteriores (esquema VI).

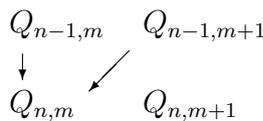


**Figura 2.4:** Esquema V.

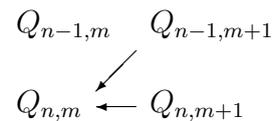


**Figura 2.5:** Esquema VI.

Para los esquemas III y IV las expresiones permiten calcular de forma más simple cada elemento disminuyendo en una unidad, en cada caso, el grado o el orden, como puede verse en las figuras 2.6 y 2.7.



**Figura 2.6:** Esquema III.



**Figura 2.7:** Esquema IV.

En cualquiera de estos casos para calcular un elemento necesitamos otros dos de alguna fila, columna o diagonal anterior (o posterior), de esta forma, estos esquemas de cálculo hacen depender el cálculo de cada fila (columna o diagonal) de otras filas (columnas o diagonales), por lo que el algoritmo no podrá ser paralelizado.

Los anteriores motivos nos permite excluir los esquemas III, IV, V, VI y VII, por lo que nos centraremos únicamente en los esquemas I y II. En las figuras 2.8 y 2.9, puede verse que en el esquema I se calcula cada elemento a partir de los anteriores

<sup>6</sup> $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) = (2n-1)(n-1)!!$ .

de su misma columna (mismo orden), mientras que en el esquema II cada elemento es calculado a partir de dos posteriores de su misma fila (mismo grado).

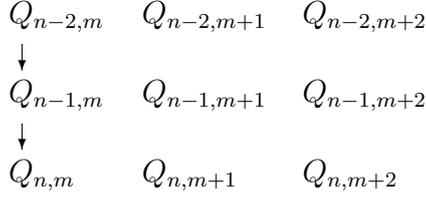


Figura 2.8: Esquema I.

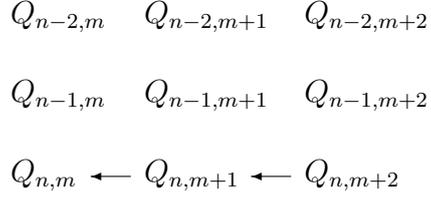


Figura 2.9: Esquema II.

Podemos extender la definición de las funciones derivadas de Legendre haciendo  $Q_{nm} = 0$ , con  $n < m$ . De esta forma, la relación (2.24) puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned}
 Q_{n(n-1)} &= (2n-1)t Q_{n-1,n-1} = \alpha_{n(n-1)}^1 t Q_{n-1,n-1} + \beta_{n(n-1)}^1 t Q_{n-2,n-1}, \\
 &= t Q_{nn} = \alpha_{n,n-1}^2 t Q_{n,n} + \beta_{n(n-1)}^2 (t^2 - 1) Q_{n,n+1},
 \end{aligned}$$

lo que equivale a extender las formulas de recursión I y II a todos los pares de índices  $(n, m)$  con  $m < n$ , e inicializar la recursión con los valores  $Q_{n-1,n} = 0$ ,  $Q_{nn} = (2n-1)!!$ , para  $n \geq 0$ . Con esta extensión, si combinamos el esquema I, con el método de suma por orden o el esquema II con el método de suma por grado podremos conseguir un código paralelo. No tendremos ninguna posible paralelización basada en la suma diagonal.

Por otro lado, se han realizado numerosos estudios sobre la estabilidad numérica de las formulaciones I y II. Por un lado, Wiggins and Saito (1971) y posteriormente por Olvers and Smith (1983) realizan dichos estudios aplicados a las recursiones de los polinomios asociados de Legendre. En el artículo de Lundberg and Schutzf (1988) y posteriormente Holmes and Featherstone (2002) demuestran que los esquemas I y II son también los más eficientes desde el punto de vista de su estabilidad numérica en la evaluación para órdenes altos, en particular el primero, por lo que el esquema I de recurrencia será el elegido para aplicar el algoritmo de diferenciación automática y calcular las derivadas del potencial.

El factor  $(n-m)!/(n+m)!$ , que está presente, de forma implícita, en las expresiones de  $Q_{nm}$ , hace que éste alcance magnitudes muy grandes para valores altos del orden  $n$ . Al mismo tiempo los valores de los armónicos  $C_{nm}$  y  $S_{nm}$  se hacen muy pequeños. La necesidad de operar simultáneamente con valores muy pequeños y muy grandes en la evaluación de los términos  $\mathcal{V}_{nm}$  produce una gran inestabilidad numérica en el proceso de cálculo del potencial y sus derivadas.

Podemos evitar este fenómeno introduciendo el factor de normalización  $N_{nm}$  (Kaula, 1966; Lorrell, 1969) definido por la siguiente expresión:

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{(2 - \delta_{0m})(2n + 1)(n - m)!}{(n + m)!}}, \quad (2.25)$$

donde  $\delta_{0m}$  representa la delta de Kronecker.

Mediante el factor  $N_{nm}$  podemos sustituir los elementos  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  y  $Q_{nm}$  por sus expresiones normalizadas definidas a partir de las relaciones

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{N_{nm}} \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}, \quad \bar{Q}_{nm}(t) = N_{nm}Q_{nm}(t), \quad (2.26)$$

mediante las cuales la expresión de  $\mathcal{V}_{nm}$  se pondrá como

$$\mathcal{V}_{nm} = \rho_n(\bar{C}_{nm}u_m + \bar{S}_{nm}v_m)\bar{Q}_{nm}(w_1). \quad (2.27)$$

Los valores  $\bar{C}$  y  $\bar{S}$  de los armónicos normalizados son los que normalmente presentan los modelos de potencial planetario, por lo que no deben ser transformados para la evaluación de  $\mathcal{V}$ .

El esquema I para el cálculo de las funciones derivadas normalizadas de Legendre se resume en las expresiones

$$\bar{Q}_{nm}(w) = \begin{cases} 0, & n < m, \\ 1, & n = m = 0, \\ \bar{\gamma}_m \bar{Q}_{m-1, m-1}, & n = m > 0, \\ \bar{\alpha}_{nm} w \bar{Q}_{n-1, m}(w) + \bar{\beta}_{nm} \bar{Q}_{n-2, m}(w), & n > m, \end{cases} \quad (2.28)$$

donde,  $\bar{\gamma}_m$  esta dado por

$$\bar{\gamma}_m = \delta_m \sqrt{\frac{2m+1}{2m}}, \quad \delta_m = \begin{cases} \sqrt{2}, & m = 1, \\ 1, & m \neq 1, \end{cases} \quad (2.29)$$

y los coeficientes  $\bar{\alpha}_{nm}$  y  $\bar{\beta}_{nm}$ , que antes llamábamos  $\bar{\alpha}_{nm}^1$  y  $\bar{\beta}_{nm}^1$ , pueden expresarse como

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{nm} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n-m)(n+m)}}, \\ \bar{\beta}_{nm} &= -\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(2n-3)(n-m)(n+m)}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$



En nuestro caso tenemos que

$$\mathcal{D}_o(\mathcal{V}) = \{\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_i, \dots, \mathcal{V}_\ell\},$$

siendo

$$\mathcal{V}_i = \frac{\partial^{\mathcal{O}(\mathbf{i})} \mathcal{V}}{\partial u^{i_1} \partial v^{i_2} \partial w^{i_3}}, \quad \text{o bien} \quad \mathcal{V}_i = \frac{\partial^{\mathcal{O}(\mathbf{i})} \mathcal{V}}{\partial r^{i_1} \partial \lambda^{i_2} \partial \psi^{i_3}}, \quad (2.31)$$

donde los índices  $\mathbf{i}$  representan los elementos del conjunto ordenado  $\mathcal{I}(o) = \{\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3) \mid \mathcal{O}(\mathbf{i}) \leq o, 0 \leq i_j \leq o\}$ .

Por el momento nos centraremos en el cálculo de las derivadas de  $\mathcal{V}$  con respecto a las coordenadas cartesianas  $(u, v, w)$ , expresión a la izquierda de (2.31). Para el cálculo de  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V})$  deberemos calcular por separado el vector  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_K)$  y el vector  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_P)$ .

La expresión del potencial kepleriano, dada por  $\mathcal{V}_K = -\mu/r$ , con  $r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ , permite un sencillo esquema para el cálculo de  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_K)$  que se muestra en la parte 1 del algoritmo GPDC.

---

**Algoritmo GPDC parte 1:** Cálculo de  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_K)$ , con respecto a las coordenadas  $(u, v, w)$ .

---

**Data:**  $\mu, u, v, w$ .

**Result:**  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_K)$ , con respecto a  $(u, v, w)$

$$\mathcal{D}_o(u) \leftarrow (u, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(v) \leftarrow (v, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(w) \leftarrow (w, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$s_1 \leftarrow \mathcal{D}_o(uu)$$

$$s_2 \leftarrow \mathcal{D}_o(vv)$$

$$s_3 \leftarrow \mathcal{D}_o(ww)$$

$$s_4 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_1 + s_2 + s_3)$$

$$\mathcal{D}_o(1/r) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_4^{-1/2})$$

$$\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_K) \leftarrow \mathcal{D}_o(-\mu(1/r))$$


---

Además del elemento  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_K)$ , con esta parte del algoritmo se han calculado, y almacenado, los elementos  $\mathcal{D}_o(u)$ ,  $\mathcal{D}_o(v)$ ,  $\mathcal{D}_o(w)$  y  $\mathcal{D}_o(1/r)$ .

Partiendo de la constante  $r_p$  y de  $\mathcal{D}_o(1/r)$  podremos calcular los elementos  $\mathcal{D}_o(\rho_i)$ , con  $i = 0, \dots, N$  por medio de la parte 2 del algoritmo.

---

**Algoritmo GPDC parte 2:** Cálculo de  $\mathcal{D}_o(\rho_i)$ .

---

**Data:**  $r_p, \mathcal{D}_o(1/r)$ .  
**Result:**  $\mathcal{D}_o(\rho_i), i = 0, \dots, N$   
 $\mathcal{D}_o(\rho_0) \leftarrow \mathcal{D}_o(r_p(1/r))$   
**for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $N$  **do**  
  |  $\mathcal{D}_o(\rho_i) \leftarrow \mathcal{D}_o(\rho_{i-1}\rho_0)$   
**end**

---

Partiendo de los elementos  $\mathcal{D}_o(u), \mathcal{D}_o(v), \mathcal{D}_o(w)$  y  $\mathcal{D}_o(1/r)$  podremos calcular  $\mathcal{D}_o(w_1), \mathcal{D}_o(u_i)$  con  $\mathcal{D}_o(v_i)$ , con  $i = 0, \dots, M$  por medio de la parte 3 del algoritmo. Puede observarse en este algoritmo que las constantes iniciales  $u_0 = 1$  y  $v_0 = 0$ , dadas en (2.19), se representan como dos vectores con todos sus elementos iguales a cero (derivada de una constante igual a cero) excepto el primero que toma el valor de la constante.

---

**Algoritmo GPDC parte 3:** Cálculo de los términos  $\mathcal{D}_o(u_m), \mathcal{D}_o(v_m)$ .

---

**Data:**  $\mathcal{D}_o(u), \mathcal{D}_o(v), \mathcal{D}_o(w), \mathcal{D}_o(1/r)$ .  
**Result:**  $\mathcal{D}_o(w_1), \mathcal{D}_o(u_i), \mathcal{D}_o(v_i), i = 0, \dots, M$   
 $\mathcal{D}_o(u_0) \leftarrow (1, 0, 0, 0, 0 \dots, 0)$   
 $\mathcal{D}_o(v_0) \leftarrow (0, 0, 0, 0, 0 \dots, 0)$   
 $\mathcal{D}_o(u_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(u(1/r))$   
 $\mathcal{D}_o(v_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(w(1/r))$   
 $\mathcal{D}_o(w_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(w(1/r))$   
**for**  $m \leftarrow 2$  **to**  $M$  **do**  
  |  $\mathcal{D}_o(s_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(u_{m-1}u_1)$   
  |  $\mathcal{D}_o(s_2) \leftarrow \mathcal{D}_o(v_{m-1}v_1)$   
  |  $\mathcal{D}_o(u_m) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_1 - s_2)$   
  |  $\mathcal{D}_o(s_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(v_{m-1}u_1)$   
  |  $\mathcal{D}_o(s_2) \leftarrow \mathcal{D}_o(u_{m-1}v_1)$   
  |  $\mathcal{D}_o(v_m) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_1 + s_2)$   
**end**

---

La parte más importante del algoritmo es el proceso de cálculo de cada sumando  $\mathcal{V}_m$  de la expresión (2.21), para ello partimos de los escalares  $\mu, r_p, \bar{C}_{ij}, \bar{S}_{ij}, \bar{Q}_{mm}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$  y los vectores de derivadas  $\mathcal{D}_o(\rho_i), \mathcal{D}_o(u_j), \mathcal{D}_o(v_j)$  y  $\mathcal{D}_o(w)$  previamente calculados.

Luego, a partir de los vectores anteriormente obtenidos, construiremos el procedimiento de cálculo del vector  $\mathcal{D}_o(V_P)$  como se muestra en la parte 4 del algoritmo

GPDC.

---

**Algoritmo GPDC parte 4:** Cálculo de las derivadas del potencial  $\mathcal{D}_o(V_P)$ .

---

**Data:**  $\mu, r_p, \bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}, \bar{Q}_{nm}, \alpha_{nm}, \beta_{nm}, \mathcal{D}_o(\rho_n), \mathcal{D}_o(u_m), \mathcal{D}_o(v_m), \mathcal{D}_o(w)$ .

**Result:**  $\mathcal{D}_o(V_P)$

$\mathcal{D}_o(V_P) \leftarrow (0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

**for**  $m \leftarrow 0$  **to**  $M$  **do**

$\mathcal{D}_o(V_m) \leftarrow (0, 0, 0, 0, \dots, 0)$

**for**  $n \leftarrow \text{máx}(2, m)$  **to**  $N$  **do**

$\mathcal{D}_o(s_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(w \bar{Q}_{(n-1)m})$

$\mathcal{D}_o(\bar{Q}_{nm}) \leftarrow \mathcal{D}_o(\alpha_{nm} s_1)$

**if**  $n \neq m + 1$  **then**

$\mathcal{D}_o(s_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(\beta_{nm} \bar{Q}_{(n-2)m})$

$\mathcal{D}_o(\bar{Q}_{nm}) \leftarrow \mathcal{D}_o(\bar{Q}_{nm} + s_1)$

**end**

$\mathcal{D}_o(s_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(\bar{C}_{nm} u_m)$

$\mathcal{D}_o(s_2) \leftarrow \mathcal{D}_o(\bar{S}_{nm} v_m)$

$\mathcal{D}_o(s_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_1 + s_2)$

$\mathcal{D}_o(s_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_1 \bar{Q}_{nm})$

$\mathcal{D}_o(s_1) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_1 \rho_n)$

$\mathcal{D}_o(V_m) \leftarrow \mathcal{D}_o(V_m + s_1)$

**end**

$\mathcal{D}_o(V_P) \leftarrow \mathcal{D}_o(V_P + V_m)$

$\mathcal{D}_o(V_P) \leftarrow \mathcal{D}_o(-(\mu/r_p)V_P)$

**end**

---

Finalmente, una vez calculados  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_K)$  y  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_K)$  podemos calcular  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_K)$  a partir de la parte 5 del algoritmo.

---

**Algoritmo GPDC parte 5:** Cálculo de  $\mathcal{D}_o(V)$ .

---

**Data:**  $\mathcal{D}_o(V_K), \mathcal{D}_o(V_P)$ .

**Result:**  $\mathcal{D}_o(V)$

$\mathcal{D}_o(V) \leftarrow \mathcal{D}_o(V_K + V_P)$

---

El algoritmo GPDC de cálculo de las derivadas respecto de las coordenadas cartesianas está completo con la unión de las partes 1, 2, 3, 4 y 5.

Si queremos calcular el conjunto de derivadas  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V})$  respecto de las coordenadas polares esféricas  $(r, \lambda, \psi)$ , parte izquierda de (2.31), bastará recordar las relaciones (2.15) y sustituir la parte 1 del algoritmo por la parte 6, que calcula las derivadas del

potencial kepleriano  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_K)$  respecto de las coordenadas polares esféricas  $(r, \lambda, \psi)$ . En este proceso se calculan además las derivadas  $\mathcal{D}_o(u)$ ,  $\mathcal{D}_o(v)$ ,  $\mathcal{D}_o(w)$  y  $\mathcal{D}_o(1/r)$  que serán usadas en las partes 2, 3, 4 y 5.

---

**Algoritmo GPDC parte 6:** Cálculo de  $\mathcal{D}_o(V_K)$ , en términos de las coordenadas  $(r, \lambda, \psi)$ .

---

**Data:**  $\mu, r, \lambda, \beta$ .

**Result:**  $\mathcal{D}_o(V_K)$  e.f.c.  $r, \lambda, \psi$

$$\mathcal{D}_o(r) \leftarrow (r, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(\lambda) \leftarrow (\lambda, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(\psi) \leftarrow (\psi, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$(s_1, s_2) \leftarrow (\mathcal{D}_o(\sin \lambda), \mathcal{D}_o(\cos \lambda))$$

$$(s_3, s_4) \leftarrow (\mathcal{D}_o(\sin \psi), \mathcal{D}_o(\cos \psi))$$

$$s_5 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_4 s_2)$$

$$s_6 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_4 s_1)$$

$$\mathcal{D}_o(u) \leftarrow \mathcal{D}_o(r s_5)$$

$$\mathcal{D}_o(v) \leftarrow \mathcal{D}_o(r s_6)$$

$$\mathcal{D}_o(w) \leftarrow \mathcal{D}_o(r s_3)$$

$$\mathcal{D}_o(1/r) \leftarrow \mathcal{D}_o(r^{-1})$$

$$\mathcal{D}_o(V_K) \leftarrow \mathcal{D}_o(-\mu(1/r))$$


---

El algoritmo GPDC de cálculo de las derivadas respecto de las coordenadas polares esféricas  $(r, \lambda, \psi)$  está completo con la unión de las partes 6, 2, 3, 4 y 5 (en este orden).

Cabe señalar que un aspecto importante presente en los métodos tradicionales, como el *método de Tscherning-Clenshaw* (Tscherning, 1976) y el *método de Legendre* (Casotto and Fantino, 2007), es que al utilizar las coordenadas esféricas aparecen singularidades cuando la latitud toma valores en los polos,  $\psi = \pm 90^\circ$ , y que para estos valores la evaluación numérica es muy ineficiente. El método que hemos presentado aquí está exento estas singularidades.

En este punto hay que hacer notar que en el proceso tendremos  $N \times M$  sumandos sólo para la evaluación de la función, por ejemplo, si se utiliza un modelo gravitacional como el EGM2008, tendremos más de 4 millones de sumandos en la expresión del potencial. Si además tenemos en cuenta las operaciones que efectuamos para evaluar cada sumando y que éstas se realizan sobre vectores (de dimensión más alta cuanto mayor sea el orden de derivación), podremos concluir el elevado tiempo de CPU necesario para una única evaluación.

Una herramienta que nos permite reducir el tiempo de computo es la paralelización del algoritmo, que por su sencillez en la aplicación y las ventajas que presenta, se ajusta sin problemas al algoritmo. Las partes 1, 6, 2, 3 y 5 del algoritmo GPDC son estrictamente secuenciales, pues se basan en iteraciones en las que cada elemento depende del cálculo anterior. La paralelización es aplicada únicamente a la parte 4 del algoritmo, que es la parte del código con mayor requerimiento computacional. Para paralelización de esta parte está basada en la independencia de los cálculos de cada orden  $m$ , propiedad utilizada por Fukushima (2012) para evaluar la fuerza gravitacional, como muestra el esquema de la figura 2.10. En la paralelización de esta parte del algoritmo GPDC se ha usado OpenMP<sup>7</sup>, (Chandra et al., 2001; Chapman et al., 2008) permitiendo calcular cada índice  $j$  con diferentes hilos del procesador.

#### 2.2.4. Test numéricos

En esta sección presentamos los resultados de varios test realizados para verificar el algoritmo GPDC para diferentes grados y órdenes del potencial gravitacional dado en la ecuación (2.10), así como diferentes órdenes de derivadas del potencial y números de hilos usados en la paralelización. Para llevar a cabo los test hemos utilizado un computador con dos procesadores Intel(R) Xenon(R) E5645, 2.40Ghz, cada uno con seis núcleos de dos hilos, con un total de 24 hilos para la paralelización.

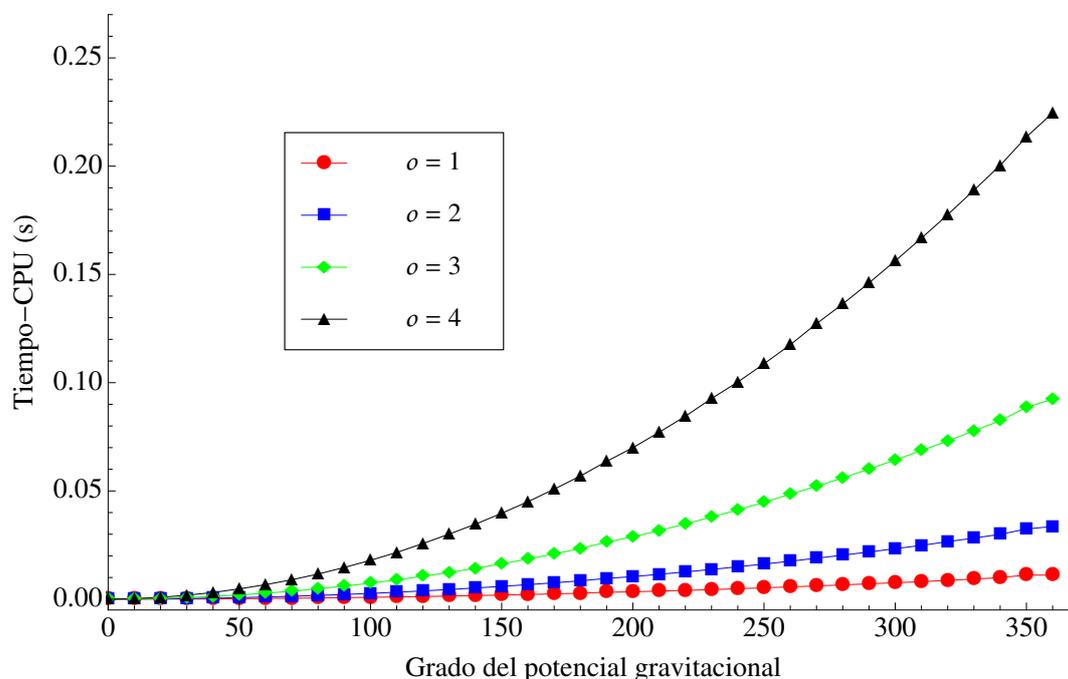
Una comparación rigurosa del método aquí expuesto con otros excede el propósito de nuestro trabajo y no es presentado en esta memoria. De hecho, cada uno de la gran variedad de métodos de evaluación de las derivadas del potencial gravitacional presenta puntos débiles y puntos favorables. Un método iterativo como el presentado aquí puede ser más lento que otros métodos analíticos, sin embargo, su punto fuerte es su generalidad que permite la evaluación de la derivada de cualquier orden.

El primer test es presentado en la figura 2.11, donde se ve reflejado el tiempo-CPU, en segundos, de la ejecución de la versión secuencial del código. El tiempo-CPU es representado en el eje de las ordenadas, mientras que en el eje de las abscisas se representan los grados del potencial (grado desde 0 hasta 360). Cada una de las curvas de la gráfica muestra el comportamiento del tiempo respecto al grado, y representan los órdenes de derivadas 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Es de resaltar

---

<sup>7</sup>OpenMP es una interfaz de programación de aplicaciones (API) para la programación multi-proceso de memoria compartida en múltiples plataformas.

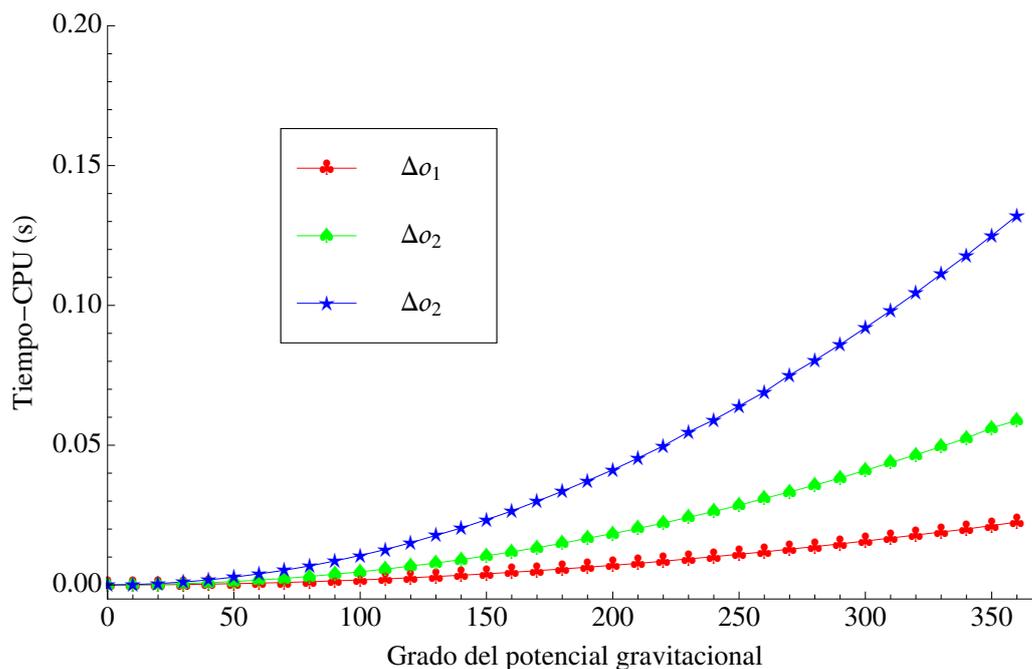
el aumento esperado del tiempo-CPU conforme aumenta el grado de la función potencial, además del aumento del tiempo de cálculo conforme aumenta el orden de la derivada. Esto se ve reflejado en las cuatro curvas de la figura.



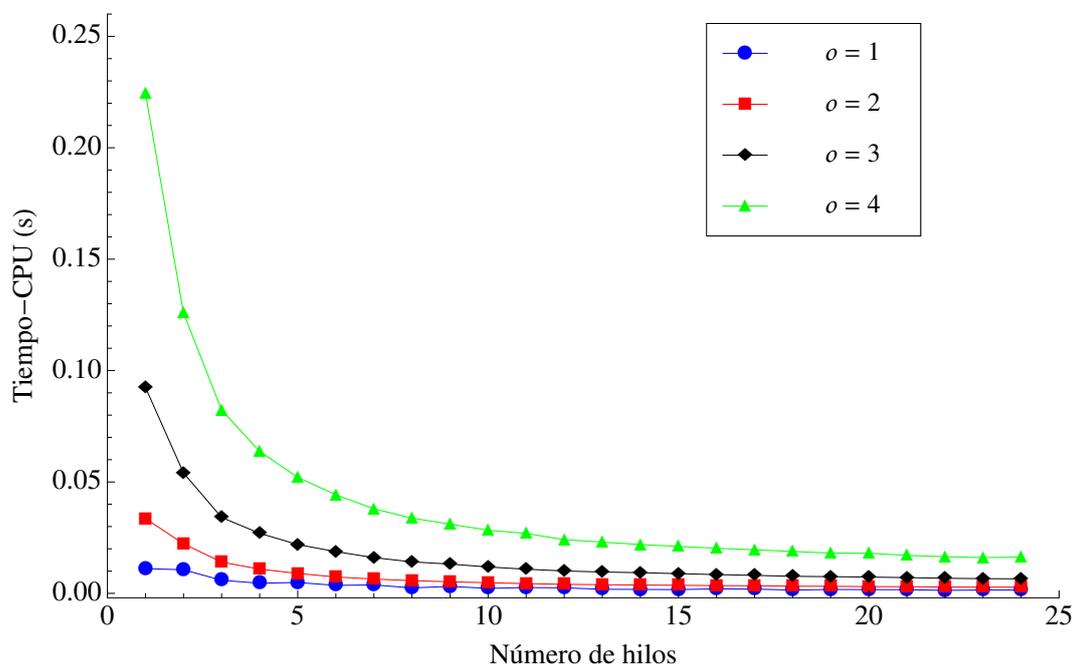
**Figura 2.11:** Tiempo-CPU, en segundos, versus el grado del potencial gravitacional (modelo EGM96). Las cuatro curvas que se muestran representan el tiempo de evaluación de las derivadas de orden 1, 2, 3 y 4, respectivamente

En la figura 2.12, se puede observar el tiempo que existe entre un orden de derivada y el siguiente, donde claramente el comportamiento es creciente a medida que aumenta el grado del potencial gravitacional.

En la figura 2.13, se presenta el primer test sobre la paralelización del código. Mostramos cuatro curvas que representan el tiempo-CPU, en segundos, correspondiendo a la evaluación de los órdenes de derivadas 1, 2, 3 y 4 para un potencial gravitacional de  $360 \times 360$ , con diferentes números de hilos. El eje de las abscisas representa el número de hilos desde 1 (algoritmo secuencial) hasta 24. El eje de las ordenadas representa el cálculo del tiempo. Recordemos que para el cálculo del orden de derivación  $o = n$ , es necesario calcular los valores de todas las derivadas desde órdenes desde 0 hasta  $o$ . En estas curvas se aprecia el comportamiento, en tiempo-CPU, que va teniendo el cálculo de los diferentes órdenes de derivadas a medida que aumenta el número de hilos. Podemos concluir, observando la gráfica, que el aumento del número de hilos mejora mucho más el tiempo de computo conforme se aumenta el orden de la derivada.



**Figura 2.12:** Tiempo-CPU, en segundos, versus el grado del potencial gravitacional (modelo EGM96). Las tres curvas que se muestran representan la diferencia de tiempo de evaluación entre órdenes de derivadas consecutivos. La primera, segunda y tercera curva representan la diferencia entre los órdenes 2 y 1, 3 y 2, 4 y 3, respectivamente.



**Figura 2.13:** Tiempo-CPU, en segundos, versus el número de hilos usados en la paralelización. Este corresponde a la evaluación de los órdenes de derivadas 1, 2, 3 y 4 de un potencial gravitacional de  $360 \times 360$ .

Para una mayor claridad sobre la interpretación de las ventajas del código paralelizado, son utilizados dos parámetros que llamaremos *aceleración* y *eficiencia*<sup>8</sup> (Chapman et al., 2008) que miden el desempeño de un algoritmo paralelizado. La *aceleración*,  $S(p)$ , es la fracción entre el Tiempo-CPU del algoritmo secuencial y el Tiempo-CPU del algoritmo paralelizado (usando  $p$  hilos). La *eficiencia*,  $E(p)$ , corresponde al valor obtenido de dividir la *aceleración* entre el número de hilos. Ambos valores se pueden definir como

$$S(p) = \frac{T(1)}{T(p)} \quad \text{y} \quad E(p) = \frac{T(1)}{pT(p)}, \quad (2.32)$$

donde,  $T(1)$  es el tiempo-CPU, en segundos, del algoritmo secuencial o el código ejecutado con un solo hilo,  $T(p)$  es el tiempo-CPU del algoritmo paralelizado ejecutado con  $p$  hilos. La aceleración  $S(p)$  de un algoritmo paralelo puro debe ser igual al número  $p$  de hilos, lo que significa que la  $E(p)$  es igual a uno, sin embargo, un algoritmo paralelo no tiene un  $E(p)$  igual a uno porque existe una *perdida de eficiencia* debida a las partes del algoritmo sin paralelizar y la comunicaciones entre el hilo principal y los otros hilos en la parte del algoritmo paralelizado.

En las tablas 2.5, 2.6 y 2.7, se muestra el tiempo-CPU,  $T(1)$ , en segundos de la versión del algoritmo secuencial, así como el  $S(p)$  y  $E(p)$  de la versión del algoritmo paralelizado con 2, 4, 8, 12, 18 y 24 hilos, para el cálculo de los órdenes de derivadas de 1 hasta 5, para tres modelos gravitacionales: el  $360 \times 360$  que corresponde al EGM96, el modelo de alto grado  $2190 \times 2159$  EGM2008, (ambos para el Planeta Tierra) y finalmente el modelo gravitacional del Planeta Marte de  $80 \times 80$  GMM-2B.

**Tabla 2.5:**  $S(p)$  y  $E(p)$  en la evaluación de las derivadas de orden  $o$  del geopotencial EGM96 ( $360 \times 360$ ) con un código paralelizado de  $p$  hilos.

	$o = 1$		$o = 2$		$o = 3$		$o = 4$		$o = 5$	
$T(1)$	0.0110832		0.0335651		0.0922946		0.2243405		0.4825872	
	$S(p)$	$E(p)$								
$p = 2$	1.20	0.60	1.56	0.78	1.78	0.89	1.78	0.89	1.81	0.90
$p = 4$	2.01	0.50	3.08	0.77	3.47	0.87	3.52	0.88	3.54	0.87
$p = 8$	3.21	0.40	5.91	0.74	6.53	0.82	6.58	0.82	6.64	0.83
$p = 12$	5.81	0.48	8.28	0.69	9.20	0.77	9.30	0.77	9.38	0.78
$p = 18$	7.39	0.41	10.4	0.58	11.9	0.67	12.0	0.66	12.1	0.67
$p = 24$	8.88	0.37	12.0	0.50	14.4	0.60	14.4	0.60	14.6	0.61

<sup>8</sup>Speedup y efficiency.

**Tabla 2.6:**  $S(p)$  y  $E(p)$  en la evaluación de las derivadas de orden  $o$  del geopotencial GMM-2B ( $80 \times 80$ ) con un código paralelizado de  $p$  hilos.

	$o = 1$		$o = 2$		$o = 3$		$o = 4$		$o = 5$	
$T(1)$	0.0005474		0.0017264		0.0047809		0.0116798		0.0249944	
$p = 2$	1.28	0.64	1.50	0.75	1.72	0.86	1.82	0.91	1.76	0.88
$p = 4$	2.14	0.53	2.99	0.75	3.16	0.79	3.35	0.84	3.43	0.86
$p = 8$	2.81	0.35	5.04	0.63	5.49	0.69	5.33	0.67	5.76	0.72
$p = 12$	3.66	0.31	6.21	0.52	7.05	0.59	7.25	0.60	7.32	0.61
$p = 18$	4.49	0.25	6.99	0.39	8.21	0.46	4.70	0.26	8.76	0.49
$p = 24$	5.34	0.22	7.38	0.31	9.26	0.39	9.14	0.38	9.83	0.41

Tomemos por ejemplo los resultados de la paralelización con 12 hilos de

**Tabla 2.7:**  $S(p)$  y  $E(p)$  en la evaluación de las derivadas de orden  $o$  del geopotencial EGM2008 ( $2190 \times 2159$ ) con un código paralelizado de  $p$  hilos.

	$o = 1$		$o = 2$		$o = 3$		$o = 4$		$o = 5$	
$T(1)$	0.6146610		1.5716600		4.1603570		9.7767680		20.7328942	
	$S(p)$	$E(p)$	$S(p)$	$E(p)$	$S(p)$	$E(p)$	$S(p)$	$E(p)$	$S(p)$	$E(p)$
$p = 2$	1.43	0.71	1.58	0.79	1.75	0.87	1.87	0.94	1.91	0.96
$p = 4$	2.52	0.63	3.16	0.79	3.48	0.87	3.65	0.91	3.80	0.95
$p = 8$	5.01	0.63	6.03	0.75	6.56	0.82	6.91	0.86	7.11	0.89
$p = 12$	7.37	0.61	8.95	0.74	9.39	0.78	9.94	0.83	10.2	0.84
$p = 18$	8.48	0.47	11.6	0.65	13.1	0.73	13.5	0.75	14.1	0.78
$p = 24$	11.1	0.46	13.2	0.55	16.0	0.67	16.7	0.70	17.6	0.73

la tabla 2.5. Si evaluamos el caso del modelo para los grados hasta 360, podemos observar que el código es 5.81, más rápido para el primer orden de derivadas respecto al secuencial, y 9.38 más rápido para el quinto orden de derivada. Esto implica una eficiencia de 0.48 y 0.78, para cada orden de derivada respectivamente. Cuando se reduce el grado a 80, (tabla 2.6), para los mismos órdenes de derivadas, el valor de  $E(p)$  disminuye a 0.31 y 0.61, lo que significa que el código es 3.66 y 7.32 veces más rápido, para el primer y quinto orden de derivada, respectivamente.

Finalmente, si aumentamos el grado a un valor alto, (modelo EGM2008), el cálculo es mejorado, como se muestra observando los resultados para 12 hilos. Para el primer orden de derivada el código es 7.37 veces más rápido, esto es, que nos da un valor para  $E(p)$  de 0.61 y para el quinto orden de derivada el código es 10.19 veces más rápido, o lo que es igual, un valor para  $E(p)$  de 0.85.

Las tres tablas muestran los beneficios de la paralelización a medida que aumenta el grado de los modelos gravitacionales y el orden de las derivadas. Sin embargo, cuando el número de hilos aumenta,  $E(p)$  disminuye. Esto se debe al gran número de variables compartidas necesarias en la paralelización, las cuales generan esta pérdida de eficiencia.

## 2.3. Otras fuerzas

### 2.3.1. Fuerzas conservativas

#### Fuerza radial

Una fuerza de tipo radial puede describirse por medio de la expresión  $\alpha \mathbf{x}/r$ , con  $r = \|\mathbf{x}\|$ , y un parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}$  que, al igual que en las fuerzas tangencial y normal, puede ser constante o función de  $t$ . Una fuerza de este tipo es una fuerza conservativa cuyo potencial será

$$V_R(r) = \mathcal{V}_R(r) = \alpha r, \quad (2.33)$$

donde hemos resaltado el hecho de que dicha fuerza, que depende únicamente de la distancia  $r$ , puede ser calculada indistintamente en el sistema espacial y en el planetocéntrico.

Para calcular este potencial, y sus derivadas, aplicaremos un algoritmo similar al del cálculo del potencial kepleriano, visto en apartados anteriores. El esquema para la fuerza radial es el que se muestra en el algoritmo 7.

Para calcular  $\mathcal{D}_o(\mathcal{V}_R)$  usaremos el mismo algoritmo sustituyendo  $(x, y, z)$  por  $(u, v, w)$ . Si el parámetro  $\alpha$  depende de  $t$  será necesario añadir una llamada a una función que calcule el valor del parámetro para un determinado instante.

#### Perturbación de un tercer cuerpo

El efecto de un tercer cuerpo sobre la órbita de un satélite viene expresado, en un sistema espacial, por medio de la función potencial

$$V_{3b} = -\mu_P \left( \frac{1}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_P}{\|\mathbf{x}_P\|^3} \right), \quad (2.34)$$

---

**Algoritmo 7:** Cálculo de  $\mathcal{D}_o(V_R)$ , en función de las coordenadas  $(x, y, z)$ .

---

**Data:**  $\alpha, x, y, z$ .

**Result:**  $\mathcal{D}_o(V_R)$ , e.f.c.  $(x, y, z)$

$$\mathcal{D}_o(x) \leftarrow (x, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(y) \leftarrow (y, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(z) \leftarrow (z, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$s_1 \leftarrow \mathcal{D}_o(x x)$$

$$s_2 \leftarrow \mathcal{D}_o(y y)$$

$$s_3 \leftarrow \mathcal{D}_o(z z)$$

$$s_4 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_1 + s_2 + s_3)$$

$$\mathcal{D}_o(r) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_4^{1/2})$$

$$\mathcal{D}_o(V_R) \leftarrow \mathcal{D}_o(\alpha (1/r))$$


---

donde  $\mu_P = \mathcal{G}m_P$ , siendo  $m_P$  y  $\mathbf{x}_P$  la masa y posición del tercer cuerpo  $P$ .

Si observamos dicha expresión podemos concluir que el primer sumando depende de la distancia entre el satélite y el tercer cuerpo, mientras que el segundo es el cociente entre el coseno del ángulo entre la dirección del satélite y el tercer cuerpo y la distancia del tercer cuerpo al principal. Teniendo esto en cuenta, podemos concluir que el potencial puede ser calculado indistintamente en el sistema espacial y planetocéntrico y se obtendrá el mismo valor  $V_{3b} = \mathcal{V}_{3b}$ .

Para el cálculo del potencial y sus derivadas usaremos el algoritmo 8, donde hemos llamado  $(p_1, p_2, p_3)$  a las componentes del vector  $\mathbf{x}_P$ , mientras que  $p_n$  representa el valor  $1/||\mathbf{x}_P||$ .

En el caso general las componentes de  $\mathbf{x}_P$  y su norma son funciones de  $t$ , por lo que para usar el algoritmo 8 debe calcularse previamente el valor de  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_n$  para un instante dado con una función externa al algoritmo.

Un caso particular muy útil e interesante se presenta en aquellos casos en los que se investiga la órbita de un satélite artificial en torno a la luna de un planeta cuando la rotación y el movimiento orbital de la luna respecto al planeta estén sincronizados. Esto ocurre en la mayor parte de las lunas de planetas del Sistema Solar, incluida la Luna terrestre que, como es bien sabido, presenta siempre la misma cara a la Tierra debido a que el periodo orbital de la Luna respecto a la Tierra y su periodo de rotación son iguales.

Simplificaremos el problema suponiendo, en lo que sigue, que la luna orbita en

---

**Algoritmo 8:** Cálculo de  $\mathcal{D}_o(V_{3b})$ , en función de las coordenadas  $(x, y, z)$ .

---

**Data:**  $\mu_k, p_1, p_2, p_3, p_n, x, y, z$ .

**Result:**  $\mathcal{D}_o(V_{3b})$ , e.f.c.  $(x, y, z)$

$$\mathcal{D}_o(x) \leftarrow (x, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(y) \leftarrow (y, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(z) \leftarrow (z, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$s_1 \leftarrow \mathcal{D}_o(x p_1)$$

$$s_2 \leftarrow \mathcal{D}_o(y p_2)$$

$$s_3 \leftarrow \mathcal{D}_o(z p_3)$$

$$s_4 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_1 + s_2 + s_3)$$

$$s_5 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_4 p_n)$$

$$s_6 \leftarrow \mathcal{D}_o(p_1 - x)$$

$$s_7 \leftarrow \mathcal{D}_o(p_2 - y)$$

$$s_8 \leftarrow \mathcal{D}_o(p_3 - z)$$

$$s_9 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_6 s_6)$$

$$s_{10} \leftarrow \mathcal{D}_o(s_7 s_7)$$

$$s_{11} \leftarrow \mathcal{D}_o(s_8 s_8)$$

$$s_{12} \leftarrow \mathcal{D}_o(s_9 + s_{10} + s_{11})$$

$$s_{13} \leftarrow \mathcal{D}_o(s_{12}^{-1/2})$$

$$s_{14} \leftarrow \mathcal{D}_o(s_5 - s_{13})$$

$$\mathcal{D}_o(V_{3b}) \leftarrow \mathcal{D}_o(\mu_k s_{14})$$


---

torno al planeta en una órbita circular, de radio  $d_\odot$ , y ecuatorial y elegimos el meridiano cero de la luna suponiendo que el planeta ocupa la posición  $\mathbf{x}_P = -d_\odot \mathbf{p}_3$ . Si el vector de posición del satélite viene dado por la expresión  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{p}_2 + x_3 \mathbf{p}_3$ , entonces la perturbación producida por el planeta sobre el satélite en órbita lunar podrá expresarse (en el sistema planetocéntrico) como

$$\mathcal{V}_\odot = \mu_\odot \left[ \frac{z}{d_\odot^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d_\odot)^2}} \right], \quad (2.35)$$

siendo  $\mu_\odot = \mathcal{G}m_\odot$ , con  $m_\odot$  la masa del planeta.

En los capítulos siguientes presentaremos ejemplos donde se aplica esta expresión para el caso de órbitas lunares perturbadas por la Tierra para las que denotaremos por  $\mathcal{V}_\oplus$  al potencial perturbador.

### 2.3.2. Fuerzas no conservativas

Las fuerzas que se presentan a continuación son fuerzas no conservativas que dependen no solo de la posición, sino también de la velocidad, esto es, dependen de seis variables  $(\mathbf{x}, \mathbf{X})$  o  $(\mathbf{u}, \mathbf{U})$ .

En el caso del potencial gravitacional hemos construido un esquema de cálculo que permite calcular las derivadas del potencial hasta cualquier orden, en este caso, puesto que las necesidades de cálculo se extienden únicamente a problemas de tipo orbital, nos limitaremos al cálculo de derivadas hasta orden uno, puesto que para la propagación necesitamos únicamente la expresión de la fuerza, sin derivar, mientras que para las ecuaciones variacionales son necesarias las derivadas de orden uno de la fuerza.

Para ello calcularemos el vector  $\mathcal{D}_o(\mathcal{F})$  de derivadas de una función  $\mathcal{F}$ , tanto respecto a la posición como a la velocidad, esto es

$$\mathcal{D}_o(\mathcal{F}) = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_6\},$$

siendo

$$\mathcal{F}_{\mathbf{i}} = \frac{\partial^{\mathcal{O}(\mathbf{i})} \mathcal{F}}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2} \partial z^{i_3} \partial X^{i_4} \partial Y^{i_5} \partial Z^{i_6}}, \quad \circ \quad \mathcal{F}_{\mathbf{i}} = \frac{\partial^{\mathcal{O}(\mathbf{i})} \mathcal{F}}{\partial u^{i_1} \partial v^{i_2} \partial w^{i_3} \partial U^{i_4} \partial V^{i_5} \partial W^{i_6}},$$

donde los índices  $\mathbf{i}$  representan los elementos del conjunto ordenado  $\mathcal{I}(o) = \{\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6) \mid \mathcal{O}(\mathbf{i}) \leq o, 0 \leq i_j \leq o\}$ . En este caso no podemos seguir el esquema de índices dado en la tabla 2.1, sino que tendremos que usar el mostrado en la tabla 2.8.

**Tabla 2.8:** Índices de las derivadas parciales (hasta orden uno) y sus valores asociados para una función de seis variables.

$(i_1, i_2, \dots, i_6)$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}^*$	$\left\{ \binom{\mathbf{i}}{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v} \leq \mathbf{i} \right\}$	$\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \leq \mathbf{i} \}$
(1,0,0,0,0,0)	1	0	{1, 1}	{0, 1}
(0,1,0,0,0,0)	2	0	{1, 1}	{0, 2}
(0,0,1,0,0,0)	3	0	{1, 1}	{0, 3}
(0,0,0,1,0,0)	4	0	{1, 1}	{0, 4}
(0,0,0,0,1,0)	5	0	{1, 1}	{0, 5}
(0,0,0,0,0,1)	6	0	{1, 1}	{0, 6}

## Fuerza tangencial

Una fuerza tangencial lleva la dirección del vector velocidad. Como se ha visto en el capítulo anterior existen dos vectores velocidad diferentes: velocidad absoluta  $\mathbf{X}$  o velocidad relativa  $\mathbf{U}$ , que representan, respectivamente, la velocidad medida en el sistema espacial o en el sistema planetocéntrico. De esta forma podremos hablar de la fuerza tangencial medida en el sistema espacial

$$\mathbf{F}_{TE} = (F_{TE}^1, F_{TE}^2, F_{TE}^3) = \frac{\alpha \mathbf{X}}{v_E}, \quad v_E = \|\mathbf{X}\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.36)$$

y la fuerza tangencial medida en el sistema planetocéntrico,

$$\mathcal{F}_{TP} = (\mathcal{F}_{TP}^1, \mathcal{F}_{TP}^2, \mathcal{F}_{TP}^3) = \frac{\alpha \mathbf{U}}{v_P}, \quad v_P = \|\mathbf{U}\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.37)$$

---

**Algoritmo 9:** Cálculo de  $\mathcal{D}_o(\mathbf{F}_{TE})$ , en función del vector velocidad  $\mathbf{X}$ .

---

**Data:**  $\alpha, X, Y, Z$ .

**Result:**  $\mathcal{D}_o(F_{TE}^1), \mathcal{D}_o(F_{TE}^2), \mathcal{D}_o(F_{TE}^3)$ , e.f.c.  $(X, Y, Z)$

$$\mathcal{D}_o(X) \leftarrow (X, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(Y) \leftarrow (Y, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(Z) \leftarrow (Z, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$s_0 \leftarrow \mathcal{D}_o(X X)$$

$$s_1 \leftarrow \mathcal{D}_o(Y Y)$$

$$s_2 \leftarrow \mathcal{D}_o(Z Z)$$

$$s_3 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_0 + s_1 + s_2)$$

$$\mathcal{D}_o(1/v) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_3^{-1/2})$$

$$s_4 \leftarrow \mathcal{D}_o(\alpha (1/v))$$

$$\mathcal{D}_o(F_{TE}^1) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_4 X)$$

$$\mathcal{D}_o(F_{TE}^2) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_4 Y)$$

$$\mathcal{D}_o(F_{TE}^3) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_4 Z)$$


---

Esta fuerza no es conservativa por lo que debemos calcular por separado sus tres componentes. El algoritmo 9 muestra como calcular la fuerza  $\mathbf{F}_{TE}$ , y sus derivadas hasta cualquier orden por medio de la diferenciación automática. Para calcular la fuerza  $\mathcal{F}_{TP}$  puede usarse el mismo algoritmo 9 sustituyendo el vector  $\mathbf{X}$  por el vector  $\mathbf{U}$ .

## Fuerza normal

Una fuerza normal es aquella proporcional a la dirección del vector normal  $\mathbf{x} \times \mathbf{X}$ , esto es

$$\mathbf{F}_N = \alpha \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{X}}{\|\mathbf{x} \times \mathbf{X}\|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.38)$$

El vector dirección normal representa un único vector, por lo que la relación entre la fuerza normal, calculada en el sistema espacial y la calculada en el sistema planetocéntrico siguen la misma regla que cualquier otro vector, esto es

$$\mathbf{F}_N(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \mathcal{R}_{\mathcal{EP}} \cdot \mathcal{F}_N(\mathbf{u}, \mathbf{U}). \quad (2.39)$$

Para calcular la fuerza  $\mathbf{F}_N$ , que al igual que la fuerza tangencial no es conservativa, utilizaremos el algoritmo 10, que nos da las componentes de la fuerza y todas sus derivadas, hasta el orden deseado. El cálculo de  $\mathcal{F}_N$  será idéntico sustituyendo  $\mathbf{x}, \mathbf{X}$  por  $\mathbf{u}, \mathbf{U}$ .

---

**Algoritmo 10:** Cálculo de  $\mathcal{D}_o(\mathbf{F}_N)$ , en función de los vectores de posición y velocidad  $\mathbf{x}, \mathbf{X}$ .

---

**Data:**  $\alpha, x, y, z, X, Y, Z$ .

**Result:**  $\mathcal{D}_o(F_N^1), \mathcal{D}_o(F_N^2), \mathcal{D}_o(F_N^3)$ , e.f.c.  $(x, y, z, X, Y, Z)$

$$\mathcal{D}_o(x) \leftarrow (x, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(y) \leftarrow (y, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(z) \leftarrow (z, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(X) \leftarrow (X, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(Y) \leftarrow (Y, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\mathcal{D}_o(Z) \leftarrow (Z, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$s_0 \leftarrow \mathcal{D}_o(x Y)$$

$$s_1 \leftarrow \mathcal{D}_o(X y)$$

$$s_2 \leftarrow \mathcal{D}_o(x Z)$$

$$s_3 \leftarrow \mathcal{D}_o(z X)$$

$$s_4 \leftarrow \mathcal{D}_o(y Z)$$

$$s_5 \leftarrow \mathcal{D}_o(z Y)$$

$$s_6 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_4 - s_5)$$

$$s_7 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_3 - s_2)$$

$$s_8 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_0 - s_1)$$

$$s_9 \leftarrow \mathcal{D}_o(s_6 s_6)$$

$$s_{10} \leftarrow \mathcal{D}_o(s_7 s_7)$$

$$s_{11} \leftarrow \mathcal{D}_o(s_8 s_8)$$

$$s_{12} \leftarrow \mathcal{D}_o(s_9 + s_{10} + s_{11})$$

$$s_{13} \leftarrow \mathcal{D}_o(s_{12}^{-1/2})$$

$$s_{14} \leftarrow \mathcal{D}_o(\alpha s_{13})$$

$$\mathcal{D}_o(F_N^1) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_{14} s_6)$$

$$\mathcal{D}_o(F_N^2) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_{14} s_7)$$

$$\mathcal{D}_o(F_N^3) \leftarrow \mathcal{D}_o(s_{14} s_8)$$


---



---

# Capítulo 3

## Arcos orbitales y problema de Lambert

### 3.1. Arcos keplerianos. Problema clásico de Lambert

#### 3.1.1. Órbitas keplerianas que pasan por dos puntos

Llamaremos *arco kepleriano* al segmento de curva  $\boldsymbol{x}(t)$ , comprendido entre dos instantes de tiempo  $t \in [t_0, t_0 + \mathcal{T}]^1$ , donde  $\boldsymbol{x}(t)$  representa la trayectoria de la órbita solución del sistema kepleriano (1.3).

De acuerdo con lo visto en el capítulo primero de esta memoria, el problema de la determinación de un arco kepleriano consiste en la integración, numérica o analítica, del *problema de valores iniciales* (posición y velocidad) de la ecuación diferencial ordinaria dada por (1.3).

Si atendemos a la definición de arco kepleriano podemos formular un nuevo problema, distinto del problema de valor inicial anterior, y en el que no conozcamos la posición y velocidad sino, únicamente, las dos posiciones que representan los extremos del arco. Este *problema de contorno* puede reformularse a través de la siguiente pregunta: ¿ Cuántos, y cuáles son, los arcos keplerianos que unen dos puntos

---

<sup>1</sup>De aquí en adelante tomaremos como origen de tiempos  $t_0 = 0$ , esto es, el instante del primer punto del arco.

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ ?

Este problema es muy útil desde el punto de vista astronómico, pues permite desarrollar métodos de determinación de órbitas en el Sistema Solar para cuerpos menores como asteroides, cometas, etc. En la actualidad, debido a la necesidad de diseño y planificación de misiones espaciales se ha extendido a otro más amplio como es el problema de las transferencias orbitales que agrupa problemas como el de llevar una nave de un punto a otro del espacio, los encuentros orbitales entre naves o rendezvous, optimización de trayectorias, etc. El problema de las transferencias orbitales consiste en conectar dos puntos pero sin fijar el tiempo de tránsito.

### 3.1.2. Transferencias orbitales

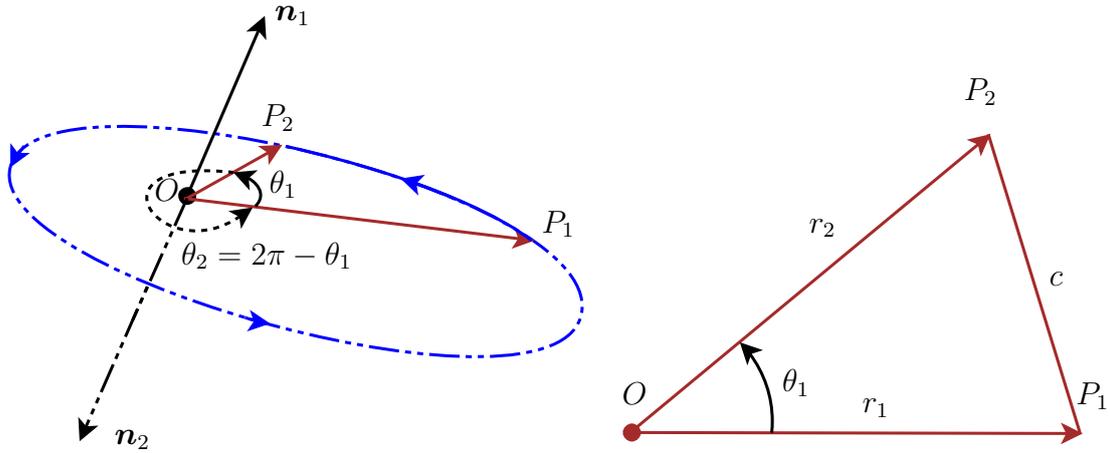
El problema de las transferencias orbitales tiene dos partes:

- Búsqueda de todas las órbitas keplerianas que conectan dos puntos en el espacio por medio de un arco kepleriano.
- Elección, entre todas las órbitas obtenidas en el punto anterior, de aquellas a las que podemos acceder por medio de una maniobra orbital (o cambio de velocidad por aplicación de un impulso o  $\Delta v$ ) de coste mínimo.

El segundo problema, que no será considerado aquí, se traduce en un problema de optimización cuando formulamos la expresión matemática que traduce el coste de la maniobra a una función objetivo a minimizar.

Para buscar las órbitas keplerianas que conectan dos posiciones  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , consideraremos que éstas representan los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , de manera que se tiene la relación  $\mathbf{x}_1 = \overline{OP_1}$ , y  $\mathbf{x}_2 = \overline{OP_2}$ , siendo  $O$  el cuerpo central.

Los puntos  $O, P_1$  y  $P_2$  forman un plano, por lo que cualquier órbita kepleriana de transferencia, que pase de  $P_1$  a  $P_2$ , debe estar contenida en ese mismo plano. Como puede verse en la figura 3.1, el recorrido para ir de  $P_1$  a  $P_2$  puede realizarse, bien recorriendo el trayecto más corto (ángulo agudo  $\theta_1 = \cos^{-1}(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 / \|\mathbf{x}_1\| \|\mathbf{x}_2\|) \in [0, \pi]$ , trayecto en negrita en la figura) o bien el más largo,  $\theta_2 = (2\pi - \theta_1) \in [\pi, 2\pi]$  (trayecto de trazo discontinuo). En el primer caso el vector  $\mathbf{n}$  que representa la norma del momento angular y la dirección del plano será  $\mathbf{n}_1 = (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) / \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|$ , mientras que en el segundo caso se tendrá  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 = (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_1) / \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|$ .



**Figura 3.1:** Izquierda: órbitas de transferencia directa y retrógrada. Derecha: triángulo de transferencia.

Fijados los dos vectores,  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , el ángulo de transferencia  $\theta$  puede elegirse como el ángulo agudo  $\theta_1$  o el ángulo obtuso  $\theta_2$ , lo que equivale a definir el vector ortogonal al plano orbital,  $\mathbf{n}$ , como  $\mathbf{n}_1$  o  $\mathbf{n}_2$ . En este caso, la órbita será directa o retrógrada según que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 < 0$  o  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 > 0$ . Así pues, tendremos que estudiar por separado todo el conjunto de órbitas directas y el conjunto de órbitas retrógradas. En lo que sigue supondremos elegido  $\theta$ , bien en función del ángulo o bien en función del tipo de órbita.

La velocidad de un punto en una órbita kepleriana puede expresarse en el sistema de referencia orbital como  $\mathbf{X} = R\mathbf{u} + T\mathbf{v}$ , donde  $R = \dot{r}$ ,  $T = r\dot{f}$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{x}/r$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}$ , siendo  $T > 0$ .

En Abad (2012) se demuestra que aunque no se conoce el valor de la velocidad en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , las componentes  $(R_1, T_1)$ , de la velocidad del orbitador en  $P_1$  para que llegue a  $P_2$ , en órbita kepleriana, deben verificar la siguiente relación

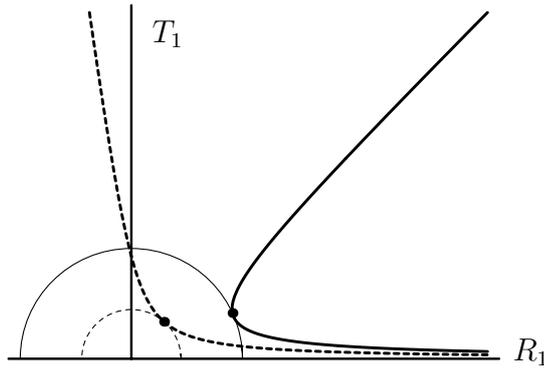
$$\Phi(R_1, T_1) = a_1 T_1^2 + b_1 R_1 T_1 + c_1 = 0, \quad (3.1)$$

donde

$$a_1 = \frac{r_1 - r_2 \cos \theta}{r_2}, \quad b_1 = \sin \theta, \quad c_1 = -\frac{\mu(1 - \cos \theta)}{r_1}, \quad (3.2)$$

que representa la ecuación de una de las dos ramas (la de  $T_1 > 0$ ) de la hipérbola que se muestra en la figura 3.2. En particular, en esta figura, se muestran dos de estas hipérbolas, una para un valor de  $c_1$  positivo y otra para un valor negativo.

Por otro lado, si llamamos  $v_1 = \|\mathbf{X}_1\|$  a la norma de la velocidad en  $P_1$  se tendrá que  $v_1^2 = R_1^2 + T_1^2$ , lo que equivale a la ecuación de una semicircunferencia



**Figura 3.2:** Velocidad en  $P_1$  para llegar a  $P_2$ .

de radio  $v_1$ . Si esta semicircunferencia tiene algún punto en común con la hodógrafa los puntos de intersección señalan las velocidades en  $P_1$  que permiten que la órbita pase por  $P_2$ .

De acuerdo con la gráfica anterior existirá un valor mínimo de la velocidad por debajo del cual no hay intersección entre la hodógrafa y la semicircunferencia, lo que representa que no es posible, con esa velocidad, conectar  $P_1$  con  $P_2$  con una órbita kepleriana.

Para la velocidad mínima existirá una única órbita kepleriana de transferencia. El valor de esta velocidad mínima vendrá dado por

$$v_m^2 = \frac{2c_1(a_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2})}{b_1^2} = 2\mu \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{\Delta} \right),$$

donde,  $\Delta = (r_1 + r_2 + c)/2$  representa el semiperímetro del triángulo formado por  $OP_1P_2$  (parte derecha de la figura 3.1).

Teniendo en cuenta la relación entre la velocidad en un punto y la energía de la órbita  $h = v^2/2 - \mu/r$ , y aplicándola al punto  $P_1$  con la velocidad mínima, obtendremos la energía de la órbita de velocidad mínima

$$h = -\frac{\mu}{\Delta}, \quad (3.3)$$

que representa, por tanto, la órbita de mínima energía entre  $P_1$  y  $P_2$ . Esta energía es negativa, por lo que la órbita correspondiente será elíptica, y de semieje igual a  $a = \Delta/2$ .

Por encima de esa velocidad mínima existirán, para cada valor de  $v_1$ , o lo que es igual para cada valor de la energía  $h > h_m$ , dos puntos de la hodógrafa, lo que

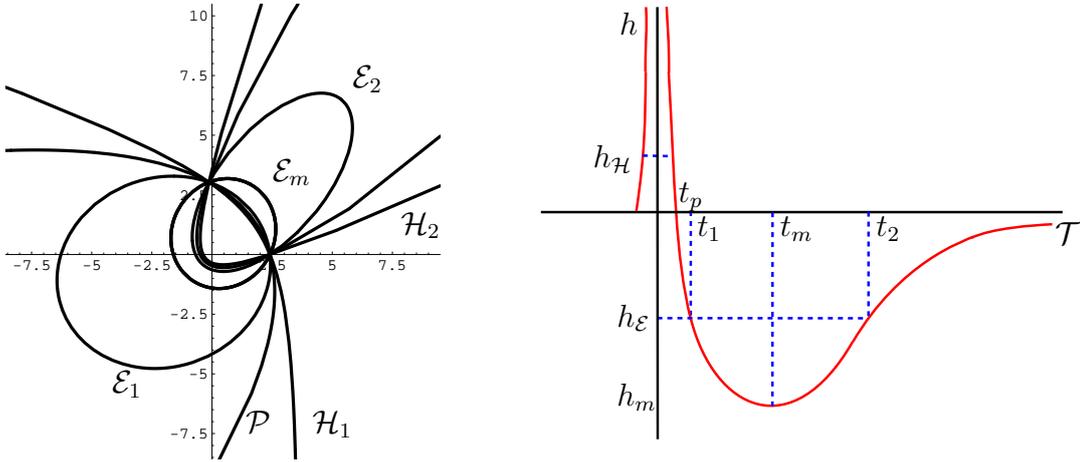
representa dos órbitas keplerianas de transferencia que vendrán definidas por un vector velocidad  $\mathbf{X}_1$  cuyas componentes, en el sistema orbital, deben cumplir las relaciones

$$\frac{1}{2}(R_1^2 + T_1^2) - \frac{\mu}{r_1} - h = 0, \quad a_1 T_1^2 + b_1 R_1 T_1 + c_1 = 0. \quad (3.4)$$

La expresión explícita de las dos soluciones del sistema anterior, expresadas por medio de las funciones universales de Stumpff pueden verse en Abad (2012). Una vez que tenemos el algoritmo que calcula las órbitas en función de la energía podemos establecer fácilmente la relación que nos da el tiempo  $\mathcal{T}$  de la transferencia, o tiempo que tarda el orbitador en ir de  $P_1$  a  $P_2$  a través de una expresión de la forma

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(h), \quad (3.5)$$

que muestra la relación de este tiempo con la energía de la órbita.



**Figura 3.3:** Izquierda: conjunto de todas las órbitas de transferencia que unen dos puntos. Derecha: relación entre el tiempo de la transferencia y la energía.

La parte izquierda de la figura 3.3 nos muestra el conjunto de todas las órbitas de transferencia que unen dos puntos (en la gráfica los puntos donde coinciden todas las cónicas) para las distintas energías  $h > h_m$ . La parte derecha de la misma figura muestra la relación  $h = h(\mathcal{T})$  inversa de la ecuación (3.5), que nos da la energía de la órbita en función del tiempo de tránsito. Supondremos que para este caso hemos elegido un ángulo de transferencia  $\theta = \theta_1$ , esto es, el ángulo agudo entre los dos vectores de posición  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ . Para el otro ángulo de transferencia deberíamos efectuar un estudio similar.

Como sabemos no hay órbitas de transferencia para valores de  $h < h_m$ , lo que se traduce en que la curva  $h(\mathcal{T})$  de la derecha presenta un mínimo para  $t_m = \mathcal{T}(h_m)$

que representa el tiempo de tránsito de la órbita de mínima energía. Esta órbita es la órbita  $\mathcal{E}_m$  de la izquierda de la figura.

Para un valor de la energía  $h_m < h < 0$ , nos encontraremos dos órbitas elípticas (energía negativa) que en la figura 3.3 aparecen como  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$ . Los tiempos de transferencia de estas órbitas son respectivamente  $t_1$  y  $t_2$ , donde  $t_1 < t_2$ , ya que, como puede verse, el arco kepleriano correspondiente es mucho más largo en el caso de la órbita  $\mathcal{E}_2$ , de hecho el tiempo  $t_2$  tiende asintóticamente a infinito cuando  $h$  tiende a cero.

Para cada energía  $h \geq 0$  nos encontramos dos órbitas abiertas (hiperbólicas para  $h > 0$  y parabólicas para  $h = 0$ ). En la figura se aprecian por ejemplo  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ . En este caso encontramos que el tiempo de tránsito correspondiente a  $\mathcal{H}_1$  tiene un valor positivo menor que  $t_p = \mathcal{T}(0)$  (tiempo de la órbita parabólica de energía nula), mientras que el tiempo de tránsito correspondiente a  $\mathcal{H}_2$  sale negativo. Este valor negativo del tiempo corresponde a órbitas hiperbólicas que para el ángulo de transferencia especificado deben recorrerse por su lado abierto, lo cual las hace imposibles y por tanto nos dan un valor absurdo del tiempo en la ecuación (3.5). Estas órbitas deben ser desechadas lo que indica que para valores de la energía positivos existe una única órbita de transferencia con un tiempo de tránsito muy pequeño (tiende asintóticamente a cero cuando la energía tiende a infinito).

La parte derecha de la figura 3.3 sirve también como comprobación de un resultado clásico que nos dice que de si fijamos el tiempo de tránsito entre dos puntos existe una única<sup>2</sup> órbita de transferencia (o un único arco kepleriano) que los une. Efectivamente dado un tiempo  $\mathcal{T} > 0$  a éste le corresponde una única energía  $h$ . A pesar de que en el caso de energías negativas a  $h = h_{\mathcal{E}}$  le corresponden dos valores distintos del tiempo de transito, de los cuales elegiremos la órbita para la que coincide éste tiempo con  $\mathcal{T}$ .

### 3.1.3. Problema y teorema de Lambert

Al problema de la determinación de la única órbita de transferencia que une dos puntos en el espacio, con un arco kepleriano, en un tiempo  $\mathcal{T}$  dado, le llamaremos *problema de Lambert*.

El problema de Lambert tiene su origen en los estudios realizados por Euler, en

---

<sup>2</sup>En realidad es una por cada uno de los dos ángulos de transferencia  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

1743, sobre el movimiento de los cometas en órbita parabólica para los que demuestra que el tiempo de tránsito entre dos posiciones,  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , depende de la suma de las distancias  $r_1 + r_2$  y de la distancia  $c$  entre los dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ . Posteriormente Lambert retoma el problema de las órbitas de los cometas y, usando métodos distintos de los de Euler, extiende sus resultados a órbitas de cualquier tipo. Los trabajos desarrollados por Lambert son la base de las técnicas de determinación de órbitas en el Sistema Solar para cuerpos menores como asteroides, cometas, etc.

Todas las técnicas de resolución del problema de Lambert, tanto antiguas como modernas, están basadas en un resultado fundamental conocido como *teorema de Lambert* y que puede expresarse en la forma siguiente: *el tiempo  $\mathcal{T}$  de tránsito en un arco kepleriano depende únicamente de el semieje mayor de la órbita, de la suma de los puntos extremos del arco al cuerpo central y de la longitud de la cuerda que une estos puntos*

$$\sqrt{\mu} \mathcal{T} = \Phi(a, r_1 + r_2, c). \quad (3.6)$$

Este importante resultado nos indica que el tiempo de tránsito depende únicamente de los elementos del triángulo  $OP_1P_2$  de la derecha de la figura 3.1 y no depende para nada de la excentricidad de la órbita.

Existe una extensa bibliografía sobre el problema de Lambert surgidas por la utilidad de su solución en problemas muy diversos de la Mecánica Celeste y Astrodinámica. Las diferencias entre los distintos métodos radican en las distintas estrategias numéricas empleadas para encontrar de manera iterativa las incógnitas del problema que son necesarias al no existir una solución analítica al problema.

La más importante aportación histórica al problema de Lambert fue desarrollada por Gauss cuando trató de encontrar la órbita del asteroide Ceres después de que este fuera perdido tras su descubrimiento por Giussepe Piazzi en 1801. En Gauss (1809) se desarrolla un método basado en la relación *área triángulo/área sector* para la resolución del problema de Lambert que, aunque es válido únicamente para órbitas elípticas, ha sido uno de los métodos más fructíferos en el problema de la determinación de órbitas.

Desde entonces se han desarrollado un gran número de métodos para la resolución de este problema que han hecho uso de muy diversas técnicas como propiedades geométricas de las cónicas, variables universales, el vector de excentricidad, etc. Entre los trabajos más relevantes podemos encontrar los realizados por Lancaster and Blanchard (1969); Battin (1977); Prussing (1979); Gooding (1990); Prussing and Conway (1993); Battin (1999) y entre los más recientes los de Izzo (2005); Avanzini

(2008), los cuales se han adaptado a los métodos de cálculo actuales logrando así la eficiencia computacional, demandada en muchas misiones espaciales. En lo que sigue mostraremos, a modo de ejemplo, el método de Battin, que es uno de los más usados en la actualidad.

### 3.1.4. Método de Battin para la resolución del problema de Lambert

El método desarrollado por Battin (1999) es una variación del método de Gauss que extiende su aplicación a todo tipo de órbitas, además de incluir el caso en que los puntos sean colineales y mejorar la convergencia para ángulos de transferencia muy pequeños. Este método ha sido ampliamente utilizado por la comunidad científica y está basado en ciertas transformaciones trigonométricas y algunas funciones hipergeométricas<sup>3</sup>, que permiten llegar a obtener una ecuación cúbica, cuya raíz real es la solución buscada. El método de Battin reformula el problema conservando la estructura hecha por Gauss, que destaca por su simplicidad y forma compacta.

Partiremos del conjunto de expresiones

$$\begin{aligned}\sqrt{\mu} \mathcal{T} &= 2a^{3/2}(\psi - \sin \psi \cos \phi), \\ r_1 + r_2 &= 2a(1 - \cos \psi \cos \phi), \\ c &= 2a \sin \psi \sin \phi, \\ \lambda s &= a(\cos \psi - \cos \phi),\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde,  $\psi = \frac{1}{2}(E_{\mathcal{T}} - E_0)$  y  $\cos \phi = e \cos[\frac{1}{2}(E_0 + E_{\mathcal{T}})]$ , siendo  $E_0$  y  $E_{\mathcal{T}}$  las *anomalías excéntricas* asociadas con los vectores posición  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{x}_{\mathcal{T}}$ . La demostración de estas expresiones puede verse en Battin (1999).

Para el desarrollo del método, Battin introduce la variable  $\lambda$  dada a partir de la expresión

$$\lambda \Delta = \sqrt{r_1 r_2} \cos(\theta/2),\tag{3.8}$$

donde, de acuerdo con el triángulo de la parte derecha de la figura 3.1, se tiene que  $\Delta = (r_1 + r_2 + c)/2$ , es el semiperímetro del triángulo de transferencia  $OP_1P_2$ ,  $\theta$  el ángulo de transferencia y  $c = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta)}$  la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

<sup>3</sup>La notación  $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$  es adoptada para representar series geométricas  $1 + \frac{\alpha\beta x}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)x^2}{\gamma(\gamma+1)2!} + \dots$ , cuyo radio de convergencia es absolutamente convergente para  $|x| < 1$ . El término “función hipergeométrica” fue introducido por John Wallis en 1655.

De acuerdo con el teorema de Lambert, la expresión (3.6) contiene la información necesaria para construir la solución al problema de Lambert. Gran parte de los métodos clásicos de resolución del problema de Lambert se basan en una adecuada formulación de la función  $\Phi$  de dicha ecuación. Así, por ejemplo, Lagrange la expresa en la forma

$$\sqrt{\mu} \mathcal{T} = a^{3/2}[(\alpha - \sin \alpha) - (\beta - \sin \beta)], \quad (3.9)$$

donde introduce los parámetros  $\alpha = (\phi + \psi)$  y  $\beta = (\phi - \psi)$ . En Prussing (1979) encontramos un estudio geométrico detallado de  $\alpha$  y  $\beta$ . Por otro lado Gauss logra eliminar el término  $\cos \phi$  de las expresiones dadas en (3.7) y reducir éstas a la ecuación siguiente:

$$\sqrt{\mu} \mathcal{T} = a^{3/2}(2\psi - \sin 2\psi) + 2\lambda \Delta a^{1/2} \sin \psi. \quad (3.10)$$

Los detalles del cálculo de esta expresión se describen en su clásica memoria de funciones hipergeométricas y sus expansiones en fracciones continuas, publicadas tres años después de la *Theoria Motus*.

Al ser introducidos los parámetros constantes  $l$  y  $m$ , que dependen exclusivamente de la geometría del triángulo de transferencia, el intervalo de tiempo  $\mathcal{T}$  y la constante de gravitación  $\mu$ , a través de las expresiones

$$l = \frac{(1 - \lambda)^2}{4\lambda}, \quad m = \frac{\mu \mathcal{T}^2}{(2\lambda s)^3}, \quad (3.11)$$

y una nueva variable,  $y$ . Gauss transforma la ecuación del tiempo dada en (3.10) en las dos ecuaciones siguientes:

$$y^2 = \frac{m}{l + \sin^2(\psi/2)}, \quad (3.12)$$

$$y^3 - y^2 = m \left( \frac{2\psi - \sin 2\psi}{\sin^3 \psi} \right). \quad (3.13)$$

Gauss introduce, posteriormente otra expresión para el parámetro  $l$ , dado por:

$$l = \frac{\sin^2(\theta/2) + \tan^2(2w)}{\cos(\theta/2)}, \quad \text{con} \quad \tan^2(2w) = \frac{r_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} + r_2 \left( \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} - 2 \right)}{4r_2}, \quad (3.14)$$

el cual mejora los resultados cuando el ángulo de transferencia es muy pequeño.

Para buscar la solución a las ecuaciones (3.12) y (3.13), basta con evaluar de forma simultánea las variables  $y$  y  $\psi$ . Para ello, el término de la derecha de la ecuación cúbica en (3.13), es expresado (Gauss, 1809), como

$$\frac{2\psi - \sin 2\psi}{\sin^3 \psi} = \frac{4}{3} F(3, 1; 5/2; x), \quad (3.15)$$

siendo  $F$ , una función hipergeométrica con la variable  $x = \sin^2(\psi/2)$ . Así, las ecuaciones (3.12) y (3.13) son reformuladas como sigue:

$$x = \frac{m}{y^2} - l, \quad y^3 - y^2 - hy = \frac{h}{9}, \quad (3.16)$$

donde  $h = m/(5/6 + l + \xi)$ , y  $\xi$  una función de la variable  $x$  determinada a partir de la siguiente fracción continua :

$$\xi(x) = \frac{\frac{2x^2}{35}}{1 + \frac{2x}{35} - \frac{\frac{40x}{63}}{1 - \frac{4x}{99}}}. \quad (3.17)$$

Esto permite, posteriormente, el cálculo de  $x$  de manera sistemática hasta que deje de cambiar dentro de los límites de una cierta tolerancia establecida. De aquí, la ecuación cúbica admite exactamente una raíz real que puede ser determinada por un proceso iterativo de sustituciones sucesivas.

Las ecuaciones dadas por Gauss pueden generalizarse a cualquier otro tipo de movimiento no elíptico si se extiende la definición de la variable  $x$  en la forma

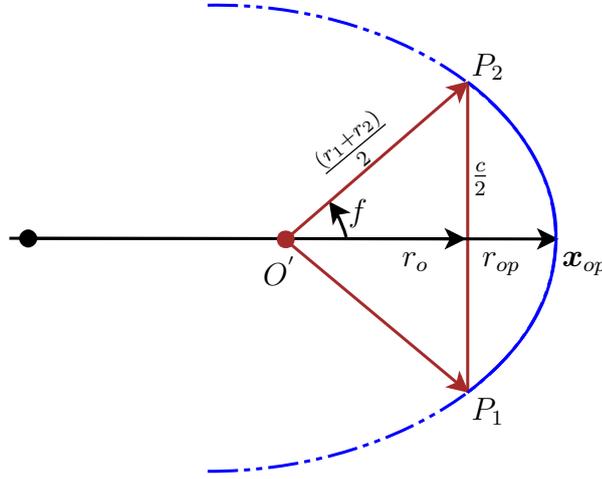
$$x = \begin{cases} \sin^2 \left[ \frac{1}{4}(E_0 - E_{\mathcal{T}}) \right], & \text{elipse,} \\ 0, & \text{parábola,} \\ \sinh^2 \left[ \frac{1}{4}(H_0 - H_{\mathcal{T}}) \right], & \text{hipérbola,} \end{cases} \quad (3.18)$$

siendo,  $H_0$  y  $H_{\mathcal{T}}$  anomalías hiperbólicas.

Battin et al. (1978) parten del método desarrollado por el propio Gauss con el objetivo de eliminar la singularidad del método (cuando  $\theta = \pi$ ) y acelerar su convergencia. Para ello, combinan las formulaciones de Lagrange y la de Gauss, y alteran la geometría del problema manteniendo fijos los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y el tiempo  $\mathcal{T}$  de tránsito, pero moviendo el foco de atracción hacia un punto en la recta perpendicular a la línea que une los dos puntos. El método de resolución se construye a partir de las expresiones del movimiento kepleriano del problema transformado y su relación con las expresiones del problema original.

La figura 3.4 muestra la geometría de la órbita transformada. En ella pueden observarse las siguientes propiedades: el semieje mayor es perpendicular a  $\overline{P_1P_2}$ ;

el tiempo de transferencia desde el pericentro  $\mathbf{x}_{op}$  hasta el punto  $P_2$  es la mitad del intervalo de tiempo  $\mathcal{T}$ ; la distancia del nuevo foco  $O'$  hasta  $P_2$  es  $(r_1 + r_2)/2$ ; y, finalmente, la anomalía verdadera  $f$  queda definida en términos  $\theta$ , a través del  $\cos f = (2\lambda\Delta)/(r_1 + r_2)$ .



**Figura 3.4:** Geometría de la órbita kepleriana transformada.

Con esto, la ecuación del tiempo de transferencia se puede expresar a partir de la ecuación de Kepler aplicada al problema transformado, tal que

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \mathcal{T} = E - e_o \sin(E), \quad (3.19)$$

siendo,  $E$  la anomalía excéntrica del punto  $P_2$  en la órbita transformada y,  $e_o$  su excentricidad.

De acuerdo con la figura 3.4, el punto medio del arco kepleriano que conecta a los puntos  $P_1$  y  $P_2$  está indicado por  $\mathbf{x}_{op}$ , de norma  $r_{op} = \|\mathbf{x}_{op}\|$  y relacionado con  $r_o$ , a través de las propiedades geométricas del triángulo  $O'P_1P_2$ , (Battin and Vaughan, 1984), de forma que

$$r_{op} = \frac{1}{4} \left( r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right), \quad (3.20)$$

por lo que, la ecuación (3.19) se puede expresar como

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \mathcal{T} = E - \sin E + (1 - e_o) \sin E, \quad (3.21)$$

donde,  $E = (1/2)(E_{\mathcal{T}} - E_0) = \psi = (1/2)(\alpha - \beta)$ .

Al ser considerada, por un lado, la relación de la anomalía verdadera y la excéntrica según la ecuación (1.6), y por otro que  $(1 - e_o) = (r_{op}/a) \sec^2(E/2)$ , e introdu-

ciendo la variable  $x$ , conjuntamente con los parámetros  $l$  y  $m$ , en la forma

$$x = \tan^2\left(\frac{E}{2}\right), \quad l = \tan^2\left(\frac{f}{2}\right), \quad m = \frac{\mu \mathcal{T}^2}{(2r_{op})^3}, \quad (3.22)$$

se llega al factor  $\frac{2r_{op}}{a} = \frac{4x}{(1+x)(l+x)}$ . Si sustituimos éste y efectuamos una reordenación de la expresión (3.20), ésta se transforma en las dos ecuaciones siguientes:

$$y^2 = \frac{m}{(l+x)(1+x)}, \quad (3.23)$$

$$y^3 - y^2 = m \left( \frac{2E - \sin(E)}{4 \tan^3(E/2)} \right), \quad (3.24)$$

similares a las desarrolladas por Gauss.

Battin and Vaughan (1984) reformulan el parámetro  $l$  como,

$$l = \frac{\sin^2(\theta/2) + \tan^2(2w)}{\sin^2(\theta/4) + \tan^2(2w) + \cos(\theta/2)}, \quad (3.25)$$

lo que permite remover la singularidad en  $\theta = \pi$ , y mejorar los resultados cuando este ángulo es pequeño.

Por otro lado, el término que acompaña al parámetro  $m$  de la ecuación cúbica es expresado en términos de una función hipergeométrica equivalente a la dada para el algoritmo de Gauss, tal que

$$\frac{2E - \sin E}{4 \tan^3(E/2)} = \frac{1}{2 \tan^2(E/2)} \left[ \frac{E/2}{\tan(E/2)} - \frac{1}{1 + \tan^2(E/2)} \right], \quad (3.26)$$

se convierte en

$$\frac{2E - \sin E}{4 \tan^3(E/2)} = -\frac{d}{dx} F(1/2, 1; 3/2; -x) = \frac{2x + \xi}{(1+x)[4x + \xi(3+x)]}, \quad (3.27)$$

al ser introducida la variable  $x$  definida en la expresión (3.22).

Con esto, las ecuaciones (3.23) y (3.24) son funciones exclusivamente de  $x$  e  $y$ , justamente como el algoritmo de Gauss, y pueden ser aplicadas para cualquier cónica extendiendo la definición de  $x$  en la forma

$$x = \begin{cases} \tan^2 \left[ \frac{1}{4}(E_0 - E_{\mathcal{T}}) \right], & \text{elipse,} \\ 0, & \text{parábola,} \\ -\tanh^2 \left[ \frac{1}{4}(H_0 - H_{\mathcal{T}}) \right], & \text{hipérbola.} \end{cases} \quad (3.28)$$

El valor de  $x$  así definido tiene un rango entre  $-1$  y  $+\infty$ .

En un proceso iterativo de sustituciones sucesivas se obtiene la solución para  $x$  e  $y$ . Para ello, como valor de inicio es suficiente con tomar  $x = l$  para el caso elíptico y  $x = 0$ , para cualquier otro.

Para mejorar la convergencia del método puede introducirse la variable  $\eta$ , como

$$\eta = \frac{x}{(\sqrt{1+x})^2}, \quad -1 < \eta < 1, \quad (3.29)$$

y la función  $\xi(x)$  y las variables auxiliares  $h_1$  y  $h_2$  como

$$\xi(x) = \frac{8\sqrt{1+x} + 1}{3 + \frac{1}{\eta + \xi(\eta)}}, \quad (3.30)$$

$$h_1 = \frac{(x+l)^2(1+3x+\xi(x))}{(1+2x+l)(4x+\xi(3+x))}, \quad (3.31)$$

$$h_2 = \frac{m(x-l+\xi(x))}{(1+2x+l)(4x+\xi(3+x))}, \quad (3.32)$$

y de esta forma obtener unas ecuaciones análogas a la ecuación cúbica obtenida por Gauss, esto es

$$x + \left(\frac{1+l}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1-l}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{y^2}\right)}, \quad (3.33)$$

$$y^3 - y^2(1+h_1) = h_2. \quad (3.34)$$

Finalmente, se puede obtener el valor del semieje mayor y el semiperímetro por

$$a = \frac{ms(1+\lambda)^2}{8xy^2}, \quad p = \frac{4r_1r_2 \sin^2(\theta/2)}{c^2} p_o, \quad (3.35)$$

$$\text{con } p_o = \frac{c^2(1+x)^2}{16ax}.$$

En Vallado (2001), puede encontrarse un pseudocódigo del algoritmo desarrollado por Battin en el que incluye el cálculo de la velocidad a partir de los elementos orbitales  $a$  y  $p$ .

## 3.2. Arcos orbitales. Problema de Lambert generalizado

### 3.2.1. Problema de Lambert para un modelo orbital perturbado

Podemos extender el concepto de arco kepleriano si sustituimos el modelo orbital kepleriano, dado por las ecuaciones diferenciales (1.3), por el dado por las ecuaciones perturbadas (1.4).

De esta forma llamaremos *arco orbital* al segmento de curva  $\boldsymbol{x}(t)$ , comprendido entre dos instantes de tiempo  $t \in [0, \mathcal{T}]$ , donde  $\boldsymbol{x}(t)$  representa la trayectoria de la órbita solución del sistema (1.4).

El problema clásico de Lambert, analizado en el apartado anterior, así como cualquiera de sus métodos de resolución, buscan el arco kepleriano que conecta dos puntos del espacio, pero para un modelo orbital perturbado este arco no es sino una aproximación del arco orbital que los une. En el siguiente apartado introduciremos un método que llamaremos *método de Lambert generalizado* que mejora la solución clásica kepleriana del problema de Lambert transformando el arco kepleriano en el arco orbital. Para ello nos basaremos en una extensión del método de mejora de órbitas periódicas desarrollado en Abad et al. (2011).

### 3.2.2. Método de corrección de órbitas periódicas

En Abad et al. (2011) se desarrolla un algoritmo corrector de mejora de órbitas periódicas que usa el método clásico de *Newton-Raphson* con extensiones basadas en el uso del software TIDES<sup>4</sup> (Abad et al., 2012), que permite obtener órbitas periódicas con cualquier precisión, y en el método de resolución de sistemas lineales SVD (descomposición en valores singulares), que permite que el sistema lineal que debe resolverse no sea necesariamente cuadrado. En nuestro caso prescindiremos del uso de TIDES porque no necesitamos trabajar en múltiple precisión y porque TIDES no puede ser adaptado a la integración de alguno de los modelos de perturbaciones que tratamos en esta memoria.

---

<sup>4</sup>Taylor series Integrator for Differential EquationS.

Supongamos un sistema dinámico autónomo dado por el sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.36)$$

donde  $\mathbf{y}_0$  representa el vector de condiciones iniciales<sup>5</sup>. La solución del sistema vendrá dada por el vector

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.37)$$

Una *órbita periódica* del sistema dado en (3.36) está caracterizada por un vector  $\mathbf{y}_0$  de condiciones iniciales dadas y un periodo de tiempo  $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ , tal que se cumple la siguiente condición:

$$\mathbf{y}(\mathcal{T}; \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0 = 0. \quad (3.38)$$

El problema de buscar órbitas periódicas consiste en la búsqueda de un conjunto de valores  $(\mathcal{T}; \mathbf{y}_0)$  que verifiquen la condición anterior y, por tanto, se convierten en las condiciones iniciales de la órbita periódica. En Astrodinámica existen diversos métodos que nos dan órbitas que aunque no sean periódicas se encuentran próximas a una periódica, de forma que en lugar de la condición (3.38) se cumple  $\mathbf{y}(\mathcal{T}; \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0 \approx 0$ .

El método que aquí se presenta se basa en la búsqueda de una corrección  $(\Delta\mathcal{T}, \Delta\mathbf{y}_0)$  a la órbita preliminar  $(\mathcal{T}, \mathbf{y}_0)$ , de forma que

$$\mathbf{y}(\mathcal{T} + \Delta\mathcal{T}; \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}_0) - (\mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}_0), \quad (3.39)$$

sea cero, 0, o un valor aproximado a cero. Este método será aplicado de forma iterativa hasta el momento en que el valor anterior sea lo suficientemente próximo a cero para considerar la órbita periódica.

Para calcular la corrección  $(\Delta\mathcal{T}, \Delta\mathbf{y}_0)$  desarrollaremos la expresión (3.39) en una serie de Taylor multivariable, hasta el primer orden y la igualaremos a cero, esto es

$$\mathbf{y}(\mathcal{T}; \mathbf{y}_0) + \mathbf{y}_t \Delta\mathcal{T} + \mathbf{y}_{\mathbf{y}_0} \cdot \Delta\mathbf{y}_0 - (\mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}_0) = 0. \quad (3.40)$$

La matriz  $\Phi = \mathbf{y}_{\mathbf{y}_0}$  representa *matriz de transición del sistema*, esto es, la matriz de derivadas parciales de la solución respecto de las condiciones iniciales y es la solución de las ecuaciones variacionales del sistema dinámico. Esta matriz, evaluada en  $(\mathcal{T}; \mathbf{y}_0)$ , es la llamada *matriz de monodromía*,  $\mathcal{M} = \Phi(\mathcal{T}; \mathbf{y}_0)$  y juega un papel muy importante en el estudio de las órbitas periódicas, no solo por su corrección sino también para el estudio de estabilidad.

<sup>5</sup>Usaremos, sin pérdida de generalidad, el valor  $t_0 = 0$ .

Por otro lado, el término  $\mathbf{y}_t$ , equivale al vector columna que determina la derivada de la solución respecto al tiempo, es decir,  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ , y corresponde a la expresión de  $\mathbf{f}$  evaluada en  $\mathbf{y}_\mathcal{T} = \mathbf{y}(\mathcal{T}; \mathbf{y})$ , cuando  $t = \mathcal{T}$ , esto es,  $\mathbf{f}(\mathbf{y}_\mathcal{T})$ . Por lo tanto, la ecuación (3.40), queda en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{y}_\mathcal{T}) & \mathcal{M} - \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathcal{T} \\ \Delta\mathbf{y}_0 \end{pmatrix} = (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_\mathcal{T}), \quad (3.41)$$

donde,  $\mathbf{I}$  es una matriz identidad de orden  $n$ , y representa un sistema lineal de  $n$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas.

Usualmente, los métodos de mejora de órbitas añaden al sistema de ecuaciones anterior una nueva condición

$$(\mathbf{f}(\mathbf{y}_0))^T \Delta\mathbf{y}_0 = 0, \quad (3.42)$$

que, por un lado evita posibles desplazamientos tangentes que impidan la mejora de la órbita ya que siguen la dirección de la misma, y por otro permiten expresar el sistema en la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{y}_\mathcal{T}) & \mathcal{M} - \mathbf{I} \\ 0 & (\mathbf{f}(\mathbf{y}_0))^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathcal{T} \\ \Delta\mathbf{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_\mathcal{T} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

con lo que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, esto es un sistema lineal de  $(n + 1) \times (n + 1)$ .

En ocasiones se desea que la órbita periódica encontrada mantenga constante un parámetro<sup>6</sup>, o vector de parámetros, definido por la condición  $\mathbf{Q}(t; \mathbf{y}) = \mathbf{q}$ , por lo que debemos añadir esta condición a la condición de periodicidad dada en (3.38). Así, para mantener la restricción desarrollamos hasta el primer orden e igualamos a cero la expresión

$$\mathbf{Q}(\mathcal{T} + \Delta\mathcal{T}; \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}_0) - \mathbf{q}, \quad (3.44)$$

lo que nos llevará a imponer la condición

$$\mathbf{Q}_t \Delta\mathcal{T} + \mathbf{Q}_y \cdot \Delta\mathbf{y}_0 = (\mathbf{q} - \mathbf{Q}(\mathcal{T}; \mathbf{y}_0)), \quad (3.45)$$

donde,  $\mathbf{Q}_y$  y  $\mathbf{Q}_t$  están evaluadas en  $(\mathcal{T}, \mathbf{y})$ .

Entonces, añadiendo las ecuaciones (3.45) al sistema (3.43), obtendremos final-

---

<sup>6</sup>Por ejemplo, la energía o la constante de Jacobi.

mente el sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{y}_\tau) & \mathcal{M} - \mathbf{I} \\ 0 & (\mathbf{f}(\mathbf{y}_0))^T \\ \mathbf{Q}_t & \mathbf{Q}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathcal{T} \\ \Delta\mathbf{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} - \mathbf{y}_\tau \\ 0 \\ \mathbf{q} - \mathbf{Q}(\mathcal{T}; \mathbf{y}_0) \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

el cual es un sistema lineal de  $n + 1 + d$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas, siendo  $d$  el número de parámetros (dimensión de  $\mathbf{Q}$ ) a conservar.

El sistema lineal que verifica la corrección de la órbita periódica puede expresarse como  $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ , siendo  $\mathbf{A}$  una matriz  $m \times n$ , donde  $m$  no tiene por qué ser igual a  $n$ . De esta forma no podremos asegurar la existencia de una solución del sistema, sin embargo, puesto que el objetivo es corregir la órbita iterativamente, en varios pasos, nos conformaremos con encontrar la solución de mínima norma, esto es, buscaremos el vector  $\boldsymbol{\alpha}$  que hace mínima la diferencia  $d = \|\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}\|$ .

El método de *descomposición en valores singulares* permite factorizar una matriz  $\mathbf{A}$ , de dimensiones  $(m \times n)$  como,

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{N}^T, \quad (3.47)$$

donde la matriz  $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$  es una matriz ortogonal  $(m \times m)$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$  una matriz ortogonal  $(n \times n)$ , y  $\boldsymbol{\Sigma}$  una matriz  $(m \times n)$  cuyos elementos son todos iguales a cero excepto los primeros elementos de la diagonal  $\Sigma_{ii} = \sigma_i \geq 0$ , con  $i \leq \min(n, m)$ . Los elementos  $\sigma_i$  satisfacen una ordenación tal que:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ , y son los *valores singulares* de la matriz  $\mathbf{A}$ . El rango de la matriz  $\mathbf{A}$  es igual al número de valores singulares distintos de cero determinado por el número  $r \leq \min(n, m)$ . Demostración y propiedades de la ecuación (3.47) la podemos encontrar en (Stoer and Bulirsch, 1993).

Por otro lado, tenemos que el sistema matricial es equivalente a,

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{N}^T\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}, \quad (3.48)$$

que al ser multiplicado por la transpuesta de  $\mathbf{M}$ , se transforma en el sistema  $\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{b}^*$ , donde  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{N}^T\boldsymbol{\alpha}$  y  $\mathbf{b}^* = \mathbf{M}^T\mathbf{b}$ . Como las matrices ortogonales preservan la norma (Demmel, 1997) tenemos  $d = \|\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}\| = \|\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{b}^*\|$ .

Finalmente, puesto que  $\boldsymbol{\Sigma}$  es una matriz diagonal, podemos encontrar fácilmente los elementos del vector  $\boldsymbol{\beta}$  que minimizan a  $d$ . La solución vendrá dada por las expresiones  $\beta_i = b_i^*/\sigma_i$ , si  $\sigma_i \neq 0$  y  $\beta_i$  cualquier valor en otro caso. Por lo tanto, la solución de menor norma vendrá dada por  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{N}\boldsymbol{\beta}$  y, la distancia a la solución vendrá dada por  $d = (\sum_{i>r} (b_i^*)^2)^{1/2}$ , (Demmel, 1997).

### 3.2.3. Extensión del método de corrección de órbitas

El método descrito en la anterior subsección corresponde a la mejora de órbitas periódicas, sin embargo, puede ser extendido para modificar las condiciones a cumplir por la órbita mejorada en dos sentidos diferentes:

1. Fijar alguno de los elementos de las condiciones iniciales. Por ejemplo, que el período  $\mathcal{T}$ , o alguna de las componentes del vector de condiciones iniciales no varíe.
2. Cambiar la condición de periodicidad por otra diferente. Por ejemplo si no queremos que una órbita sea periódica sino que su trayectoria se cruce en un punto, basta restringir la condición (3.38) a la posición y no a la velocidad.

El método de corrección busca un conjunto de parámetros  $\{\mathcal{T}, \mathbf{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)\}$  que representen el periodo y las condiciones iniciales de una órbita periódica. Con objeto de fijar indistintamente cualquiera de estos elementos introduciremos el vector extendido  $\tilde{\mathbf{y}}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\tilde{\mathbf{y}}_0 = (y_0^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ , con  $y_0^0 \equiv \mathcal{T} \in \mathbb{R}$ .

Llamaremos  $\mathcal{J} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$  al conjunto de índices de los elementos de  $\tilde{\mathbf{y}}$  que pueden variar. Por ejemplo, si queremos que el periodo quede fijo, entonces tendremos  $\mathcal{J} = \{1, \dots, n\}$ . La cardinalidad<sup>7</sup> de  $\mathcal{J}$  será  $n_{\mathcal{J}} \leq (n + 1)$ , donde el signo igual significa que todos los elementos de  $\tilde{\mathbf{y}}$  pueden variar.

Para reformular la condición (3.38) llamaremos, en primer lugar,  $\mathcal{I} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  al conjunto de índices de las componentes a las que afecta la condición (3.38). La cardinalidad de  $\mathcal{I}$  será  $n_{\mathcal{I}} \leq n$ , donde el signo igual significa que la restricción afecta a todas las componentes del vector. En el caso de buscar órbitas que se crucen en  $\mathbb{R}^3$  tendremos que  $n = 6$ , siendo las tres primeras componentes la posición y las tres últimas la velocidad, por tanto  $\mathcal{I} = \{1, 2, 3\}$ .

Finalmente, la condición (3.38) puede ser reformulada en la forma

$$\mathbf{y}_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0) = \boldsymbol{\psi}_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0, \mathbf{z}), \quad \text{con } \boldsymbol{\psi}_{\mathcal{I}}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{I}}}, \quad (3.49)$$

siendo,  $\mathbf{z}$  un vector de parámetros constantes<sup>8</sup>. En este caso, puesto que no se busca una órbita periódica, el elemento  $y_0^0 = \mathcal{T}$  deja de ser el periodo y se transforma en el

<sup>7</sup>Número de elementos del conjunto.

<sup>8</sup>La necesidad de introducir este vector de parámetros se verá cuando apliquemos este método para construir una versión del método de Lambert aplicado a órbitas no keplerianas.

intervalo de tiempo hasta el que se propaga la solución, para llegar al último punto,  $\mathbf{y}(\tilde{\mathbf{y}}_0)$ , de manera que las componentes de índice  $\mathcal{I}$  de la solución valgan  $\psi_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0, \mathbf{z})$ .

Una vez fijadas las restricciones sobre el método, a partir de los conjuntos  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{J}$  y el vector  $\psi_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0, \mathbf{z})$ , procedemos en forma similar a la efectuada en el apartado anterior. Supondremos una órbita inicial caracterizada por los elementos  $\tilde{\mathbf{y}}_0$  que cumpla las expresiones dadas en (3.49) de manera aproximada  $\mathbf{y}_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0) - \psi_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0, \mathbf{z}) \approx 0$ . Con ello buscaremos una corrección  $\Delta\tilde{\mathbf{y}}_0$ , tal que las componentes cuyos índices no estén en  $\mathcal{I}$  sean cero, y cumplan

$$\mathbf{y}_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0 + \Delta\tilde{\mathbf{y}}_0) - \psi_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0 + \Delta\tilde{\mathbf{y}}_0, \mathbf{z}) = 0. \quad (3.50)$$

Para esto, (3.50) es desarrollada en serie de Taylor de primer orden tal que

$$\mathbf{y}_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0) + \sum_{j \in \mathcal{J}} \left( \frac{\partial \mathbf{y}_{\mathcal{I}}}{\partial y_j^0} \right) \Delta y_j^0 - \psi_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0, \mathbf{z}) - \sum_{j \in \mathcal{J}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y_j^0} \right) \Delta y_j^0 = 0, \quad (3.51)$$

donde no se han tenido en cuenta los términos que queremos mantener constantes. En forma vectorial podremos poner

$$\mathbf{y}_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0) + (\mathbf{y}_{\mathcal{I}} - \psi_{\mathcal{I}}) \tilde{\mathbf{y}}_{0\mathcal{J}} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{y}}_{0\mathcal{J}} - \psi_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0, \mathbf{z}) = 0, \quad (3.52)$$

que finalmente podrá expresarse como

$$\left( \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} - \Psi_{\mathcal{I}\mathcal{J}} \right) \cdot \Delta\tilde{\mathbf{y}}_{0\mathcal{J}} = \psi_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0, \mathbf{z}) - \mathbf{y}_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}_0), \quad (3.53)$$

donde  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$  es la submatriz obtenida de eliminar de la matriz  $\widetilde{\mathcal{M}} = (\mathbf{f}(\mathbf{y}_{\mathcal{T}}) \mathcal{M})$  las filas cuyos índices no pertenezcan a  $\mathcal{I}$  y las columnas cuyos índices no pertenezcan a  $\mathcal{J}$ , mientras que  $\Psi_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$  es la matriz de derivadas de  $\psi_{\mathcal{I}}$  respecto a las variables que no se mantienen constantes. En el caso general  $\psi_{\mathcal{I}} = \mathbf{y}_0$ , luego se tendrá  $\Psi_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = (0 \mathbf{I})$ .

En este caso el sistema lineal (3.53), de  $n_{\mathcal{I}}$  ecuaciones con  $n_{\mathcal{J}}$  incógnitas, sustituye a (3.41). Al igual que en el método general podemos añadir una ecuación por medio de la condición de ortogonalidad y otras  $d$  ecuaciones si el problema posee un conjunto de  $d$  parámetros constantes.

Finalmente, el método se aplica de forma iterativa buscando en cada paso una corrección a las condiciones anteriores que se obtiene resolviendo el sistema lineal por el método SVD.

### 3.2.4. Método de Lambert generalizado

Supongamos que queremos conocer el arco orbital que une dos puntos,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{\mathcal{T}}$ , en un tiempo  $\mathcal{T}$ . Si resolvemos el problema de Lambert encontraremos la velocidad  $\mathbf{X}_k$  que debe tener el orbitador en el instante inicial,  $t_0 = 0$ , para que al propagar el modelo kepleriano con las condiciones iniciales ( $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \mathbf{X}_k = \mathbf{X}(0)$ ) se llegue finalmente al punto  $\mathbf{x}_{\mathcal{T}} = \mathbf{x}(\mathcal{T})$ .

Si partimos de nuevo de las condiciones iniciales ( $\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_k$ ) y propagamos con el modelo orbital perturbado (1.4) se tendrá que se verifica  $\mathbf{x}_{\mathcal{T}} \neq \mathbf{x}_{\mathcal{T}}^k = \mathbf{x}(\mathcal{T})$ , puesto que el arco kepleriano no coincide con el arco orbital.

Llamaremos *método de Lambert generalizado* a la mejora del arco obtenido por el método clásico de Lambert para conseguir la mejor aproximación posible al arco orbital considerando las fuerzas perturbadoras del modelo. Para ello, partiremos del valor  $\mathbf{X}_k$ , obtenido por resolución del problema clásico de Lambert y buscaremos un valor próximo  $\mathbf{X}_0$ , tal que al propagar la órbita a partir de las condiciones iniciales ( $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ ) se llegue finalmente al punto  $\mathbf{x}_{\mathcal{T}} = \mathbf{x}(\mathcal{T})$ . Para ello formularemos de manera conveniente el método de corrección de órbitas visto del apartado 3.2.3.

Supondremos el sistema dinámico dado por las ecuaciones diferenciales (1.33), siendo  $\mathbf{F}$  la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el orbitador. Este sistema coincide con (3.36) si hacemos  $y_i = x_i, y_{i+3} = X_i$ . Al integrar las ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales  $\mathbf{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^k, y_5^k, y_6^k)$ , donde  $\mathbf{x}_0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0)$  y  $\mathbf{X}_k = (y_4^k, y_5^k, y_6^k)$ , obtenemos una solución  $\mathbf{y}(\mathcal{T}, \mathbf{y}_0)$  tal que sus tres primeras componentes (posición) se aproximan al valor de  $\mathbf{x}_{\mathcal{T}}$  pero no coinciden exactamente con él. El método consiste en modificar sucesivamente las condiciones iniciales de forma que

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \Delta \mathbf{y}_i, \quad \Delta \mathbf{y}_i = (0, 0, 0, \Delta y_4, \Delta y_5, \Delta y_6), \quad (3.54)$$

esto es, manteniendo fijas las tres primeras componentes (posición) y variando las tres últimas (velocidad), de forma que finalmente se verifique la siguiente igualdad

$$y_i(\mathcal{T}, \mathbf{y}_i) - y_i^{\mathcal{T}} = 0, \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (3.55)$$

es decir, que la posición al integrar con el  $i$ -ésimo conjunto de condiciones iniciales  $\mathbf{y}_i$ , coincida con la posición final.

Esta formulación coincide con la expresada en el apartado 3.2.3, donde debemos establecer los elementos  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ , la función de condición  $\psi_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{z})$  y la matriz  $\Psi$  que

caracterizan la extensión del método de mejora al método de Lambert generalizado.

Llamaremos  $\mathcal{J} = \{4, 5, 6\}$  al conjunto de índices que pueden variar en (3.54), y que representan las tres últimas componentes del vector  $\tilde{\mathbf{y}}_0 = (y_0^0, \mathbf{y})$ , con  $y_0^0 = \mathcal{T}$ . Por otro lado, la función de condición puede ponerse como  $\psi_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{z}) = \mathbf{z} = \mathbf{x}_{\mathcal{T}}$  y actúa únicamente sobre las componentes primera, segunda y tercera de  $\mathbf{y}$ , lo que permite tomar  $\mathcal{I} = \{1, 2, 3\}$ . Finalmente, puesto que la condición actúa sobre un vector constante  $\mathbf{z} = \mathbf{x}_{\mathcal{T}}$ , habrá que considerar  $\Psi$  como la matriz nula.

Nótese que de acuerdo con el planteamiento del método de Lambert el tiempo  $\mathcal{T}$ , que puede variar en la mejora de órbitas periódicas, queda constante al igual que la posición del punto inicial.

Aplicando el método de mejora obtendremos una expresión para la corrección  $\Delta \mathbf{X}^i$ , que vendrá dada por el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1^i} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2^i} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3^i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1^i} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2^i} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3^i} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1^i} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2^i} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_1^i \\ \Delta X_2^i \\ \Delta X_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\mathcal{T}} - x_1(\mathcal{T}, \mathbf{y}^i) \\ x_2^{\mathcal{T}} - x_2(\mathcal{T}, \mathbf{y}^i) \\ x_3^{\mathcal{T}} - x_3(\mathcal{T}, \mathbf{y}^i) \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

### 3.2.5. Aplicación: búsqueda de arcos orbitales alrededor de la Tierra y de la Luna

Para probar el método hemos elegido, en primer lugar, distintos escenarios para órbitas de satélites artificiales en torno a la Tierra, por un lado una órbita baja y por otro una órbita de tipo GTO, esto es, una órbita que conecta una órbita baja con una casi geosíncrona. En ambos casos se han considerado tiempos de tránsito  $\mathcal{T}$  pequeños (menor que la mitad del periodo orbital) y se han calculado los siguientes parámetros:

- Velocidad  $\mathbf{X}_i^K$  inicial que debe darse al orbitador en el instante inicial para llegar al punto  $\mathbf{x}_f$  a través de un arco kepleriano, esto es en una órbita kepleriana. Esta velocidad se calcula con el método de Lambert clásico.
- Velocidad  $\mathbf{X}_i^J$  inicial que debe darse al orbitador en el instante inicial para llegar al punto  $\mathbf{x}_f$  a través de un arco orbital que sigue la órbita del problema

principal del satélite. Esta velocidad se calcula con el método de Lambert generalizado.

- Velocidad  $\mathbf{X}_i^T$  inicial que debe darse al orbitador en el instante inicial para llegar al punto  $\mathbf{x}_f$  a través de un arco orbital que sigue la órbita de un satélite que se mueve de acuerdo con el modelo gravitacional JGM3 completo ( $70 \times 70$ ). Esta velocidad se calcula con el método de Lambert generalizado.

$\mathbf{x}_i$	(0.8777800558312644, -0.3307451473159457, -0.5728673995080709)
$\mathbf{x}_f$	(0.3035740774803623, 0.5284819271597148, 0.9153575487225404)
$\mathbf{X}_i^K$	(0.04267413629170610, 0.02834869360797352, 0.04910137765721319)
$\mathbf{X}_i^J$	(0.04269575920597256, 0.02833731135825854, 0.04910034816123185)
$\mathbf{X}_i^T$	(0.04269595855573242, 0.02833749993626714, 0.04910019021818422)

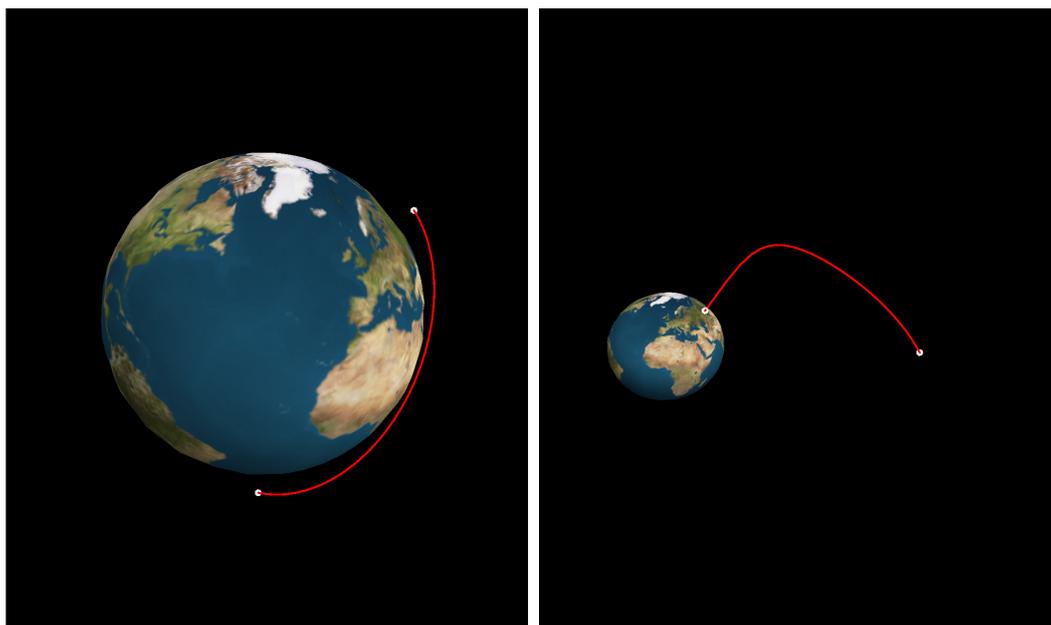
**Tabla 3.1:** Datos del arco correspondiente a la órbita terrestre baja. Tiempo de tránsito  $\mathcal{T} = 30$ . (Unidades: radios terrestres y minutos).

$\mathbf{x}_i$	(0.3035740774803623, 0.5284819271597148, 0.9153575487225404)
$\mathbf{x}_f$	(-6.576757992130522, 0.2911285428470553, 0.0000000000000000)
$\mathbf{X}_i^K$	(-0.05990179870721625, 0.03781603425557815, 0.05939622545706166)
$\mathbf{X}_i^J$	(-0.05989752029283919, 0.03775628831508424, 0.05939773166568424)
$\mathbf{X}_i^T$	(-0.05989751505728220, 0.03775657436176928, 0.05939741153253462)

**Tabla 3.2:** Datos del arco correspondiente a la órbita terrestre GTO. Tiempo de tránsito  $\mathcal{T} = 300$ . (Unidades: radios terrestres y minutos).

Las tablas 3.1 y 3.2 presentan los valores de las velocidades obtenidas para la órbita baja y la órbita GTO, mientras que en la figura 3.5 se muestran los dos arcos orbitales encontrados en este apartado. Partiendo de las velocidades obtenidas para los tres casos se ha propagado el problema hasta el punto final tomando los tres conjuntos de condiciones iniciales:  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^K)$ ,  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^J)$ ,  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^T)$  y los tres modelos orbitales: modelo kepleriano, problema principal o modelo  $J_2$  y finalmente el modelo gravitacional JGM3 ( $70 \times 70$ ) completo y se ha calculado la distancia entre la posición final obtenida por la propagación y la posición final deseada, obteniéndose los resultados mostrados en las tablas 3.3 y (3.4), y que pueden resumirse en las siguientes conclusiones:

- Si se usa la aproximación dada por el método de Lambert clásico con los modelos  $J_2$  y JGM3 el punto final se encuentra a unos 8 km del deseado para la órbita LEO y a unos 200 km para la órbita GTO.



**Figura 3.5:** Arcos orbitales en órbitas LEO (izquierda) y GTO (derecha).

C.I.	Modelo Kepler	Modelo $J_2$	JGM3 completo
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^K)$	$4.0 \times 10^{-9}$	8374.3	8449.9
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^J)$		$3.7 \times 10^{-7}$	81.3
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^T)$			$9.9 \times 10^{-9}$

**Tabla 3.3:** Distancia, en metros, al punto final del arco en cada modelo para la órbita baja.

- Si se usa el arco orbital obtenido con el modelo  $J_2$  como condición inicial para la propagación con el modelo JGM3 completo, nos aproximamos del orden de 81 m en la órbita baja y 754 m en la GTO.
- Si se usan las condiciones iniciales obtenidas por aplicación del método de Lambert adaptado a cada modelo, el punto final coincide casi exactamente con el deseado con un error menor que  $10^{-7}$  m en todos los casos.

Los casos probados hasta ahora se han aplicado a la conexión de dos puntos en un tiempo menor que la mitad del periodo orbital. Para ver como se comporta el problema con tiempos mayores hemos aplicado el método a la conexión de dos puntos también en órbita baja pero en un tiempo próximo al periodo orbital. En la tabla 3.5 se dan los vectores de posición inicial y final, y los respectivos vectores de velocidad calculados con para los tres modelos de los ejemplos anteriores.

C.I.	Modelo Kepler	Modelo $J_2$	JGM3 completo
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^K)$	$1.3 \times 10^{-7}$	199902.6	200587.5
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^J)$		$3.6 \times 10^{-8}$	754.9
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^T)$			$6.5 \times 10^{-8}$

**Tabla 3.4:** Distancia, en metros, al punto final del arco en cada modelo para la órbita GTO.

$\mathbf{x}_i$	(0.8464907196885539, 0.4595836367395579, 0.5312592044589876)
$\mathbf{x}_f$	(-0.2339281708867035, -0.3726215095096143, -1.008181938697762)
$\mathbf{X}_i^K$	(0.055722214658742983, 0.0079701078867527170, -0.043174857781784960)
$\mathbf{X}_i^J$	(0.055721492735821873, 0.0080105298217992039, -0.043182340971615350)
$\mathbf{X}_i^T$	(0.055721496827045927, 0.0080109574936351145, -0.043182528611813396)

**Tabla 3.5:** Datos del arco correspondiente a una órbita terrestre baja considerando un tiempo  $\mathcal{T} = 60$ . (Unidades: radios terrestres y minutos).

La tabla 3.6, es similar a las tablas 3.3 y 3.4 pero calculada para este caso. Al propagar el resultado dado por el método clásico de Lambert con los modelo  $J_2$  y JGM3 el punto final se encuentra a unos 15 km del punto deseado. Si propagamos con el modelo JGM3 la solución del método generalizado con el modelo  $J_2$  obtenemos un error de 236 m Finalmente, el error cometido en la propagación utilizando cada vector adaptado a cada modelo es del orden de  $10^{-8}$  m indicando que el vector final está coincidiendo con el deseado. El método generalizado de Lambert

C.I.	Modelo Kepler	Modelo $J_2$	JGM3 completo
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^K)$	$3.4 \times 10^{-8}$	15320.2	15555.6
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^J)$		$4.3 \times 10^{-9}$	236.4
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^T)$			$3.5 \times 10^{-8}$

**Tabla 3.6:** Distancia, en metros, al punto final del arco en cada modelo para una órbita terrestre.

puede aplicarse a cualquier tipo de fuerza perturbadora y no únicamente al modelo gravitacional del cuerpo central. Para comprobar ésto, se ha considerado un satélite artificial orbitando en torno a la Luna donde se han tenido en cuenta el modelo gravitacional de la Luna LP165P junto con la perturbación que la Tierra ejerce sobre el satélite lunar.

Hemos considerado dos puntos a una distancia aproximada del centro de masas de la Luna de 10 radios lunares, donde la perturbación producida por la Tierra es

importante y se han calculado los siguientes parámetros:

- Velocidad  $\mathbf{X}_i^K$  inicial que debe darse al orbitador en el instante inicial para llegar al punto  $\mathbf{x}_f$  a través de un arco kepleriano, esto es en una órbita kepleriana. Esta velocidad se calcula con el método de Lambert clásico.
- Velocidad  $\mathbf{X}_i^T$  inicial que debe darse al orbitador en el instante inicial para llegar al punto  $\mathbf{x}_f$  a través de un arco orbital que sigue la órbita de un satélite que se mueve de acuerdo con el modelo gravitacional LP165P completo ( $165 \times 165$ ). Esta velocidad se calcula con el método de Lambert generalizado.
- Velocidad  $\mathbf{X}_i^{K+\mathcal{V}_\oplus}$  inicial que debe darse al orbitador en el instante inicial para llegar al punto  $\mathbf{x}_f$  a través de un arco orbital para un modelo orbital que considera la fuerza gravitacional kepleriana de la Luna y la perturbación producida por la atracción gravitacional terrestre. Esta velocidad, así como las dos siguientes, se calcula con el método de Lambert generalizado.

El potencial perturbador de la Tierra será tomado a partir de la expresión de  $\mathcal{V}_\oplus$  dada por la ecuación (2.35), donde la distancia entre la Luna y la Tierra ha sido tomada aproximadamente como 221.37 radios lunares.

- Velocidad  $\mathbf{X}_i^{J+\mathcal{V}_\oplus}$  inicial que debe darse al orbitador en el instante inicial para llegar al punto  $\mathbf{x}_f$  a través de un arco orbital obtenido para un modelo que considera el problema principal de un satélite lunar perturbado por la atracción gravitacional terrestre.
- Velocidad  $\mathbf{X}_i^{T+\mathcal{V}_\oplus}$  inicial que debe darse al orbitador en el instante inicial para llegar al punto  $\mathbf{x}_f$  a través de un arco orbital que sigue la órbita de un satélite que se mueve de acuerdo con el modelo gravitacional lunar LP165P completo ( $165 \times 165$ ) al que le añadimos la atracción gravitacional terrestre.

Siguiendo la analogía con los casos anteriores se presenta en la tabla 3.7 las velocidades iniciales obtenidas en los cinco casos, mientras que en la tabla 3.8, podemos apreciar el error en metros obtenido entre el vector final y el vector obtenido de la propagación combinando las distintas condiciones iniciales con los distintos modelos orbitales.

De los datos mostrados en la tabla 3.8, vemos que si utilizamos condiciones iniciales obtenidas sin la inclusión de la perturbación del tercer cuerpo, al ser propagadas

$\mathbf{x}_i$	(8.715027353750699, 4.683953615172548, 1.445295040567537)
$\mathbf{x}_f$	(4.200843302825212, 8.370251693456526, 3.503658536291552)
$\mathbf{X}_i^K$	(-0.0088885095462878493, 0.014290897509099339, 0.0072824480070416611)
$\mathbf{X}_i^T$	(-0.0088885035106045941, 0.014290911545181533, 0.0072824584317568389)
$\mathbf{X}_i^{K+\mathcal{V}_\oplus}$	(-0.0089524274990118100, 0.014315675017697833, 0.0072920030886850637)
$\mathbf{X}_i^{J+\mathcal{V}_\oplus}$	(-0.0089524182594439197, 0.014315682236216251, 0.0072920137460271029)
$\mathbf{X}_i^{T+\mathcal{V}_\oplus}$	(-0.0089524214748922335, 0.014315689059034071, 0.0072920135224772992)

**Tabla 3.7:** Datos del arco correspondiente a una órbita lunar media. Tiempo de tránsito  $\mathcal{T} = 342$ . (Unidades: radios lunares y minutos).

C.I.	K	LP165P	K + $\mathcal{V}_\oplus$	$J_2 + \mathcal{V}_\oplus$	LP165P + $\mathcal{V}_\oplus$
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^K)$	$1.12 \times 10^{-8}$	121.9	39778.74	39775.09	39777.80
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^T)$		$1.33 \times 10^{-8}$	39779.67	39776.02	39778.73
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^{K+\mathcal{V}_\oplus})$			$8.35 \times 10^{-9}$	10.31	12.06
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^{J+\mathcal{V}_\oplus})$				$1.72 \times 10^{-9}$	4.32
$(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i^{T+\mathcal{V}_\oplus})$					$1.12 \times 10^{-8}$

**Tabla 3.8:** Datos del arco correspondiente a la órbita media considerando el potencial gravitacional de la Luna y la Tierra como perturbación de un tercer cuerpo.

con los distintos modelos que incorporan esta perturbación, el error llega a ser de kilómetros, de un orden aproximado a los 39 km. Por el contrario, cuando se obtienen condiciones iniciales considerando el potencial del tercer cuerpo, al propagar con cada modelo que incluyan esta perturbación el error está por debajo de los 12 m, en el caso más completo y menor para otros modelos incompletos. El mejor resultado lo aportan las propias condiciones iniciales al ser propagadas con su respectivo modelo, al igual que los casos anteriormente expuestos, el error llega a ser de  $10^{-8}$  m.

Tras analizar los resultados presentados en este apartado podemos concluir que si aplicamos los resultados obtenidos por medio del método de Lambert para un modelo de perturbaciones, incompleto la propagación con el modelo completo nos aleja del punto final en una distancia que oscila de metros a kilómetros dependiendo del modelo. Sin embargo, aplicando el método generalizado de Lambert conseguimos una aproximación que en el peor de los casos es menos que  $10^{-8}$  m, esto es, suficientemente buena en cualquier caso.

---

## Capítulo 4

# Arcos orbitales cerrados

Las definiciones de arco kepleriano y arco orbital, estudiados en el capítulo anterior, están asociadas a la solución de las ecuaciones (1.3) y (1.4) y como consecuencia al sistema de referencia espacial. La definición de estos conceptos puede ser fácilmente extendida al sistema de referencia planetocéntrico si se sustituyen esas ecuaciones diferenciales por las ecuaciones (1.34) o (1.35). A estos arcos, definidos en el sistema planetocéntrico, les llamaremos *arcos relativos*.

Toda misión espacial de un satélite artificial está diseñada para un determinado tipo de observación asociado siempre a un observador u observable situado sobre la superficie del planeta. Así, el concepto de periodicidad no se asocia al concepto de periodicidad orbital, sino a la combinación de éste y de la rotación del planeta, lo que conduce a términos como los de *órbitas que repiten la traza* o, lo que es igual, a *órbitas periódicas en el sistema planetocéntrico*. Ejemplos de la importancia de este tipo de órbitas nos los dan las órbitas planetocéntricas o planetoestacionarias, órbitas de tipo Molniya, órbitas congeladas, etc.

Si nos restringimos a órbitas keplerianas podemos decir que una órbita kepleriana que repite la traza no es sino un arco kepleriano relativo en el que al cabo de un tiempo el punto inicial del arco coincide con el punto final del mismo, lo que de ahora en adelante llamaremos arco kepleriano cerrado. La periodicidad de estos arcos en el sistema relativo exige que en el punto final no solo coincida la posición sino también la velocidad del punto.

El concepto de arco kepleriano cerrado puede extenderse si atendemos únicamente a la posición y no a la velocidad. Tal como se ha dicho en la introducción de

esta memoria, McInnes (2011), introduce este concepto en su búsqueda de órbitas no keplerianas desplazadas. En este capítulo se redefine el concepto de arco kepleriano cerrado y se propone un nuevo método de búsqueda, basado en el método de Lambert. Además se efectúa un exhaustivo estudio de sus propiedades.

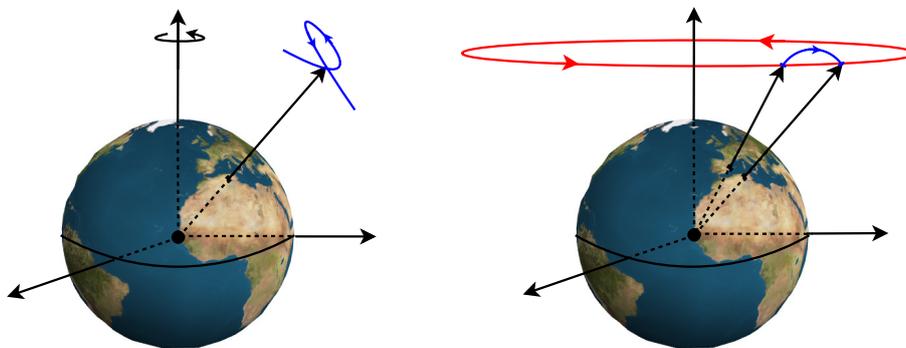
Finalmente, aplicando el método de Lambert generalizado podemos extender el método de búsqueda de arcos keplerianos cerrados a los arcos orbitales cerrados, en los que se considera las perturbaciones del movimiento orbital.

## 4.1. Arcos keplerianos cerrados

Comenzaremos el estudio de los arcos orbitales cerrados restringiéndonos a un modelo orbital kepleriano. Llamaremos *arco kepleriano cerrado de periodo  $\mathcal{T}$  y vértice  $\mathbf{u}$* , a un segmento de órbita relativa kepleriana que verifica la relación

$$\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}, \quad (4.1)$$

siendo  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$  las posiciones del orbitador en los instantes  $t = 0$ , y  $t = \mathcal{T}$ , referidas al sistema planetocéntrico, respectivamente. La parte izquierda de la figura 4.1 muestra un arco cerrado.



**Figura 4.1:** Izquierda: arco kepleriano cerrado. Derecha: el mismo arco mostrado en el sistema espacial.

Un arco kepleriano cerrado está caracterizado, al igual que el resto de arcos keplerianos, por dos puntos y el tiempo empleado en recorrerlos. A diferencia de los arcos keplerianos, los dos puntos que lo caracterizan están referidos al sistema planetocéntrico, y por ello no podemos aplicar directamente el método de Lambert<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Cualquiera de los métodos que resuelven el problema de Lambert están formulados en el sistema espacial.

para buscar la órbita que lo caracteriza. Sin embargo, puesto que conocemos los instantes de tiempo de ambos puntos podemos obtener las posiciones de los dos puntos en el sistema espacial sin más que aplicar la rotación correspondiente, esto es,

$$\mathbf{x}_0 = \mathcal{R}_3(\theta_0) \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x}_{\mathcal{T}} = \mathcal{R}_3(\theta_0 + \omega_{\odot} \mathcal{T}) \mathbf{u}_0, \quad (4.2)$$

donde,  $\omega_{\odot}$  y  $\theta_0$  representan, respectivamente, la velocidad angular de rotación del planeta y el ángulo de rotación del planeta en el instante  $t = 0$ .

De esta forma, el arco cerrado de la izquierda de la figura 4.1 se transforma en el arco orbital de la derecha de la misma figura, y la búsqueda de un arco kepleriano cerrado se transforma en la búsqueda de un arco kepleriano, por lo que el método de Lambert puede ser aplicado, lo que demuestra, simultáneamente, que dado un punto del espacio  $\mathbf{u}$  y un tiempo  $\mathcal{T}$  existen únicamente dos arcos cerrados (uno con una órbita directa y otro con una órbita retrógrada) que tienen como vértice dicho punto y se recorren en ese tiempo.

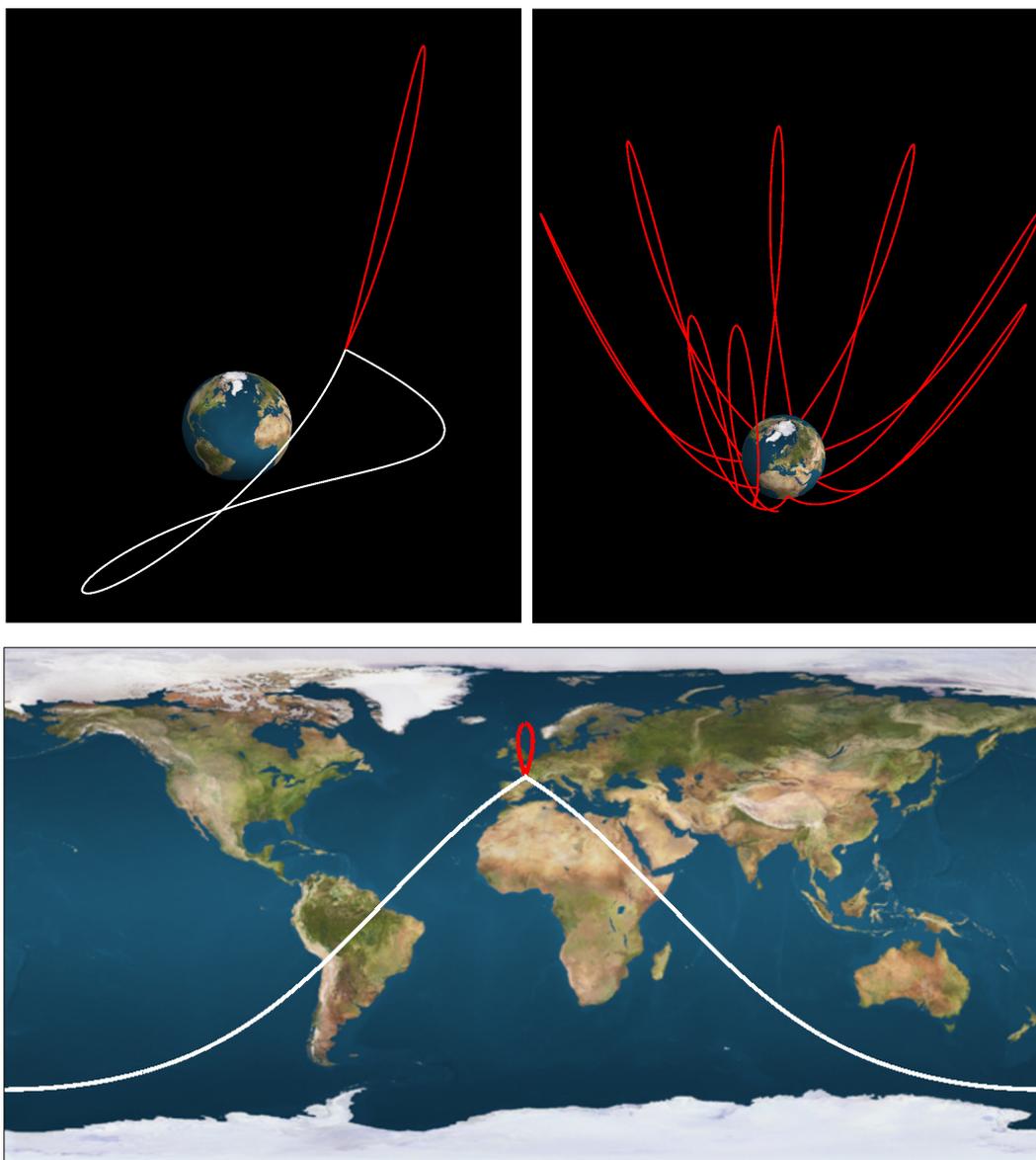
En la figura 4.2 se pueden apreciar las dos soluciones, directa y retrógrada, correspondientes a un arco cerrado terrestre con vértice en un punto a una distancia  $3.5 r_{\oplus}$ , longitud  $\lambda = 0^\circ$  y latitud geocéntrica  $\psi = 45^\circ$  y periodo  $\mathcal{T} = 8^h$ . Se muestra en rojo la solución directa y en blanco la solución retrógrada, tanto en la parte izquierda superior como en la inferior que representa la proyección de ambos arcos sobre la superficie terrestre.

Puede observarse en la figura 4.2 que la proyección del arco directo sobre la superficie terrestre está confinada en una región pequeña de la Tierra, mientras que la de la órbita retrógrada recorre todas las longitudes<sup>2</sup>.

Por otro lado, la parte superior derecha de la figura muestra la órbita correspondiente al arco directo extendida a periodo de tiempo de varias veces el periodo del arco. Podemos observar que la órbita no es periódica, esto es, no repite su traza. A lo largo de la órbita el arco cerrado se repite múltiples veces, sin embargo, los vértices de estos arcos no coinciden.

---

<sup>2</sup>Para otros arcos se invierte esta propiedad.



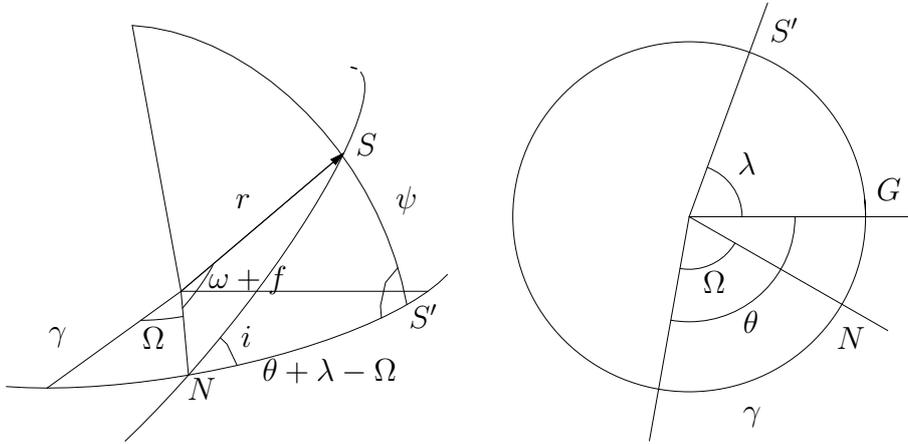
**Figura 4.2:** Parte superior izquierda e inferior: arcos cerrados directo (rojo) y retrógrado (blanco). Parte superior derecha: extensión de la órbita del arco cerrado directo.

#### 4.1.1. Coordenadas planetocéntricas de un punto de la órbita relativa

Para comenzar a estudiar las propiedades de los arcos keplerianos cerrados, trabajaremos con las coordenadas polares esféricas  $(r, \lambda, \psi)$ , esto es, con la distancia  $r$  entre el orbitador y el centro de masas del cuerpo central, la longitud,  $\lambda$ , y lati-

tud<sup>3</sup>,  $\psi$ , planetocéntricas del orbitador en lugar de las coordenadas cartesianas. Por ello, en primer lugar buscaremos la relación entre estas coordenadas y los elementos orbitales.

Para ello, observemos la figura 4.3, donde  $S$  representa la proyección del orbitador sobre la esfera celeste,  $N$  el nodo de la órbita y  $S'$  la proyección de  $S$  sobre el plano fundamental  $Oxy$ . El triángulo esférico  $SNS'$  contiene toda la información necesaria para determinar las relaciones buscadas si tenemos en cuenta que la distancia angular  $SS'$  representa la latitud planetocéntrica, mientras que la distancia angular  $NS'$  viene dada por la relación  $\theta + \lambda - \Omega$ , siendo  $\theta(t)$  el ángulo de rotación o tiempo sidéreo del planeta, como se aprecia en la gráfica de la derecha de la figura 4.3.



**Figura 4.3:** Relación entre las coordenadas planetocéntricas y los elementos orbitales.

Las coordenadas esféricas del orbitador respecto al sistema polar-nodal, (Abad, 2012),  $\{\mathbf{l}, \mathbf{n} \times \mathbf{l}, \mathbf{n}\}$ , corresponde a la terna ordenada  $(r, \theta + \lambda - \Omega, \psi)$ . Con la aplicación de la matriz de rotación dada por  $\mathcal{R}_1(i)\mathcal{R}_3(\omega + f)$ , podemos cambiar al sistema orbital  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}\}$  para obtener las siguientes expresiones:

$$\begin{pmatrix} r \cos \psi \cos(\theta + \lambda - \Omega) \\ r \cos \psi \sin(\theta + \lambda - \Omega) \\ r \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega + f) \\ r \sin(\omega + f) \cos i \\ r \sin(\omega + f) \sin i \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

<sup>3</sup>Habitualmente se usa la latitud planetográfica  $\phi$  en lugar de la planetocéntrica  $\psi$ , sin embargo para determinar las propiedades de los arcos cerrados es preferible usar ésta última.

o equivalentemente a,

$$\begin{cases} r(t) &= \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f(t)}, \\ \lambda(t) &= \Omega - \theta(t) - \tan^{-1}(\cos[\omega + f(t)], \sin[\omega + f(t)] \cos i), \\ \psi(t) &= \sin^{-1}(\sin[\omega + f(t)] \sin i), \end{cases} \quad (4.4)$$

donde, hemos llamado  $\tan^{-1}(c, s)$  a la función que calcula el ángulo  $\alpha$  tal que  $\cos \alpha = c, \sin \alpha = s$  y hemos tenido en cuenta que tanto  $\theta$  como  $f$  son funciones de  $t$ .

#### 4.1.2. Algunas propiedades de los arcos keplerianos cerrados

Usando las coordenadas esféricas planetocéntricas podemos reescribir la condición (4.1) en la forma

$$r_{\mathcal{T}} - r_0 = 0, \quad \lambda_{\mathcal{T}} - \lambda_0 = 0, \quad \psi_{\mathcal{T}} - \psi_0 = 0, \quad (4.5)$$

donde el subíndice representa el instante en que se evalúa la coordenada.

Llevando las expresiones (4.4) a las igualdades (4.5) podremos encontrar, de forma analítica, algunas propiedades de las órbitas que poseen los arcos keplerianos cerrados. Así, por ejemplo, de la igualdad de distancias en las expresiones (4.5) deducimos que

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{T}} - r_0 &= 0, \quad \iff \\ \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f_{\mathcal{T}}} - \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f_0} &= 0, \quad \iff \\ e(\cos f_{\mathcal{T}} - \cos f_0) &= 0, \end{aligned}$$

esto, se cumple para,

$$e = 0, \quad \text{o} \quad f_{\mathcal{T}} = 2\pi - f_0 = -f_0, \quad (4.6)$$

de donde se deduce que, o bien la órbita es circular, o el punto medio del arco cerrado coincide con el periastro o el apoastro.

En relación a la condición de la latitud en (4.5) y al sustituir por la tercera expresión de la ecuación (4.4), para cada instante de tiempo se tiene que

$$\psi_{\mathcal{T}} - \psi_0 = 0, \quad \iff$$

$$\begin{aligned}\sin \psi_{\mathcal{T}} - \sin \psi_0 &= 0, \quad \Longleftrightarrow \\ \sin(\omega + f_{\mathcal{T}}) \sin i - \sin(\omega + f_0) \sin i &= 0, \quad \Longleftrightarrow \\ \sin i [\sin(\omega + f_{\mathcal{T}}) - \sin(\omega + f_0)] &= 0,\end{aligned}$$

condición, esta última, que se cumple cuando

$$i = 0, \quad \text{o} \quad \sin(\omega + f_{\mathcal{T}}) - \sin(\omega + f_0) = 0. \quad (4.7)$$

Ya que en la última expresión aparece el argumento de periaastro y la anomalía verdadera en los instantes de tiempo inicial y final, y sabiendo que  $f_{\mathcal{T}} = -f_0$ , podremos reemplazar la segunda de las expresiones (4.7) por

$$2 \sin f_0 \cos \omega = 0,$$

condición que se verifica para los valores

$$f_0 = 0, \quad \text{o} \quad \omega = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}. \quad (4.8)$$

La condición  $f_0 = 0$ , es incompatible con la condición  $f_{\mathcal{T}} = -f_0$ , puesto que esto conduciría a que el punto inicial y el punto final del arco son el mismo lo que es absurdo, luego la igualdad de latitudes demuestra la condición

$$i = 0, \quad \text{o} \quad \omega = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}, \quad (4.9)$$

lo que indica que la órbita con un arco kepleriano cerrado, es ecuatorial o bien el argumento del periaastro vale  $\pi/2$  o  $3\pi/2$ . De hecho tendremos uno de los dos valores para el arco cerrado con órbita directa y el otro para el de órbita retrógrada.

Por otro lado, la tercera de las relaciones (4.4) permite poner

$$f_0 = \sin^{-1} \left[ \frac{\sin \psi_0}{\sin i} \right] - \omega, \quad (4.10)$$

que nos da la relación entre la latitud del vértice del arco, la inclinación de la órbita y el argumento del periaastro (uno de los dos posibles).

En este punto puede demostrarse que la inclinación de la órbita que contiene un arco kepleriano cerrado depende únicamente de la latitud,  $\psi$ , del vértice y del periodo,  $\mathcal{T}$ , del arco. Para apreciar este hecho, partiremos de las expresiones (4.2) que representan la posición de los dos extremos del arco en el sistema espacial. En esta expresión tomaremos, para simplificar los cálculos y sin pérdida de generalidad, el valor  $\theta_0 = 0$ , con lo que obtendremos

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} r \cos \psi \cos \lambda \\ r \cos \psi \sin \lambda \\ r \sin \psi \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} r \cos \psi \cos(\lambda + \omega_{\odot} \mathcal{T}) \\ r \cos \psi \sin(\lambda + \omega_{\odot} \mathcal{T}) \\ r \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

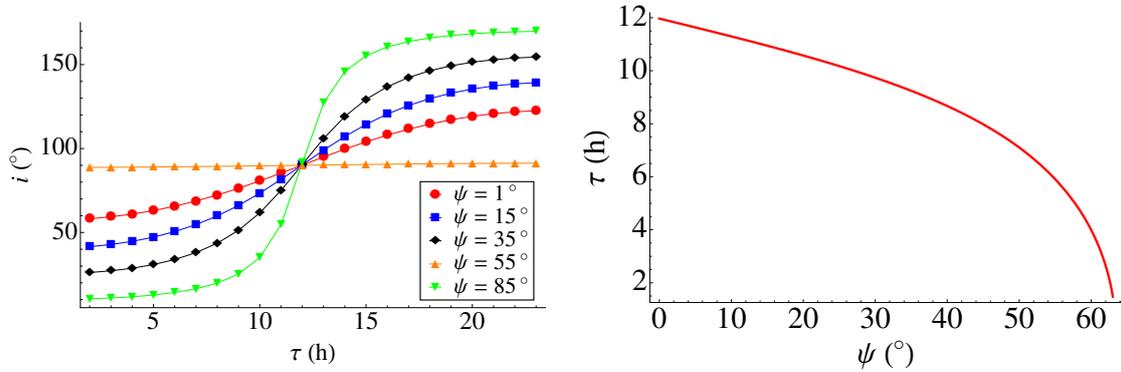
La inclinación,  $i$ , de la órbita que pasa por esos dos puntos vendrá dada por la expresión  $\cos i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3$ , donde  $\mathbf{e}_3$  representa la dirección del eje  $Oz$  del sistema espacial y  $\mathbf{n}$  viene dado por

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_0 \times \mathbf{x}_\mathcal{T}}{\|\mathbf{x}_0 \times \mathbf{x}_\mathcal{T}\|}. \quad (4.12)$$

Si sustituimos en la expresión (4.12) los vectores dados en (4.11) y nos quedamos con la tercera componente de  $\mathbf{n}$  obtenemos, después de la correspondiente manipulación trigonométrica y simplificación de términos, la expresión

$$\cos i = \frac{\cos \psi \cos(\omega_\mathcal{T})}{\sin \frac{\omega_\mathcal{T}}{2} \sqrt{3 + 2 \cos(\omega_\mathcal{T}) \cos^2 \psi - \cos(2\psi)}}, \quad (4.13)$$

que demuestra que la inclinación  $i$  es una función  $i = i(\psi, \mathcal{T})$ . La figura 4.4 muestra, a la izquierda, las curvas  $i(\mathcal{T})$  para diferentes valores de  $\psi$ . Si buscamos arcos cerrados,



**Figura 4.4:** Izquierda: curvas  $i(\mathcal{T})$  para distintos valores de  $\psi$ . Derecha: curva  $\mathcal{T}(\psi)$  para la inclinación crítica.

con una inclinación dada  $i_0$ , podemos observar que la relación  $i_0 = i(\psi, \mathcal{T})$  determina una función implícita  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\psi; i_0)$  que da el valor del periodo del arco para un vértice de latitud  $\psi$  y la inclinación deseada. La parte derecha de la figura 4.4 muestra esta función  $\mathcal{T}(\psi; i_c)$  particularizada para la inclinación crítica<sup>4</sup>  $i_c$ .

En apartados posteriores buscaremos y estudiaremos las propiedades de los arcos cerrados para distintos valores de  $\mathbf{u}$  y  $\mathcal{T}$  o lo que es igual, para distintos valores de  $(r, \lambda, \psi, \mathcal{T})$ . Si atendemos a las propiedades vistas hasta aquí y a las relaciones (4.4) podemos restringir más el rango de búsqueda de arcos cerrados.

En efecto, observando la segunda de las relaciones (4.4) podemos deducir que la longitud es irrelevante en la búsqueda de arcos cerrados, puesto que al cambiar ésta

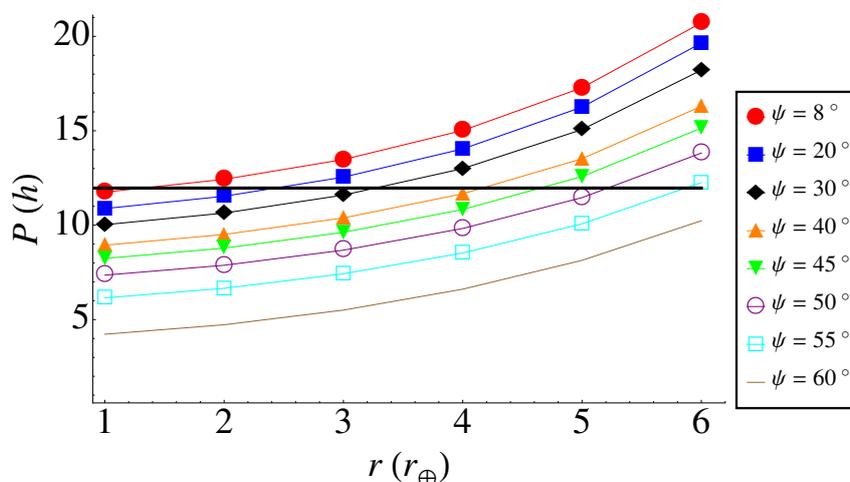
<sup>4</sup>La inclinación crítica  $i_c \approx 63^\circ.43$  se define a partir de la relación  $1 - 5 \cos^2 i_c = 0$ . Tiene la importante propiedad de que mantiene constante el periastro para el problema principal del satélite.

nos dará, para el arco cerrado, una órbita con todos los elementos orbitales idénticos excepto el ángulo del nodo que variará en una cantidad igual a la variación de la longitud. Es decir, que la orientación del plano orbital del arco kepleriano variará.

### 4.1.3. Órbitas que repiten la traza con un arco kepleriano cerrado: órbitas tipo Molniya

Hemos visto en la figura 4.2 que al continuar la órbita determinada por un arco cerrado no queda garantizada la periodicidad de esta órbita en el sistema planetocéntrico o, lo que es igual, la repetición de la traza de la órbita. Para ver como puede forzarse la obtención de una órbita que tenga un arco cerrado y que repita la traza analizaremos, en primer lugar, el valor del periodo orbital  $P$  para vértices con distintos valores de  $r$  y  $\psi$ .

La figura 4.5 muestra las curvas del periodo en función de  $r$  para distintas latitudes  $\psi$  para arcos y órbitas en torno a la Tierra.

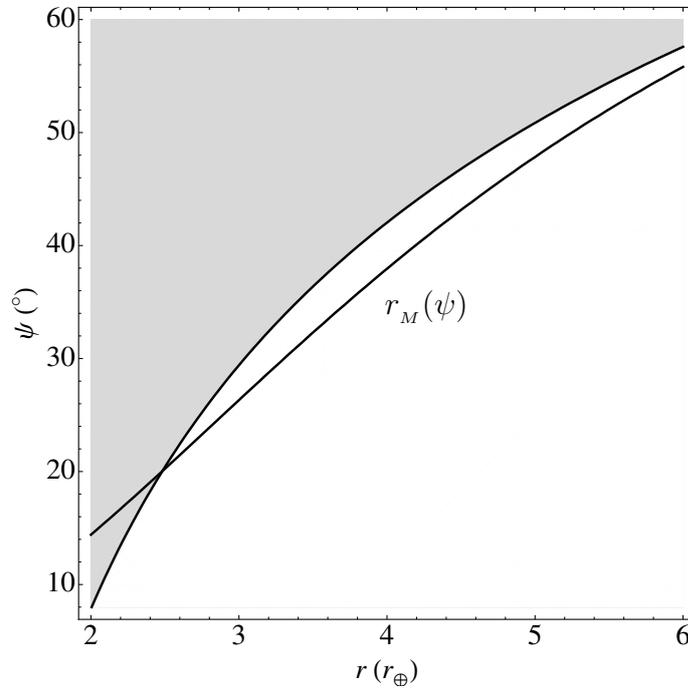


**Figura 4.5:** Periodo (en horas) de la órbita de un arco cerrado en función de la distancia al centro de su vértice y para distintas latitudes.

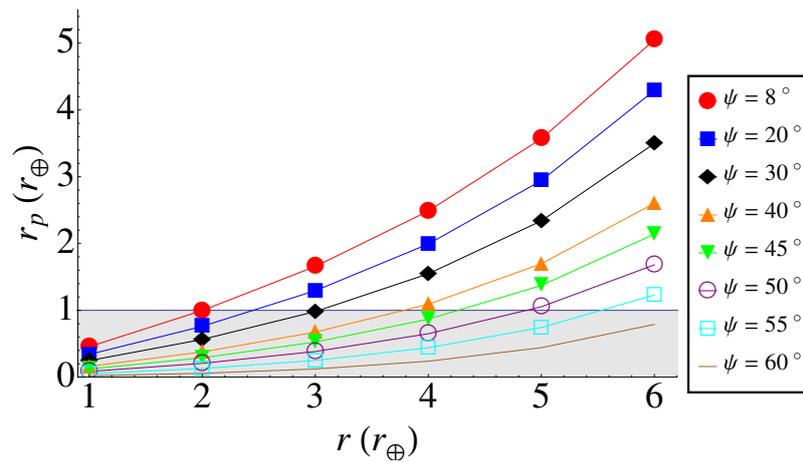
Dada una órbita de periodo orbital  $P$  su traza se repite cuando existen dos enteros  $n$  y  $m$  tales que  $nP = mR$ , siendo  $R$  el periodo de rotación del cuerpo central. Por ejemplo, en el caso de la Tierra  $R$  es un día sidéreo<sup>5</sup>, así el periodo correspondiente a una órbita que repite su traza en dos vueltas es  $P = R/2 = 11.967$  h, que se representa en la figura 4.5 por una línea horizontal que corta algunas de las curvas

<sup>5</sup>Un día sidéreo equivale a unos 23.9345 horas.

representadas. Los puntos de corte de esta línea horizontal con las curvas representan los valores de  $r$  y  $\psi$  que son vértices de arcos cerrados cuyas órbitas repiten su traza en dos vueltas. Estos puntos pueden verse mejor en la curva  $r_M(\psi)$  de la figura 4.6.



**Figura 4.6:** La curva  $r_M$  representa los vértices de los arcos cerrados cuyas órbitas repiten su traza en dos vueltas en la Tierra. Los puntos de esa curva en la región sombreada representan órbita balísticas.



**Figura 4.7:** Valor de la distancia en el perigeo  $r_p$  para distintos  $r$  y  $\psi$ . La zona sombreada representa valores  $r_p < 1$  lo que equivale a una órbita balística.

Normalmente, muchos arcos keplerianos cerrados pertenecen a órbitas muy excéntricas lo que posibilita que la distancia en el periastro,  $r_p = a(1 - e)$ , pueda ser menor

que la unidad, lo que representa órbitas del tipo balístico. La figura 4.7 representa el valor del parámetro  $r_p$  para distintos valores de  $r$ , una curva para cada latitud. Todos los valores de  $r$  y  $\psi$  que pertenezcan a una curva en la zona sombreada de la figura,  $r_p < 1$  representan órbitas balísticas que deben ser desechadas.

Estas mismas órbitas balísticas se representan en la zona sombreada de la figura 4.6, lo que indica que de toda la curva  $r_M(\psi)$  de posibles órbitas cuya traza se repite al cabo de dos períodos orbitales, únicamente son válidas las que no están en la zona sombreada, esto nos da para dichas órbitas unos límites entre  $20^\circ$  y  $55^\circ$  para la latitud del vértice del arco y de valores mayores de  $2.5 r_\oplus$  para la distancia.

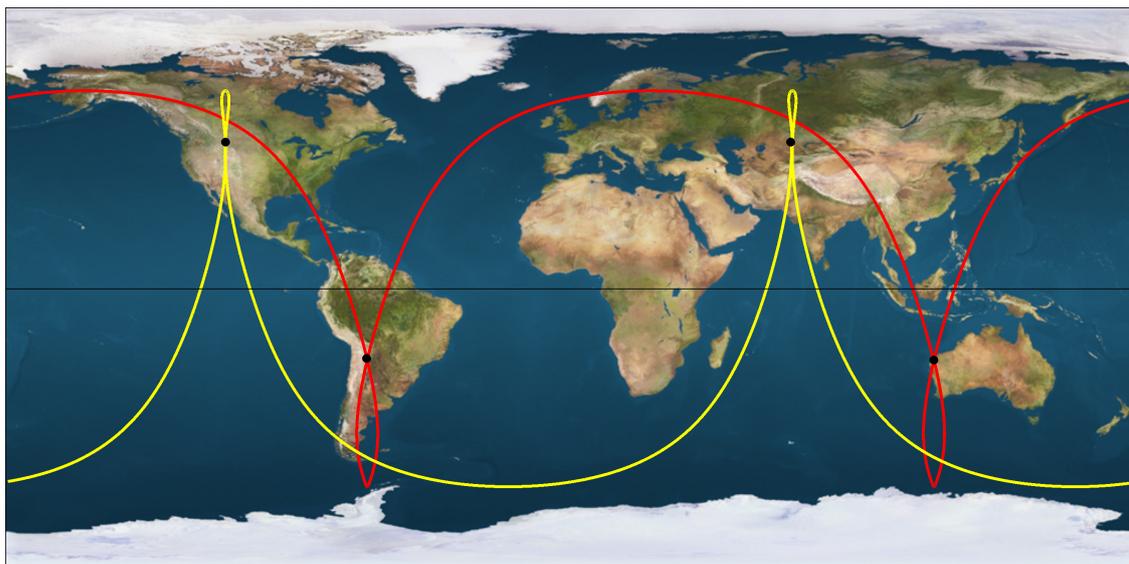
Como ejemplo de órbitas que repiten la traza buscaremos órbitas de tipo Molniya. Las órbitas Molniya tienen las siguientes características:

- Su traza se repite cada dos periodos orbitales.
- Su inclinación coincide con la inclinación crítica.
- Poseen una gran excentricidad.

Normalmente estas órbitas tienen situado el apoastro en una zona de la Tierra determinada. La inclinación crítica determina que la posición del apoastro varíe muy poco (nada, si se considera el problema principal). Puesto que la órbita es muy excéntrica el satélite se encuentra la mayor parte del tiempo en las proximidades del apoastro (donde la velocidad es más lenta). Finalmente, puesto que repiten la traza el apoastro siempre ocupa el mismo lugar.

Para buscar órbitas de tipo Molniya comenzaremos eligiendo, en la figura 4.6, puntos de la curva  $r_M(\psi)$  que representan los vértices de arcos cerrados con órbitas de periodo la mitad del periodo de rotación terrestre. De esta forma se cumplirá la primera de las condiciones de una órbita Molniya. Tomaremos los puntos  $V_1(r_1 = 4.927, \psi_1 = 47^\circ.13)$  y  $V_2(r_2 = 2.718, \psi_2 = 22^\circ.81)$ , elegidos de la curva  $r_M(\psi)$  fuera de la zona sombreada para evitar que la órbita sea balística.

Para conseguir que la órbita tenga una inclinación crítica,  $i_c$ , calcularemos el periodo  $\mathcal{T}$  aplicando a cada valor de  $\psi$  la función  $\mathcal{T}(\psi, i_c)$  que ha sido definida en el apartado anterior y dibujada en la parte derecha de la figura 4.4. Así, obtendremos los valores  $\mathcal{T}_1 = 7.6367$  h y  $\mathcal{T}_2 = 10.3531$  h.



**Figura 4.8:** Dos órbitas de tipo Molniya.

La tercera de las relaciones (4.4) indica que si obtenemos una órbita con un arco cerrado en el vértice  $(r, \lambda, \psi)$ , en el vértice  $(r, \lambda, -\psi)$  tenemos exactamente la misma órbita pero cambiando su inclinación de  $i$  a  $\pi - i$  (pasa de directa a retrógrada o viceversa). Debido a esto, para el segundo vértice  $V_2$  tomaremos el punto  $V_2(r_2 = 2.718, \psi_2 = -22^\circ.81)$  y construiremos una órbita Molniya con el vértice en el hemisferio sur. En este caso la órbita tendrá una inclinación  $\pi - i_c$  que también es crítica puesto que también verifica que  $1 - 5 \cos^2 i = 0$ .

Con estos elementos hemos obtenido para las órbitas un semieje mayor y una excentricidad iguales a  $(a_1 = 4.1674, e_1 = 0.7131)$ ,  $(a_2 = 4.1660, e_2 = 0.7476)$ , respectivamente. En la figura 4.8 se muestran las trazas de las dos órbitas: en amarillo la de vértice  $V_1$  y en rojo la de vértice  $V_2$ .

## 4.2. Órbitas cuasiestacionarias

La parte inferior de la figura 4.2 muestra que la proyección de un arco kepleriano cerrado sobre la superficie del planeta puede formar una figura cerrada (arco directo en rojo) o abierta (arco retrógrado en blanco). Cada uno de estos casos corresponde a una de las dos soluciones del problema de Lambert (arco directo o retrógrado).

Desde el punto de vista de un observador situado en el punto subterrestre<sup>6</sup> del vértice del arco, el recorrido del arco es visible completamente para el observador, en el primer caso, mientras que en el otro caso este arco tiene puntos por debajo del horizonte y por tanto no es siempre observable.

Supongamos un observador, situado en el punto subterrestre correspondiente a un punto del espacio de vector  $\mathbf{u}_0$ , y un orbitador, que pasa por  $\mathbf{u}_0$ , posición inicial del arco cerrado, con velocidad  $\mathbf{U}_0$ , tal que al cabo de un tiempo  $\mathcal{T}$  el arco pase de nuevo por el vértice  $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \mathbf{u}_0$  y todo el arco sea visible para el observador. En ese momento su velocidad  $\mathbf{U}_{\mathcal{T}}$  no coincide con la inicial, por lo que la órbita continuaría separándose del arco y, por tanto, el satélite terminaría por alejarse de la zona de visibilidad del observador.

Si en el instante del segundo paso por el vértice se le aplica un impulso  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_{\mathcal{T}}$ , el orbitador vuelve a comenzar su recorrido por el arco obteniéndose así una órbita pseudoperiódica no kepleriana que llamaremos *órbita cuasiestacionaria* pues para el observador esta órbita es siempre visible y su posición relativa es siempre próxima al vértice del arco. Obviamente esta periodicidad no se consigue de manera natural, sino con un coste energético derivado de la realización de una maniobra cada intervalo de tiempo  $\mathcal{T}$ .

Uno de los parámetros fundamentales para determinar el coste y duración de una misión espacial es la llamada *velocidad característica*, (Curtis, 2012), esto es:

$$\Delta v = \sum_{i=1}^n \|\Delta\mathbf{v}_i\|, \quad (4.14)$$

donde  $n$  es el número máximo de maniobras,  $\Delta\mathbf{v}_i$ , ejecutadas. Téngase en cuenta que la cantidad de combustible de una misión está directamente relacionada con la velocidad característica por medio de la expresión

$$\Delta v = c \log \left( \frac{m_0 + m_c}{m_0} \right),$$

donde  $m_c$  es la masa total de combustible gastado para una velocidad característica  $\Delta v$ , mientras que  $m_0$  es la masa de la nave sin combustible y  $c$  una constante de los cohetes usados para producir cada impulso.

Lo que determina el coste de la misión es el  $\Delta v$  final de la misma y no el número de  $n$  impulsos, su distribución temporal ni la dirección de cada impulso particular.

---

<sup>6</sup>Punto de la Tierra cuyo cenit coincide con el vértice del arco.

Habitualmente el valor de  $\Delta v$  se da en m/s o km/s de manera que conociendo los costes en esas unidades de distintas maniobras, podemos hacer una estimación intuitiva del coste total de una misión. Así, por ejemplo, la maniobra más cara actualmente la constituye la puesta en órbita de un satélite artificial desde la superficie de la Tierra, que cuesta 7900 m/s. El paso de una órbita baja a una geoestacionaria a través de una órbita GTO cuesta unos 1500 m/s, y la inserción en una órbita lunar unos 700 m/s, etc.

Existen diferentes fuentes de energía que permiten generar los impulsos o maniobras orbitales, principalmente suelen ser sistemas de propulsión química basados en propelentes<sup>7</sup>, por lo que cobra importancia el uso racional de éste en el espacio, ya que la vida útil de cada misión espacial se basa en la cantidad de propelente a bordo. También están los sistemas de propulsión iónica<sup>8</sup> (Burt and Elliot, 1968; Racca, 2003), o bajo-empuje y otras fuentes como las velas solares, planteada en McInnes (1997); McKay et al. (2009); Anderson and Macdonald (2010). En la literatura aeroespacial se discute sobre otras alternativas para generar cambios de velocidad en el espacio para orbitadores, pero actualmente siguen siendo muy costosos y de alto riesgo para la mayoría de las misiones espaciales, (Wertz and Larson, 2010).

Hemos llamado órbita cuasiestacionaria a aquella que recorre continuamente un arco kepleriano cerrado de manera que el orbitador sea siempre visible para un observador. Para establecer con mayor precisión este concepto definiremos un nuevo parámetro que nos indicará y nos dará una medida de la “cuasiestacionalidad” del arco. Para ello, observemos la parte izquierda de la figura 4.9 que presenta el cono de visibilidad del arco kepleriano cerrado visto desde una estación situada en el punto del planeta cuyo cenit coincide con el vértice del arco. La posición de este punto queda determinada por el vector<sup>9</sup>  $\boldsymbol{\rho}_0 = r_\odot \mathbf{u}_0 / \|\mathbf{u}_0\|$ .

Como puede observarse en la figura, un observador situado en el punto definido por  $\boldsymbol{\rho}_0$ , observa un punto cualquiera del arco,  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i)$ ,  $t_i \in [0, \mathcal{T}]$ , con una distancia cenital,  $z_i$ , que viene dada por la expresión

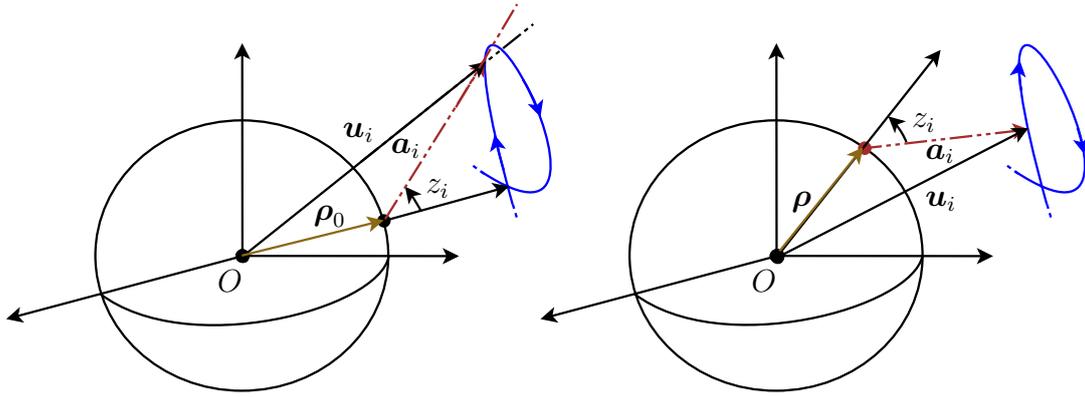
$$z_i = \cos^{-1} \left[ \frac{\mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_0}{\|\mathbf{a}_i\| \|\boldsymbol{\rho}_0\|} \right], \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{a}(t_i) = \mathbf{u}(t_i) - \boldsymbol{\rho}_0. \quad (4.15)$$

El valor máximo de las distancias cenitales de todos los puntos del arco

<sup>7</sup>Los propelentes pueden ser sustancias muy diversas que reaccionan en la cámara de empuje de un cohete generando gases a alta presión y gran temperatura.

<sup>8</sup>Es un sistema de propulsión eléctrica que genera una fuerza de empuje por la aceleración producida por la expulsión, a grandes velocidades, de gas ionizado.

<sup>9</sup>Hemos tomado un cuerpo central esférico de radio  $r_\odot$ .



**Figura 4.9:** Distancia cenital de un punto del arco visto desde: a) (izquierda) el punto cuyo cenit coincide con el vértice del arco; b) (derecha) un punto cualquiera del planeta definido por el vector  $\rho$ .

indican la separación más extrema del arco respecto de su cenit. A este ángulo que representaremos por la letra  $\alpha$  le llamaremos *ángulo del arco kepleriano cerrado*, y su valor vendrá dado por

$$\alpha = \max(z_i) = \max \left\{ \cos^{-1} \left[ \frac{\mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_0}{\|\mathbf{a}_i\| \|\boldsymbol{\rho}_0\|} \right] : t_i \in [0, \mathcal{T}] \right\}. \quad (4.16)$$

Es importante resaltar que este ángulo es completamente distinto al ángulo de visión desde el satélite, (ángulo del cono de visibilidad del planeta visto desde el orbitador), que indica el área que cubre sobre la superficie del cuerpo central un satélite desde una posición arbitraria del mismo. Las propiedades y el cálculo de este ángulo, no serán tomadas en consideración en esta memoria, pero se pueden encontrar en Miani and Agrawal (2011).

El ángulo  $\alpha$  puede definirse para cualquier arco kepleriano cerrado, independientemente de que éste pueda o no formar una órbita cuasiestacionaria. De hecho, un valor del arco menor que  $\pi/2$  indicará que el arco se encuentra siempre sobre el horizonte mientras que un valor mayor indica que habrá instantes en los que el orbitador no será visible, luego estableceremos como condición para generar una órbita cuasiestacionaria que  $\alpha < \pi/2$ . Además cuanto más pequeño sea el ángulo  $\alpha$  más “cuasiestacionaria” será la órbita, en el sentido de la proximidad de todos sus puntos al vértice, o tamaño de la ventana de visibilidad.

Dado un vértice  $\mathbf{u}_0$  y un periodo de tiempo  $\mathcal{T}$  existen dos arcos keplerianos cerrados para estas condiciones, uno directo y otro retrógrado. En lo que sigue y con objeto de simplificar el estudio de las órbitas cuasiestacionarias elegiremos, de entre estas dos soluciones, la que tenga menor ángulo  $\alpha$ . Además, si este valor es mayor que  $\pi/2$  diremos que el arco kepleriano correspondiente no puede dar lugar a una

órbita cuasiestacionaria.

Si queremos establecer las condiciones de visibilidad desde un punto cualquiera de la Tierra de vector  $\boldsymbol{\rho}$  (ver parte derecha de la figura 4.9) podremos modificar la expresión (4.2) sustituyendo  $\boldsymbol{\rho}$  por  $\boldsymbol{\rho}_0$  de forma que tendremos

$$\alpha(\boldsymbol{\rho}) = \max \left\{ \cos^{-1} \left[ \frac{\mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\rho}}{\|\mathbf{a}_i\| \|\boldsymbol{\rho}\|} \right] : \mathbf{a}_i = \mathbf{u}(t_i) - \boldsymbol{\rho}, \quad t_i \in [0, \mathcal{T}] \right\}. \quad (4.17)$$

### 4.2.1. Órbitas cuasiestacionarias en la Luna

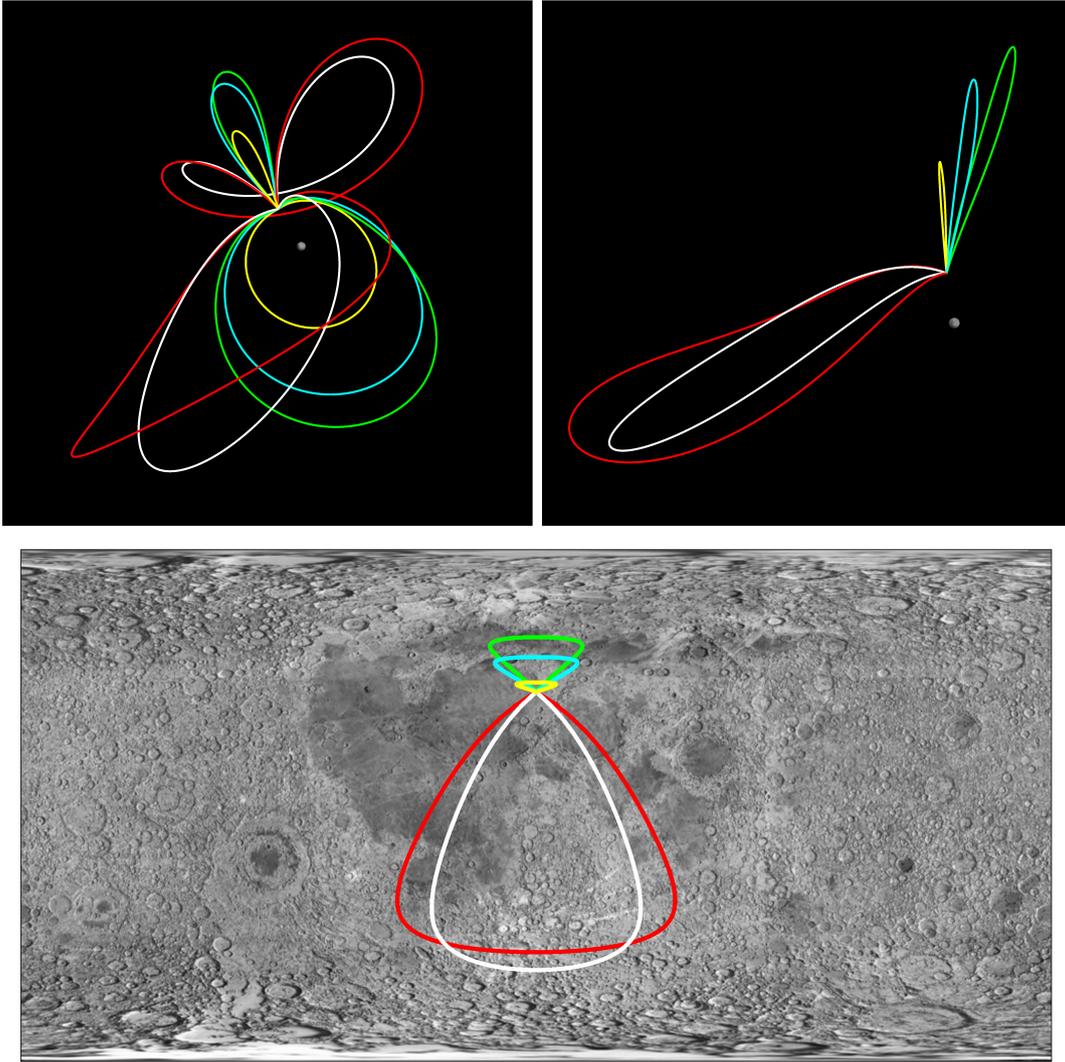
Las propiedades de las órbitas cuasiestacionarias dependen no solo de los elementos orbitales de la órbita que nos da un arco cerrado, sino también de la velocidad de rotación del cuerpo central. Para ilustrar estas órbitas, hemos elegido un cuerpo central como la Luna, de rotación lenta, lo que nos permitirá construirlas con un coste de mantenimiento mucho menor que para el caso de la Tierra.

Una representación gráfica de los arcos keplerianos nos permite tener otra perspectiva de cómo son éstos al ser propagados en un periodo de tiempo dado. En la figura 4.10, podemos apreciar cinco diferentes arcos keplerianos cerrados para el caso lunar, los cuales poseen como punto común el vértice de coordenadas polares  $(10 r_L, 0^\circ, 40^\circ)$ . A partir de esta terna ordenada se calculan las dos órbitas, directa y retrógrada, obtenidas con el método de Lambert, para el arco cerrado con vértice en ese punto y con periodos, en días, iguales a 4.1, 7.5, 9.1, 18.5 y 20.0. El conjunto de soluciones se muestran en la gráfica superior izquierda.

Estas soluciones presentan formas y geometrías similares, tanto la solución directa como la retrógrada, aunque en cada caso el ángulo  $\alpha$  es distinto. No siempre la solución directa define la órbita cuasiestacionaria pues el valor de  $\alpha$ , en algunos casos, es menor para la órbita retrógrada.

En la gráfica superior izquierda de la figura 4.10 se presentan una serie de arcos keplerianos cerrados para el vértice y periodos  $\mathcal{T}$  anteriormente señalados. No todos estos arcos presentan valores del ángulo  $\alpha < \pi/2$ , esto es, no todos definen órbitas cuasiestacionarias. En la figura superior derecha y en la inferior se muestran los arcos que sí forman una órbita cuasiestacionaria.

En la gráfica inferior de la figura 4.10, vemos como es la traza respectiva de los



**Figura 4.10:** Arcos keplerianos cerrados para la Luna. La gráfica superior izquierda presenta distintos arcos directos y retrógrados para el vértice  $(10 r_L, 0^\circ, 40^\circ)$  y distintos valores de  $\mathcal{T}$ . La gráfica superior derecha presenta las soluciones (directas y retrógradas) cuyos  $\alpha$  son menores a  $90^\circ$ . La gráfica inferior central corresponde a la traza o proyección sobre la superficie lunar de las órbitas cuasiestacionarias de la parte superior derecha.

arcos anteriormente indicados. Esta traza muestra la posibilidad de diseñar misiones espaciales de cobertura regional para un cuerpo central cualquiera.

Una idea más precisa de la forma y la geometría nos la aportan los elementos orbitales, y para los arcos keplerianos cerrados de la figura 4.10 (derecha superior y central inferior), se muestran en la tabla 4.1 los valores respectivos. La primer columna representa el tipo de órbita directa,  $\mathcal{O}_d$ , o retrógrada,  $\mathcal{O}_r$ , luego está el periodo orbital del arco  $\mathcal{T}$  en días, el semieje mayor,  $a$ , en radios lunares, la excentricidad,  $e$ , la inclinación,  $i$ , en grados y el ángulo  $\alpha$ , en grados. Podemos apreciar

que los arcos keplerianos cerrados son muy excéntricos y abarcan distintos ángulos de visibilidad con distintos periodos orbitales.

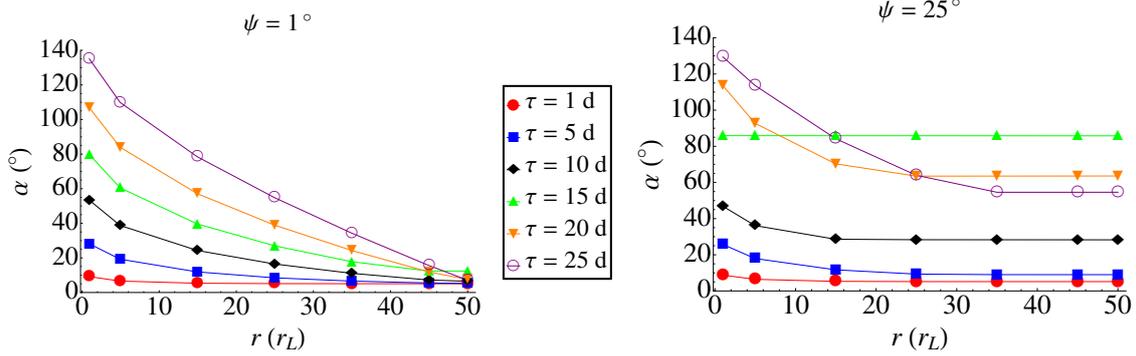
**Tabla 4.1:** Elementos orbitales de los arcos keplerianos cerrados para el caso de lunar.

$\mathcal{O}_d/\mathcal{O}_r$	$\mathcal{T}$ (d)	$a$ ( $r_L$ )	$e$	$i$ ( $^\circ$ )	$\alpha$ ( $^\circ$ )
$\mathcal{O}_d$	4.1	15.3574	0.9701	43.2845	44.7570
$\mathcal{O}_d$	7.5	22.3501	0.9473	52.2107	76.7305
$\mathcal{O}_d$	9.1	25.2784	0.9395	59.1742	88.8106
$\mathcal{O}_r$	18.5	39.8646	0.9660	122.1880	86.8859
$\mathcal{O}_r$	20.0	41.9179	0.9760	128.4420	75.2432

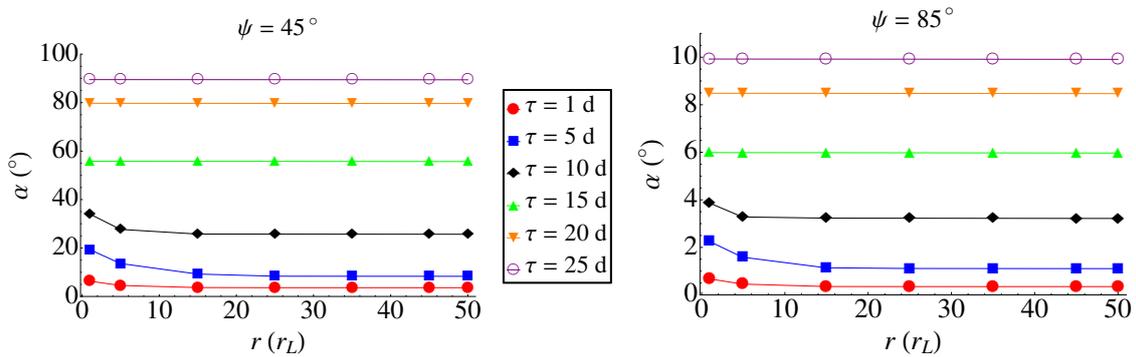
En lo que sigue se efectuará un estudio más sistemático de las propiedades de las órbitas cuasiestacionarias para la Luna. Para ello se ha tenido en cuenta el rango de valores siguiente:

- La distancia  $r$  se tomará dentro del intervalo  $[1, 50]$ , tomando el radio lunar,  $r_L$ , como unidad. Aunque para la Luna el radio de influencia de la misma tiene un valor aproximado de  $38 r_L$ , se ha elegido el valor 50 como valor máximo de la distancia ya que éste está más próximo al valor correspondiente al semieje de las órbitas selenosíncronas.
- La longitud  $\lambda$  no será tenida en cuenta pues, como se ha dicho en el apartado 4.1.2, variar  $\lambda$  equivale a variar el ángulo del nodo  $\Omega$  en la misma cantidad.
- La latitud selenocéntrica  $\psi$  se toma en el intervalo  $[0, \pi/2]$ . No se consideran valores negativos de la latitud porque de acuerdo con las relaciones del apartado 4.1.2 la órbita de un arco kepleriano cerrado con vértice en el punto  $(r, \lambda, \psi)$  y periodo  $\mathcal{T}$  se corresponde con el de vértice  $(r, \lambda, -\psi)$  cambiando directa por retrógrada (o viceversa) y el argumento del periastro  $\omega$  por  $\omega + \pi$ .
- El periodo  $\mathcal{T}$  del arco cerrado se toma entre 0 y el periodo de rotación de la Luna (unos 27.32 días). Para adaptarnos a este periodo se usará el día como unidad de tiempo.

En primer lugar analizaremos, a partir de las figuras 4.11 y 4.12, el valor del ángulo del arco kepleriano cerrado para distintos valores de  $r, \psi$  y  $\mathcal{T}$ . Estas figuras muestran en el eje  $Oy$  el valor de  $\alpha$ , y en el eje  $Ox$  la distancia  $r$ . Cada curva, representada con un símbolo diferente muestra el ángulo para un tiempo  $\mathcal{T}$  dado. Finalmente, cada una de la cuatro figuras representa un valor de la latitud  $\psi$ .



**Figura 4.11:** Variación de  $\alpha$  vs  $r$  para distintos  $\mathcal{T}$  y las latitudes  $\psi = 1^\circ$  y  $\psi = 25^\circ$ .



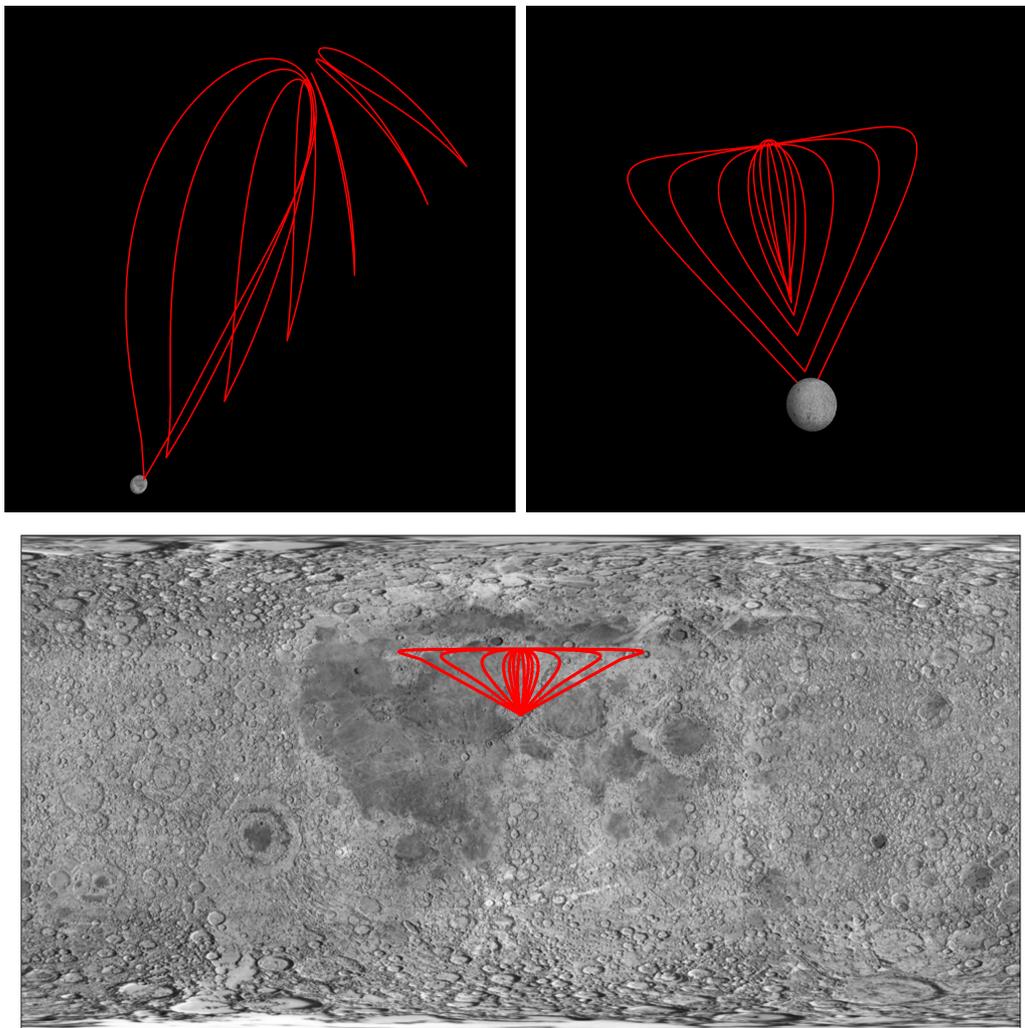
**Figura 4.12:** Variación de  $\alpha$  vs  $r$  para distintos  $\mathcal{T}$  y las latitudes  $\psi = 45^\circ$  y  $\psi = 85^\circ$ .

Observemos que para valores bajos de la latitud  $\psi$  el ángulo  $\alpha$  disminuye conforme aumentamos la distancia, y éste va en aumento al incrementar el periodo  $\mathcal{T}$ . La izquierda de la figura 4.11, que representa una latitud  $\psi = 1^\circ$ , muestra un valor del ángulo  $\alpha$  que varía entre  $70^\circ$  y  $5^\circ$  para un periodo  $\mathcal{T} = 15$  días. Para un periodo mayor el ángulo  $\alpha$  aumenta mientras que para un periodo menor disminuye.

Para latitudes más altas, el comportamiento es diferente. La figura 4.12, que representa latitudes  $\psi = 45^\circ$  y  $\psi = 85^\circ$  la curva, para cada valor de  $\mathcal{T}$  presenta una apariencia horizontal. La realidad es que se presenta una disminución de  $\alpha$  para un  $\mathcal{T}$  dado pero ésta disminución es muy pequeña y no puede apreciarse en la figura. Al contrario que para latitudes pequeñas  $\alpha$  aumenta al disminuir  $\mathcal{T}$ , y disminuye cuando la latitud decrece. Por ejemplo, para la latitud  $\psi = 45^\circ$  el valor del ángulo cuando  $\mathcal{T} = 15$  días es de unos  $55^\circ$ , mientras que para  $\psi = 85^\circ$  con el mismo  $\mathcal{T}$  se obtiene un  $\alpha$  de unos  $6^\circ$ .

El cambio en el comportamiento entre latitudes altas y bajas puede observarse mejor en la gráfica de la derecha de la figura 4.11. En esta gráfica vemos dos comportamientos distintos de las curvas para un  $\mathcal{T}$  dado. Para algunas se observa una forma casi horizontal, como para latitudes más altas, pero para otros valores la curva

de  $\alpha(r)$  va disminuyendo hasta que alcanza un comportamiento casi horizontal. La curva para  $\mathcal{T} = 10$  días muestra claramente este fenómeno. Para comprender mejor ésto, calculemos y dibujemos las órbitas cuasiestacionarias de vértice ( $r, \psi = 25^\circ$ ), con  $r = 1, 5, 15, 25, 35, 45, 50$ , y para un valor  $\mathcal{T} = 10$  días. La figura 4.13 muestra esas órbitas en dos y tres dimensiones.

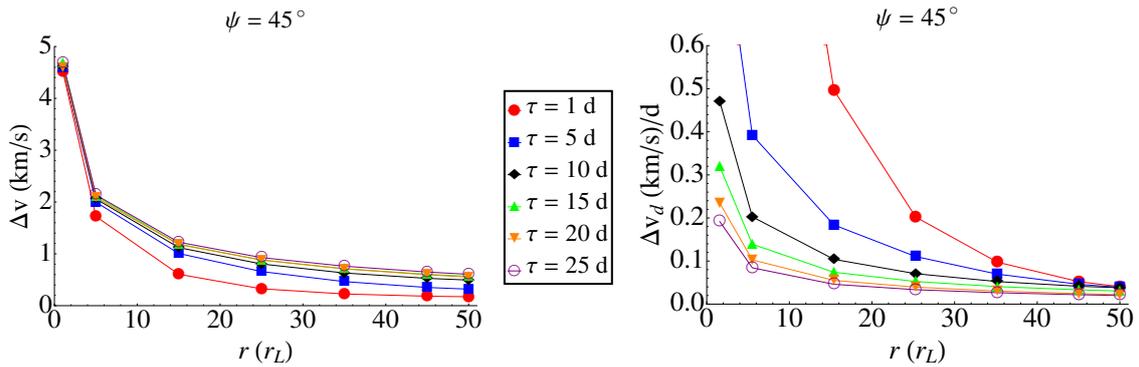


**Figura 4.13:** Órbitas cuasiestacionarias correspondientes a un arco de vértice ( $r, \psi = 25^\circ$ ), con  $r = 1, 5, 15, 25, 35, 45$  y  $50$ , para un valor de  $\mathcal{T} = 10$  días.

Los dibujos tridimensionales de las órbitas se muestran desde dos puntos de vista diferentes. La imagen de la izquierda muestra como las órbitas, conforme nos alejamos de la Luna, son cada vez más pequeñas. La imagen de la derecha muestra las mismas órbitas desde una perspectiva más alineada con el punto de observación. En esta última observamos que la visibilidad del arco cerrado se va reduciendo hasta que, a partir de un determinado valor, dicha reducción de tamaño se hace mucho más moderada. La figura inferior muestra la traza de las órbitas que tiene una forma que muestra el mismo comportamiento.

Después de analizar el ángulo del arco kepleriano cerrado pasaremos a estudiar el valor del coste del mantenimiento de la órbita en términos de  $\Delta v$ . La figura 4.14 muestra este coste para el caso de latitud  $\psi = 45^\circ$  y para distintos  $r \in [1, 50]$ . A la izquierda se da el coste absoluto en km/s de cada maniobra. Como puede observarse el coste es muy grande para órbitas de vértice próximo a la superficie (valores de  $r$  pequeños) mientras que disminuye para distancias mayores. Esta medida del coste resulta muy poco representativa pues depende del intervalo de tiempo  $\mathcal{T}$  que se tarda en efectuar dos maniobras consecutivas. Por esta razón se usa en la parte derecha de la misma figura otro parámetro que representa el promedio del  $\Delta v_d$  gastado por día. Para esto usaremos las unidades (km/s)/d.

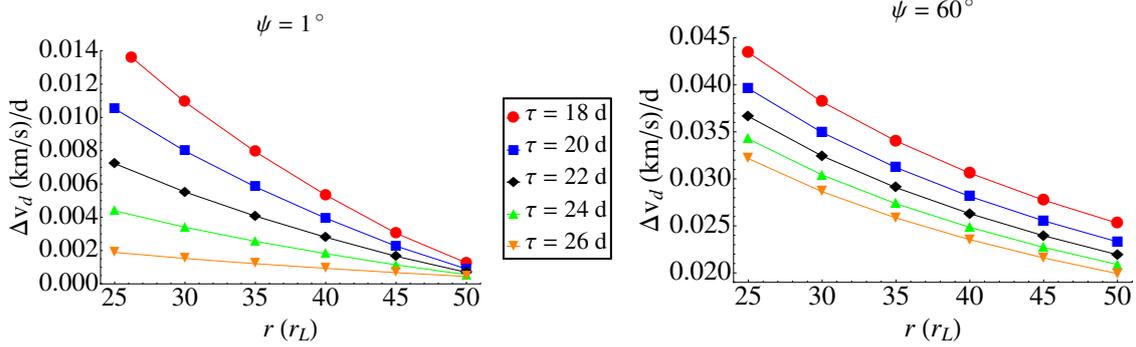
Con este parámetro  $\Delta v_d$ , que nos da el coste, por día, de la órbita y no de cada maniobra, podemos observar de nuevo la misma tendencia: para que el coste sea pequeño la distancia  $r$  debe ser grande, como se muestra en la gráfica de la derecha de la figura 4.14.



**Figura 4.14:** Valor de  $\Delta v$  (izquierda) y  $\Delta v_d$  (derecha) para distintos valores de  $r$  y  $\mathcal{T}$ , con una latitud  $\psi = 45^\circ$ .

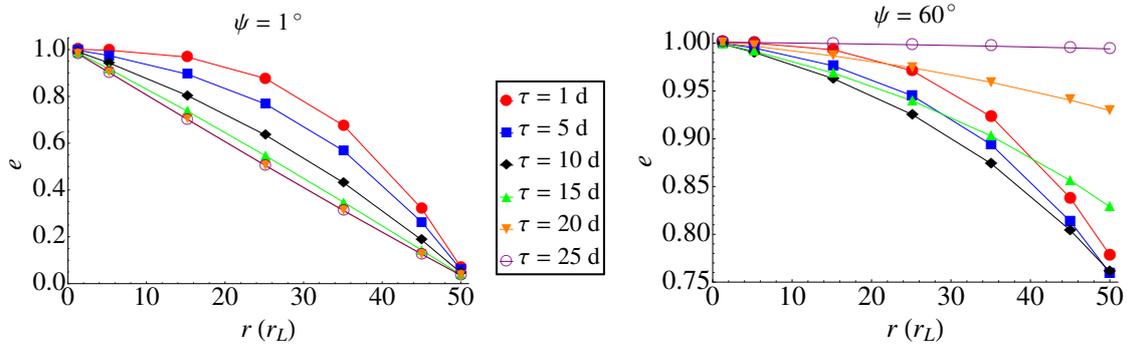
La figura 4.15 muestra el coste por día de la órbita para latitudes  $\psi = 1^\circ$  (izquierda) y  $\psi = 60^\circ$  (derecha). En ambos casos se muestra el coste para valores de  $r$  mayores que 25 radios lunares y para distintos valores de  $\mathcal{T}$ . La figura muestra que el coste es menor cuanto menor sea la latitud, cuanto menor sea el periodo  $\mathcal{T}$  y cuanto mayor sea la distancia  $r$ .

Resulta también de interés en el estudio de las órbitas cuasiestacionarias analizar el valor de la excentricidad de la órbita de la cual el arco es una sección. La figura 4.16 muestra la evolución de esta excentricidad en los casos  $\psi = 1^\circ$  (izquierda) y  $\psi = 60^\circ$  (derecha). Como puede verse para una latitud baja, la excentricidad toma cualquier valor entre cero y uno. Tiende a un valor cero para distancias,  $r$ , muy altas, mientras que se hace muy grande para distancias pequeñas. Por otro lado, la excentricidad resulta menor cuando el periodo  $\mathcal{T}$  aumenta. Observemos



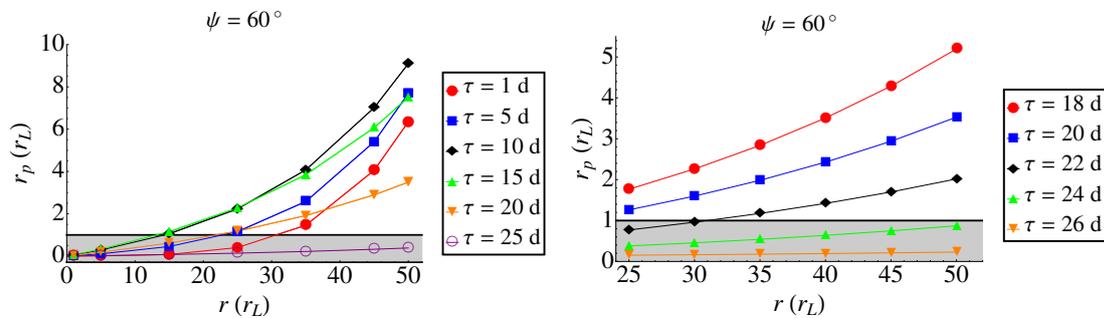
**Figura 4.15:** Valor de  $\Delta v_d$  para distintos valores de  $r$  y  $\mathcal{T}$  y latitudes  $\psi = 1^\circ$ ,  $\psi = 60^\circ$ .

también, en la parte derecha de esta figura, que al aumentar la latitud no aparecen excentricidades próximas a cero, manteniéndose, para toda distancia y todo periodo valores grandes de la excentricidad



**Figura 4.16:** Valor de la excentricidad  $e$  para distintos valores de  $r$  y  $\mathcal{T}$  y latitudes  $\psi = 1^\circ$ ,  $\psi = 60^\circ$ .

Finalmente, la figura 4.17 muestra la evolución de la distancia en el periastro para todo tipo de estas órbitas. Valores por debajo de la unidad, en la zona sombreada, nos indican órbitas balísticas que si se recorren saliéndose del arco cerrado conducen a una colisión con la superficie lunar.



**Figura 4.17:** Valor de la distancia en el periastro  $r_p$  para distintos valores de  $r$  y  $\mathcal{T}$ , con una latitud  $\psi = 60^\circ$ . La zona sombreada representa órbitas balísticas.

### 4.3. Arcos orbitales cerrados: mantenimiento de órbitas cuasiestacionarias

En el capítulo anterior se ha distinguido entre arcos keplerianos y arcos orbitales. Los primeros se determinaban por medio del método de Lambert, mientras que los segundos se obtenían aplicando el método de Lambert generalizado, esto es, mejorando la aproximación obtenida por el método de Lambert. Esta extensión de arcos keplerianos a arcos orbitales se puede realizar también para los arcos cerrados de manera que, al igual que el método de Lambert, permite obtener los arcos keplerianos cerrados, el método de Lambert generalizado permite obtener los arcos orbitales cerrados.

El concepto de arco orbital cerrado se hace especialmente útil cuando se consideran órbitas cuasiestacionarias. En efecto, para el mantenimiento del orbitador en estas órbitas es preciso la realización de una maniobra cada periodo de tiempo  $\mathcal{T}$  para lo cual es necesario que el punto donde se realice la maniobra sea el mismo que el punto inicial, esto es el vértice del bucle. Si pretendemos mantener una órbita cuasiestacionaria en un contexto orbital con un modelo con perturbaciones un arco kepleriano cerrado se convierte en abierto puesto que las perturbaciones separan el punto inicial del final. Para mantener la órbita es preciso calcular el arco orbital cerrado y no el arco kepleriano.

En lo que sigue, analizaremos el proceso de mantenimiento de una órbita cuasiestacionaria en la Luna. Para ello consideraremos, al igual que en la parte final del capítulo anterior (apartado 3.2.5), un modelo de órbita lunar que tenga en cuenta todo el modelo gravitacional LP165P ( $165 \times 165$ ) así, como la perturbación producida por la Tierra, cuyo potencial viene dado por  $\mathcal{V}_{\oplus}$ .

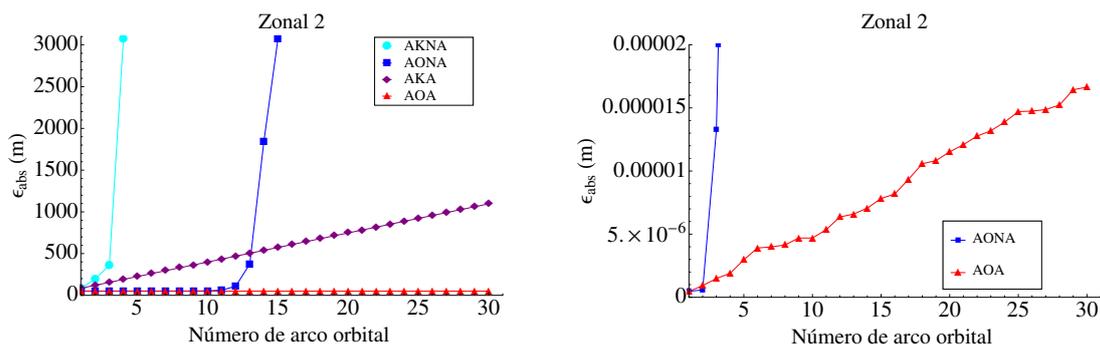
Hemos establecido cuatro estrategias de mantenimiento de una órbita cuasiestacionaria basadas en la corrección sistemática de la órbita cada tiempo  $\mathcal{T}$ , con un  $\Delta v$  calculado de cuatro formas distintas y hemos analizado la evolución de la órbita calculando la separación entre el punto inicial y el punto final al cabo de un gran número de vueltas a la órbita. Con este análisis veremos cual de las cuatro estrategias es mejor y podremos medir la separación final de la órbita respecto de su posición teórica. Este estudio sustituye, en este caso, al estudio de la estabilidad de órbitas periódicas que no puede ser aplicado porque la periodicidad de éstas órbitas se consigue por un proceso de corrección de la misma.

Las estrategias de corrección se pueden resumir en los siguientes puntos:

- a. La primera, que denotaremos por las siglas AKNA, consiste en calcular *una única vez* el arco kepleriano cerrado (se usa el método de Lambert) y aplicar, en cada intervalo de tiempo  $\mathcal{T}$ , un  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{X}_0^K - \mathbf{X}_{\mathcal{T}}^K$ , obtenido restando a la velocidad del punto final del arco kepleriano cerrado la del punto inicial.
- b. La segunda, que denotaremos por las siglas AONA, consiste en calcular *una única vez* el arco orbital cerrado (se usa el método de Lambert generalizado) y aplicar, en cada intervalo de tiempo  $\mathcal{T}$ , un  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{X}_0^O - \mathbf{X}_{\mathcal{T}}^O$ , obtenido restando a la velocidad del punto final del arco orbital cerrado la del punto inicial.
- c. La tercera, que denotaremos por las siglas AKA, consiste en calcular el arco kepleriano cerrado cada intervalo de tiempo  $\mathcal{T}$  y hacer la corrección de  $\Delta v$  actualizando éste cada vuelta. Esta estrategia está basada en que el punto final siempre está ligeramente desplazado respecto de la posición inicial por lo que arco kepleriano cerrado será diferente al cambiar el vértice, por ello al final de cada vuelta se calcula el nuevo arco y por tanto la nueva corrección  $\Delta v$ .
- d. La cuarta, que denotaremos por las siglas AOA, consiste en calcular el arco orbital cerrado cada intervalo de tiempo  $\mathcal{T}$  y hacer la corrección de  $\Delta v$  actualizando éste en cada vuelta. Al igual que en la estrategia AKA, ésta se basa en recalcular el arco orbital debido al desplazamiento inevitable del vértice.

Comenzaremos el estudio considerando un modelo gravitacional simplificado donde se considera únicamente el problema principal del satélite, esto es, el efecto del armónico zonal ( $J_2$ ). Con este modelo se ha propagado una órbita cuasiestacionaria con vértice en ( $r = 25r_L, \psi = 35^\circ$ ) y periodo  $\mathcal{T} = 8$  d durante 30 arcos orbitales o periodos (unos 240 días). En la gráfica de la figura 4.18 se muestra la evolución del error en la distancia entre el punto inicial y el punto final después de cada vuelta (el eje  $Ox$  representa el número de arcos orbitales propagados).

En la parte izquierda la figura 4.18 se puede apreciar que para las estrategias AKNA y AKA, el error es de unos 35 m. en el primer arco, cantidad que va aumentando progresivamente llegando a errores de 3 km para la tercera vuelta del modelo AKNA y para la decimocuarta en el modelo AKA. La misma gráfica muestra que la estrategia AONA presenta un crecimiento del error más moderado con un valor de 500 m, tras treinta vueltas, mientras que para la estrategia AOA no puede apreciarse

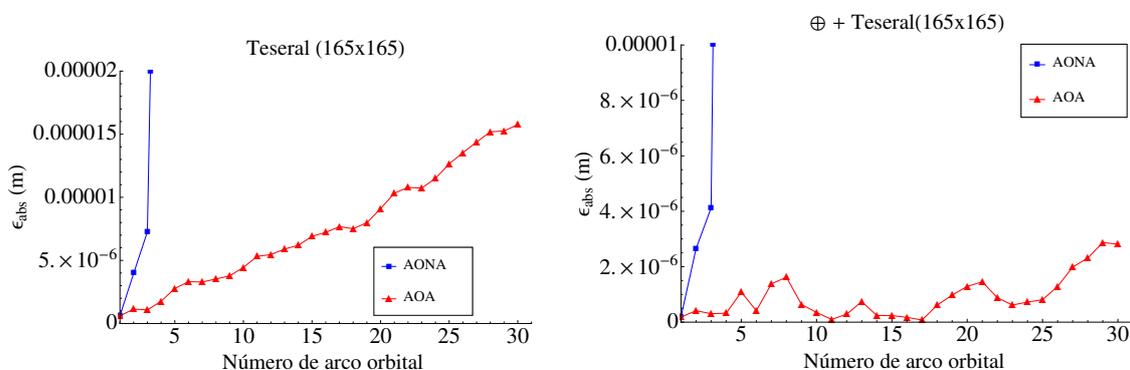


**Figura 4.18:** Error absoluto en metros (m.) respecto al número de arcos orbitales. La gráfica de la izquierda incluye las cuatro estrategias, mientras que la de la derecha incluye únicamente las dos mejores. En ambos casos se considera el modelo del problema principal del satélite.

en esta parte de la figura, ya que su valor es demasiado pequeño para la escala del eje  $Oy$ .

En la parte derecha de la figura se muestran, por separado, las estrategias AONA y AOA para el problema principal. Puede verse que un error por debajo de de los 0.00002 m. se supera, con la estrategia AONA, en la tercera vuelta, mientras que tras 30 vueltas el error con la estrategia AOA se mantiene por debajo de los  $1.5 \times 10^{-5}$  m.

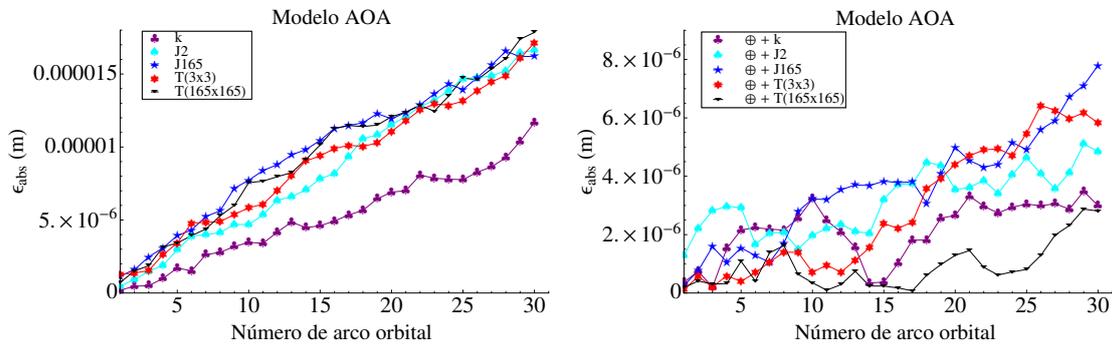
A la vista de los resultados obtenidos en el ejemplo anterior podemos descartar completamente las estrategias AKNA y AKA y centrarnos en el análisis de AONA y AOA. Por ello, se ha realizado el mismo estudio del error para órbita cuasiestacionaria con el mismo vértice, pero considerando varios modelos de perturbaciones más completos: por un lado un modelo gravitacional  $T_{165 \times 165}$  (modelo gravitacional lunar LP165P) y por otro el modelo  $T_{165 \times 165}$  completado con la perturbación  $\mathcal{V}_{\oplus}$  producida por la Tierra.



**Figura 4.19:** Representa lo mismo que la derecha de la figura 4.18 para los modelos  $T_{165 \times 165}$  y  $T_{165 \times 165} + \mathcal{V}_{\oplus}$ .

La figura 4.19 presenta los resultados de ambos modelos. A la izquierda el modelo  $T_{165 \times 165}$  y al derecha el modelo  $T_{165 \times 165} + \mathcal{V}_{\oplus}$ . En ambos casos se observan resultados similares a los de la derecha de la figura 4.18, manteniéndose, para el modelo AOA, el error del orden de  $10^{-5}$  m. De hecho, puede propagarse más de 1700 vueltas (unos 37 años) hasta alcanzar un error del orden del milímetro.

Las gráficas anteriores demuestran que la estrategia AOA es la mejor para el mantenimiento de órbitas cuasiestacionarias. Para comprobar que esto es así para cualquier modelo de perturbaciones se ha realizado el mismo cálculo (mismo vértice, periodo del arco y tiempo de propagación) para distintos modelos de perturbación.

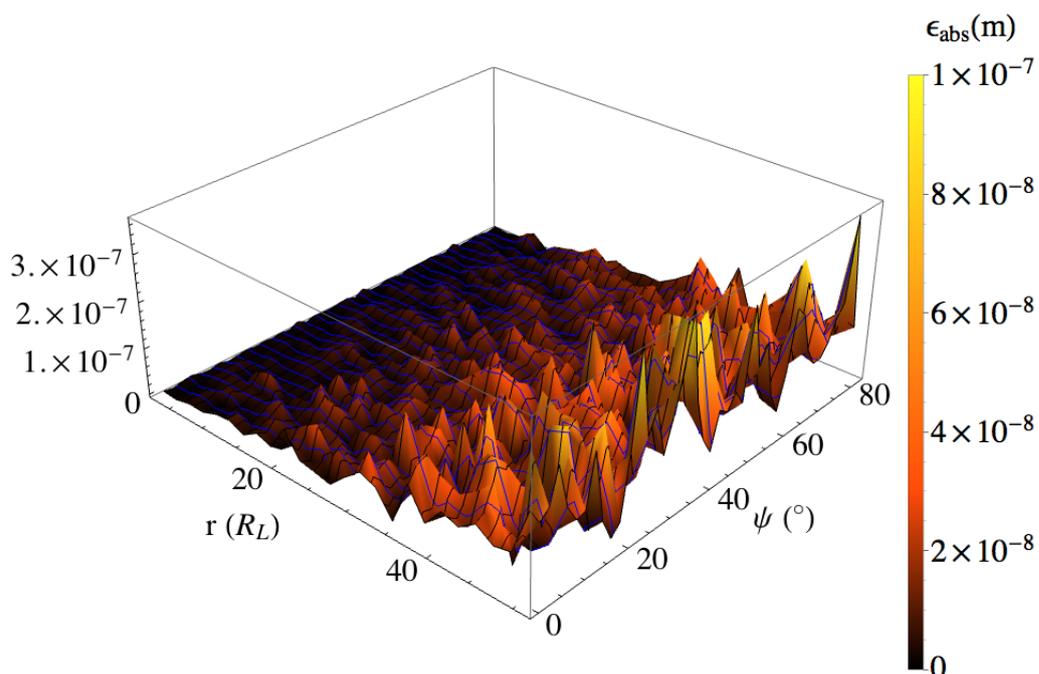


**Figura 4.20:** Error absoluto  $\epsilon_{abs}$ , en metros (m.) para cada vuelta del arco, utilizando la estrategia AOA, para distintos modelos de perturbación.

En la izquierda de la figura 4.20 se presentan los resultados de los siguientes modelos: kepleriano, K; problema principal,  $J_2$ ; zonal completo,  $J_{165}$ ; tesimal hasta orden 3,  $T_{3 \times 3}$ , y tesimal completo,  $T_{165 \times 165}$ . A la derecha, se toman los mismos modelos añadiendo a cada uno de ellos la perturbación  $\mathcal{V}_{\oplus}$  producida por la Tierra. En todos los casos se aprecia, después de las 30 vueltas un error menor que  $2 \times 10^{-5}$  m. Las variaciones entre ellos no son significativas puesto que están todas por debajo del micrómetro por lo que podemos considerarlas como ruido de máquina.

Los test anteriores han sido todos realizados considerando un único valor para  $(r, \psi, \mathcal{T})$  por lo que cabe preguntarnos si estos resultados variarán al cambiar el vértice. Para comprobar esto se ha realizado una aplicación exhaustiva del método que cubra cualquier posible vértice de una órbita cuasiestacionaria, tomando rangos de  $r \in [1, 50]$  y  $\psi \in [0, \pi/2]$ . Para el valor de  $\mathcal{T}$ , se ha elegido para cada vértice el valor de un quinto del periodo de la órbita kepleriana que contiene al arco orbital. Con estos valores se ha propagado cada punto una vuelta del arco obteniéndose un error que se muestra en la figura 4.21.

La figura 4.21 presenta los resultados para un modelo de perturbaciones basado



**Figura 4.21:** Error, en metros, en la aplicación del método de Lambert generalizado, para cerrar arcos orbitales y mantener órbitas cuasiestacionarias.

en el problema principal del satélite. En ella podemos ver que en todos los casos el error es del orden de  $10^{-7}$  m. lo que constituye ruido de máquina. Esto indica que el método de Lambert generalizado usado para cerrar el arco orbital converge para cualquier posición del vértice. Aunque la gráfica que se presenta solo muestra los resultados del problema principal se han realizado los cálculos para otros modelos de perturbaciones obteniéndose en todos los casos resultados similares.

Estos resultados nos indican que podemos aplicar el método de Lambert generalizado para cualquier vértice y cualquier perturbación, tratada en esta memoria, para el mantenimiento de órbitas cuasiestacionarias.



---

## Conclusiones y trabajo futuro

El presente trabajo aborda el estudio de un nuevo concepto de órbita, llamada órbita cuasiestacionaria, que permite extender el concepto de órbitas planetoestacionarias o planetosíncronas a puntos no pertenecientes al ecuador. Para desarrollar y estudiar en detalle este nuevo tipo de órbitas ha sido necesaria la introducción y desarrollo de nuevas técnicas y herramientas de aplicación, no solo a este problema, sino a muchos otros problemas de la Astrodinámica. Los principales resultados obtenidos en esta memoria pueden resumirse en los siguientes puntos:

- Se han formulado las ecuaciones del movimiento orbital, así como las ecuaciones variacionales, para poder trabajar indistintamente en el sistema espacial (inercial) y en el sistema planetocéntrico (rotacional) pudiendo usar, en ambos casos, la formulación de las fuerzas y potenciales independientemente del sistema en que éstas estén formuladas.
- Se ha aplicado el método de diferenciación automática para el cálculo de las derivadas, tanto del potencial como de la fuerza, lo que permite, entre otras ventajas, no precisar una formulación diferenciada, para cada tipo de fuerza, de las ecuaciones variacionales.
- Se ha construido un procedimiento de evaluación de las derivadas, de cualquier orden, del potencial gravitatorio planetario aplicando el método de diferenciación automática. Este procedimiento sistematiza, y elimina singularidades, en el cálculo de las derivadas para cualquier modelo de potencial gravitatorio, aunque sea de orden y grado muy altos, e independientemente de que derive mos respecto de coordenadas cartesianas o esféricas.
- El código correspondiente al cálculo de las derivadas del potencial gravitatorio, escrito en lenguaje C, ha sido adaptado a las modernas técnicas de paralelización, mediante el uso de OpenMP, con la consiguiente mejora en el tiempo

de CPU, con respecto a la versión secuencial, que se plasma en los resultados mostrados al aplicarlo a los modelos EGM96, EGM2008 y el GMM-2B.

- Se ha partido de un método de corrección de órbitas periódicas, basado en el método de Newton, y lo hemos reformulado para extenderlo en dos direcciones: mantener constantes algunas de las variables iniciales, incluido el periodo orbital, y sustituir la condición de periodicidad por otra que permita abordar otro tipo de problemas como los problemas de contorno.
- Se ha aplicado el método anterior para desarrollar el método de Lambert generalizado, que consiste en usar la solución kepleriana del método de Lambert clásico como punto de partida para construir una solución que tenga en cuenta todo el modelo de perturbaciones.
- Se ha verificado la efectividad del método de Lambert generalizado, considerando distintos escenarios para órbitas de satélites artificiales terrestres y lunares, con distintos modelos gravitacionales, obteniendo correcciones cuyos errores son del orden de los  $10^{-7}$  m.
- Se ha definido el concepto de arco kepleriano cerrado y se ha estudiado la existencia y las características orbitales de éstos y el procedimiento de cálculo, basado en el método de Lambert.
- Se ha buscado la relación de las órbitas con arcos keplerianos cerrados con las órbitas que repiten la traza. Como caso particular se han obtenido un rango de valores para los puntos por encima de la superficie terrestre que pueden hacer de vértices de un arco que corresponda a una órbita de tipo Molniya, obteniéndose unos valores  $\psi \in [20^\circ, 55^\circ]$  y para  $r > 2.5r_\oplus$ .
- Se ha definido el concepto de órbita cuasiestacionaria, así como dos de los parámetros que la caracterizan: el ángulo de la órbita y el coste. Se han analizado todas las posibles órbitas cuasiestacionarias para satélites alrededor de la Luna.
- Se ha estudiado el mantenimiento de las órbitas cuasiestacionarias con un modelo orbital perturbado obteniéndose que, independientemente del vértice de la órbita, y para cualquier modelo de perturbación, una estrategia basada en el cálculo del  $\Delta v$  a aplicar al final de cada arco, obtenido mediante el método de Lambert generalizado, permite un error en la distancia entre el punto inicial y final del arco del orden de  $10^{-7}$  m.

Entre los posibles trabajos futuros, derivados de la presente memoria, podemos mencionar los siguientes:

- Aplicación de la extensión del método de corrección de órbitas a la búsqueda de órbitas periódicas en el modelo orbital. En particular, podemos mencionar las órbitas simétricas alrededor de lunas de planetas, órbitas congeladas, etc.
- Extender el método de Lambert generalizado para múltiples periodos orbitales.
- Extender el análisis y la utilidad de las órbitas tipo Molniya, y otras órbitas que repitan la traza, para órbitas en torno a la Luna y a Marte. Además se podrá relacionar estas órbitas con el concepto de constelaciones regionales de satélites mencionado en la introducción.



---

# Bibliografía

- Abad, A. (2012). *Astrodinámica*. Editor Bubok Publishing S.L. España.
- Abad, A., Barrio, R., Blesa, F., and Rodriguez, M. (2012). Algorithm 924: Tides a Taylor Series Integrator for Differential EquationS. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 39(1):1–28.
- Abad, A., Barrio, R., and Dena, A. (2011). Computing periodic orbits with arbitrary precision. *Physical Review E*, E84(016701):1–6.
- Abad, A. and Lacruz, E. (2013). Computing derivatives of a gravity potential by using automatic differentiation. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117(2):187–200.
- Anderson, P. and Macdonald, M. (2010). Extension of earth objects using low-thrust propulsion. *61th International Astronautical Congress, IAC. Czech Republic*.
- Avanzini, G. (2008). A simple Lambert algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(6):1587–1594.
- Balmino, G., Barriot, J., Koop, R. Middel, B., Thong, N. C., and Vermeer, M. (1991). Simulation of gravity gradients: a comparison study. *Bulletin géodésique*, 65(4):218–229.
- Battin, R. H. (1977). Lambert’s problem revisited.”. *AIAA Journal*, 15(5):707–713.
- Battin, R. H. (1999). *Introduction to the Mathematics and Methods of Astrophysics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. Reston, Virginia.
- Battin, R. H., Fill, T. J., and Shepperd, S. W. (1978). A new transformation invariant in the orbital boundary-value problem. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1(1):50–55.
- Battin, R. H. and Vaughan, R. M. (1984). An elegant Lambert algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 7(6):662–670.

- Burt, E. G. C. and Elliot, H. (1968). Space science and electrical propulsion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 308(1493):217–241.
- Capderou, M. (2005). *Satellites - Orbits and missions*. Springer-Verlag, France.
- Casotto, S. and Fantino, E. (2007). Evaluation of methods for spherical harmonic synthesis of the gravitational potential and its gradients. *Advances in Space Research*, 40(1):69–75.
- Chandra, R., Dagum, L., Kohr, D., Maydan, D., J., M., and Menon, R. (2001). *Parallel Programming in OpenMP*. Morgan Kaufmann Publishers. Burlington.
- Chapman, B., Jost, G., and Van Der Pas, R. (2008). *Using OpenMP: Portable Shared Memory Parallel Programming. Scientific and Engineering Computation Series*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Chia-Chun, G. C. (2005). *Applied Orbit Perturbation and Maintenance*. The Aerospace Press, AIAA. California, USA.
- Cunningham, L. E. (1970). On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. *Celestial Mechanics*, 2(2):207–216.
- Curtis, H. D. (2012). *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann. London.
- Danby, J. M. A. (1988). *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Willmann-Bell, Virginia.
- Demmel, J. W. (1997). *Applied Numerical Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Evans, B. G. (1999). *Satellite Communication Systems*. The Institution of Electrical Engineers, London.
- Flohrer, T., Choc, R., and Bastida, B. (2011). Classification of geosynchronous objects. *GEN-DB-LOG-00086-OPS-GR*, (14).
- Fukushima, T. (2012). Parallel computation of satellite orbit acceleration. *Computers and Geosciences*, 49:1–9.
- Gauss, C. F. (1809). *Theoria motus corporum celestium in sectionibus conicis solem ambientium*. (English translation by C.H Davis (1857)). Little, Brown and Co. Boston.

- Gooding, R. H. (1990). A procedure for the solution of Lambert's orbital boundary-value problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 48(2):145–165.
- Griewank, A. and Walther, A. (2008). *Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. SIAM. Philadelphia USA.
- Gruber, T., Bode, A., Reigber, C., Schwintzer, R., and Balmino, G. (2000). GRIM5-C1: Combination solution of the global gravity field to degree and order 120. *Geophysical Research Letters*, 27(24):4005–4008.
- Hairer, E., Nørsett, S. P., and Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations. Non-stiff Problems*. Springer Ser. Comput. Math. 8. Springer-Verlag. New York.
- Heiskanen, V. and Moritz, H. (1967). *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell Publ Comp. Waltham, MA. USA.
- Holmes, S. A. and Featherstone, W. E. (2002). A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions, *Journal of Geodesy*, 76(5):279–299.
- Izzo, D. (2005). Lambert's problem for exponential sinusoids. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(5):1242–1245.
- Jacchia, L. G. (1958). The earth's gravitational potential as derived from satellites 1957 Beta one and 1958 Beta two. *Smithsonian Astronomy Observatory, Special Report*, 19(1).
- Kaula, W. H. (1966). *Theory of Satellite Geodesy Applications of Satellites to Geodesy*. Blaisdell Publishing Company, New York.
- King-Hele, D. G. (1958a). Analysis of the orbits of the russian satellites. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 253(1275):529–538.
- King-Hele, D. G. (1958b). The effect of the earth's oblateness on the orbit of a near satellite. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 247(1248):49–72.
- Konopliv, A. S., Asmar, S. W., Carranza, E., Sjogren, W. L., and Yuan, D. N. (2001). Recent gravity models as a result of the Lunar Prospector mission. *Icarus*, 150(1):1–18.

- Konopliv, A. S., Binder, A. B., Hood, L. L., Kucinskis, A. B., Sjogren, W. L., and Williams, J. G. (1998). Improved gravity field of the Moon from Lunar Prospector. *Science*, 281(5382):1476–1480.
- Konopliv, A. S. and Yoder, C. F. (1996). Venusian  $k_2$  tidal love number from Magellan and PVO tracking data. *Geophysical Research Letters*, 23(14):1857–1860.
- Konopliv, C., Banerdt, W. B., and Sjogren, W. L. (1999). Venus gravity: 180th degree and order model. *Icarus*, 139(1):3–18.
- Kozai, Y. (1961). Tesseral harmonics of the potential of the earth as derived from satellite motions. *Smithsonian Astronomy Observatory, Special Report*, (72).
- Lacruz, E. and Abad, C. (2008). *Automatización del proceso del cálculo de las coordenadas geocéntricas de satélites geoestacionarios a través de observaciones astrométricas*. TL1050 L3, B.I.A.C.I, Universidad de Los Andes, Venezuela.
- Lancaster, E. R. and Blanchard, R. C. (1969). A unified form of Lambert’s theorem. Technical Note NASA TMX-63355, Goddard Space Flight Center. Maryland.
- Laínez, M. D. and Romay, M. M. (2009). Odandt process evolution based on interoperability between different navigation satellite system. *Proceeding of the 22nd International Technical Meeting of The Sattellite Division of the Institute of Navigation, (ION GNSS), savannah, GA*.
- Laínez, M. D., Romay, M. M., and Alcantarilla, I. (2009). Approach for developing an advanced regional navigation satellite system. *International Symposium on GPS/GNSS, Korea*.
- Lemoine, F. G., Kenyon, S. C., Factor, J. K., Trimmer, R. G., Pavlis, N. K., Chinn, D. S., and Cox, C. M. (1998). The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96. NASA Tech. Publi TP-1998-206861, NASA Goddard Space Flight Center, Washington, D. C.
- Lemoine, F. G., Smith, D. E., Kunz, L., Smith, R., and Pavlis, E. C. (1996). The development of the NASA GSFC and NIMA joint geopotential model.”. *Gravity, Geoid and Marine Geodesy*, 117:461–469.
- Lemoine, F. G., Smith, D. E., Rowlands, D. D., Zuber, M. T., Neumann, G. A., Chinn, D. S., and Pavlis, D. E. (2001). An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor. *Journal of Geophysical Research*, 106(E10):23359–23376.

- Lemoine, F. G., Smith, D. E., Zuber, M. T., Neumann, G. A., and Rowlands, D. D. (1997). A 70th degree lunar gravity model (GLGM-2) from Clementine and other tracking data. *Journal of Geophysical Research*, 102(E7):16339–16359.
- Lerch, F. J., Wagner, C. A., Smith, D. E., Sandson, M., Brownd, J. E., and Richardson, J. (1972). *NASA Tech. Memo. X-65970*.
- Lerch, F. J., Klosko, S. M., Laubscher, R. E., and Wagner, C. A. (1979). Gravity model improvement using GEOS 3 (GEM 9 and 10). *Journal of Geophysical Research*, 84(B8):3897–3916.
- Lerch, F. J., Nerem, R. S., Putney, B. H., Felsentreger, T. L., Sanchez, B. V., Marshall, J. A., Klosko, S., Patel, G., Williamson, R., Chinn, D., Chan, J., Rachlin, K., Chandler, N., Mccarthy, J. J., Luthcke, S., Pavlis, N. K., Pavlis, D. E., Robbins, J., and Kapoor, S. (1994). A geopotential model from satellite tracking, altimeter, and surface gravity data: GEM-T3. *Journal of Geophysical Research*, 99(B2):2815–2839.
- Lerch, F. J., Putney, B. H. Wagner, C. A., and Klosko, S. M. (1981). Goddard earth models for oceanographic applications (GEM 10B and IOC). *Marine Geodesy*, 5(2):145–187.
- Lorrell, J. (1969). Spherical harmonics applications to geodesy-some frequently used formulas. *Jet Propulsion Laboratory*, TM 311-112.
- Lundberg, J. B. and Schutzf, B. E. (1988). Recursion formulas of legendre functions for use with nonsingular geopotential models. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 11(1):31–38.
- Maral, G. and Bousquet, M. (2009). *Satellite Communications Systems: Systems, Techniques and Technology*. Jhon Wiley, and Sons, Ltd. UK.
- McInnes, C. R. (2011). Displaced non-keplerian orbits using impulsive thrust. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 110(3):199–215.
- McInnes, R. C. (1997). The existence and stability of families of displacement two-body orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 67(2):167–180.
- McInnes, R. C. (1999). *Solar Sailing, Technology, Dynamics and Mission Applications*. Springer Praxis. Germany.
- McKay, R. J., Bosquillon de Frescheville, F., Vasile, M., McInnes, R. C., and Biggs, J. D. (2009). Non-keplerian orbits using low thrust, high ISP propulsion system. *60th International Astronautical Congress, IAC. Korea*.

- Metris, G., X, J., and I., W. (1998). Derivatives of the gravity potential with respect to rectangular coordinates. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, (2):137–151.
- Miani, A. K. and Agrawal, V. (2011). *Satellite Technology. Principles and Applications*. Jhon Wiley and Sons, Ltd. Chichester.
- Milani, A., Nobili, A. M., and Farinella, P. (1987). *Non-Gravitational Perturbations and Satellite Geodesy*. Adam Hilger. England.
- Milani, A., Tommei, G., Farnocchia, D., Rossi, A., Schildknecht, T., and Jehn, R. (2011). Correlation and orbit determination of space objects based on sparse optical data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 417(3):2094–2103.
- Montojo, F. J., López Moratalla, T., and Abad, C. (2011). Astrometric position and orbit determination of geostationary satellites. *Advanced in Space Research*, 417(3):1043–1053.
- Montojo, F. J., López Moratalla, T., Abad, C., and Muiños, J. L. Astrometric reduction of geostationary satellites optical observations for orbit determination (PASAGE), journal=Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, year = 2008, volume = 34, pages=45–48.
- Multon, F. R. (1970). *An Introduction to Celestial Mechanics*. Dover Publications. New York.
- Neidinger, R. D. (1992). An efficient method for the numerical evaluation of partial derivatives of arbitrary order. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 18(2):159–173.
- Neumann, G. A., Lemoine, F. G., Smith, D. E., and Zuber, M. T. (2003). The mars orbiter laser altimeter archive: Final precision experiment data record release and status of radiometry. *In Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts XXXIV*, 34:1978.
- Nock, K. T. (1984). Rendezvous with Saturn’s rings. *Anneux des Planètes Planetary Rings, IAU. Colloquium*, (75).
- Olvers, F. W. and Smith, J. M. (1983). Associated Legendre functions on the cut. *Journal of Computational Physics*, (3):502–518.

- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., and Factor, J. K. (2012). The development and evaluation of the earth gravitational model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research*, 117(B4):B04406.
- Pines, S. (1973). Uniform representation of the gravitational potential and its derivatives. *AIAA Journal*, (11):1508–1511.
- Prussing, J. E. (1979). Geometrical interpretation of the angles  $\alpha$  and  $\beta$  in Lambert's problem. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2(3):442–443.
- Prussing, J. E. and Conway, B. A. (1993). *Orbital Mechanics*. Oxford University Press. New York.
- Racca, G. D. (2003). New challenges to trajectory design by the use of electric propulsion and other new means of wandering in the solar system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 85(1):1–24.
- Rall, L. B. and Corliss, G. F. (1996). An introduction to automatic differentiation. In: C. Berz Bischof, Griewank (eds). *Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools*, pages 1–17.
- Reigber, C., Balmino, G., Muller, H., Bosch, W., and Moynot, B. (1985). Grim gravity model improvement using LAGEOS (GRIM3-L1). *Journal of Geophysical Research*, 90(B11):9285–9299.
- Reigber, C., Schwintzer, P., Barth, W., Massmann, F. H., Riamondo, J. C., and Bode, A. (1993). GRIM4-C1, -C2p: combination solutions of the global earth gravity field. *Surveys in Geophysics*, 14(4-5):381–393.
- Smith, D. E., Lerch, F. J., Nerem, R. S., Zuber, M. T., Patel, G. B., Fricke, S. K., and Lemoine, F. G. (1993). An improved gravity model for Mars: Goddard Mars model 1. *Journal of Geophysical Research*, 98(E11):20871–20889.
- Soop, E. M. (1994). *Handbook of Geostationary Orbits*. Kluwer Academic, London and Microcosm, Inc, California.
- Stoer, J. and Bulirsch, R. (1993). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag. Berlin.
- Tapley, B. D., Watkins, M. M., Ries, J. C., Davis, G. W., Eanes, R. J., Poole, S. R., Rim, H. J., Schutz, B. E., Shum, C. K., Nerem, R. S., Lerch, F. J., Marshall, J. A., Klosko, S. M., Pavlis, N. K., and Williamson, R. G. (1996). The joint gravity model 3, JGM-3. *Journal of Geophysical Research*, 101(B12):28029–28049.

- 
- Torge, W. (2001). *Geodesy*. De Gruyter. Hannover.
- Tscherning, C. C. (1976). Computation of the second-order derivatives of the normal potential based on the representation by a legendre series. *Manuscr Geod*, 1:71–92.
- Tsukanov, I. and Hall, M. (2003). Data structure and algorithms for fast automatic differentiation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(13):1949–1972.
- Vallado, D. A. (2001). *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Microcosm Press. California and Kluwer Academic Publishers. The Netherlands.
- Wertz, J. R. and Larson, W. J. (2010). *Space Mission Analysis and Design*. Microcosm Press, Hawthorne, CA and Springer, New York.
- Wiggins, R. A. and Saito, M. (1971). Evaluation of computational algorithms for the associated legendre polynomials by interval analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America*, (2):375–381.