

Desarrollo de una herramienta de interpolación geométrica de cauces para simulación 1D y 2D de flujos en ríos

Resumen

Los modelos de flujo superficial han constituido un campo de investigación muy activo recientemente. Estos modelos son de gran interés para la simulación de eventos de inundación en ríos y así analizar y evaluar la respuesta frente a una gran variedad de situaciones prácticas. En este tipo de modelos, la información topográfica y batimétrica es fundamental para la adecuada descripción del terreno, y constituye una de las mayores fuentes de incertidumbre y error en las simulaciones.

Los modelos de flujo unidimensionales (1D), promediados en la sección transversal, y bidimensionales (2D), promediados en la vertical, son los más utilizados en este contexto. La principal ventaja de los modelos 1D es su bajo costo computacional, a costa de no poder representar ni resolver correctamente las llanuras de inundación ni los flujos que desbordan del cauce principal. Por otra parte los modelos bidimensionales sí son capaces de simular los flujos que se producen en las llanuras de inundación, con una calidad dependiente de la representación topográfica, tanto de la información medida en campo como de su discretización en una malla computacional. Los modelos bidimensionales sin embargo, acarrear un coste computacional mucho mayor.

La técnica LIDAR (Light Detection and Ranging) permite la obtención de información topográfica de una forma barata, rápida y fiable, con alta resolución espacial en las tres dimensiones. A partir de dicha información, es posible crear modelos digitales del terreno (o MDT) que representan el relieve con una gran fidelidad. Sin embargo, el LIDAR convencional no es capaz de medir el terreno debajo de la superficies de agua, por lo cual resulta necesario contar con fuentes de información alternativas para conocer la batimetría del cauce, imprescindible para la simulación hidráulica.

Aunque es posible obtener superficies batimétricas con tecnología SONAR, tradicionalmente la información batimétrica se ha obtenido realizando estudios topográficos de los cauces de los ríos. Esto genera secciones transversales que proporcionan valiosa información acerca de la forma del cauce, aunque escasa y no exenta de error. A diferencia de la información LIDAR, las secciones transversales proveen información de utilidad exclusiva para los modelos unidimensionales. Para realizar simulaciones bidimensionales es necesario reinterpretarla y complementarla.

En el mejor de los casos, se cuenta con ambas fuentes de información, consistentes y sistemáticas, las cuales es posible combinar para subsanar así sus deficiencias individuales. El objetivo de este trabajo consiste en desarrollar una estrategia precisa, fiable y eficiente capaz de, a partir de la información disponible (LIDAR sin batimetría y/o secciones transversales), generar un MDT que incluya la totalidad del dominio a través de técnicas de interpolación geométrica (*splines* cúbicos de Hermite) que respeten criterios hidráulicos. La técnica es validada por medio de simulaciones 1D y 2D en geometrías sintéticas así como sobre dos tramos del río Ebro. Se evalúa la calidad de la interpolación geométrica, así como su efecto sobre variables de control hidráulicas y en términos de caudales y niveles superficiales simulados.

Índice general

1. Introducción	1
2. Modelos matemático y numérico	3
2.1. Ecuaciones del flujo de superficie libre en 1D	3
2.2. Ecuaciones del flujo de superficie libre en 2D	4
2.3. Esquema numérico	5
3. Geomorfología fluvial	9
3.1. Perfil longitudinal del cauce	9
3.2. Trazado del sistema fluvial	10
3.3. Geometría hidráulica	12
3.4. Caudal dominante	13
3.5. Morfología de las llanuras de inundación	14
4. Interpolación geométrica	15
4.1. Presentación del problema a resolver	15
4.2. Conceptos básicos de la interpolación	16
4.3. Elección del método de interpolación en el plano OXY	17
4.4. Interpolación cúbica de Hermite por <i>splines</i> en forma no paramétrica	18
4.5. Ejemplo de interpolación mediante <i>splines</i> cúbicos de Hermite	19
4.6. Interpolación en planta de las secciones transversales	20
4.7. Restricciones en la aplicabilidad de los <i>splines</i> de Hermite	21
4.8. Solución a las restricciones de aplicabilidad de los <i>splines</i> de Hermite no paramétricos	22
4.9. Interpolación de la elevación de las secciones transversales	22
5. Ejemplos de generación de un cauce	25
5.1. T1: Cauce recto de sección triangular	25
5.2. T2: Cauce meandroso de sección triangular	27
5.3. T3: Cauce recto de sección trapezoidal	28
5.4. T4: Cauce meandroso de sección variable	29
5.5. El Ebro a su paso por el meandro de Ranillas (Zaragoza)	30
5.6. El Ebro a su paso por la Reserva Natural de los Galachos de la Alfranca (Zaragoza)	32
6. Obtención de un MDT completo	35
6.1. Meandro de Ranillas (Zaragoza)	35
6.2. Reserva Natural de los Galachos de la Alfranca (Zaragoza)	37

7. Evaluación de la calidad de la interpolación	39
7.1. Evaluación del cauce generado para el meandro de Ranillas (Zaragoza)	39
7.2. Evaluación del cauce generado para el R. N. de los Galachos de la Alfranca (Zaragoza).	48
8. Conclusiones	59
Apéndice I	61

Índice de figuras

2.1. Diagrama del esquema numérico en 1D.	6
2.2. Diagrama del esquema numérico en 2D.	7
3.1. Perfil longitudinal del río Bernesga (León)	9
3.2. Planta (izquierda) y secciones transversales (derecha) vistas en el sentido de la corriente de un cauce meandriforme.	10
3.3. Trazado recto y diferentes tipos de meandros.	11
3.4. Estrangulamiento de meandros y formación de galachos.	11
3.5. (a) Cauce trenzado visto en planta. (b) Sección transversal.	12
3.6. Parámetros de un río sinuoso visto en planta.	12
3.7. Comparación de las secciones transversales entre un río grande y otro pequeño.	13
3.8. Variación de la sección transversal únicamente en función del tamaño del material. Material grueso (1), medio (2) y fino (3).	13
3.9. Cauce colgado con los diques en sus márgenes.	14
3.10. Depósitos de acreación vertical (izquierda) y lateral (derecha) en la llanura de inundación.	14
4.1. Sección transversal de forma trapezoidal. (a) Vista en planta de los puntos que definen la sección. (b) Vista en plano alzado de los puntos que definen la sección.	16
4.2. Meandro de Ranillas (Zaragoza). (a) Sucesión de secciones definiendo el cauce visto en planta. (b) Una sección del cauce visto en plano alzado.	16
4.3. Fenómeno de Runge. La función azul es la curva analítica. Los puntos negros los puntos de muestreo de la función analítica tomados para la interpolación. La función roja es la función de interpolación de orden 10.	17
4.4. Cauce ficticio.	18
4.5. Diferencia entre el vector normal de una sección transversal y la primera derivada de la función.	19
4.6. Interpolación de los puntos de la tabla 1 mediante la <i>splines</i> cúbicos de Hermite.	20
4.8. (a) Interpolación posible con polinomios no paramétricos. (b) Problema debido a pendiente vertical.	21
4.7. (a) Interpolación de los puntos que definen las secciones. (b) Problema debido a la diferencia de número de puntos.	21
4.9. Secciones en rojo, interpolación en negro. Primera situación a evitar: Una sección horizontal (a) o vertical (b) y la otra perpendicular a esta.	22
4.10. Segunda situación a evitar: Una sección horizontal (a) o vertical (b) y la otra dispuesta de tal manera que la función es bivaluada en el sistema de coordenadas correspondiente.	22
4.11. (a) Vista en planta de la interpolación por <i>splines</i> y la longitud de arco ξ . (b) Interpolación lineal de la elevación en función de la longitud de arco.	23

5.1.	(a) vista en planta y (b) vista en plano alzado de las secciones del caso T1. . . .	26
5.2.	(a) vista en planta y (b) vista en perfil de las secciones del caso T1 después de la interpolación.	26
5.3.	(a) vista en planta y (b) vista en perfil del cauce completo del caso T1.	26
5.4.	Vista en planta del cauce de sección triangular meandroso después de la interpolación (T2).	27
5.5.	Visión 3D del cauce generado (T2).	28
5.6.	(a) vista en planta y (b) vista en plano alzado de ambas secciones trapezoidales del caso T3.	28
5.7.	(a) vista en planta y (b) vista de perfil del cauce completo del caso T3.	29
5.8.	Las secciones vistas en planta (a) y en plano alzado (b) (T4).	30
5.9.	Las secciones vistas en planta (a) y en plano alzado (b). Se ha modificado el factor de escala para poder visualizar mejor el cauce.	30
5.10.	Las secciones tomadas del meandro de Ranillas vistas en planta.	31
5.11.	Vista en planta del cauce completo en el meandro de Ranillas.	31
5.12.	Detalle meandro en 3 dimensiones	32
5.13.	Las secciones tomadas del Ebro a su paso por la reserva natural.	33
5.14.	Vista en planta del cauce generado en la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza).	33
5.15.	Detalle meandro en 3 dimensiones.	34
6.1.	(a) MDT del cauce y (b) MDT de las llanuras de inundación.	36
6.2.	(a) MDT completado de información del cauce con la del LIDAR. (b) MDT completado de información del LIDAR con la del cauce.	36
6.3.	(a) Representación del MDT del río, y en (b) el de la llanura de inundación. . .	37
6.4.	Suma de los 2 MDTs disponibles.	38
6.5.	Solución al problema de la Fig. 6.4.	38
7.1.	Sección interpolada 9. (a) Comparación entre la sección medida y la interpolada. (b) Comparación de la sección interpolada con las secciones vecinas de aguas arriba y aguas abajo.	41
7.2.	Sección interpolada 14. (a) Comparación entre la sección medida y la interpolada. (b) Comparación de la sección interpolada con las secciones vecinas de aguas arriba y aguas abajo.	41
7.3.	Sección interpolada 16. (a) Comparación entre la sección medida y la interpolada. (b) Comparación de la sección interpolada con las secciones vecinas de aguas arriba y aguas abajo.	42
7.4.	Sección interpolada 18. (a) Comparación entre la sección medida y la interpolada. (b) Comparación de la sección interpolada con las secciones vecinas de aguas arriba y aguas abajo.	42
7.5.	Sección interpolada 20. (a) Comparación entre la sección la medida y la interpolada. (b) Comparación de la sección interpolada con las secciones vecinas de aguas arriba y aguas abajo.	43
7.6.	Hidrograma de la avenida simulada.	44
7.7.	Errores en Q para los diferentes cauces en el modelo 1D. (a) $Q_{max} = 300 \frac{m^3}{s}$, (b) $Q_{max} = 500 \frac{m^3}{s}$, (c) $Q_{max} = 800 \frac{m^3}{s}$, (d) $Q_{max} = 1500 \frac{m^3}{s}$	45
7.8.	Errores en $h + z$ para los diferentes cauces en el modelo 1D. (a) $Q_{max} = 300 \frac{m^3}{s}$, (b) $Q_{max} = 500 \frac{m^3}{s}$, (c) $Q_{max} = 800 \frac{m^3}{s}$, (d) $Q_{max} = 1500 \frac{m^3}{s}$	46

7.9. Errores en A para los diferentes cauces en el modelo 1D. (a) $Q_{max} = 300\frac{m^3}{s}$, (b) $Q_{max} = 500\frac{m^3}{s}$, (c) $Q_{max} = 800\frac{m^3}{s}$, (d) $Q_{max} = 1500\frac{m^3}{s}$	47
7.10. Variación del <i>thalweg</i> a lo largo del meandro.	47
7.11. Hidrograma de la avenida.	48
7.12. Huella de inundación en el caso estacionario. (a) Los resultados del MDT obtenido con el algoritmo. (b) Los obtenidos por [3].	49
7.13. En blanco el mallado basto utilizado por [6], y en color, el fino, aplicado sobre el MDT obtenido con el algoritmo. (a) Vista en perfil del mallado. (b) Vista en planta del mallado.	49
7.14. Comparación entre mallados en la entrada del vaso comunicante entre el cauce principal y el galacho en la margen derecha. (a) Mallado aplicado al MDT obtenido con el algoritmo (514246 celdas). (b) Mallado de [6] (58331 celdas). . .	50
7.15. Comparación entre mallados en el meandro situado a mitad de recorrido del río. (a) Mallado aplicado al MDT obtenido con el algoritmo (514246 celdas). (b) Mallado de [6] (58331 celdas).	50
7.16. Comparación entre mallados en el último meandro.(a) Mallado aplicado al MDT obtenido con el algoritmo (514246 celdas). (b) Mallado de [6] (58331 celdas). . .	51
7.17. (a) Resultados del cauce obtenido de la modificación del cauce de [6] con los resultados de la interpolación. (b) Cauce de [6]. $t = 60000s$	51
7.18. (a) Resultados del cauce obtenido de la modificación del cauce de [6] con los resultados de la interpolación. (b) Cauce de [6]. $t = 120000s$	52
7.19. (a) Resultados del cauce obtenido de la modificación del cauce de [6] con los resultados de la interpolación. (b) Cauce de [6]. $t = 196200s$	52
7.20. (a) Resultados del cauce obtenido de la modificación del cauce de [6] con los resultados de la interpolación. (b) Cauce de [6]. $t = 280000s$	52
7.21. Posición de las secciones.	53
7.22. Comparación de la (a) sección 1, y (b) sección 2 del cauce principal del Ebro a su paso por la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza).	53
7.23. Comparación de la (a) sección 3, y (b) sección 4 del cauce principal del Ebro a su paso por la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza).	54
7.24. Comparación de la (a) sección 5, y (b) sección 6 del cauce principal del Ebro a su paso por la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza)	54
7.25. Comparación de la (a) sección 7, y (b) sección 8 del cauce principal del Ebro a su paso por la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza)	55
7.26. Vista en planta del galacho en la margen izquierda del cauce principal. En negro el mallado basto (58331 celdas) utilizado por [6], y en color, el fino (514246 celdas), aplicado sobre el MDT obtenido con el algoritmo.	55
7.27. Vista en perspectiva del galacho en la margen izquierda del cauce principal. (a) Mallado fino, y (b) mallado basto	55
7.28. En negro el mallado basta utilizado por [6], y en color el fino, aplicado sobre el MDT obtenido con el algoritmo	56
7.29. Posición de las sondas.	56

Índice de tablas

4.1. Datos a interpolar.	15
4.2. Datos de ejemplo académico de interpolación mediante Hermite.	19
5.1. Secciones triangulares de un cauce recto (T1).	25
5.2. Secciones triangulares de un cauce sinuoso (T2).	27
5.3. Secciones trapezoidales de un cauce recto (T3).	28
5.4. Secciones trapezoidales del cauce sinuoso (T4).	29
7.1. Cauces utilizados para la simulación 1D.	40
7.2. Posición de las secciones interpoladas desde el origen.	40
7.3. Error cuadrático medio (RMS) y error relativo medio (ERM) de $h + z$ y h	57
7.4. Error cuadrático medio (RMS) y error relativo medio (ERM) de v_x y v_y	58

Capítulo 1

Introducción

Los modelos hidráulicos permiten conocer la extensión, la duración y la magnitud de inundaciones sobre una topografía concreta. Para ello, tradicionalmente se han utilizado modelos 1D [7][8][9][10], que aunque computacionalmente son más económicos que los 2D y 3D, no son capaces de simular ni representar el río de forma precisa, ni las condiciones hidráulicas prevalentes durante la inundación de un río o valle glacial, ni tampoco los sistemas de ríos complejos (p. ej. ríos anastomosados)[11]. Consecuentemente, con objeto de comprender los procesos hidrodinámicos que se dan en tales casos, se recurre a los modelos 2D o 3D.

Los modelos 3D son los que producen una solución más precisa de la hidrodinámica de la llanura de inundación [13][14], pero su alto costo computacional hacen de estos modelos ineficientes en la mayoría de los casos. Por lo tanto, en la mayoría de las ocasiones se recurre a modelos que promedian en la vertical las ecuaciones del flujo de superficie libre (modelos 2D), debido a que las profundidades de agua presentes en los problemas de hidrología fluvial así lo permiten. Más aún, en gran parte de la literatura relativa a la simulación numérica se utilizan modelos transitorios [15][16][17][18][19][20] incluso para simular estados estacionarios. Algunos de estos modelos aplicados sobre las llanuras de desbordamiento, utilizan modelos simplificados que desprecian el término convectivo de las ecuaciones [22][15][18][20][21]. Reduciendo así el propio significado de la velocidad de los procesos físico-químicos, incluso la capacidad de tener en consideración situaciones en las que el agua se encuentre en reposo [23]. En cambio, utilizando los modelos 2D completos, también llamados de aguas poco profundas [4], es posible obtener información fiable de la velocidad promediada en la vertical, algo de gran importancia en multitud de problemas de hidráulica fluvial. En este sentido, las ecuaciones de aguas poco profundas han sido aceptadas como la base para el desarrollo de los modelos hidráulicos [24][25]. Estos modelos están gobernados por los efectos de fricción del lecho y sus irregularidades [26], así como por los efectos advectivos transitorios.

En los últimos años, el desarrollo de un modelo explícito de volúmenes finitos de aguas poco profundas ha sido de vital importancia en el desarrollo de los modelos hidráulicos robustos y eficientes. Los métodos numéricos plantean dificultades en presencia de fondos irregulares y rugosos dado que éstos participan como términos fuente de las ecuaciones del flujo. Consecuentemente, se ha hecho más de un intento en buscar un método para los flujos sobre geometrías irregulares [27][28][29][34][3][31]. Además, el tratamiento de la frontera seco-mojado para volúmenes finitos ha sido objeto de gran estudio y trabajo [32][33][34][2][31][35].

La dependencia de las ecuaciones del modelo 2D respecto a la elevación del terreno, hace necesaria una representación topográfica de una gran fidelidad para asegurar que los resultados son fiables y precisos, ya que en otro caso los resultados pueden ser incorrectos [36]. Una forma de obtener información exhaustiva de la topografía es a través de los modelos digitales terres-

tres o MDTs, que abarque tanto el cauce como las llanuras de inundación. Para ello la labor se divide en dos partes. Una es la obtención de la topografía correspondiente al terreno por encima del nivel de agua, y otra la obtención de la topografía de la región sumergida. Cada una requiere de una técnica distinta para su medida. En el caso de la primera, la técnica empleada es la del LIDAR. Esta técnica, cuyo nombre viene del acrónimo en inglés Light Detection and Ranging o Laser Imaging Detection and Ranging, permite determinar la distancia desde un emisor láser a un objeto o superficie utilizando un haz de láser pulsado. Al igual que ocurre con la tecnología radar, donde se utilizan ondas de radio en vez de luz, la distancia al objeto se determina midiendo el tiempo de retraso entre la emisión del pulso y su detección a través de la señal reflejada. De esta manera permite la obtención de información topográfica de una forma barata, rápida y fiable, con alta resolución espacial en las tres dimensiones [37], con lo que es posible crear MDTs que representen el relieve con una gran fidelidad. Sin embargo, el LIDAR convencional no es capaz de medir el terreno debajo de las superficies de agua [38], por lo cual resulta necesario contar con fuentes de información alternativas para conocer la batimetría del cauce. Entre ellas, una es la tecnología SONAR [39], aunque tradicionalmente la información batimétrica se ha obtenido realizando estudios topográficos de los cauces de los ríos.

Estos estudios topográficos tienen un inconveniente, que proporcionan información escasa. Las secciones transversales se toman cada decenas o centenas de metros, dependiendo de la sinuosidad del río, y por lo tanto sin ningún tipo de procesamiento no es posible generar una superficie continua del cauce.

La motivación del presente trabajo consiste por lo tanto en desarrollar un algoritmo, capaz de obtener un MDT de las zonas donde el LIDAR no puede generarlo por estar bajo el agua. Para ello, se interpolan las secciones transversales tanto en planta, a través de interpolación cúbica de Hermite, como en perfil, interpolación lineal. De esta forma se añade esta información a la generada por el vuelo LIDAR obteniendo un MDT completo.

Para la validación del algoritmo de interpolación, se emplean dos técnicas. Por una parte, se genera un cauce 1D con secciones medidas de forma directa del cauce del Ebro a su paso por el meandro de Ranillas (Zaragoza), y otro con secciones obtenidas con el algoritmo de interpolación. Después se comparan ambos cauces bajo criterios geométricos, y utilizando la simulación 1D, bajo criterios hidráulicos.

Por otra parte, con el algoritmo presente se genera un MDT completo del Parque Natural de los Galachos de la Alfranca (Zaragoza) y se compara geoméricamente con uno obtenido por [6] de la misma zona. Además, empleando criterios hidráulicos se comparan los resultados obtenidos con la simulación 2D de ambos MDTs.

Capítulo 2

Modelos matemático y numérico

El propósito del presente trabajo consiste en la obtención de un modelo digital terrestre (MDT) que abarque tanto el lecho fluvial como las llanuras de inundación, con el objetivo de poder usarlo posteriormente en la simulación numérica. Para la simulación se emplearán dos tipos de modelos, por una parte los 1D y por otra los 2D.

2.1. Ecuaciones del flujo de superficie libre en 1D

Los modelos 1D son un modelo simple de fenómenos muy complejos, que incorpora únicamente las influencias más importantes. Para ello, el flujo ha de considerarse unidimensional bajo las hipótesis de St. Venant, o aguas poco profundas [41][42], que son:

- El flujo es unidimensional. La velocidad se supone uniforme sobre cada sección transversal y el nivel de agua en la superficie horizontal a través de la misma.
- La curvatura de las líneas de corriente es pequeña y las aceleraciones verticales son despreciables. La distribución de presión es simplemente hidrostática.
- Las fuerzas de fricción con las paredes pueden ser descritas mediante leyes similares a las utilizadas para flujo estacionario.
- La pendiente media del fondo θ es pequeña, de modo que se pueden tomar las aproximaciones:

$$\cos \theta \approx 1, \sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$$

donde θ es ahora la pendiente media en la dirección principal.

En estos modelos, para definir el cauce es necesario definir las secciones transversales que lo forman. En principio estas pueden tener cualquier forma y variar a lo largo del cauce, siempre y cuando no violen la segunda hipótesis.

Las ecuaciones de la aproximación unidimensional son resultado de integrar en la dirección transversal las ecuaciones de la aproximación bidimensional, y estas a su vez de integrar en la dirección vertical las ecuaciones tridimensionales. Con lo cual, las ecuaciones para el caso unidimensional en la aproximación de aguas poco profundas en su forma conservativa son [3][1]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(x, \mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{H}(x, \mathbf{U}) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ g[I_2 + A(S_0 - S_f)] \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

donde Q es el caudal, A la área mojada, g la aceleración debida a la gravedad y S_0 la pendiente del fondo definida como

$$S_0 = -\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.3)$$

con z_b la elevación del fondo del cauce y S_f el término de fricción con el mismo. Este término se puede expresar a través de la ley de Manning

$$S_f = \frac{n^2 Q |Q|}{A^2 R_h^{4/3}} \quad (2.4)$$

donde n es el coeficiente de rozamiento de Manning y R_h el radio hidráulico. Por otra parte, I_1 representa la fuerza de presión ejercida sobre cualquier sección transversal y tiene la forma

$$I_1 = \int_{z_b}^{z_s} (h - \eta) b(x, \eta) d\eta \quad (2.5)$$

siendo h la profundidad del agua, z_s el nivel de la lámina libre y $b(x, \eta)$ la anchura de la sección transversal del cauce con η la coordenada en la profundidad. Por último, I_2 es la fuerza de presión debida a las variaciones de la anchura del canal con la distancia

$$I_2 = \int_{z_b}^{z_s} (h - \eta) \frac{\partial b(x, \eta)}{\partial x} d\eta \quad (2.6)$$

Como se puede observar en la ecuación (2.3) aparece un término en función de z_b , y este a su vez en las ecuaciones (2.1) y (2.2). De tal forma que una buena representación de la elevación del fondo es de vital importancia a la hora de resolver el sistema de ecuaciones. Es por lo tanto motivo de estudio y preocupación la obtención de datos precisos de la elevación.

2.2. Ecuaciones del flujo de superficie libre en 2D

El sistema de ecuaciones para flujo de superficie libre en 2D se obtiene de promediar en la vertical las ecuaciones de conservación de la masa y el momento lineal en tres dimensiones. El sistema en su forma conservativa se expresa [41][16][4]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{H}(\mathbf{U}, x, y) \quad (2.7)$$

donde las variables conservadas:

$$\mathbf{U} = (h, q_x, q_y)^T \quad (2.8)$$

h la profundidad del agua, $q_x = hu$ y $q_y = hv$, con u y v las velocidades en los ejes OX y OY , respectivamente, promediadas en la vertical. Los flujos de estas variables

$$\mathbf{F} = \left(q_x, \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, \frac{q_x q_y}{h} \right)^T, \quad \mathbf{G} = \left(q_y, \frac{q_x q_y}{h}, \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)^T \quad (2.9)$$

siendo g la aceleración debida a la gravedad. El término fuente del sistema está formado por la pendiente del fondo y el rozamiento

$$\mathbf{H} = \left(0, gh(S_{0x} - S_{fx}), gh(S_{0y} - S_{fy}) \right)^T \quad (2.10)$$

donde las pendientes del nivel del fondo son

$$S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.11)$$

El término de la viscosidad turbulenta proveniente de las ecuaciones de Navier-Stokes ha sido despreciado. Esto se debe a que la influencia de este efecto en las velocidades promediadas es muy pequeño y puede ser incluido en los términos de rozamiento [44].

Las pérdidas por fricción se pueden escribir en función del coeficiente de rozamiento de Manning en la forma

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2.12)$$

Al igual que en la ecuación (2.3), en la (2.11) aparecen dos términos en función de z_b . Pero en esta ocasión, las derivadas son respecto a x e y , y por lo tanto se requiere conocer la elevación en función de ambas variables. Para ello se debe definir una superficie $z = z_b(x, y)$, de forma que lo que realmente se necesita es la representación topográfica del terreno. Esta ha de ser lo suficientemente precisa para que al resolver el sistema de ecuaciones (2.1), el resultado de la simulación numérica se ajuste lo máximo posible a la realidad. Esta es por lo tanto la motivación del presente trabajo, obtener una representación topográfica precisa para después utilizar un simulador bidimensional.

2.3. Esquema numérico

El esquema numérico aplicado tanto en el modelo 1D, como en el 2D, es un método upwind explícito de primer orden de volúmenes finitos. En tal caso los sistemas (2.1) y (2.7) pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \mathbf{E} = \mathbf{H} \quad (2.13)$$

teniendo en cuenta que en el modelo 1D es $\mathbf{E} = \mathbf{F}$, y en el 2D $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}n_x + \mathbf{G}n_y$. Integrando en un volumen o celda Ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \mathbf{E}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{H} d\Omega \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \mathbf{H} d\Omega \quad (2.14)$$

siendo \mathbf{n} un vector unitario normal a la superficie de Ω . $\mathbf{E}\mathbf{n}$ es el flujo normal y \mathbf{J}_n es su Jacobiano, el cual se puede diagonalizar

$$\mathbf{J}_n = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{\Lambda}_n = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{J}_n \mathbf{P} \quad (2.15)$$

Donde $\mathbf{\Lambda}_n$ es una matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores de \mathbf{J}_n , y \mathbf{P} es una matriz construida con sus autovectores.

Aplicando la linearización de Roe [43][45][3], es posible definir de forma local una matriz $\tilde{\mathbf{J}}_n$ en cada pared k de la celda cuyos autovalores $\tilde{\lambda}_k$ y autovectores \tilde{e}_k puedan ser utilizados para expresar las diferencias de los flujos a través de la pared k como una suma de ondas

$$\delta \mathbf{U}_k = \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j = \sum_m (\tilde{\alpha} \tilde{e})_k^m \quad (2.16)$$

$$\delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})_k = \tilde{\mathbf{J}}_k (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j) = \sum_m \left(\tilde{\lambda} \tilde{\alpha} \tilde{e} \right)_k^m \quad (2.17)$$

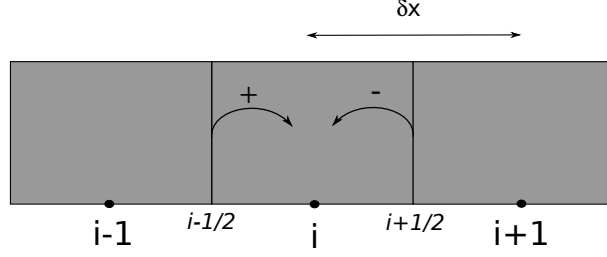


Figura 2.1: Diagrama del esquema numérico en 1D.

Donde i, j son los índices de las celdas que comparten la pared k . El término fuente se discretiza también como

$$\tilde{\mathbf{H}}_k \delta x = \sum_m \left(\tilde{\beta} \tilde{e} \right)_k^m \quad (2.18)$$

En el modelo 1D con $m = 2$, el esquema numérico upwind explícito puede escribirse [3] como

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\delta x} \left[\sum_m \left(\tilde{\lambda}^+ \tilde{\gamma} \tilde{e} \right)_{i-1/2}^m + \sum_m \left(\tilde{\lambda}^- \tilde{\gamma} \tilde{e} \right)_{i+1/2}^m \right]^n \quad (2.19)$$

donde $\gamma_{i+1/2}^m = \left(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\lambda}} \right)_{i+1/2}^m$ y $\tilde{\lambda}_{i+1/2}^{\pm m} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\lambda} \pm |\tilde{\lambda}| \right)_{i+1/2}^m$, de tal forma que las contribuciones entrantes desde la derecha y la izquierda se usan para actualizar el valor de las variables conservadas en cada celda (Fig. 2.1). El paso temporal se toma de forma dinámica para que cumpla la condición de Courant-Friedrich-Levy (CFL)

$$\Delta t = CFL \frac{\delta x}{\max_m |\tilde{\lambda}^m|} \quad CFL \leq 1 \quad (2.20)$$

Análogamente a lo aplicado en el caso 1D, el esquema numérico upwind explícito 2D puede ser discretizado usando volúmenes finitos, de forma que se obtiene [3]

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{k=1}^{NE} \sum_m \left[\left(\tilde{\lambda}^- \tilde{\gamma} \tilde{e} \right)_k^m l_k \right]^n \quad (2.21)$$

En el caso de un modelo 2D se toma $m = 3$, y si la malla es no estructurada el número de bordes (NE) es igual a 3 (Fig. 2.2). La longitud l_k se refiere a la longitud de los bordes de la celda i . En mallas no estructuradas se tomará la equivalente de la distancia δx como χ_i y se define por medio del área de la celda (A_i) y la longitud de los bordes k , tal que:

$$\chi_i = \frac{A_i}{\max_{k=1, NE} l_k} \quad (2.22)$$

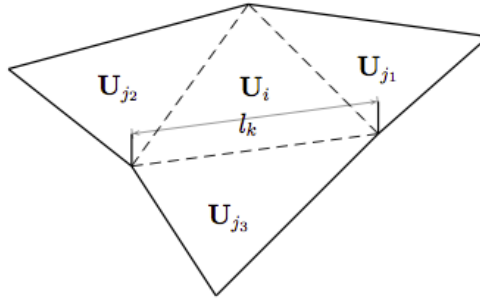


Figura 2.2: Diagrama del esquema numérico en 2D.

La condición de estabilidad numérica (CFL), en el caso 2D, queda determinada por la expresión

$$\Delta t = CFL \frac{\min(\chi_i, \chi_j)}{\max_m |\tilde{\lambda}^m|} \quad CFL \leq 1 \quad (2.23)$$

Capítulo 3

Geomorfología fluvial

En este capítulo se presentan las características físicas más frecuentes y relevantes de los ríos con el fin de proporcionar una base conceptual para el posterior análisis morfológico de los cauces generados mediante el algoritmo.

3.1. Perfil longitudinal del cauce

El perfil longitudinal de un río describe la forma en el que éste varía su cota en función de su longitud y recorrido, de manera que el perfil longitudinal refleja la pendiente de cada tramo (Fig. 3.1).

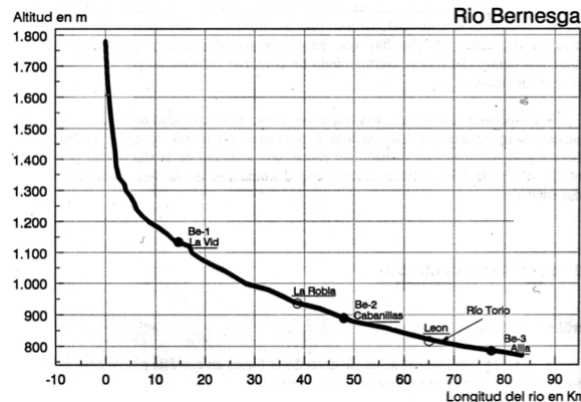


Figura 3.1: Perfil longitudinal del río Bernesga (León)

En general, los perfiles longitudinales de los ríos presentan una forma cóncava con una pendiente que disminuye con la longitud. La relación aproximada entre la cota y la distancia longitudinal, es

$$S_l = S_0 e^{-a\xi} \quad (3.1)$$

donde S_l es la pendiente a una distancia ξ aguas abajo desde un punto de referencia con una pendiente S_0 y a es el coeficiente de disminución de la pendiente.

El comportamiento de la corriente de agua o régimen hidráulico está determinado por la pendiente del río. En el caso de que la pendiente sea mayor al 6 %, se llama torrentes a los cursos de agua. Si la pendiente está entre 1.5 % y 6 %, se les denomina ríos torrenciales. Existen también otros términos para referirse a la pendiente del río, como ríos de montaña o de llanura, aunque

sin demasiada precisión.

La pendiente de un cauce está determinada por multitud de variables, como el caudal, la carga de sedimentos, tamaño de los sedimentos y geología del terreno. Generalmente cuanto mayor es la extensión de la cuenca vertiente menor es la pendiente del cauce. También existe relación entre el tamaño del sustrato y la pendiente, de forma que tramos de gran pendiente tienen asociados tamaños de sustrato grande. Por lo tanto, a medida que disminuye la pendiente y aumenta la extensión de la cuenca, el tamaño del sustrato disminuye. El motivo es que por efecto del proceso de erosión al que se ve sometido el sedimento, disminuye el tamaño del mismo a medida que aumenta la distancia longitudinal. Además, cuanto menor es la pendiente menor capacidad para transportar material grueso tiene la corriente, por lo que el material más fino llega más lejos [40].

La relación entre el tamaño del material sedimentario (D) y la pendiente (i) determina la sensibilidad del río ante los cambios del caudal. Para un valor alto de i/D , el río es muy sensible o inestable, y en el caso de una avenida se dan grandes cambios en la pendiente. Si por el contrario la relación i/D es pequeña, el cambio de la pendiente también lo es.

3.2. Trazado del sistema fluvial

El trazado de un cauce se refiere a la forma que presenta el río en planta. Las diferencias en la sinuosidad, el cociente entre la longitud del río y la longitud del valle en un determinado tramo, permiten diferenciar tres tipos básicos de trazado.

Se dice trazado recto cuando la sinuosidad es inferior a 1.5. En este tipo de cauces, poco comunes en la naturaleza [40], no son apreciables las curvas en el cauce si bien la línea que une los puntos de mayor profundidad (*thalweg*) puede ser curvada.

Cuando la sinuosidad es superior a 1.5, al cauce se le denomina meandriforme o sinuoso. En este caso, el cauce es único y curvado. De estudios en laboratorio de flujos de agua con transporte de sedimento, se tiene constancia de que son el resultado de la formación de meandros en cauces rectos debido a la más mínima imperfección de la alineación recta o por causa externa accidental [40]. Además, en los cauces sinuosos las secciones transversales son asimétricas (Fig. 3.2). El calado es mayor en la orilla cóncava o exterior del meandro, y menor en la convexa o interior. Este fenómeno es consecuencia de la corriente secundaria. Esta, se genera por efecto de la acción de la fuerza centrífuga sobre la corriente principal, y debido a ella se erosiona la parte convexa, depositando el material erosionado en la parte cóncava. De esta forma, es mayor la pendiente y la profundidad en la parte convexa que en la cóncava. Mediante este proceso pueden surgir playas en las orillas interiores.

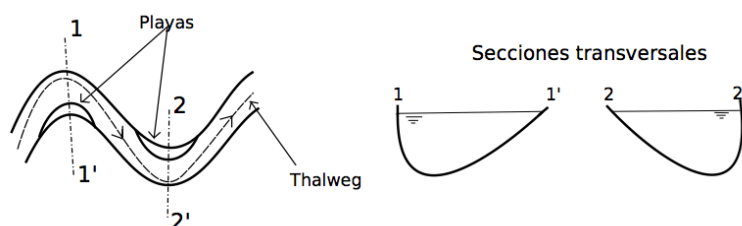


Figura 3.2: Planta (izquierda) y secciones transversales (derecha) vistas en el sentido de la corriente de un cauce meandriforme.

Como consecuencia de los procesos de erosión y sedimentación los meandros son una morfología dinámica. La evolución presente se debe básicamente a dos movimientos, uno al desplazamiento aguas abajo de los meandros, y otra, al movimiento en dirección perpendicular a la anterior, aumentando su curvatura. La evolución de estos movimientos depende de la resistencia a la erosión del terreno, y su homogeneidad da como resultado diferentes tipos de meandros: meandros regulares, tortuosos, irregulares o errantes irregulares (Fig. 3.3).

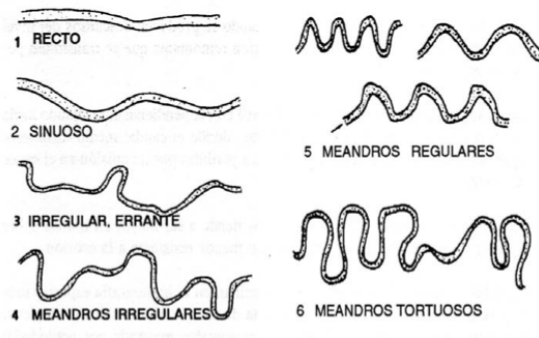


Figura 3.3: Trazado recto y diferentes tipos de meandros.

El último paso de la evolución de los meandros es el de su estrangulamiento, es decir, cuando el río acorta su curso cortando el cuello de un meandro. De esta forma se forman los lagos de herradura o galachos (en aragonés) (Fig. 3.4).

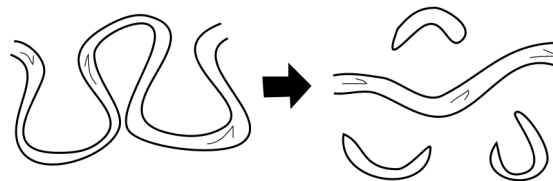


Figura 3.4: Estrangulamiento de meandros y formación de galachos.

Cuando se alcanza un nivel de umbral de carga de sedimentos y/o de pendiente, se forman los ríos trenzados o anastomosados [46]. Estos se caracterizan por la formación de un curso de agua muy ancho y poco profundo que se divide en varios brazos dejando islas (sumergibles) entre sí al unirse y volver a separarse. Estos cauces son inestables en el sentido de que una crecida puede cambiar considerablemente de lugar el brazo principal (Fig 3.5).

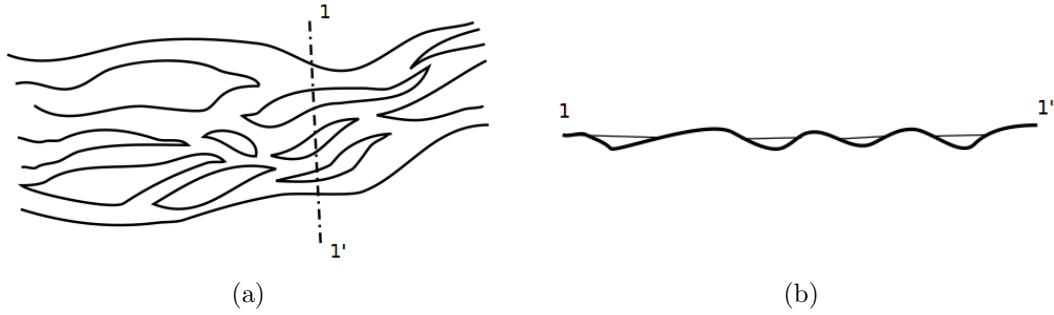


Figura 3.5: (a) Cauce trenzado visto en planta. (b) Sección transversal.

3.3. Geometría hidráulica

Gran parte del conocimiento actual de los ríos tiene una base empírica, a través de la observación y la experimentación, siendo éstas necesarias para la elaboración de una teoría determinista del comportamiento de los cauces basada exclusivamente en principios físicos universales.

Una relación de base empírica que muestra las condiciones en el que un río forma un cauce trenzado o meandriforme es

$$i \cdot Q^{0.44} = 0.0116 \quad (3.2)$$

donde i es la pendiente y Q el caudal (m^3/s). Para $Q^{0.44} > 0.0116$ el río es trenzado, y meandriforme en caso contrario. De todas formas, la igualdad no marca el límite entre un caso y otro. Pueden darse casos en los que el río tenga ambas propiedades a la vez. O incluso que en la parte alta tenga un cauce trenzado y meandriforme aguas abajo. Por ello, la clasificación resulta difusa [40], y las propiedades han de tomarse como orientativas para determinar un tipo de trazado.

Existen ciertas relaciones de origen empírico que se toman como características de los ríos sinuosos, haciendo la abstracción del trazado del cauce, que relacionan la longitud de onda (λ) de los meandros, su amplitud (a), el caudal (Q) y la anchura del cauce en la superficie libre (B) (Fig. 3.6).

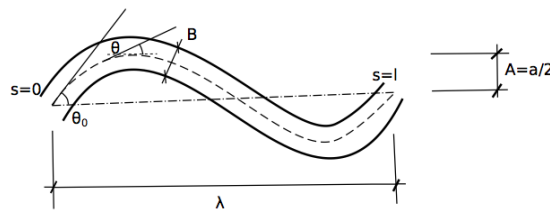


Figura 3.6: Parámetros de un río sinuoso visto en planta.

Dos relaciones son:

$$\lambda \approx 10B \quad (3.3)$$

$$a \approx 3B \quad (3.4)$$

Por otra parte, de forma empírica se ha determinado que la anchura B es proporcional a la raíz cuadrada del caudal

$$B \propto \sqrt{Q} \quad (3.5)$$

De forma que un río el doble de ancho es cuatro veces más caudaloso. Además, teniendo en cuenta que el caudal es $Q \approx B \cdot y \cdot v$ y la relación (3.5), se concluye que la anchura aumenta en mayor medida con el caudal, que el calado (y). De forma que la relación de forma de sección (B/y) crecerá suavemente con el caudal. Esto es, un río más caudaloso da un cauce mas ancho en comparación a su calado, que uno menos caudaloso (Fig. 3.7).

$$Q_1 > Q_2 \Rightarrow (B/y)_1 > (B/y)_2 \quad (3.6)$$

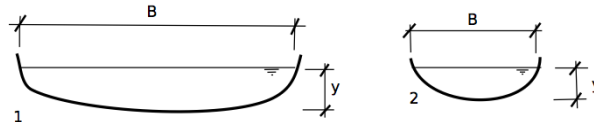


Figura 3.7: Comparación de las secciones transversales entre un río grande y otro pequeño.

De las expresiones (3.3) y (3.4) se desprende que los ríos grandes y pequeños son proporcionales entre sí en planta, pero no mantienen ninguna proporcionalidad en la relación de forma de sección (B/y).

Existe otra relación empírica entre B/y y el tamaño del material en el cauce, que establece que cuanto menor es el contenido de material fino en el cauce mayor es B/y , al igual que ocurre con el caudal (Q) (Fig. 3.8). Además, se ha observado que cuando mayor es la cantidad de transporte sólido o el tamaño característico de los sedimentos, menor es la sinuosidad. De tal manera que en los ríos donde se da un gran aporte de sedimentos, la secciones transversales son más anchas y menos profundas en proporción y la sinuosidad disminuye, por lo que el cauce pasa de ser meandriforme a trenzado.

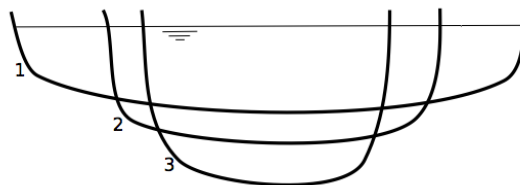


Figura 3.8: Variación de la sección transversal únicamente en función del tamaño del material. Material grueso (1), medio (2) y fino (3).

3.4. Caudal dominante

Diversos ríos tienen un cauce, de mayor o menor profundidad, que limitado por sus orillas queda separado de las llanuras de inundación [40]. A dicho cauce se le denomina cauce principal. La existencia del cauce principal es el resultado de hacer fluir un río por una llanura. Por acción de la erosión comienza a crearse un pequeño arroyo que poco a poco se convierte más profundo y ancho. Las posibles avenidas depositan el material erosionado en la llanura, y por consecuencia, aumentan su cota haciendo más difícil el desbordamiento. Este proceso tiende a un equilibrio, en el que el cauce principal contiene en la mayor parte de los casos las aguas, a excepción de las avenidas. Así se forma, por lo tanto, el cauce principal.

Siendo así, el caudal dominante se define como el caudal que llena el cauce principal, puesto

que es el que desarrolla la mayor acción modeladora sobre el cauce, debido a que un caudal mayor es poco frecuente y apenas incrementa la velocidad o la tensión tangencial. Es por lo tanto el caudal empleado en las expresiones empíricas que relacionan el caudal con la geometría del cauce.

Ciertos autores, establecen un periodo de retorno entre 1 y 2 años para los caudales dominantes [47]. Sin embargo, en el caso de la área mediterránea se ha determinado que el periodo de retorno se halla entre 1.5 y 7 años [40].

3.5. Morfología de las llanuras de inundación

Las llanuras de inundación son las áreas próximas al cauce principal del río, de pequeña pendiente, que en caso de avenida pueden resultar inundadas. A grandes rasgos la llanura de inundación resulta ser muy llana, pero observándolas con mayor detenimiento son visibles distintas formaciones. Tomando un corte transversal, pueden aparecer zonas con tendencia llana, cóncava o convexa.

La tendencia convexa surge cuando las orillas de un cauce se sitúan por encima de la llanura, formando diques naturales. A los ríos en esa situación se les denomina ríos colgados (Fig. 3.9). Por otra parte, pueden aparecer depresiones, debida a la existencia de paleocauces o cauces extintos, que en caso inundación pueden comportarse como cauces activos. A este tipo de cauces se les denomina *cauces de alta*.



Figura 3.9: Cauce colgado con los diques en sus márgenes.

El proceso dominante que actúa sobre las llanuras de inundación es la sedimentación. Debido a este proceso se forman diferentes tipos de depósitos de material. Por una parte, están los depósitos de material más fino que se sitúan lejos del cauce principal, en las zonas donde la velocidad del agua ha sido menor. Por otra, están los depósitos de acreación lateral, cuyo origen está en el crecimiento de las barras en las partes cóncavas de los meandros (Fig. 3.10). La formación de diferentes tipos de depósitos hace que la cota de la llanura de inundación aumente.

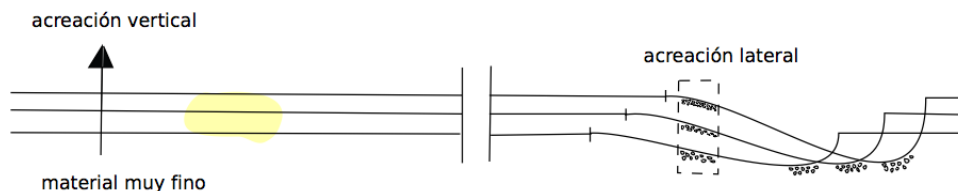


Figura 3.10: Depósitos de acreación vertical (izquierda) y lateral (derecha) en la llanura de inundación.

Capítulo 4

Interpolación geométrica

4.1. Presentación del problema a resolver

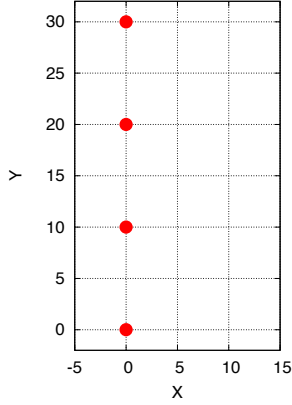
El propósito principal del trabajo consiste en generar una superficie continua de la topografía del cauce a partir de una serie de datos, las secciones transversales de un cauce, que sea capaz de transportar los caudales de agua correctamente. Para ello, es necesario hallar alguna forma de poder generar esa información que no se tiene entre dos secciones consecutivas, y la herramienta útil para ello es la interpolación numérica. En primer lugar, es necesario identificar la información de la que se dispone para generar el cauce.

Para definir el cauce se dan una serie de secciones transversales del mismo, definidas por puntos, donde las coordenadas x e y definen la posición de los puntos en el plano OXY o en planta, y z es su elevación. Para el sencillo caso de una sección trapezoidal los datos son como los de la tabla 4.1.

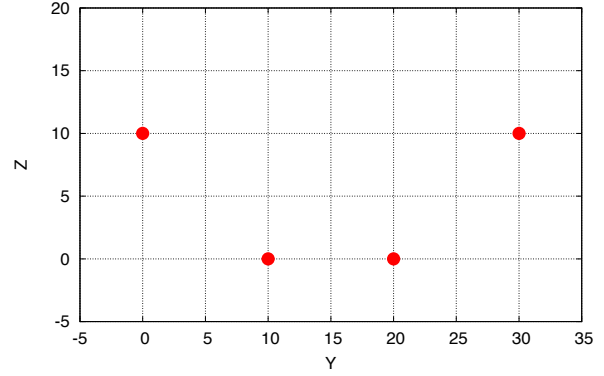
x	y	z
0.0	0.0	10.0
0.0	10.0	0.0
0.0	20.0	0.0
0.0	30.0	10.0

Tabla 4.1: Datos a interpolar.

Los puntos definen la sección visible en la Fig. 4.1. Mediante una sucesión de secciones transversales se puede definir un cauce de manera discreta como se puede apreciar en la figura 4.2. Este caso corresponde al meandro de Ranillas (Zaragoza). Tal y como se observa, es necesario un mayor número de puntos (puntos rojos) para poder definir una sección real. De tal manera que cuanto más puntos se tomen al medir cada sección, más detalles se captan obteniendo una sección más fiel a la realidad. También sucede lo mismo con el número de secciones medidas. A mayor número de secciones menor es la diferencia entre el cauce generado y el real. Esto, en cambio, supone un mayor coste material y personal.

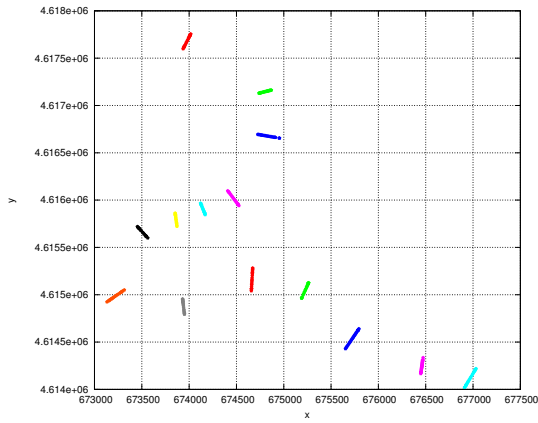


(a)

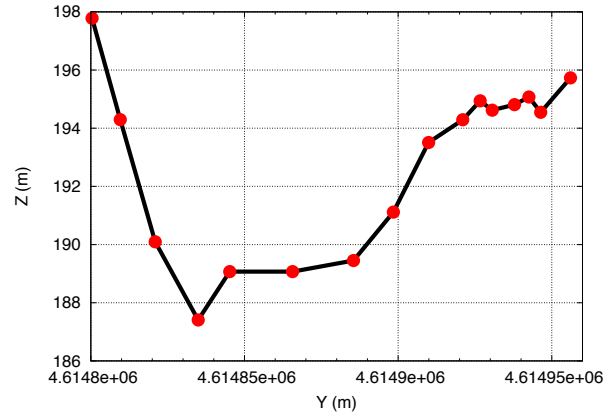


(b)

Figura 4.1: Sección transversal de forma trapezoidal. (a) Vista en planta de los puntos que definen la sección. (b) Vista en plano alzado de los puntos que definen la sección.



(a)



(b)

Figura 4.2: Meandro de Ranillas (Zaragoza). (a) Sucesión de secciones definiendo el cauce visto en planta. (b) Una sección del cauce visto en plano alzado.

Una vez se tienen los puntos que definen las secciones, hay que igualar el número de puntos en todas. Esto se hace remuestreando las secciones de forma lineal. Una vez hecho esto, sólo hay que interpolar las secciones para obtener un cauce continuo. Para ello, se debe tener en cuenta que los puntos están georeferenciados, en coordenadas UTM (del acrónimo en inglés *Universal Transverse Mercator*, es un sistema de coordenadas basado en la proyección cartográfica transversa de Mercator en el que las magnitudes se expresan en metros únicamente al nivel del mar, a diferencia del sistema de coordenadas geográficas, expresadas en longitud y latitud [49]), y por lo tanto las secciones también, de forma que se puede definir la dirección normal de las mismas en el plano OXY .

4.2. Conceptos básicos de la interpolación

El problema general de la interpolación es el siguiente: dados $n + 1$ puntos distintos $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+1} \leq b$ de un intervalo $[a, b]$, llamados nodos de interpolación, y $n + 1$ números reales y_1, y_2, \dots, y_{n+1} , llamados valores de la interpolación, se trata de encontrar una función f ,

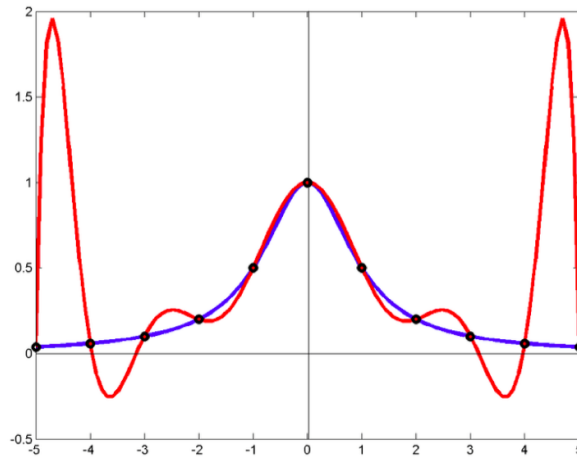


Figura 4.3: Fenómeno de Runge. La función azul es la curva analítica. Los puntos negros los puntos de muestreo de la función analítica tomados para la interpolación. La función roja es la función de interpolación de orden 10.

tal que $f(x_i) = y_i$ para $i = 1, 2, \dots, n + 1$. El caso particular más conocido es el problema de interpolación polinómica, donde $f(x_i)$ es un polinomio de grado menor o igual a n . Así, para una función de interpolación polinomial lineal hacen falta dos valores de interpolación, tres para la cuadrática y cuatro para la cúbica, y así sucesivamente.

Cuando en interpolación polinómica se utilizan polinomios de orden superior a 2, aparecen oscilaciones hacia los extremos. A este problema se le denomina fenómeno de Runge. Un ejemplo de este fenómeno se aprecia en la Fig. 4.3. En ese caso la línea azul representa la función analítica, y la roja es la función de interpolación, de orden 10, que interpola los puntos negros que se han obtenido de un muestreo de la función analítica. Por lo tanto para un orden alto de interpolación el resultado es incorrecto [48].

Una solución a este problema son las curvas *spline* o interpolación polinómica a trozos. Estas, son funciones de interpolación construidas entre cada par de nodos o puntos de control, en vez de en todo el intervalo. De tal manera que en el intervalo $[a, b]$ con $n + 1$ nodos, tendremos n funciones.

$$f_i(x) = y, \quad \text{con } i = 1, \dots, n, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad y \in [y_i, y_{i+1}] \quad (4.1)$$

Las funciones polinómicas que se emplean pueden ser lineales, cuadráticas, cúbicas, ... La diferencia respecto a las que se definen en todo el intervalo reside en el hecho de que al ser definidas entre pares de nodos deben establecerse nuevas condiciones de contorno ante la ausencia de valores nodales. Las condiciones de contorno pueden obtenerse de imponer un valor a las derivadas o su continuidad en los nodos.

4.3. Elección del método de interpolación en el plano OXY

La elección del tipo de interpolador se debe hacer teniendo en cuenta la información de partida. Por una parte están los nodos x_i y x_{i+1} y los valores de la función en los mismos, y_i e

y_{i+1} , respectivamente. Y por otro lado, se tiene en valor de las primeras derivadas en los mismos nodos, m_i y m_{i+1} , mediante el cálculo de la dirección normal de la secciones en el plano OXY . Por lo tanto hay cuatro condiciones de contorno por intervalo.

- 2 condiciones: $f_i(x_i) = y_i$, $f_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$
- 2 condiciones: $f'_i(x_i) = m_i$, $f'_i(x_{i+1}) = m_{i+1}$

Con cuatro condiciones de contorno es posible definir como máximo un polinomio de orden tres. Por lo tanto, se puede optar por un polinomio lineal, cuadrático o cúbico. La elección, en cambio, debe tener como objetivo la correcta representación del cauce visto en planta o proyectado sobre el plano OXY . De forma que el polinomio debe poder representar curvas como la de la figura 4.4, con la primera derivada continua y con cambios en el signo de la segunda derivada. Consecuentemente, el polinomio debe ser cúbico.

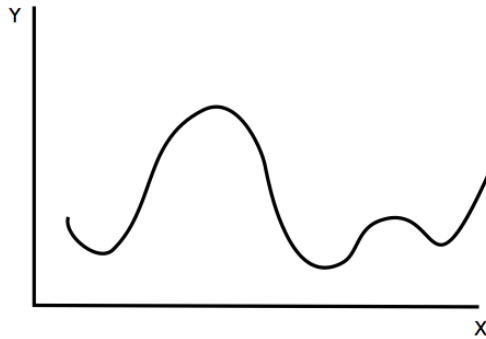


Figura 4.4: Cauce ficticio.

Por otra lado, se debe escoger el tipo de *spline* cúbico cuyas condiciones de contorno son dadas por los valores de la función y de la primera derivada en los nodos. El tipo de interpolador que cumple dichas condiciones son los *splines* cúbicos de Hermite no paramétricos. Por lo tanto ese el método de interpolación empleado para interpolar las secciones y generar el cauce en planta.

4.4. Interpolación cúbica de Hermite por *splines* en forma no paramétrica

La interpolación cúbica de Hermite por *splines* en su versión no paramétrica, la variable independiente es la coordenada x , y la dependiente y , de forma que el polinomio se expresa como $f_i(x) = y$. Su expresión general (Apéndice I), para cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, es

$$f_i(x) = y = h_{00}(t)y_i + h_{10}(t)(x_{i+1} - x_i)m_i + h_{01}(t)y_{i+1} + h_{11}(t)(x_{i+1} - x_i)m_{i+1} \quad (4.2)$$

donde el factor de escala normalizado t , se define como $t = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$. La expresión de las funciones $h_{00}(t)$, $h_{10}(t)$, $h_{01}(t)$ y $h_{11}(t)$ es

$$h_{00}(t) = (1 + 2t)(1 - t)^2 = 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad (4.3)$$

$$h_{10}(t) = t(1 - t)^2 = t^3 - 2t^2 + t \quad (4.4)$$

$$h_{01}(t) = t^2(3 - 2t) = -2t^3 + 3t^2 \quad (4.5)$$

$$h_{11}(t) = t^2(t - 1) = t^3 - t^2 \quad (4.6)$$

4.5. Ejemplo de interpolación mediante *splines* cúbicos de Hermite

Con objeto de entender como interpolar con este método, se presenta un caso académico sencillo. Para ello, considérese una serie puntos (x_i, y_i) y la dirección unitaria (n_i) que debe tener la función en el punto de control, y hágase pasar una curva por todos los puntos.

Los valores de la primera derivada de la función en los nodos, como se ha señalado anteriormente, son condiciones de contorno, y por lo tanto, deben ser obtenidos. Para ello, se calcula el vector normal de cada sección, y se toma el valor de su tangente como el valor de la primera derivada. Esto supone una aproximación, ya que en el caso de la recta tangente de la función su longitud no tiene por qué ser la misma que el módulo del vector normal (Fig. 4.5).

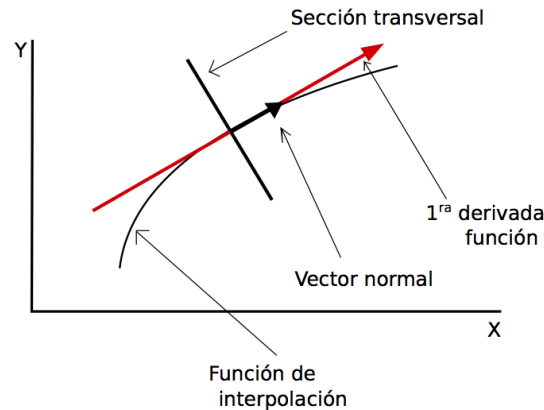


Figura 4.5: Diferencia entre el vector normal de una sección transversal y la primera derivada de la función.

Los datos del ejemplo académico son los de la tabla 1. En total hay 5 nodos, y por lo tanto 4 funciones, una por cada subintervalo.

x	y	n
5	10	$(0.5, \frac{\sqrt{3}}{2})$
20	12.5	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
27.5	5	$(0.174, 0.985)$
37.5	15	$(1, 0)$
45	7.5	$(0.819, -0.574)$

Tabla 4.2: Datos de ejemplo académico de interpolación mediante Hermite.

- Primer subintervalo:

$$m_1 = \frac{n_{y_1}}{n_{x_1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0.5} = 1.732$$

$$m_2 = \frac{n_{y_1}}{n_{x_1}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$t_1 = \frac{x - 5}{20 - 5} = \frac{x - 5}{15}, \quad x \in [5, 20]$$

Sustituyendo t_1 en las funciones h , la expresión del interpolador es:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= h_{1_{00}}(t_1)y_1 + h_{1_{10}}(t_1)(x_2 - x_1)m_1 + h_{1_{01}}(t_1)y_2 + h_{1_{11}}(t_1)(x_2 - x_1)m_2 = \\ &= 10h_{1_{00}}(t_1) + 25.98h_{1_{10}}(t_1) + 12.5h_{1_{01}}(t_1) - 15h_{1_{11}}(t_1) \end{aligned} \quad (4.7)$$

- Segundo subintervalo:

El procedimiento en este caso es el mismo que en el anterior, y por lo tanto el resultado final es:

$$f_2(x) = 12.5h_{2_{00}}(t_2) - 7.5h_{2_{10}}(t_2) + 5h_{2_{01}}(t_2) + 42.46h_{2_{11}}(t_2) \quad (4.8)$$

- Tercer subintervalo:

$$f_3(x) = 5h_{3_{00}}(t_3) + 56.61h_{3_{10}}(t_3) + 15h_{3_{01}}(t_3) \quad (4.9)$$

- Cuarto subintervalo:

$$f_4(x) = 15h_{4_{00}}(t_4) + 7.5h_{4_{01}}(t_4) - 5.26h_{4_{11}}(t_4) \quad (4.10)$$

De los anteriores *splines* se obtiene la interpolación visible en la Fig. 4.6. Es visible como se cumplen las condiciones C^0 y C^1 , y que los valores de las derivadas son los dados en la tabla 1.

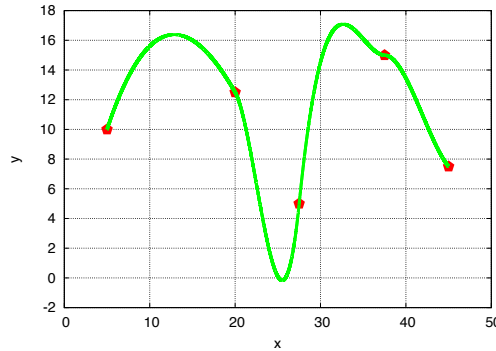


Figura 4.6: Interpolación de los puntos de la tabla 1 mediante la *splines* cúbicos de Hermite.

4.6. Interpolación en planta de las secciones transversales

Para interpolar la secciones, y así, obtener un cauce continuo, se debe hacer lo mismo que en la Fig. 4.6, pero aplicado a un mayor número de puntos. De esta forma, se hace pasar una curva por cada sección de manera que una todas la secciones, tal y como se observa en la Fig. 4.7(a). Para ello, el número de puntos que definen cada sección debe ser igual, ya que en caso contrario, no es posible hacer pasar una curva por cada punto (Fig. 4.7(b)).

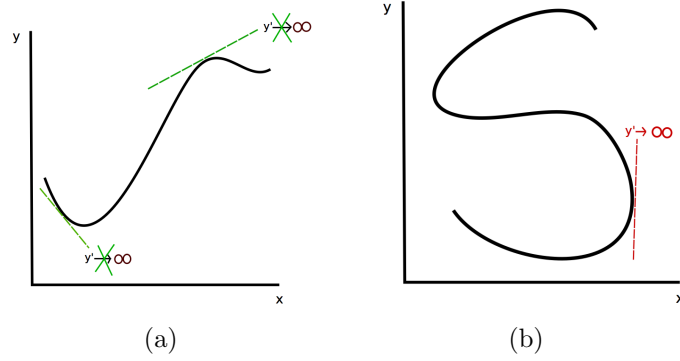


Figura 4.8: (a) Interpolación posible con polinomios no paramétricos. (b) Problema debido a la pendiente vertical.

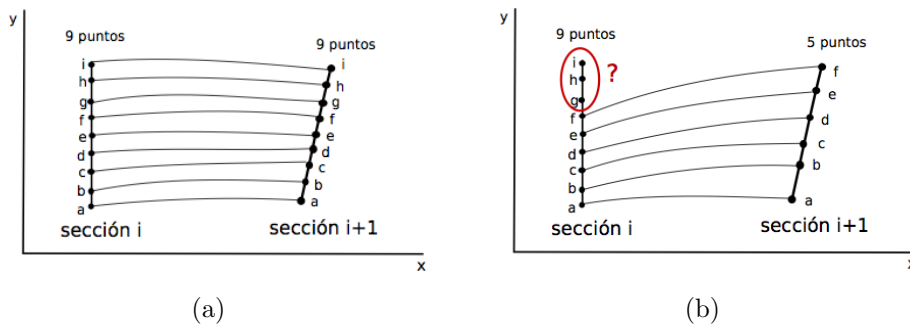


Figura 4.7: (a) Interpolación de los puntos que definen las secciones. (b) Problema debido a la diferencia de número de puntos.

4.7. Restricciones en la aplicabilidad de los *splines* de Hermite

Los polinomios, sin importar su orden, no pueden tener pendientes verticales, es decir, $dx = 0$ y $dy \neq 0$ para $f_i(x) = y$. De forma que se pueden representar funciones como la de la figura 4.8(a), pero no como la de la 4.8(b), muy comunes en los ríos. Esto, por lo tanto, limita mucho su aplicabilidad.

Para la representación de la función del caso 4.8(b), se puede optar al uso de los *splines* de Hermite, pero en versión paramétrica. En ese caso, tanto la coordenada x como y , son las variables dependientes de la longitud de arco (ξ) de la función, tal que

$$y = g_i(\xi) = a_y + b_y\xi + c_y\xi^2 + d_y\xi^3, \quad \xi \in [0, 1], \quad y \in [y_i, y_{i+1}] \quad (4.11)$$

$$x = h_i(\xi) = a_x + b_x\xi + c_x\xi^2 + d_x\xi^3, \quad \xi \in [0, 1], \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (4.12)$$

En ese caso, para definir una pendiente vertical basta con $\frac{dx}{d\xi} = 0$, sin tener que hacer $\frac{dy}{dx}$, que no está definido cuando existen pendientes verticales. Dicho esto, puede parecer que el mejor método de interpolación posible para el cauce real de un río es el caso paramétrico, pero en realidad no es así. El problema es que el número de condiciones de contorno necesarias, 8 en total, para resolver el sistema de ecuaciones (4.11) y (4.12) es mayor que el número de condiciones de contorno existentes, 4. Por lo tanto, la libertad del interpolador paramétrico para representar cualquier curva, en realidad es un problema cuando no hay datos suficientes.

4.8. Solución a las restricciones de aplicabilidad de los *splines* de Hermite no paramétricos

Una forma de solucionar el problema de representar mediante *splines* no paramétricos curvas que en algún punto tuvieran una pendiente vertical, ya que en tal caso $f' \in \mathbb{H}$, si $f(x) = y$, es hacer $g(y) = x$ en el subintervalo donde haya una pendiente vertical, sin tener que cambiar el método de interpolación. De esta manera, cuando la pendiente sea vertical se tiene $g'(y) = 0$. Es una solución sencilla a este problema, sin tener que hacer grandes cambios. Aún así, existen ciertas restricciones. La primera es que, si la normal de una de las dos secciones en el subintervalo tiene pendiente horizontal o vertical (Fig. 4.9(a) y Fig. 4.9(b)), la normal de la otra sección no puede formar un ángulo respecto a la otra de 90° . La otra condición es que, si la normal de una de las secciones del subintervalo tiene pendiente horizontal o vertical, al hacer el intercambio de coordenadas $x \rightarrow y'$ y $y \rightarrow x'$, la curva no puede ser bivaluada (Fig 4.10(a) y Fig. 4.10(b)). Estas situaciones *a priori* se espera que no se den, puesto que si se desea que la representación del cauce en planta sea fiel a la realidad, sería deseable que hubiera más secciones en cada subintervalo presente en las figuras 4.9 y 4.10.

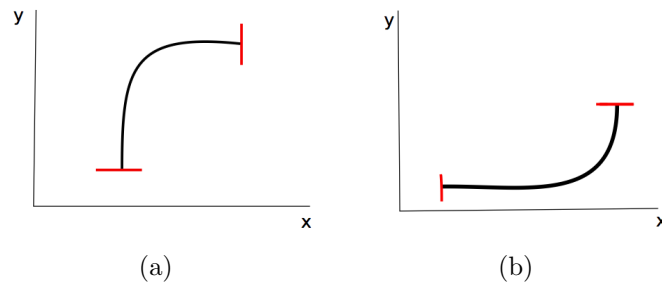


Figura 4.9: Secciones en rojo, interpolación en negro. Primera situación a evitar: Una sección horizontal (a) o vertical (b) y la otra perpendicular a esta.

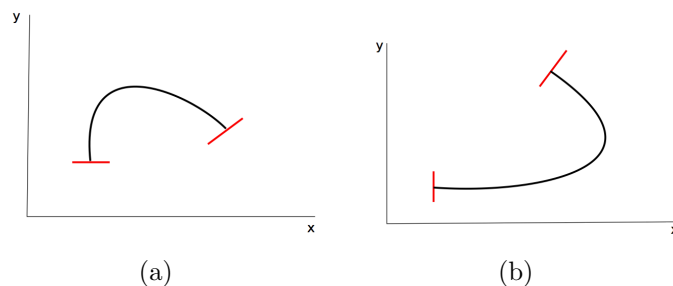


Figura 4.10: Segunda situación a evitar: Una sección horizontal (a) o vertical (b) y la otra dispuesta de tal manera que la función es bivaluada en el sistema de coordenadas correspondiente.

4.9. Interpolación de la elevación de las secciones transversales

Con las herramientas presentadas únicamente se ha recreado la forma del río en planta. Para conocer el cauce, se debe obtener también cómo es el lecho, y esto todavía no se ha calculado. Para ello se debe interpolar la elevación de los puntos de las secciones, y así generar la elevación

del terreno. El método de interpolación empleado, con tal propósito, es lineal. La elección de que sea lineal, se debe a ser coherentes con los modelos 1D donde la interpolación de la elevación es lineal, puesto que el fondo de un cauce es muy variable y la mejor aproximación se hace con método lineal [12].

Teniendo la elevación z en función de un parámetro cualquiera ξ , para los nodos (ξ_i, z_i) y (ξ_{i+1}, z_{i+1}) , la ecuación en el subintervalo es:

$$z = z_{i+1} + \frac{z_{i+1} - z_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} (\xi - \xi_{i+1}) \quad (4.13)$$

El parámetro ξ es el parámetro independiente. En este caso, ξ es la longitud de arco de la función de interpolación en planta, desde el nodo anterior (Fig. 4.11(a)).

El por qué de elegir la longitud de arco es que si la elevación variase con x o y , no lo haría de forma lineal, ya que el río es sinuoso. Para hacer que el cambio sea lineal y simplificar el cálculo, es mejor que varíe con ξ , siendo en tal caso lineal (Fig. 4.11b).

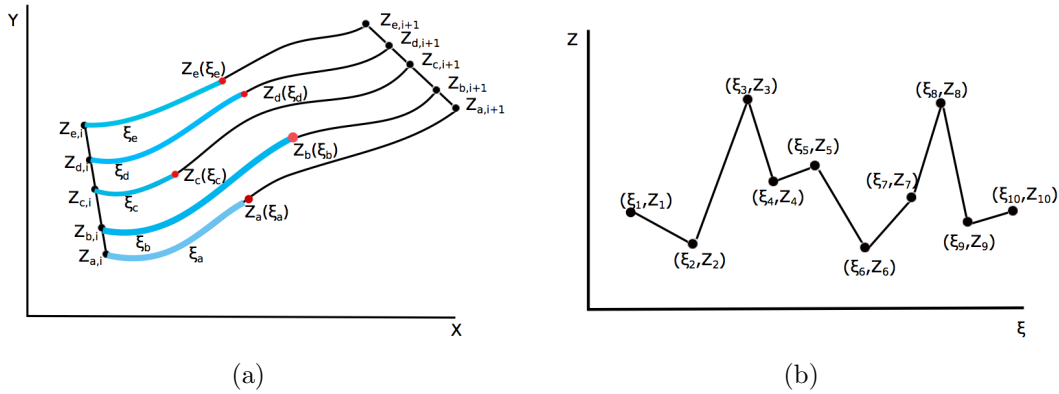


Figura 4.11: (a) Vista en planta de la interpolación por *splines* y la longitud de arco ξ . (b) Interpolación lineal de la elevación en función de la longitud de arco.

Capítulo 5

Ejemplos de generación de un cauce

Con objeto de estudiar las limitaciones del algoritmo de interpolación geométrica, se van a utilizar cuatro cauces ideales y dos reales. Los cauces ideales son dos con secciones triangulares, uno recto y otro meandroso, uno con secciones trapezoidales y recto, y otro meandroso con secciones triangulares y trapezoidales como antesala a cauces más complejos. Después, se introducen los datos para intentar reproducir el cauce del Ebro a su paso por el meandro de Ranillas (Zaragoza) y por la Reserva Natural de los Galachos de la Alfranca (Zaragoza).

5.1. T1: Cauce recto de sección triangular

En esta sección se intenta recrear un cauce recto con sección triangular. Para ello, se dan tres secciones de tres puntos cada una. Además, se supone que tiene una pendiente descendente constante de $1m$ de desnivel en $100m$ de longitud. Las secciones son un triángulo equilátero, con una anchura máxima de $10m$ (Tabla 5.1). La Fig. 5.1 muestra las secciones.

Para hacer una representación precisa, se remuestra de forma lineal cada sección con 200 puntos, en vez de los 3 que tiene inicialmente. Observando las Fig. 5.2 y Fig. 5.3 se ven los resultados. En la Fig. 5.3(a) se ve la interpolación en planta, y en la Fig. 5.3(b) en perfil en 3D. Se puede apreciar cómo varía de forma lineal la elevación del terreno. La pendiente en la imagen 3D parece mayor de lo que es por efecto de la perspectiva.

Sección 1			Sección 2			Sección 3		
x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
0.00	-5.00	8.66	50.00	-5.00	8.16	100.00	-5.00	7.66
0.00	0.00	0.00	50.00	0.00	0.00	100.00	0.00	-1.00
0.00	5.00	8.66	50.00	5.00	8.16	100.00	5.00	7.66

Tabla 5.1: Secciones triangulares de un cauce recto (T1).

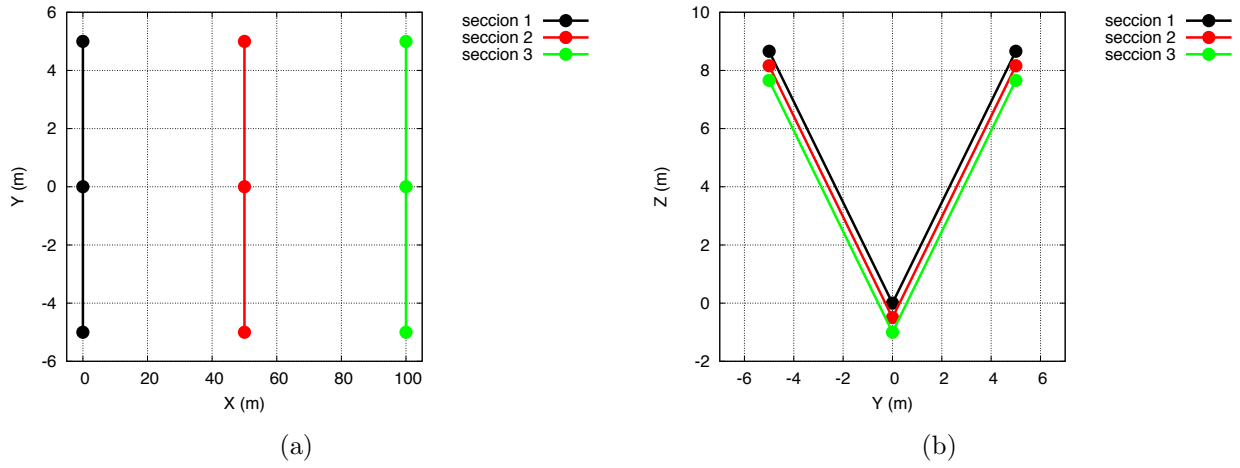


Figura 5.1: (a) vista en planta y (b) vista en plano alzado de las secciones del caso T1.

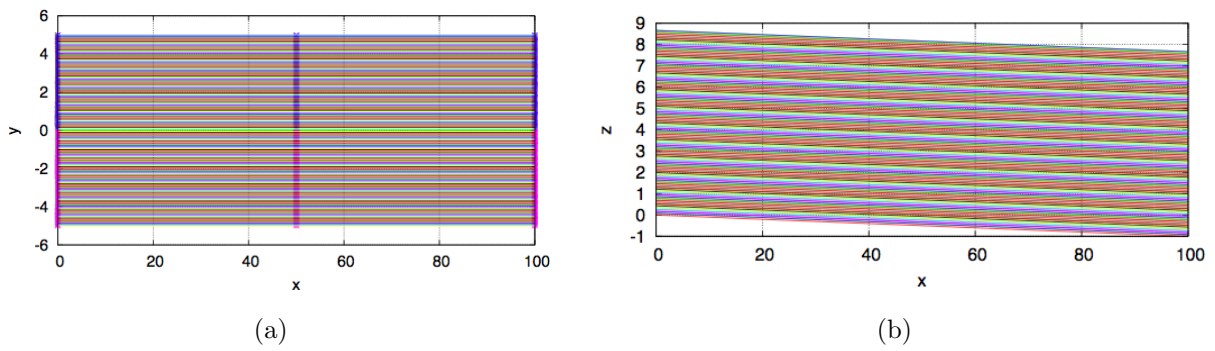


Figura 5.2: (a) vista en planta y (b) vista en perfil de las secciones del caso T1 después de la interpolación.

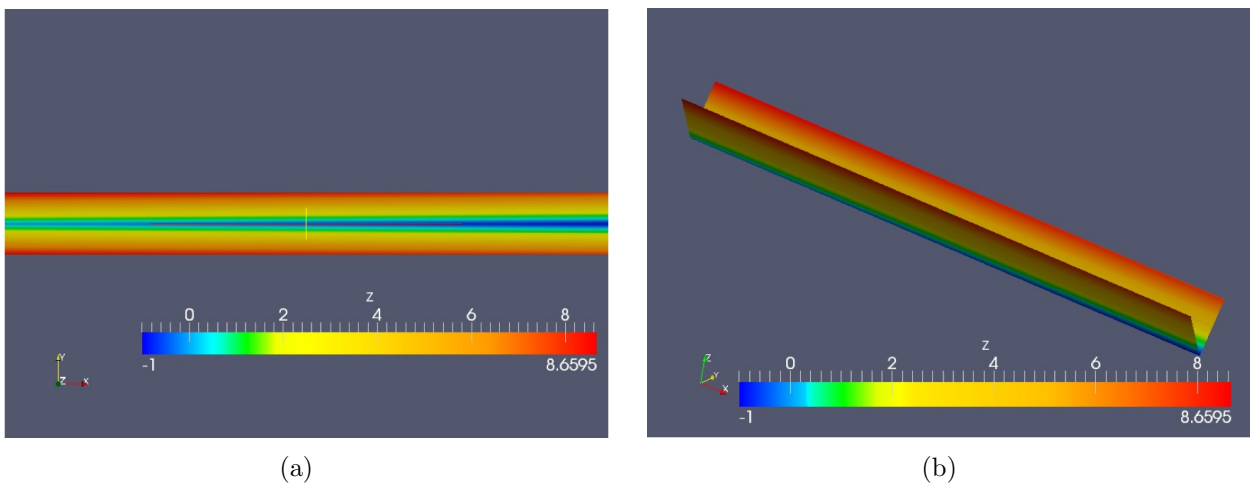


Figura 5.3: (a) vista en planta y (b) vista en perfil del cauce completo del caso T1.

5.2. T2: Cauce meandroso de seccion triangular

En este caso las secciones siguen siendo triangulares, pero ahora el número de ellas ha de aumentarse para poder definir un río meandroso. Para ello, son siete las secciones a interpolar. Además, se toma el fondo plano, en vez de variable.

Sección 1			Sección 2			Sección 3		
x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
99.015	100.170	1.000	85.000	81.000	1.000	19.500	92.867	1.000
100.000	100.000	0.000	85.000	80.000	0.000	20.000	92.000	0.000
100.985	99.826	1.000	85.000	79.000	1.000	20.500	91.134	1.000
Sección 4			Sección 5			Sección 6		
x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
4.015	54.826	1.000	18.707	49.293	1.000	54.500	59.134	1.000
5.000	55.000	0.000	18.000	50.000	0.000	55.000	60.000	0.000
5.985	55.174	1.000	17.293	50.707	1.000	55.500	60.866	1.000
Sección 7								
x	y	z						
74.500	20.866	1.000						
75.000	20.000	0.000						
75.500	19.130	1.000						

Tabla 5.2: Secciones triangulares de un cauce sinuoso (T2).

Los resultados están en las figuras 5.4 y 5.5. En la primera se puede ver el cauce en el plano OXY . Por otra parte, en la figura 5.5, se puede ver el cauce en tres dimensiones, y apreciar la forma de la sección transversal. Es claro que este caso también puede obtenerse con el algoritmo, incluso siendo un cauce tan sinuoso. De esta forma, se ve como con los cambios pertinentes (c 4.8) se pueden representar ríos muy sinuosos.

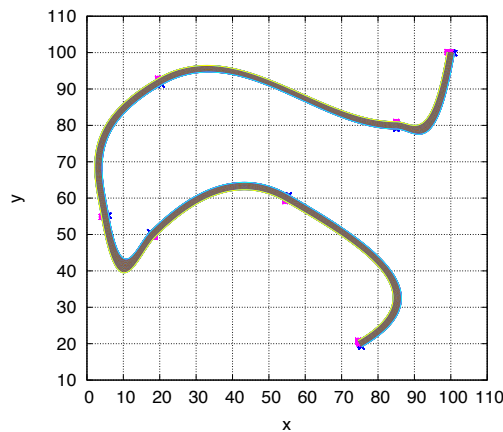


Figura 5.4: Vista en planta del cauce de sección triangular meandroso después de la interpolación (T2).

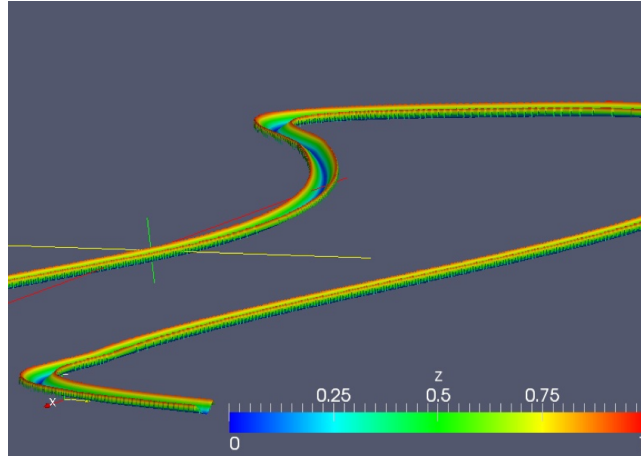


Figura 5.5: Visión 3D del cauce generado (T2).

5.3. T3: Cauce recto de sección trapezoidal

En este caso, al igual que en el primero, basta con definir tres secciones de forma trapezoidal. El cauce tiene una longitud de $100m$ y un desnivel de $10m$. La base de la secciones miden $10m$, y sus anchuras máximas son $20m$, a una altura de $10m$. La Fig. 5.6 muestra las secciones.

Sección 1			Sección 2			Sección 3		
x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
0.00	-10.00	10.00	50.00	-10.00	5.00	100.00	-10.00	0.00
0.00	-5.00	0.00	50.00	-5.00	-5.00	100.00	-5.00	-10.00
0.00	5.00	0.00	50.00	5.00	-5.00	100.00	5.00	-10.00
0.00	10.00	10.00	50.00	10.00	5.00	100.00	10.00	0.00

Tabla 5.3: Secciones trapezoidales de un cauce recto (T3).

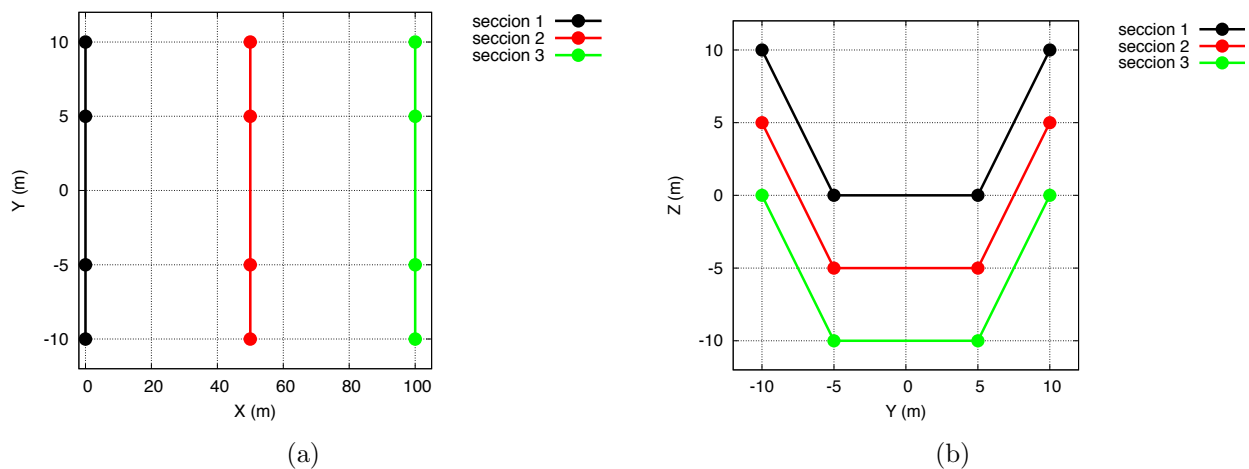


Figura 5.6: (a) vista en planta y (b) vista en plano alzado de ambas secciones trapezoidales del caso T3.

Con estos datos el cauce generado es el de la Fig. 5.7. De esta manera puede verse que el cauce generado es correcto, ya que concuerda con los datos introducidos.

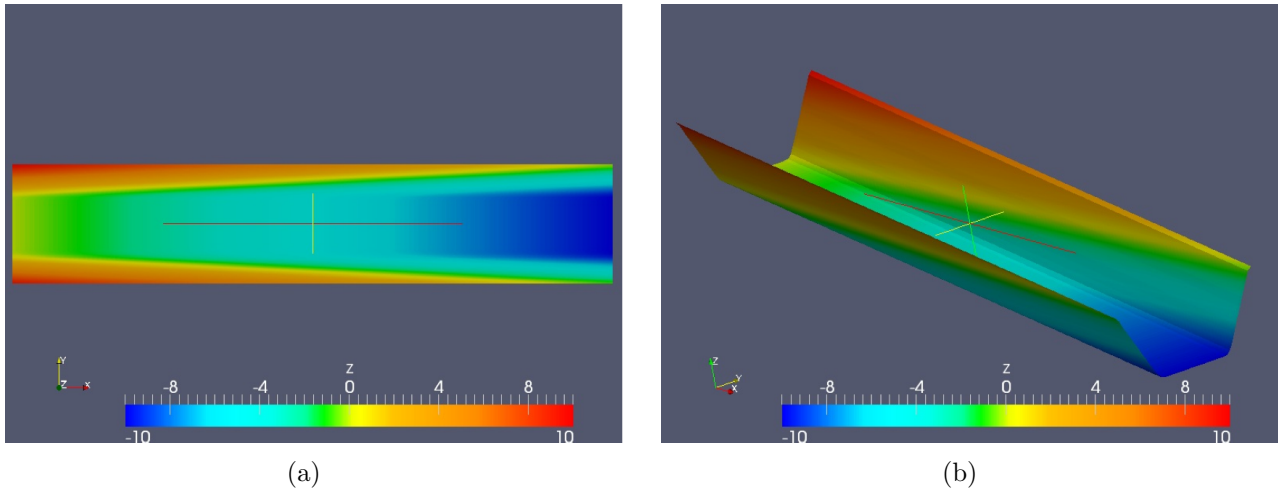


Figura 5.7: (a) vista en planta y (b) vista de perfil del cauce completo del caso T3.

5.4. T4: Cauce meandroso de sección variable

Al igual que en los casos anteriores, para definir un cauce sinuoso se necesita un mayor número de secciones. Estas se muestran en la Fig. 5.8 y en la tabla 5.4.

Sección 1			Sección 2		
x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
7.845	160.797	2000.000	62.518	178.198	1000.000
0.000	200.000	1000.000	75.012	192.132	250.000
-7.845	239.203	2000.000	100.000	220.000	150.000
			112.494	233.934	1000.000
Sección 3			Sección 4		
x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
157.428	161.579	500.000	200.000	160.000	0.000
150.000	180.000	-350.000	200.000	200.000	-1000.000
135.144	216.842	-250.000	200.000	240.000	0.000
127.717	235.264	500.000			

Tabla 5.4: Secciones trapezoidales del cauce sinuoso (T4).

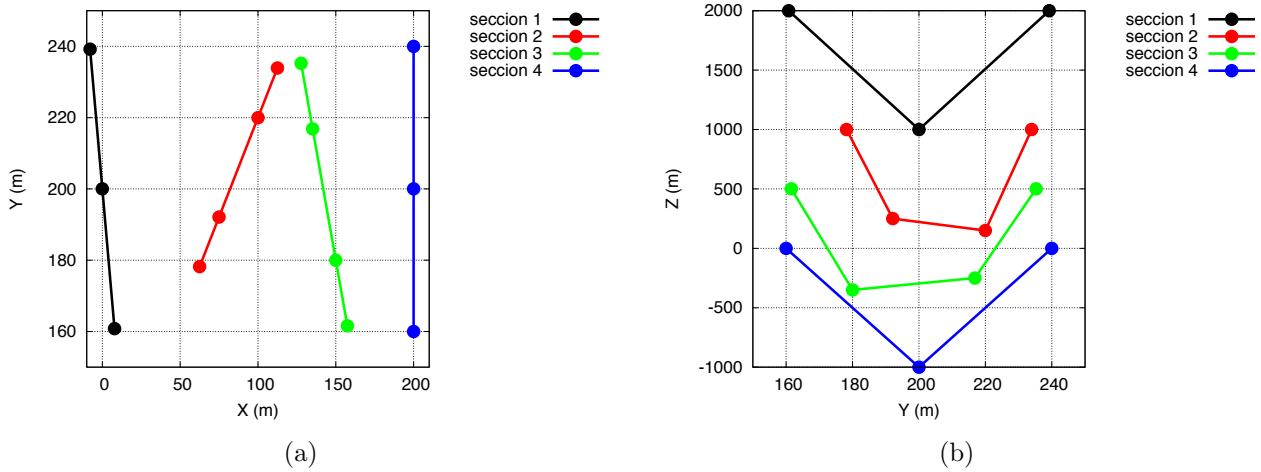


Figura 5.8: Las secciones vistas en planta (a) y en plano alzado (b) (T4).

A priori se puede suponer que es un problema interpolar una sección triangular con una trapezoidal, pero no es así, debido a que se remuestrea el número de puntos por sección para tener en todas el mismo número. De esta manera, el resultado de la interpolación es visible en la Fig. 5.9.

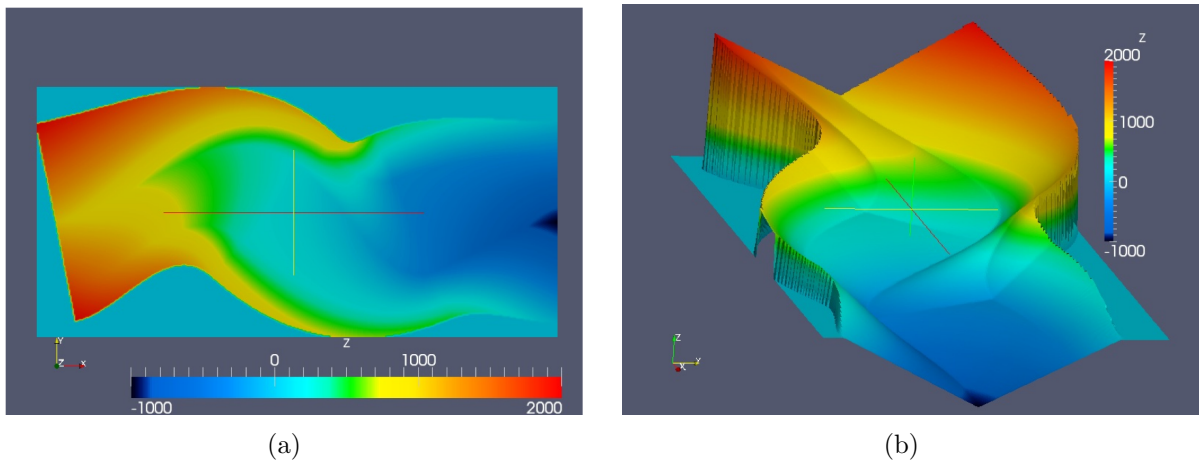


Figura 5.9: Las secciones vistas en planta (a) y en plano alzado (b). Se ha modificado el factor de escala para poder visualizar mejor el cauce.

En este caso, se ha querido recrear en cierta forma un cauce más realista, y que la línea de mayor profundidad (*thalweg*) discorra por las zonas exteriores de los meandros.

5.5. El Ebro a su paso por el meandro de Ranillas (Zaragoza)

En este caso las secciones son en total 14. El resultado de la interpolación se muestra en la Fig. 5.11. y en la Fig. 5.12.

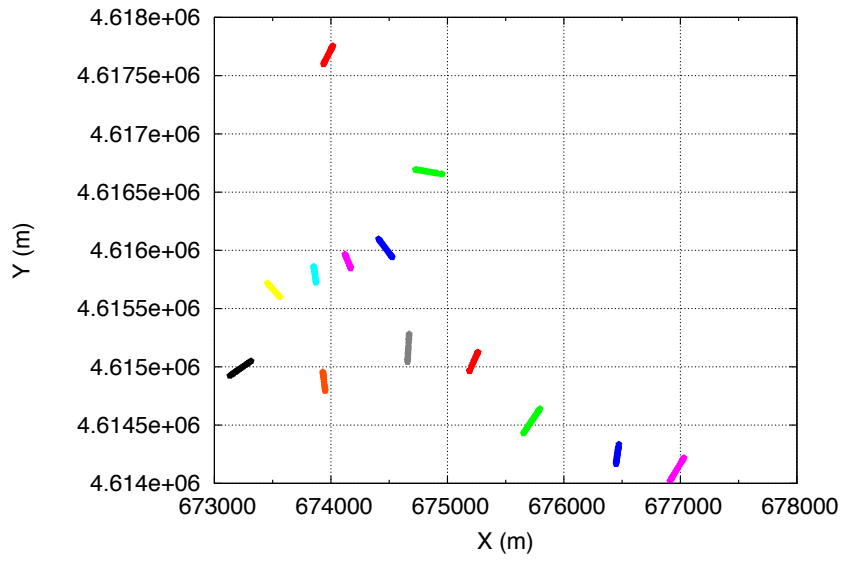


Figura 5.10: Las secciones tomadas del meandro de Ranillas vistas en planta.

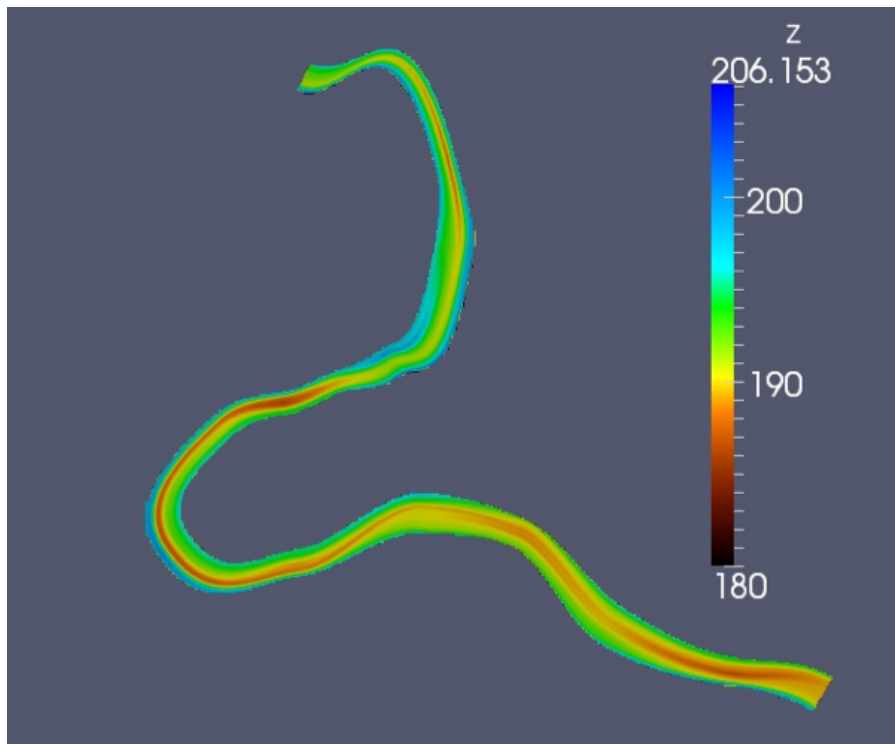


Figura 5.11: Vista en planta del cauce completo en el meandro de Ranillas.

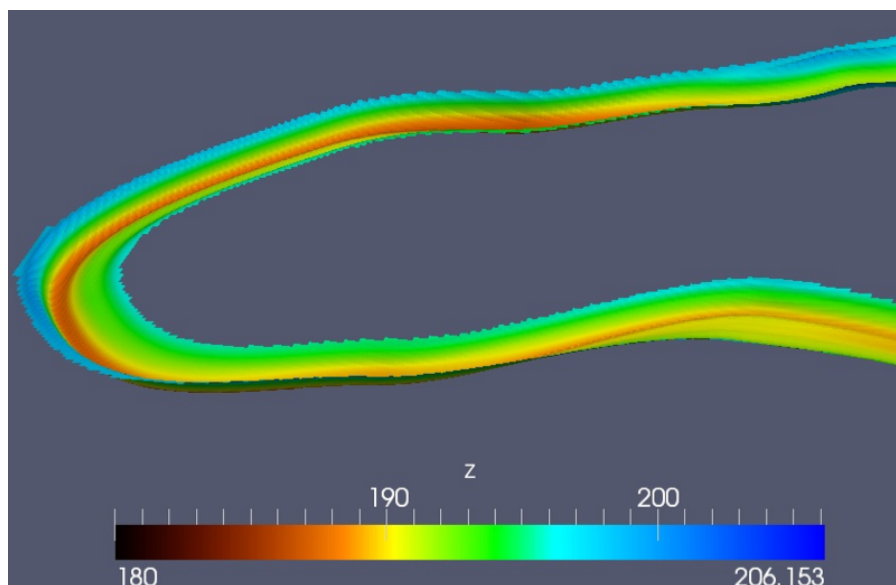


Figura 5.12: Detalle meandro en 3 dimensiones

En la evaluación de la interpolación es interesante estudiar si aparecen ciertos rasgos en el cauce interpolado observables en los cauces reales. Atendiendo a la Fig. 5.11, se aprecia como el *thalweg* discurre en todos los meandros por la zona convexa, tal y como ocurre en los cauces reales de acuerdo con el capítulo 3. Para ello, el *thalweg* efectúa las transiciones necesarias en los puntos de inflexión entre los meandros. Además, examinando con mayor detenimiento la geometría del meandro en la Fig. 5.12, es apreciable como la pendiente en la zona cóncava es más suave que en la convexa, como ocurre en la realidad.

La presencia de estos detalles geométricos en el cauce es de gran importancia, puesto que le da al cauce generado un carácter más realista.

5.6. El Ebro a su paso por la Reserva Natural de los Galachos de la Alfranca (Zaragoza)

En este caso las secciones utilizadas para interpolar el cauce son 27 (Fig. 5.13). El resultado de la interpolación aparece en las figuras 5.14 y 5.15. En este caso también, aunque no tan visible como en el caso anterior, se puede apreciar que es mayor la profundidad en las partes convexas de los meandros (Fig. 5.14) y también la pendiente (Fig. 5.15). Por lo tanto, al igual que en el meandro de Ranillas, en este caso aparecen ciertas características realistas interesantes desde un punto de vista geomorfológico.

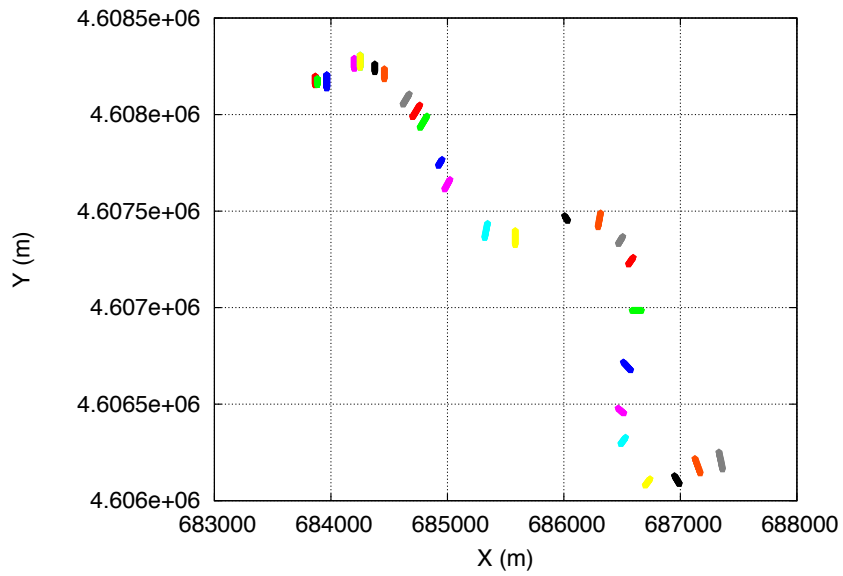


Figura 5.13: Las secciones tomadas del Ebro a su paso por la reserva natural.

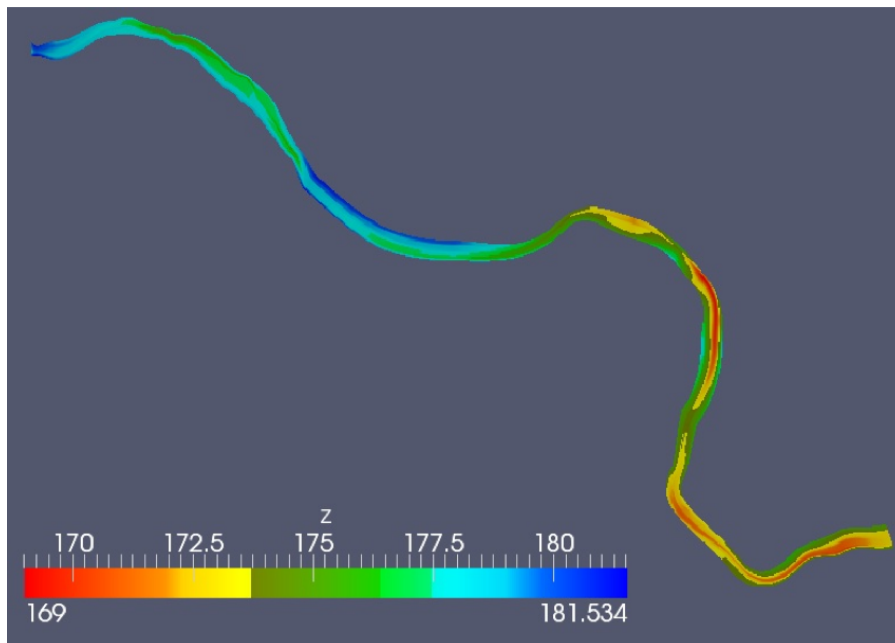


Figura 5.14: Vista en planta del cauce generado en la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza).

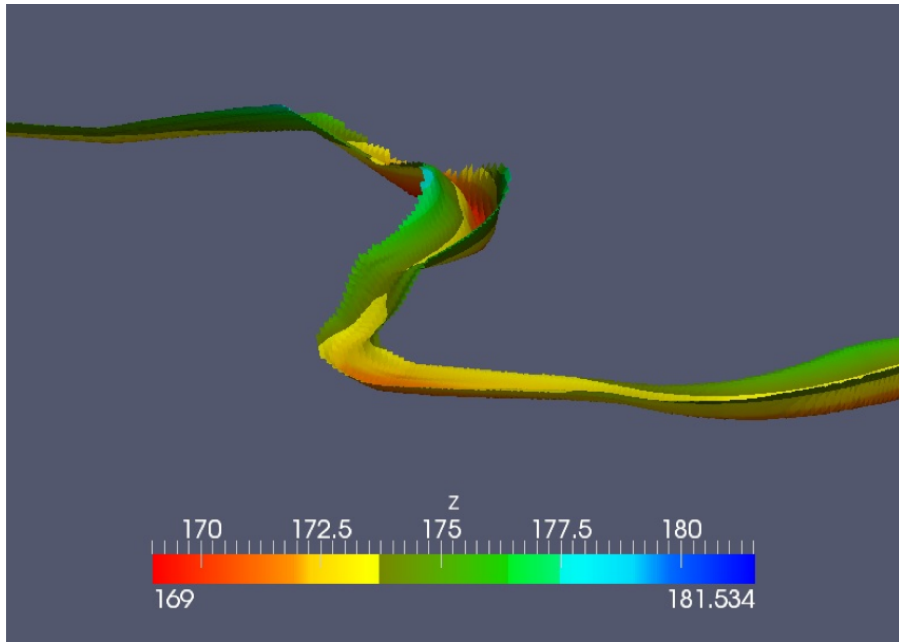


Figura 5.15: Detalle meandro en 3 dimensiones.

Con todos estos cauces generados se ha podido comprobar que el programa es capaz de generar cauces reales, con mayor o menor exactitud, esto lo mediremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Obtención de un MDT completo

En este capítulo se obtiene un modelo digital terrestre completo (MDT que contenga las llanuras de inundación y el cauce a la vez) tanto para la zona del meandro de Ranillas, como para la zona de la Reserva Natural de los Galachos de la Alfranca. Para obtenerlo, lo que se hace es añadirle la información del cauce obtenido mediante la interpolación de secciones al MDT generado por el vuelo LIDAR.

Este proceso como se verá, no está exento de problemas. Por una parte, existe el riesgo de que las secciones se hayan tomado en un año concreto y que la información del LIDAR provenga de otro. En este caso es muy probable que, debido a la modificación del cauce por procesos naturales o artificiales, el cauce en uno y otro caso no esté en el mismo lugar. Haciendo imposible utilizar ambos datos a la vez. Por otra parte, es posible que en el MDT proveniente del LIDAR los márgenes del río no estén bien definidos. Esto puede hacer creer que el ancho del río es mayor de lo que realmente es, y entonces, al intentar restarle la información de la lámina de agua, se esté restando más de lo que se debe. De esta manera, puede que el cauce generado por la interpolación sea más estrecho y consecuentemente habrá regiones sin información.

6.1. Meandro de Ranillas (Zaragoza)

Se parte de los datos del cauce generado (Fig. 6.1(a)), y de la información topográfica de las llanuras de inundación proporcionado por el vuelo LIDAR (Fig. 6.1(b)). El color morado en ambas imágenes representa elevación nula, y el color blanco la ausencia de datos.

Estudiando ambas imágenes con detenimiento, puede observarse que la anchura del cauce en muchos sitios es diferente, siendo más ancha en la Fig. 6.1(a). Por otra parte, se puede ver como hay definida una isla en las Fig. 6.1(b) a mitad de recorrido, la cual no ha sido representada en el cauce de 6.1(a) por no haber ninguna sección transversal que la capte. También cabe decir que, aunque no sea tan apreciable, la forma del cauce en ambos casos no es la misma.

La diferencia de anchura del cauce en ambos casos, siendo más estrecha en el caso del LIDAR, se debe a que la topografía obtenida con esta última muy posiblemente haya sido calculada en un periodo seco. En cambio, las secciones han sido tomadas en un periodo más caudaloso y por lo tanto el río que se obtenga en tal caso, es más ancho. Esto supone un problema, ya que a la hora de sumar la información de uno sobre el otro, no se sabe muy bien cual hay que sumar sobre cual.

Por otro lado, la presencia de la isla en el LIDAR es lógica, ya que cualquier superficie por encima del nivel del agua es captada. Pero al tomar las secciones esto no es así, ya que estas se toman cada cierto número de metros, decenas o centenas. De todas formas, si se quiere hacer un estudio más exhaustivo, lo conveniente es tomar cierto número de secciones que capturen la

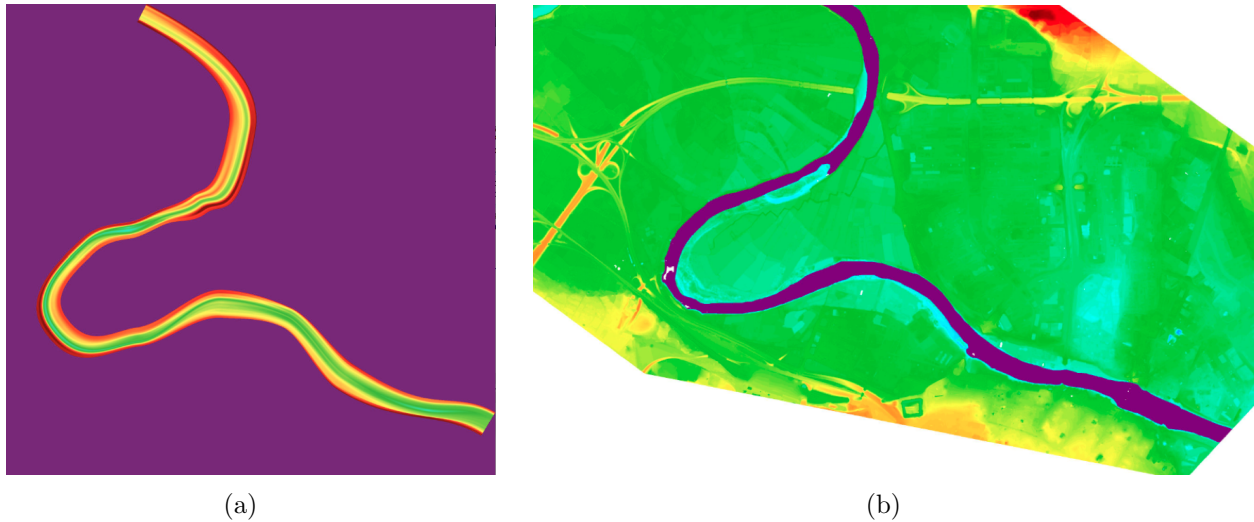


Figura 6.1: (a) MDT del cauce y (b) MDT de las llanuras de inundación.

isla.

Por último, la diferencia morfológica de los cauce se debe, por una parte, a la diferencia temporal de la toma de datos, así como al hecho de que la interpolación no tiene por qué mantener con exactitud los márgenes.

Con estos dos MDTs, lo que se debe hacer es añadir la información de uno sobre el otro. Para ello, basta con tomar el archivo de información de uno, y donde no haya datos o estos sean nulos, sumar los del otro. Mediante este procedimiento puede que algún punto siga teniendo valor nulo o ninguno. En el trabajo presente se ha tomado el valor no nulo más cercano a la izquierda. Puede resultar un poco burdo, pero es una aproximación válida.

En las siguientes dos imágenes (Fig. 6.2) se tiene el caso de sumarle al MDT del cauce la información de las llanuras (Fig. 6.2(a)), allí donde el primero no tiene información, o el caso contrario (Fig. 6.2(b)).

Como se puede apreciar en el caso de la izquierda (Fig. 6.2(a)), la sección del cauce es más

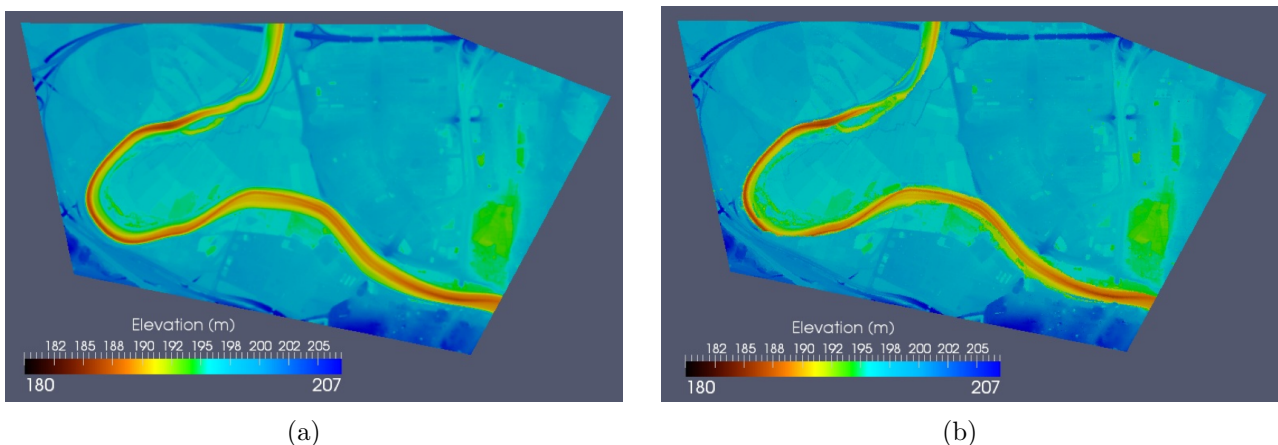


Figura 6.2: (a) MDT completado de información del cauce con la del LIDAR. (b) MDT completado de información del LIDAR con la del cauce.

ancha, pero por el contrario, en el meandro no hay un cambio brusco en la elevación, tal y como ocurre en la zona convexa del meandro de Ranillas. También ocurre lo mismo un poco antes de la isla. Estas son básicamente las diferencias. Sin saber cual resulta mejor, lo que se debe

hacer es simular con cada una, y comparar los resultados, eligiendo la que mejor se estime que se ajusta a la realidad. Vista la segunda imagen y sus cambios bruscos, todo parece indicar que puede resultar mejor la primera.

6.2. Reserva Natural de los Galachos de la Alfranca (Zaragoza)

Se cuenta por una parte con el cauce del río (Fig. 6.3(a)), y por otra, con las llanuras de información (Fig. 6.3(b)).

Observando ambas imágenes, lo más llamativo es que la anchura del cauce es menor en la izquierda. Esto quizás puede ser debido a que se ha tomado por lamina de agua lo que no era, y a la hora de restarle este dato, se ha restado más de lo que se debiera. Por otra parte, la isla situada al inicio no aparece en la imagen de la izquierda. Esto se debe a la ausencia de secciones que la capten, de forma que el cauce generado con el algoritmo no la representará.

En la Fig. 6.4, ambos MDTs están sumados. El orden de la suma es indiferente ya que no hay solapamiento entre ambas. Como en dicha figura se aprecia, hay zonas coloreadas de morado (en este caso nula elevación). Por lo tanto, el MDT de esta representación no es válido para la simulación hidráulica, nuestro objetivo principal. Con lo cual, se deber hallar una solución a este problema.

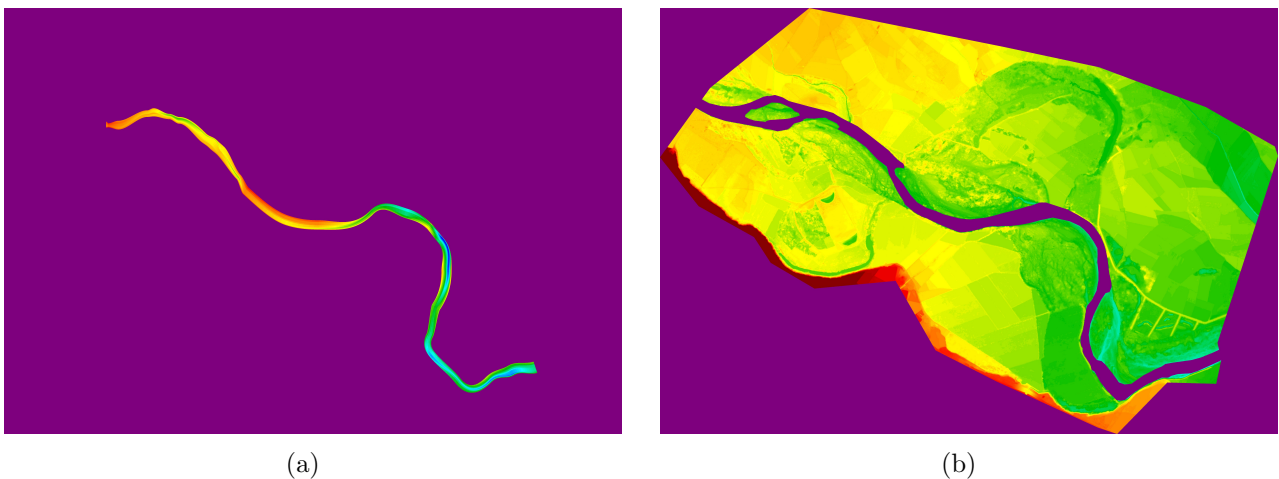


Figura 6.3: (a) Representación del MDT del río, y en (b) el de la llanura de inundación.

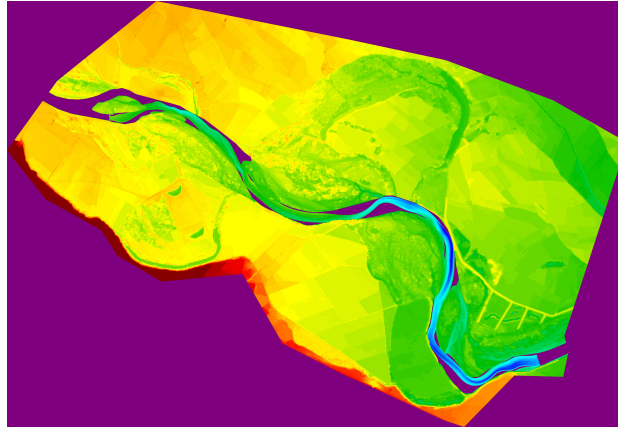


Figura 6.4: Suma de los 2 MDTs disponibles.

Una solución, puede ser utilizar un MDT generado por otro método, y allí donde el MDT generado a partir del cauce interpolado no posea información, añadir la del primero. Es una solución burda, pero a falta de más datos, una de las más simples. El cauce utilizado para complementar el generado por el algoritmo, es un cauce creado por [6]. El resultado de este proceso es visible en la figura 6.5.

Como se puede apreciar en la figura 6.5, hay cambios bruscos en la elevación del lecho, tanto a mitad de recorrido del cauce, como al final. Esto puede parecer que conduce a errores en los resultados de la simulación, aún así, eso debe ser confirmado por la simulación hidráulica.

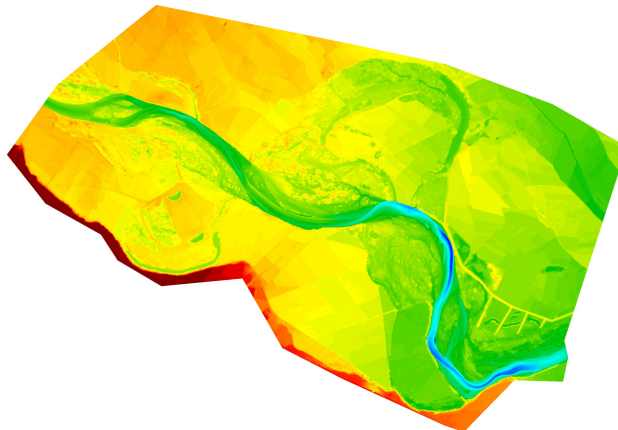


Figura 6.5: Solución al problema de la Fig. 6.4.

Capítulo 7

Evaluación de la calidad de la interpolación

En este capítulo se evalúa la calidad de la interpolación, tanto del cauce generado en el meandro de Ranillas (Zaragoza) como en la Reserva Natural de los galachos de la Alfranca (Zaragoza). Para ello, en cada caso se utiliza un procedimiento diferente de evaluación.

En el caso del meandro, se comparan tres cauces generados con el algoritmo. El primero de ellos, está generado por el número total de secciones reales disponibles, y los restantes, se obtienen de interpolar un número inferior de ellas. Después, se simulan los tres cauces con un modelo 1D, y se comparan los resultados obtenidos en cada caso. Así, tomando como cauce de referencia el obtenido con todas las secciones, se estima el error que producen los otros dos cauces. Esto ayuda a comprender cómo afecta, y en qué grado a la interpolación, el número de secciones utilizadas para generar el cauce.

Por otro lado, en el caso del cauce del Ebro a su paso por la R. N. de los Galachos de la Alfranca (Zaragoza), se emplean dos cauces diferentes. Primero, un cauce de sección triangular empleado por [6] y los resultados que este produce. Y segundo, el cauce anterior, pero modificado. Esta modificación, consiste en añadir información del cauce de [6] allí donde el cauce obtenido con el algoritmo no la tenga. Después, se comparan los resultados de la simulación 2D del cauce de [6], y del modificado. La diferencia entre el cauce obtenido por [6] y mediante el algoritmo, es que el primero resulta ser una primera aproximación al cauce real, y el segundo es el resultado de intentar obtener un cauce más realista desde un punto de vista geomorfológico e hidráulico.

7.1. Evaluación del cauce generado para el meandro de Ranillas (Zaragoza)

En este primer caso, se utiliza la simulación 1D como referencia en caudal bajo. En la simulación 1D no es necesario introducir secciones interpoladas, basta con introducir las secciones reales disponibles. Para comprobar si las secciones interpoladas se aproximan a las reales es posible emplear la simulación 1D, incluso para comprender cómo afecta al cauce generado con el algoritmo el número de secciones reales utilizadas.

En este caso, son 21 las secciones reales disponibles, que se distribuyen a lo largo de una longitud total de 6057.74m.

A partir de estas secciones se generan tres cauces diferentes. El primero utilizando el total de las secciones, que se toma como el cauce de referencia. En el segundo, son 17 las secciones reales, y 4 las obtenidas con el método de interpolación, también denominadas secciones interpoladas.

Así, el número de secciones es el mismo, pero algunas son una aproximación a las reales. En el tercer caso, el número de secciones medidas es de 16, y el restante, hasta completar un total de 21 secciones, interpoladas.

Cauce	Nº secciones medidas	Nº secciones interpoladas	Etiqueta de la secciones interpoladas
C1	21	0	\emptyset
C2	17	4	9, 14, 16, 20
C3	16	5	9, 14, 16, 18, 20

Tabla 7.1: Cauces utilizados para la simulación 1D.

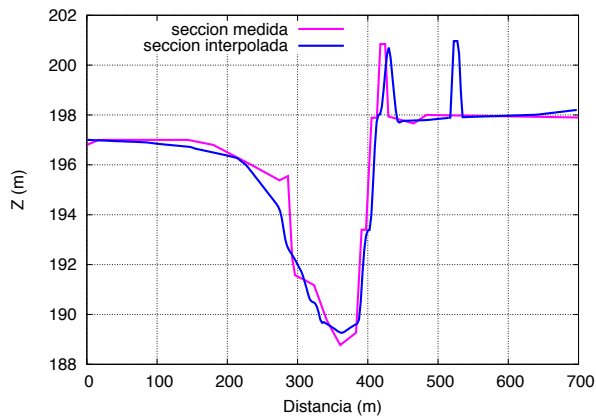
Etiqueta de la sección	Posición (m)
9	2443.5
14	3977.41
16	4449.55
18	5082.83
20	5671.59

Tabla 7.2: Posición de las secciones interpoladas desde el origen.

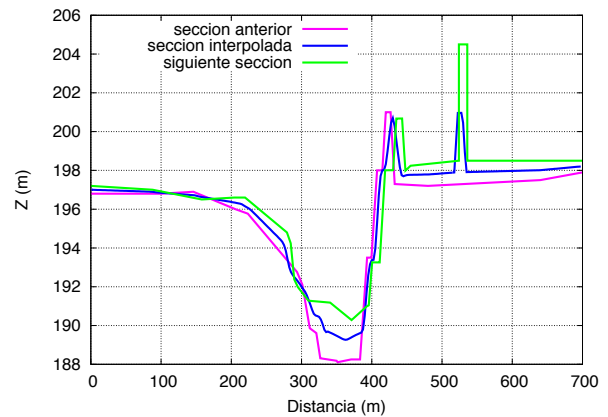
Como primer paso para la evaluación de la interpolación, se emplea un criterio geométrico, comparando las secciones generadas con las medidas. Además, también se comparan las secciones interpoladas con las secciones reales vecinas de aguas arriba y aguas abajo.

■ Sección interpolada 9.

En la Fig. 7.1(a), se muestra la sección interpolada (azul) en comparación con la medida (rosa). Observando ambas se puede decir que son bastante parecidas, no iguales, a excepción de un dique que se observa en la interpolada y en la otra no. Para entender el motivo de la presencia de esta, se debe atender a la figura 7.1(b). En ella aparecen la sección vecinas de aguas arriba (rosa) y aguas abajo (verde), y la generada (azul). Como se aprecia, esta se encuentra entre los valores de la elevación de las vecinas, como cabe esperar en una interpolación. En este caso, la que se encuentra aguas arriba no capta el pico, pero la de aguas abajo sí. Por lo tanto es de esperar que la del medio sí la capte, aunque en menor grado.



(a)

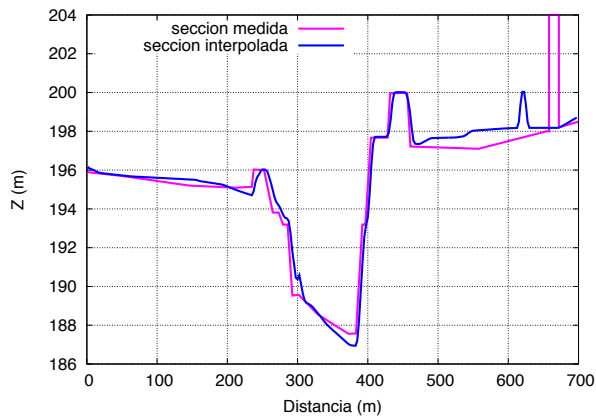


(b)

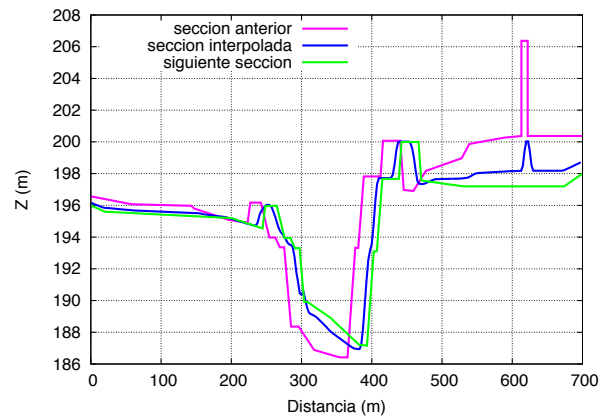
Figura 7.1: Sección interpolada 9. (a) Comparación entre la sección medida y la interpolada. (b) Comparación de la sección interpolada con las secciones vecinas de aguas arriba y aguas abajo.

■ Sección interpolada 14.

En el caso de la siguiente sección interpolada, el resultado está en la Fig. 7.2. En este caso, la interpolada se parece más a la medida en la zona del canal, pero en la llanura de inundación de la derecha el dique no aparece donde le corresponde, y su altura tampoco es la adecuada. Aún así, al ser una interpolación las que se deben tener en cuenta son sus secciones vecinas, puesto que se debe ajustar a la interpolación de éstas. Y en este caso, es evidente que queda entre los valores de la elevación de las vecinas.



(a)



(b)

Figura 7.2: Sección interpolada 14. (a) Comparación entre la sección medida y la interpolada. (b) Comparación de la sección interpolada con las secciones vecinas de aguas arriba y aguas abajo.

■ Sección interpolada 16:

En este caso de la sección de la Fig. 7.3, geoméricamente se aproxima menos a la real que las secciones 9 y 14. Aunque la anchura máxima del cauce es casi la misma, hay en torno a 1.5m de diferencia en la profundidad máxima. Por otro lado, los diques de la izquierda y de la derecha son de diferente tamaño a los valores reales, y la llanura de inundación se parece menos en esta ocasión. De la comparación con las secciones vecinas, se comprende la diferencia entre la sección interpolada y real.

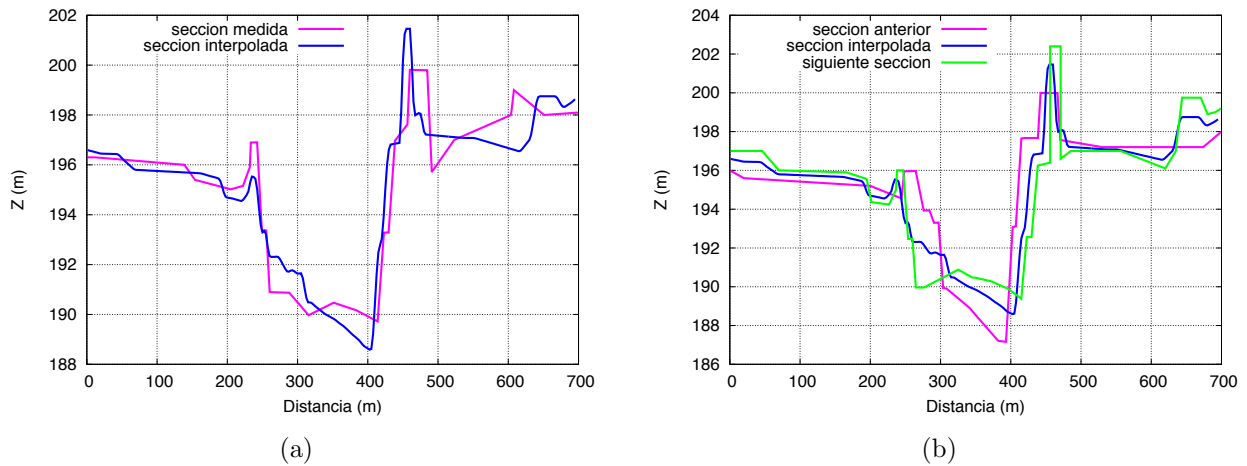


Figura 7.3: Sección interpolada 16. (a) Comparación entre la sección medida y la interpolada. (b) Comparación de la sección interpolada con las secciones vecinas de aguas arriba y aguas abajo.

■ **Sección interpolada 18:**

En este caso, comparando la interpolada con la medida la diferencia es muy grande, sólo es parecido el valor de la anchura máxima, todo lo demás es muy diferente, la profundidad máxima, la elevación de las llanuras de inundación, los diques, ... Del análisis de la Fig. 7.4(b), se observa como las secciones vecinas son muy diferentes entre sí. El terreno es muy variable, y al no haber ninguna correlación en la elevación del terreno, la sección real y la interpolada son muy diferentes.

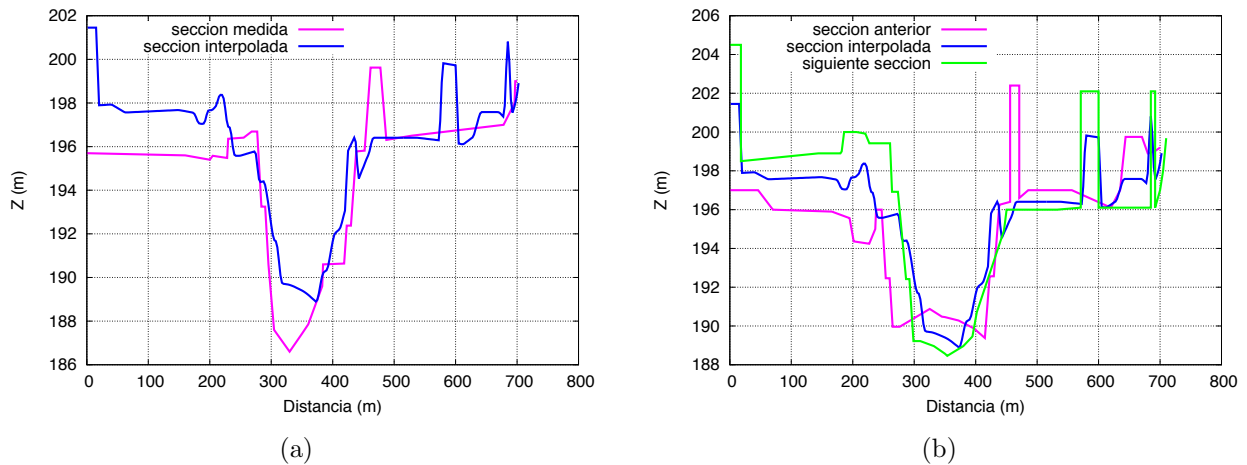


Figura 7.4: Sección interpolada 18. (a) Comparación entre la sección medida y la interpolada. (b) Comparación de la sección interpolada con las secciones vecinas de aguas arriba y aguas abajo.

■ **Sección interpolada 20:**

En este caso, como en el anterior, el resultado de la interpolación es muy diferente a la realidad. Observando la figura 7.5(b), se concluye que el motivo es la gran diferencia entre las secciones vecinas, y que por lo tanto, el método de interpolación no es responsable principal de dicha diferencia.

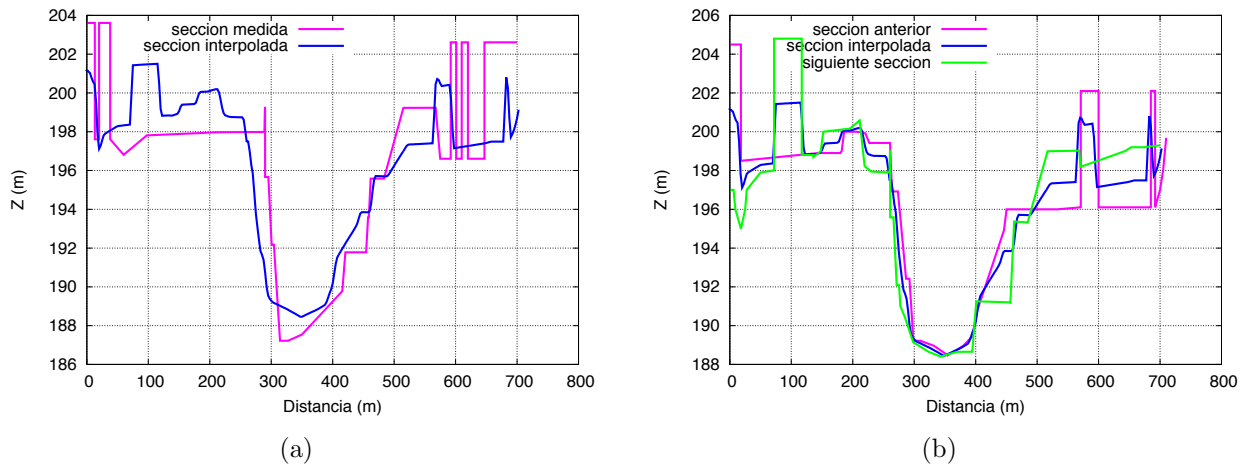


Figura 7.5: Sección interpolada 20. (a) Comparación entre la sección la medida y la interpolada. (b) Comparación de la sección interpolada con las secciones vecinas de aguas arriba y aguas abajo.

El siguiente paso consiste en estudiar como afectan estas variaciones de la topografía al resultado final, es decir, a las variables hidráulicas. Para ello, se han colocado 21 sondas en el cauce. Y después, comparando con el cauce de referencia, se han obtenido los errores.

Las sondas, están colocadas allí donde se ha introducido cada sección, ya sea real o interpolada. Los datos que se han obtenido de la simulación 1D, son el caudal (Q), la cota de la lámina libre ($h + z$) y el área mojada (A) en función del tiempo (t).

La condición inicial ha sido un flujo estacionario con un caudal de $Q = 100 \frac{m^3}{s}$. Para el cálculo del estado transitorio, la condición de entrada ha sido el caudal de una avenida de 86400s de duración con el máximo caudal en $t = 14400s$ ($Q_{max} = 300 \frac{m^3}{s}, 500 \frac{m^3}{s}, 800 \frac{m^3}{s}$ y $1500 \frac{m^3}{s}$) (Fig. 7.6). La condición de contorno de salida, es un flujo con un número de Froude igual a 0.95.

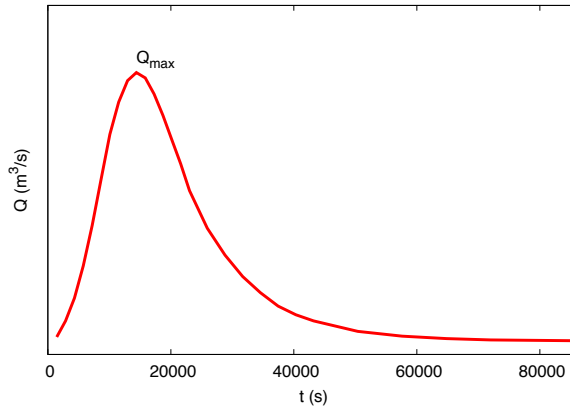


Figura 7.6: Hidrograma de la avenida simulada.

El gran volumen de datos de salida, hace necesario el uso de la estadística para hacer un análisis. De esta forma, se ha obtenido el error cuadrático medio (RMS) para cada una de las variables, así como el error relativo medio.

El cálculo del error cuadrático medio (RMS) de la variable x , se ha realizado para cada variable de una sonda utilizando el tiempo como parámetro.

$$\text{RMS de } x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i^{ref.} - x_i)^2}{N}} \quad (7.1)$$

donde $x_i^{ref.}$ es el valor de la variable de referencia respecto a la que se calcula el error y N es el número de datos. En el cálculo del error relativo medio (ERM) el tiempo también es parámetro.

$$\text{ERM de } x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|x_i^{ref.} - x_i|}{x_i^{ref.}} \quad (7.2)$$

Error de Q :

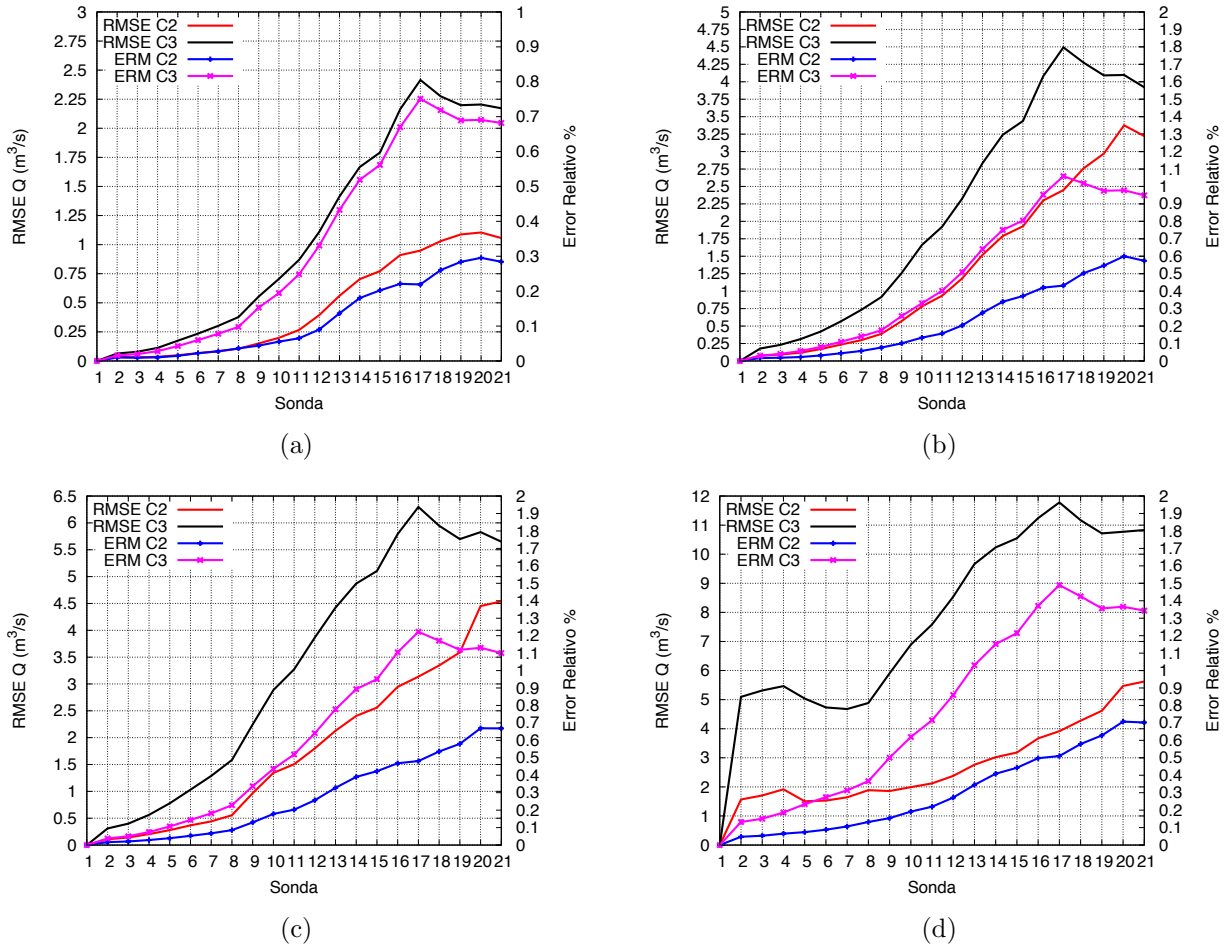


Figura 7.7: Errores en Q para los diferentes cauces en el modelo 1D. (a) $Q_{max} = 300 \frac{m^3}{s}$, (b) $Q_{max} = 500 \frac{m^3}{s}$, (c) $Q_{max} = 800 \frac{m^3}{s}$, (d) $Q_{max} = 1500 \frac{m^3}{s}$.

Observando los gráficos, se puede observar que a medida que aumenta el caudal máximo también aumenta el error cuadrático medio (Fig. 7.7). Esto parece lógico, ya que en tal caso se amplían las diferencias en el caudal que pudiera haber. Para determinar la importancia de los valores del error cuadrático medio, también se ha calculado el error relativo. Los valores del error relativo, para los diferentes caudales y sondas, están por debajo de un 2%. Por lo tanto el error en el caudal de los dos casos es bastante pequeño. Por otro lado, al comparar el cauce 1 y el cauce 2, se observa que los errores son mayores en el segundo. Esto parece lógico, ya que en el segundo caso el número de secciones reales sustituidas por otras obtenidas con la interpolación es mayor, una sección más. Por lo tanto, se deduce que cuanto mayor es el número de secciones interpoladas, mayor es el error.

■ Error de $h + z$:

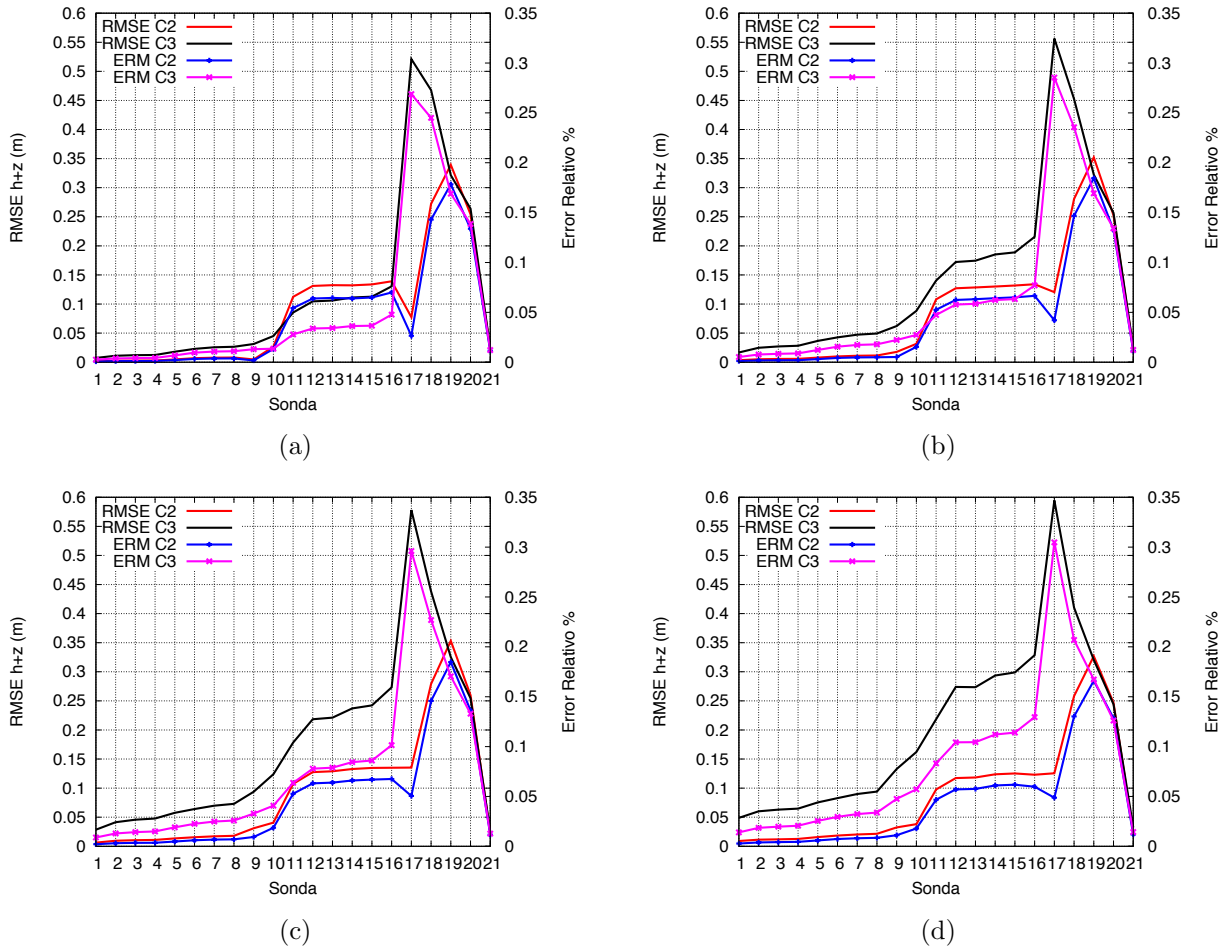


Figura 7.8: Errores en $h + z$ para los diferentes cauces en el modelo 1D. (a) $Q_{max} = 300 \frac{m^3}{s}$, (b) $Q_{max} = 500 \frac{m^3}{s}$, (c) $Q_{max} = 800 \frac{m^3}{s}$, (d) $Q_{max} = 1500 \frac{m^3}{s}$.

En este caso, como en el anterior, los errores son mayores en el 2º cauce, sea cual sea el caudal máximo (Fig. 7.8). El valor máximo del error cuadrático para ambos casos es más o menos constante, en torno a $0.3m$ para el primer cauce, y $0.55m$ para el segundo. Estos datos, por sí solos, no dicen mucho si no se observa el error relativo. El máximo está en torno a 0.2% para el primer caso, y 0.3% para el segundo. Es por lo tanto muy pequeño. Si la cota de la lámina libre del Ebro a su paso por el meandro de Ranillas, ronda los $190m$, el error relativo máximo es de más o menos el 0.02% , pero en términos absolutos es más de un $1m$ de diferencia, siendo la diferencia muy grande. Esto se debe en gran parte a la irregularidad del fondo del Ebro a su paso por Ranillas (Fig. 7.10).

■ Error de A:

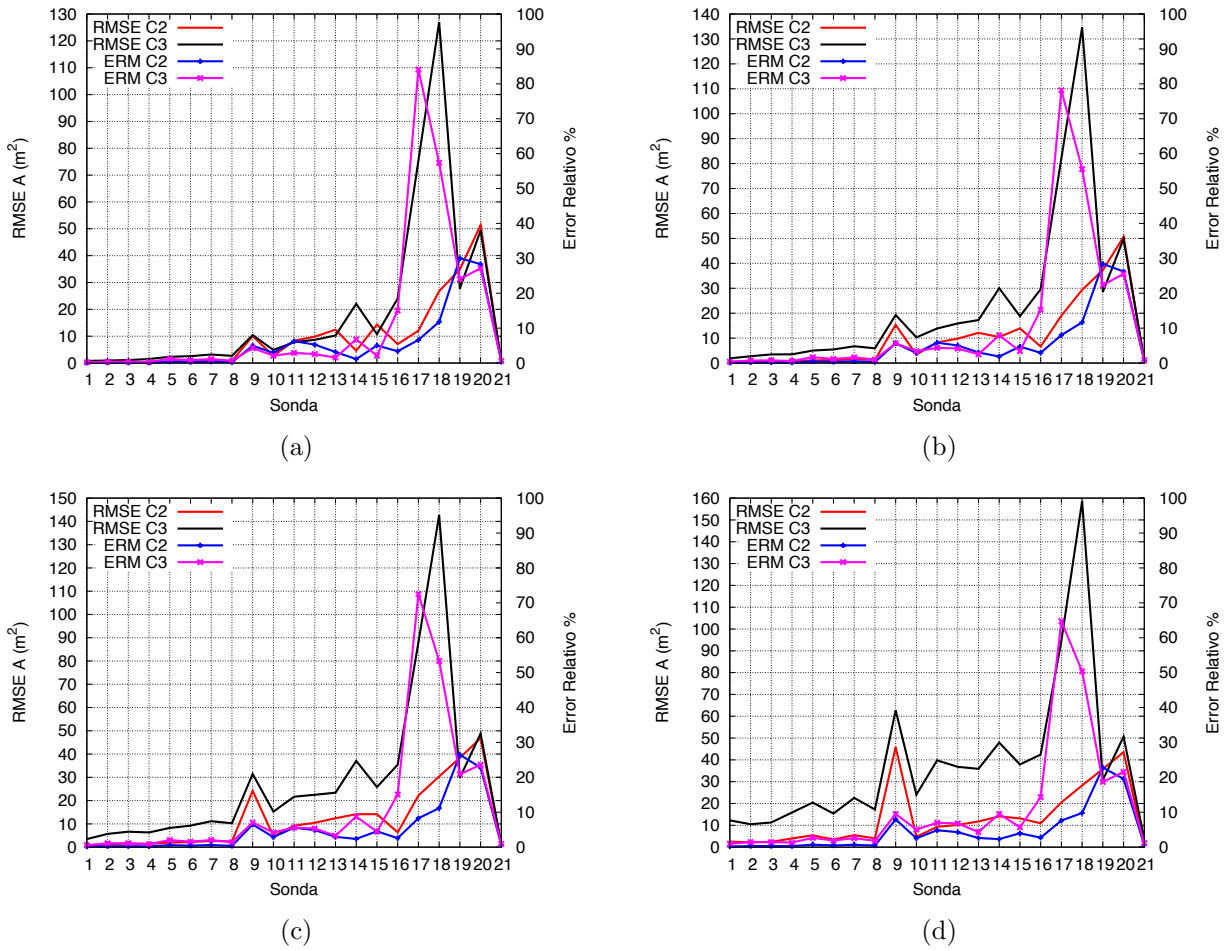


Figura 7.9: Errores en A para los diferentes cauces en el modelo 1D. (a) $Q_{max} = 300 \frac{m^3}{s}$, (b) $Q_{max} = 500 \frac{m^3}{s}$, (c) $Q_{max} = 800 \frac{m^3}{s}$, (d) $Q_{max} = 1500 \frac{m^3}{s}$.

En este caso, el error relativo máximo es muy alto, en torno al 90% (Fig. 7.9). Para entender la razón de este hecho se debe observar la figura 7.10 donde está representado el *thalweg* a lo largo del cauce.

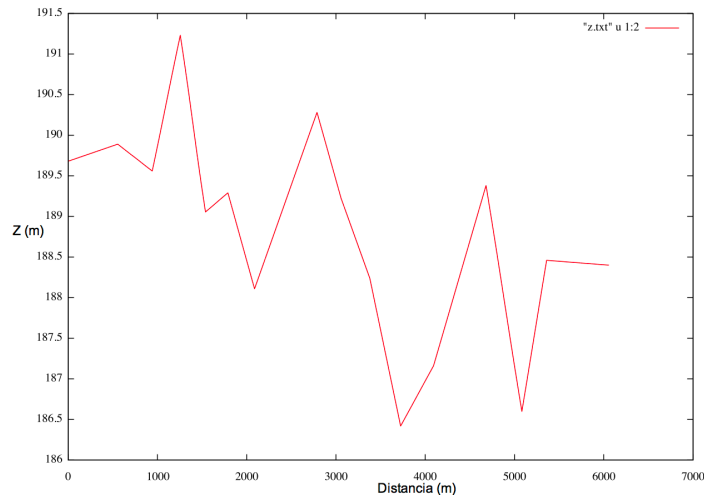


Figura 7.10: Variación del *thalweg* a lo largo del meandro.

Las secciones interpoladas se obtienen al medirlas sobre un cauce generado con la interpolación de un número concreto de secciones reales. Cuanto menor es el número de secciones reales, peor se captan las características el fondo, y cuanto más irregular es el *thalweg*, como en este caso, peor es todavía. Consecuentemente, en el caso presente, al utilizar las secciones interpoladas en la simulación, es lógico que ciertos parámetros hidráulicos (p. ejem. el área mojada) sean muy diferentes a los obtenidos con un cauce generado sólo con secciones reales.

Con lo observado, el error que inducen las secciones interpoladas se debe reconocer que no es despreciable en ciertos parámetros, y que el número de secciones reales utilizadas para generar el cauce es muy importante. De todas formas, cuando no hay ninguna sección real, si se utilizan secciones interpoladas, el resultado puede ser una aproximación decente a la realidad. Y por lo tanto, como herramienta de aproximación no se debe despreciar.

7.2. Evaluación del cauce generado para el R. N. de los Galachos de la Alfranca (Zaragoza).

En este caso, se emplea un simulador 2D para evaluar el MDT generado. Para ello, se comparan los resultados cualitativamente con los obtenidos por [6]. Por una parte, se compara la huella de inundación en ambos casos, observando las profundidades y direcciones de los flujos, y por otro, se comparan los resultados de 21 sondas situadas en diferentes puntos de la región a estudiar.

En este caso, las condición inicial ha sido un flujo estacionario con un caudal $Q = 676.55 \frac{m^3}{s}$. La condición de entrada del estado transitorio ha sido el caudal de la avenida, y la condición de salida es una salida libre. El caudal máximo es $1002.44 \frac{m^3}{s}$, que se da en el instante $t = 196200s$, con una duración total de la avenida de $288000s$ (3 días y 8 horas). El hidrograma de la avenida aparece en la figura 7.11.

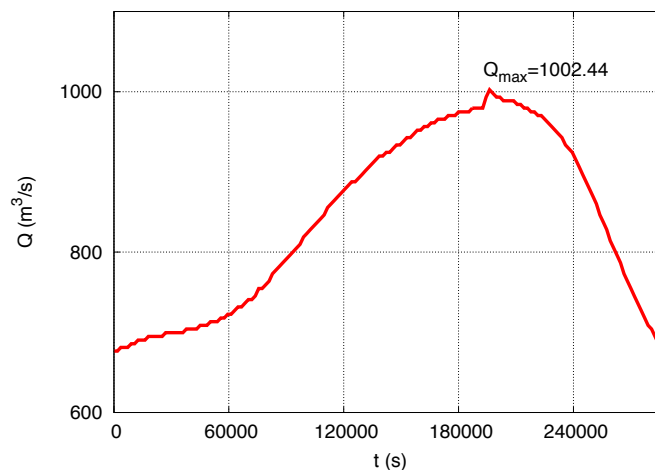


Figura 7.11: Hidrograma de la avenida.

Al calcular un estado transitorio o de avenida, es necesario haber calculado anteriormente un estado estacionario. De esta manera, se llena el cauce de agua y la avenida comenzará sobre un nivel de agua no nulo. Aprovechando esta situación, se puede conocer cuál es la huella de inundación que genera el estado estacionario en ambos casos, y comparar.

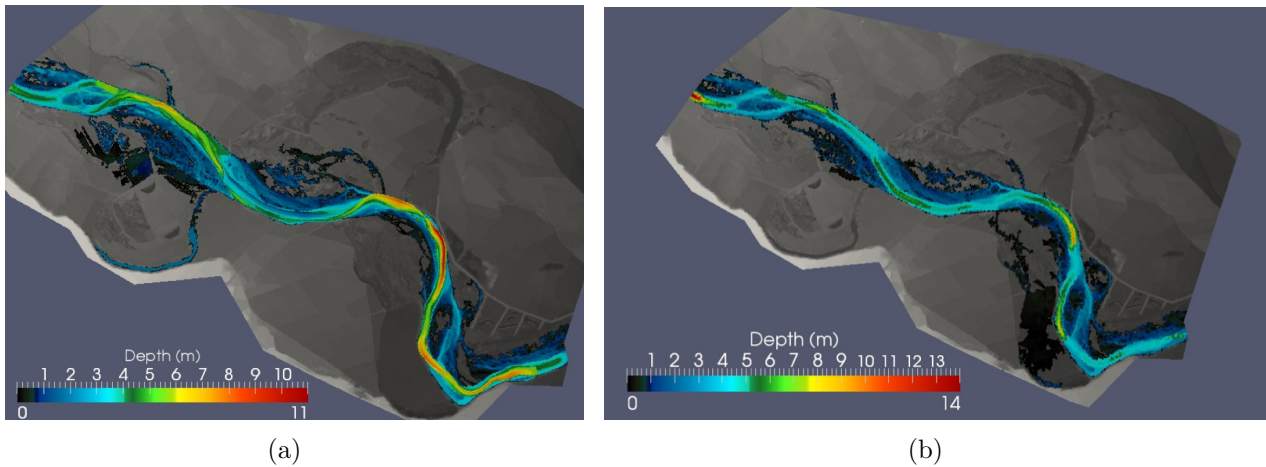


Figura 7.12: Huella de inundación en el caso estacionario. (a) Los resultados del MDT obtenido con el algoritmo. (b) Los obtenidos por [3].

Sin dejar de lado los valores de la profundidad, lo más destacable es la diferente huella de inundación de ambas imágenes. A grandes rasgos, por una parte en la figura 7.12(a) se ha inundado lo que parece ser un antiguo galacho, y por otra parte, en la figura 7.12(b), hay más superficie bajo el agua a partir de la mitad del recorrido del cauce.

El motivo de la inundación, en el llenado, del galacho seco se puede deber a la elevación del terreno del vaso comunicante entre el cauce principal y el galacho. Siendo mayor en la figura 7.12(b), y que la de la figura 7.12(a). Para comprobar a que se debe, obsérvese la figura 7.13.

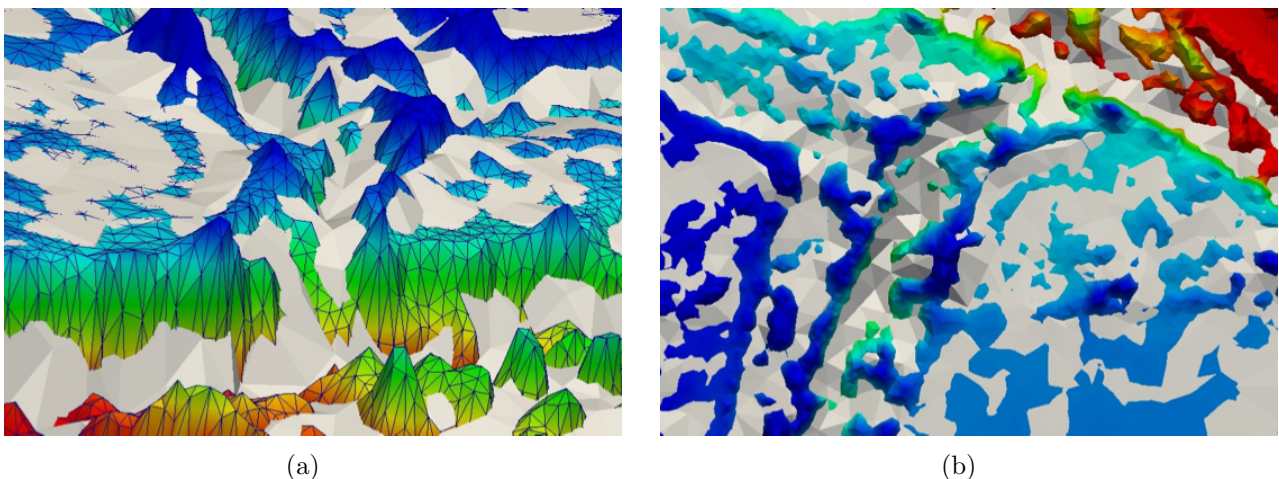


Figura 7.13: En blanco el mallado basto utilizado por [6], y en color, el fino, aplicado sobre el MDT obtenido con el algoritmo. (a) Vista en perfil del mallado. (b) Vista en planta del mallado.

La imagen (a) muestra la entrada del canal que comunica el cauce con el galacho, y en la (b) hay una visión en planta del mismo. En color blanco es visible el mallado de [6], y en color el

mallado utilizado en el presente trabajo. Ambos han sido superpuestos, de forma que el visible es el que tiene mayor elevación.

Como se puede observar, las elevaciones del mallado de [6] en esta región queda ligeramente por encima del generado con el algoritmo. Debido a esto, la altura de la lámina libre no es suficiente para que el agua fluya por el canal. Las diferencias en la elevación también son visibles en la Fig. 7.14.

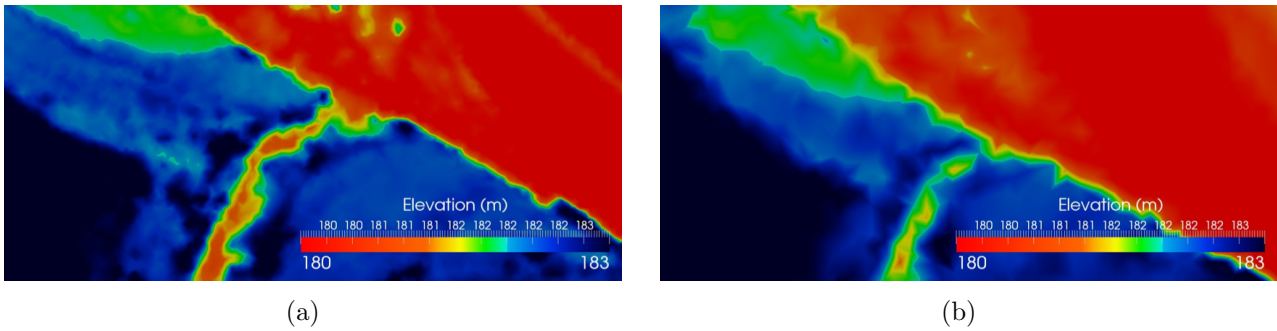


Figura 7.14: Comparación entre mallados en la entrada del vaso comunicante entre el cauce principal y el galacho en la margen derecha. (a) Mallado aplicado al MDT obtenido con el algoritmo (514246 celdas). (b) Mallado de [6] (58331 celdas).

Por lo tanto, que el galacho se inunde en la simulación depende de la elevación del mallado. Aunque la información proveniente del vuelo LIDAR en ambos casos es la misma, el número de celdas para generar el mallado, no. Para el mallado de [6] el número es 58331, mientras que para el otro es 514246. De tal forma que cuantas más celdas hay, mayor es la precisión de la representación de la topografía, y más fiables son los resultados.

Por otra parte, a mitad de recorrido del río en la malla más fina hay una mayor zona inundada (Fig. 7.12(a)), comparando con el otro caso (Fig. 7.12(b)). Para entender el motivo se debe comprobar cual es la elevación del terreno en ambos casos (Fig. 7.15).

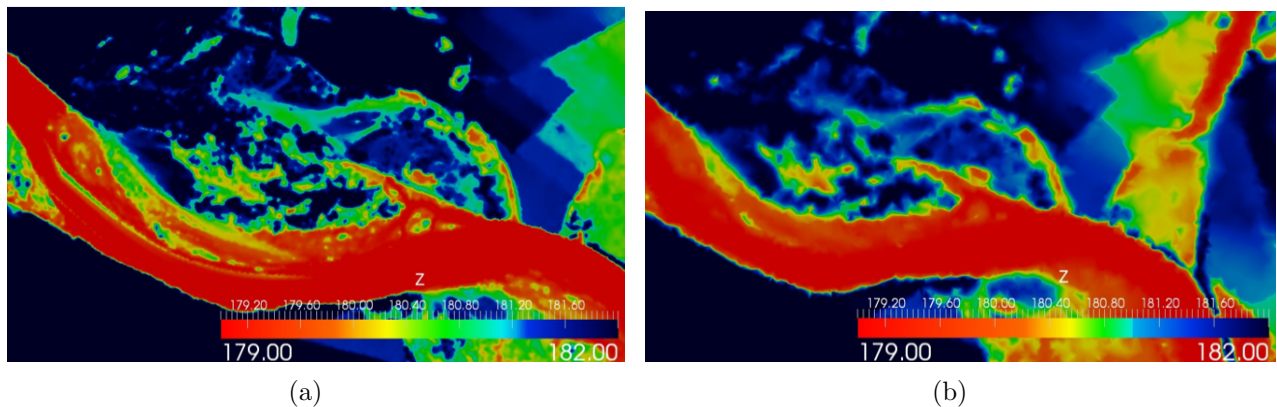


Figura 7.15: Comparación entre mallados en el meandro situado a mitad de recorrido del río. (a) Mallado aplicado al MDT obtenido con el algoritmo (514246 celdas). (b) Mallado de [6] (58331 celdas).

Se ve claramente cómo en el caso (a) la elevación del mallado es menor en el lado cóncavo del meandro, y por lo tanto es lógico que se inunde con mayor facilidad. En la figura 7.16 es visible la huella de inundación en el último meandro.

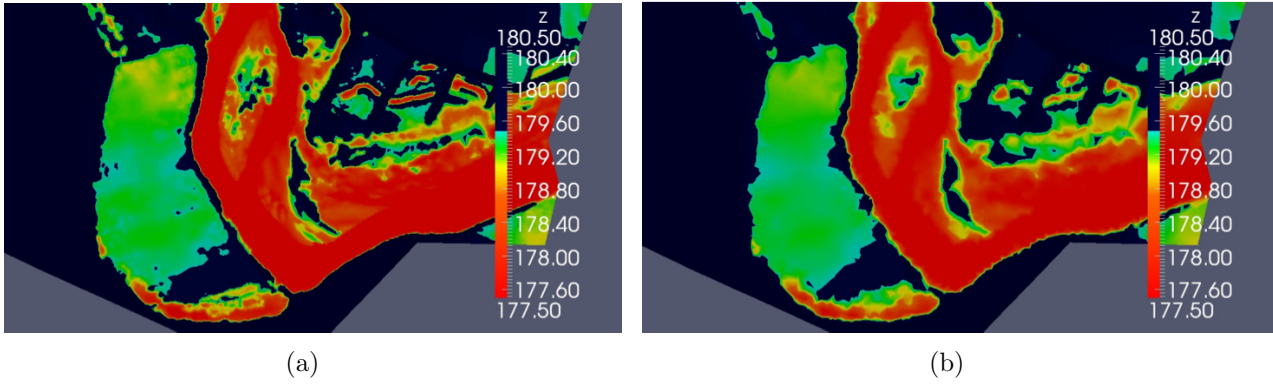


Figura 7.16: Comparación entre mallados en el último meandro.(a) Mallado aplicado al MDT obtenido con el algoritmo (514246 celdas). (b) Mallado de [6] (58331 celdas).

En este caso, se ve lo que parece ser un dique entre el cauce y el terreno a su margen derecha (Fig. 7.16). En la figura 7.16(a) queda mejor definido el dique. Aunque la elevación del terreno es inferior, la elevación del dique es superior en ciertos puntos. Debido a esto, no se inunda el terreno en el caso del mallado más fino (Fig. 7.16(a)), y sí en el más basto (Fig. 7.16(b)).

Queda por tanto claro que para que los resultados sean fieles a la realidad”, el número de celdas debe ser lo más alto posible. Ya que basta con que pocas celdas tengan una elevación incorrecta para que buena parte del terreno sea inundado. Esto, en cambio, supone un mayor costo computacional para hacer la simulación. Por lo tanto se debe de hallar un equilibrio entre el costo computacional y la precisión.

Para obtener las diferencias en el caso transitorio, se analizan resultados a diferentes instantes $t = 60000s$ (Fig. 7.17), $120000s$ (Fig. 7.18), $196200s$ (Fig. 7.19), $280000s$ (Fig. 7.20).

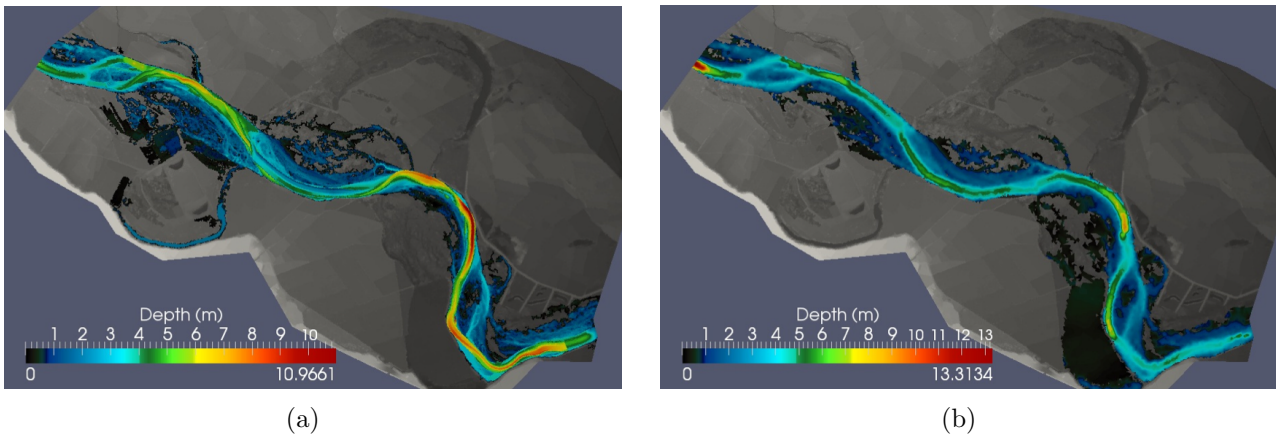
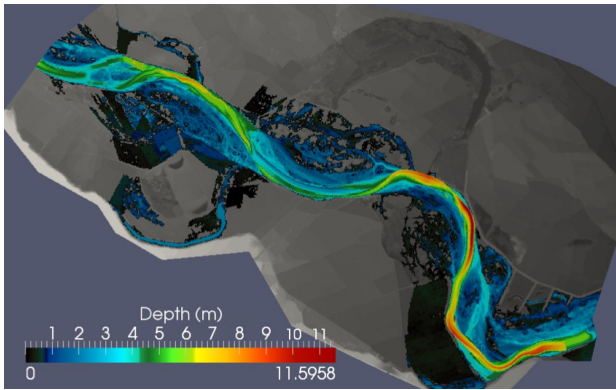
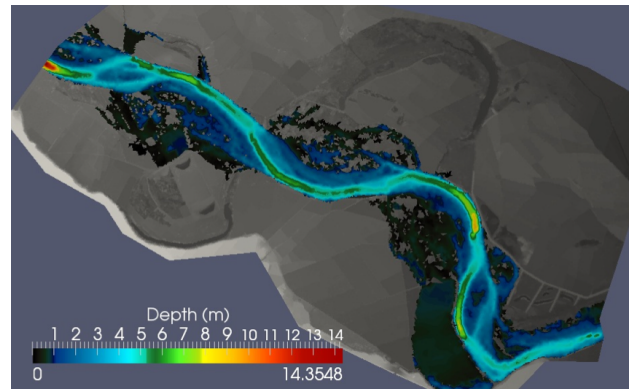


Figura 7.17: (a) Resultados del cauce obtenido de la modificación del cauce de [6] con los resultados de la interpolación. (b) Cauce de [6]. $t = 60000s$.

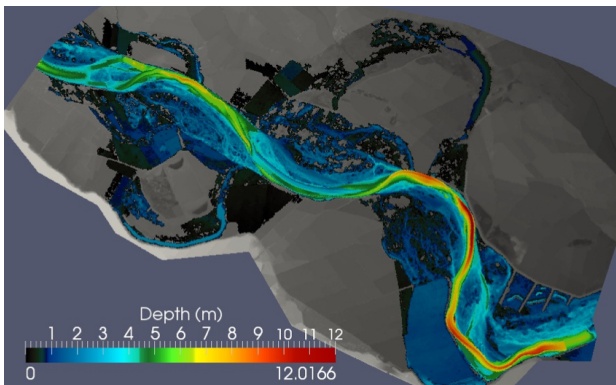


(a)

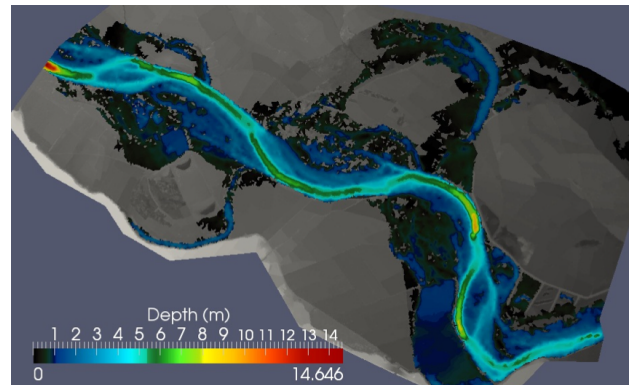


(b)

Figura 7.18: (a) Resultados del cauce obtenido de la modificación del cauce de [6] con los resultados de la interpolación. (b) Cauce de [6]. $t = 120000s$.

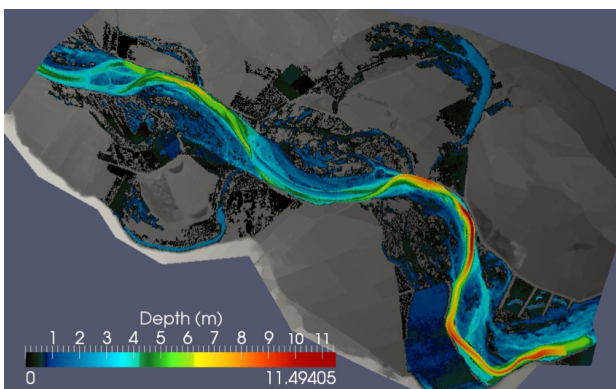


(a)

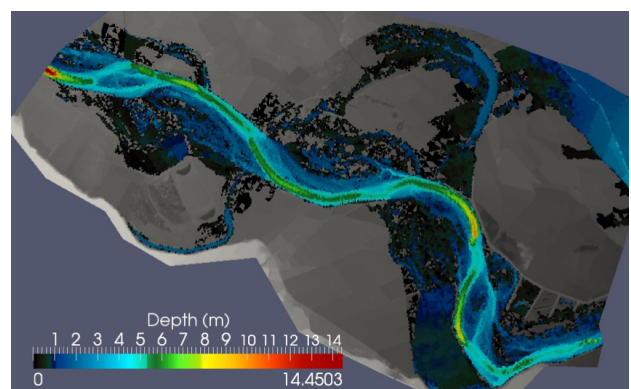


(b)

Figura 7.19: (a) Resultados del cauce obtenido de la modificación del cauce de [6] con los resultados de la interpolación. (b) Cauce de [6]. $t = 196200s$.



(a)



(b)

Figura 7.20: (a) Resultados del cauce obtenido de la modificación del cauce de [6] con los resultados de la interpolación. (b) Cauce de [6]. $t = 280000s$.

Observando todas las imágenes, se puede ver como el patrón de inundación del caso estacionario se repite. Para determinar el motivo, antes de mirar si esto se debe a las diferencias

en la elevación del terreno, se comprueba que no se debe a la elevación del cauce. Para ello, se han obtenido 8 secciones transversales del cauce de [6], en adelante cauce no modificado, y del obtenido de la modificación, en adelante cauce modificado. La posición de los cauces y sus elevaciones están en las figuras 1.21, 1.22, 1.23, 1.24 y 1.25.

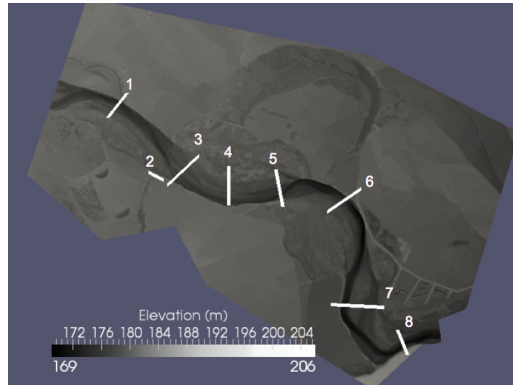


Figura 7.21: Posición de las secciones.

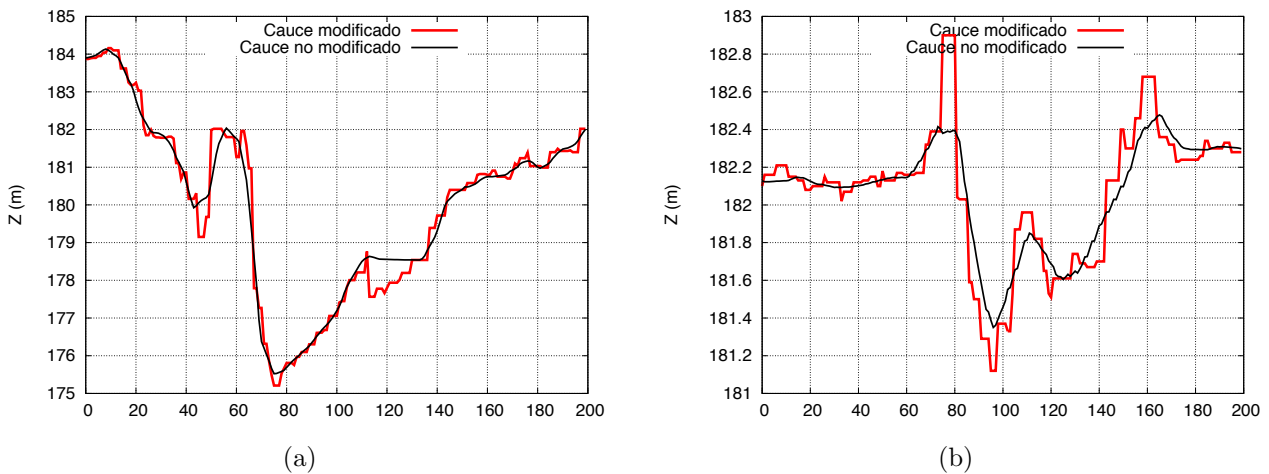
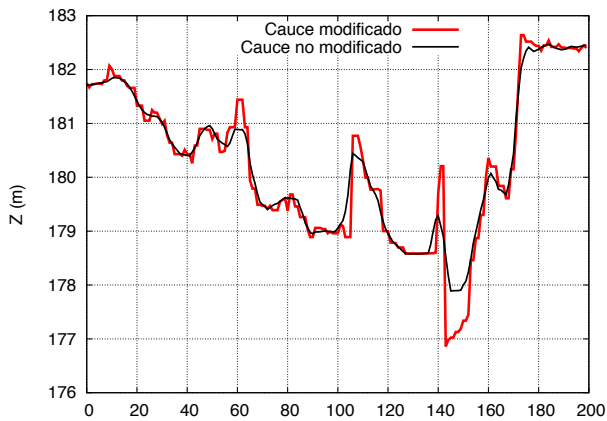


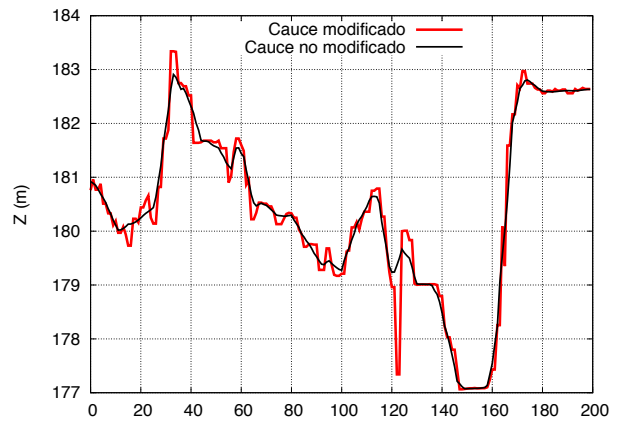
Figura 7.22: Comparación de la (a) sección 1, y (b) sección 2 del cauce principal del Ebro a su paso por la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza).

Las diferencias que hay entre las secciones en el mismo lugar del río son pequeñas en casi todos los casos. De tal forma que parece que la diferencia en la huella de inundación se debe a la diferencia en la elevación de la topografía de las dos mallas, producido por la diferencia en el número de celdas.

Observando la figura 7.17 se observa casi lo mismo que en la figura 7.12. En la Fig. 7.18, en cambio, la gran diferencia con el instante $t = 60000s$, es que se ha inundado el terreno al otro lado del dique que hay en el último meandro. Esto es lógico, ya que no hay grandes diferencias en el dique entre el mallado de [6] y el mallado más fino, y por lo tanto lo esperable es que suceda algo parecido. En $t = 196200s$, el momento de mayor caudal de entrada, ambas imágenes son parecidas, a excepción del terreno colindante al galacho a la izquierda del cauce. En el mallado más fino este no se ha inundado, pero en el otro sí. Para comprobar el motivo, se debe observar por donde accede el agua al terreno y cual es la elevación del acceso.

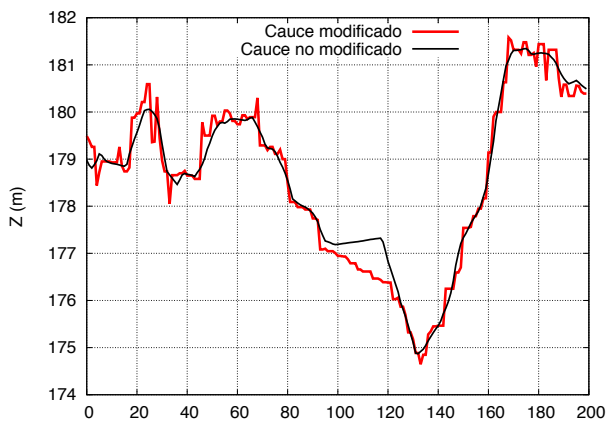


(a)

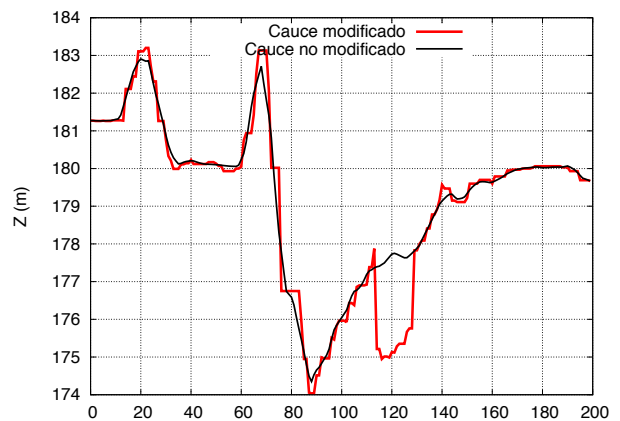


(b)

Figura 7.23: Comparación de la (a) sección 3, y (b) sección 4 del cauce principal del Ebro a su paso por la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza).



(a)



(b)

Figura 7.24: Comparación de la (a) sección 5, y (b) sección 6 del cauce principal del Ebro a su paso por la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza)

Comparando ambos mallados, en negro el mallado más basto y en color el fino, se aprecia que las elevaciones del terreno son diferentes, siendo mayores en el fino. Por lo tanto es esperable que tenga mayor facilidad para el desbordamiento en esta región el mallado basto, tal y como se aprecia en la figura 7.19(a). En las siguientes imágenes se puede ver el nivel del agua en ambos mallados.

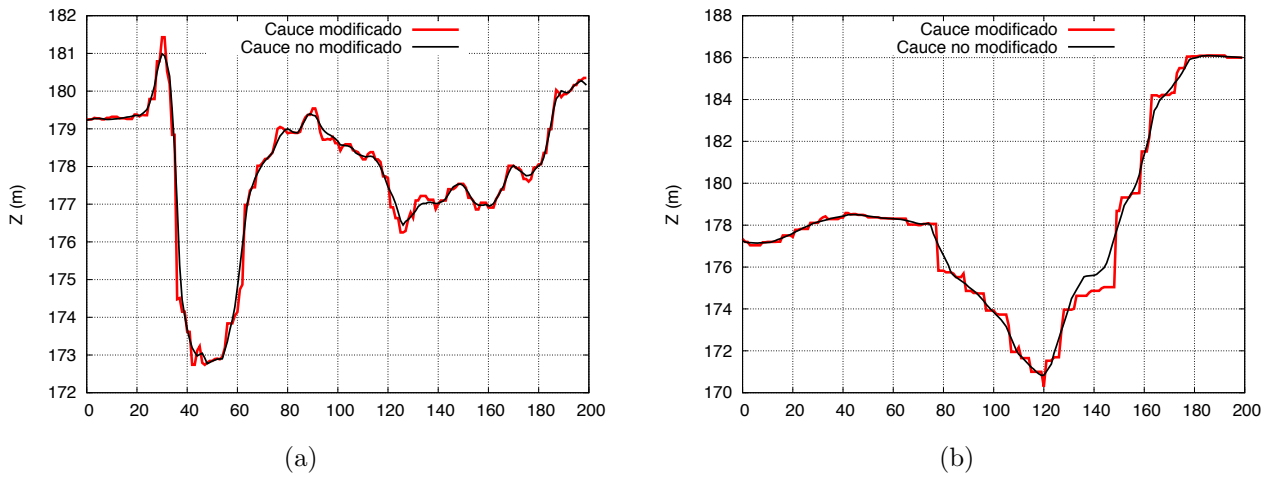


Figura 7.25: Comparación de la (a) sección 7, y (b) sección 8 del cauce principal del Ebro a su paso por la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza)

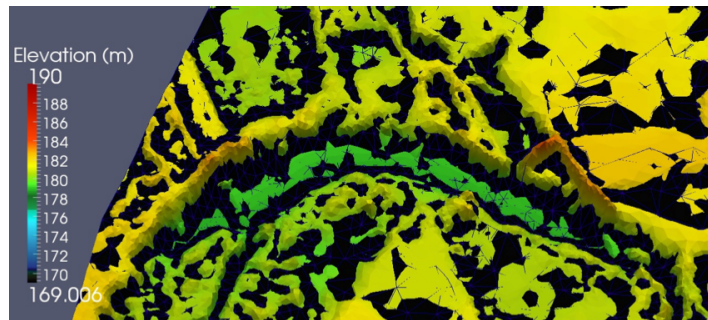


Figura 7.26: Vista en planta del galacho en la margen izquierda del cauce principal. En negro el mallado basto (58331 celdas) utilizado por [6], y en color, el fino (514246 celdas), aplicado sobre el MDT obtenido con el algoritmo.

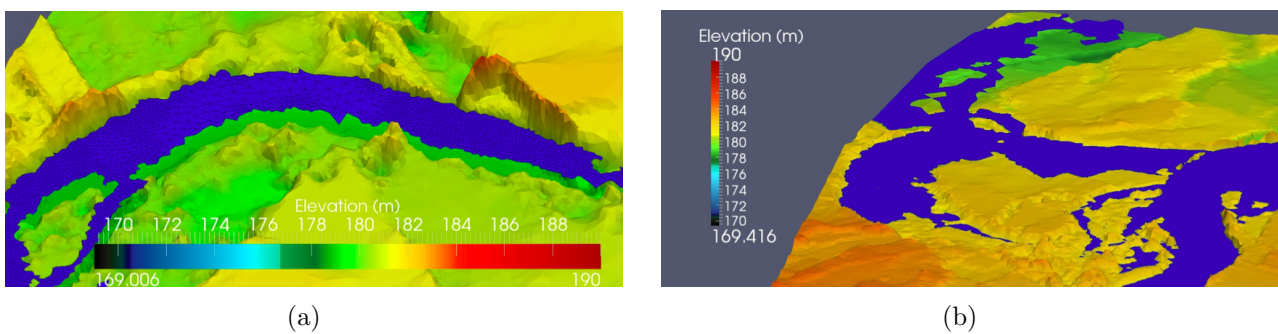


Figura 7.27: Vista en perspectiva del galacho en la margen izquierda del cauce principal. (a) Mallado fino, y (b) mallado basto

Tal y como se observa, el nivel de la lámina libre del agua en el caso (b) es mayor a la elevación de la llanura de inundación, no así en el mallado más fino. El campo de velocidades del mallado de [6] en la Fig. 7.28.

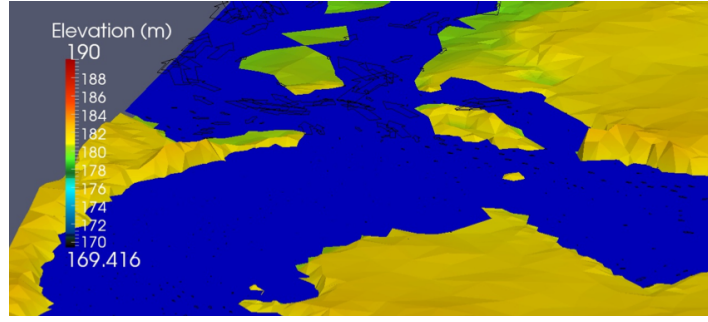


Figura 7.28: En negro el mallado basta utilizado por [6], y en color el fino, aplicado sobre el MDT obtenido con el algoritmo

De estas comparaciones, al igual que antes, la conclusión que se puede sacar es que las diferencias entre ambos casos se deben básicamente al mallado, al diferente número de celdas. Para terminar con la comparación entre ambos casos, se estudian los resultados obtenidos de un cierto número de sondas colocadas según la siguiente imagen, en ambos mallados.

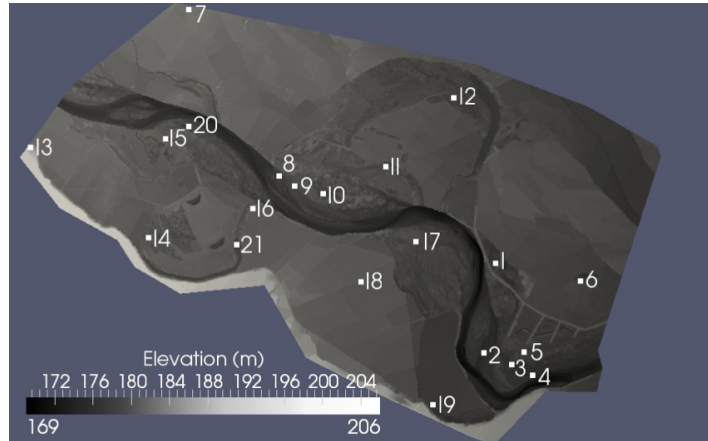


Figura 7.29: Posición de las sondas.

El error cuadrático medio de los parámetros h , $h + z$, v_x y v_y se obtiene de comparar los resultados de ambos mallados entre sí. De esta manera, puede determinarse el efecto de usar un cauce respecto a otro. Los resultados son visibles en las tablas 7.3 y 7.4. En los casos donde el valor del error relativo es indeterminado, se debe a que se han tomado como referencia los datos de [6], siendo estos nulos en ciertas sondas.

El cálculo del error cuadrático medio (RMS) de la variable x , al igual que antes se ha obtenido de la expresión

$$\text{RMS de } x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i^{\text{ref.}} - x_i)^2}{N}} \quad (7.3)$$

y el error relativo medio, se ha obtenido de

$$\text{ERM de } x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|x_{\text{max}}^{\text{ref.}} - x_i|}{x_{\text{max}}^{\text{ref.}}} \quad (7.4)$$

Sonda	h+z		h	
	RMSE (m)	ERM (%)	RMSE (m)	ERM (%)
1	0.100	0.056	0.000	∅
2	0.339	0.183	0.546	12.085
3	0.635	0.278	0.502	21.682
4	0.748	0.353	0.748	24.538
5	0.943	0.386	0.929	51.021
6	0.550	0.306	0.000	∅
7	0.030	0.016	0.000	∅
8	0.281	0.151	0.429	14.120
9	0.161	0.085	0.133	6.043
10	0.099	0.043	0.416	21.408
11	0.286	0.126	0.362	35.411
12	0.469	0.202	0.555	30.298
13	0.160	0.087	0.000	∅
14	0.959	0.461	0.840	∅
15	0.082	0.041	0.838	153.858
16	0.206	0.106	0.101	36.326
17	0.152	0.065	0.158	22.325
18	0.100	0.055	0.000	∅
19	0.440	0.226	0.447	41.943
20	0.117	0.062	0.335	9.584
21	1.529	0.681	1.529	52.923

Tabla 7.3: Error cuadrático medio (RMS) y error relativo medio (ERM) de $h + z$ y h .

donde $x_{max}^{ref.}$ es el valor máximo de la variable de referencia. Esta elección se debe a que en muchos casos en valor de $x^{ref.}$ es nulo, y de esta forma se evita en varios casos.

En la tabla 7.3, al igual que en el caso 1D, el error relativo de $h + z$ es muy pequeño. Por un lado, parte del error procede de la precisión de la representación topográfica debida al número de celdas. Por otro, parte de la contribución al error procede de la diferente cota de la lámina libre en ambos casos, como se puede apreciar en los errores de h . El error relativo en el caso de h , no es para nada despreciable, superando incluso en un caso el valor de 150 %. Estas diferencias son el resultado de la desigual inundación de la llanura.

En el cálculo del error del campo de velocidades (Tabla 7.4) también hay casos donde el error relativo es indeterminado, como consecuencia de haber dividido entre un valor nulo. Los valores de los errores en este caso son muy dispares entre sí. En algunas sondas el error cuadrático medio es nulo. Esto es consecuencia de no haber sido sumergidas estas sondas. Por otro lado, el error relativo en ciertas sondas supera 100 %, algo esperable al igual que en los errores de h , debida a la desigual inundación en la llanura.

Con lo visto hasta ahora, no se puede asegurar que el MDT creado con el algoritmo sea preciso. Con los datos disponibles sólo se puede decir que ofrece una solución aproximada a la de [6]. Para poder hacer un análisis más exhaustivo, se deben tener datos medidos directamente sobre el terreno. Además, para poder llegar al límite del método de interpolación desarrollado,

Sonda	v_x		v_y	
	RMSE (m/s)	ERM (%)	RMSE (m/s)	ERM (%)
1	0.000	∅	0.000	∅
2	0.042	67.966	0.186	40.083
3	0.151	19.397	0.091	42.005
4	0.354	55.521	0.189	53.677
5	0.125	122.268	0.022	∅
6	0.000	∅	0.000	∅
7	0.000	∅	0.000	∅
8	0.041	6.258	0.019	3.193
9	0.099	18.038	0.061	20.858
10	0.056	15.730	0.206	∅
11	0.050	13.231	0.033	16.584
12	0.046	190.152	0.010	3.268
13	0.000	∅	0.000	∅
14	0.007	∅	0.008	∅
15	0.106	28.751	0.092	∅
16	0.011	29.299	0.026	139.899
17	0.004	∅	0.002	∅
18	0.000	∅	0.000	∅
19	0.071	42.471	0.085	∅
20	0.015	3.822	0.033	31.490
21	0.018	3.880	0.025	235.219

Tabla 7.4: Error cuadrático medio (RMS) y error relativo medio (ERM) de v_x y v_y .

se debe tener información de partida más precisa. La información proveniente del vuelo LIDAR debe ser tomada temporalmente lo más cercano posible a la toma de datos de las secciones del río, con tal de garantizar que circula el mismo caudal en ambos casos. Además, lo idóneo es que los márgenes sean definidos lo mejor posible para evitar puntos sin información tal y como ha ocurrido al generar un MDT completo.

Capítulo 8

Conclusiones

El objetivo principal del presente trabajo ha sido la obtención de un modelo digital terrestre (MDT) que capte con alta resolución espacial la información topográfica de un cauce y de su llanura de inundación, como se ha comentado anteriormente. Para ello, se han empleado dos procedimientos distintos. Por una parte, se ha utilizado la información topográfica proveniente del vuelo LIDAR de la llanura de inundación. Pero el hecho de no poder obtener la información batimétrica del cauce mediante esta técnica, ha llevado a buscar nuevas herramientas para su obtención. Con tal fin, se ha desarrollado un algoritmo de interpolación de las secciones transversales, utilizando *splines* cúbicos de Hermite para la interpolación en planta, y un método de lineal para la interpolación de la elevación del cauce. De esta forma es posible obtener un MDT que abarque el cauce, para posteriormente añadir su información al MDT proveniente del LIDAR que contiene la llanura de inundación, obteniendo finalmente un MDT completo que recoja tanto el lecho como la llanura de inundación.

Una vez obtenido el cauce, es necesario comprobar si el resultado es satisfactorio desde el punto de vista hidráulico, el objetivo final para el cual sirve el MDT. Para ello, se han utilizado un modelo 1D y otro 2D, sobre el cauce del Ebro a su paso por el meandro de Ranillas (Zaragoza) y sobre la R. N. de los galachos de la Alfranca (Zaragoza), respectivamente. Por una parte, del total de secciones reales disponibles se retiran algunas y se genera un cauce con las restantes. Posteriormente, se miden sobre el cauce las secciones situadas en el mismo lugar que las secciones retiradas, y se comparan entre sí utilizando criterios geométricos y hidráulicos. La comparación geométrica se hace comparando visualmente cada pareja de secciones. En la comparación hidráulica se utiliza en modelo 1D. Para ello, se genera un cauce utilizando únicamente las secciones reales, y otros dos cauces sustituyendo ciertas secciones reales por interpoladas. Con los resultados de los diferentes cauces se hace una comparación de los parámetros hidráulicos. De esta manera se llega a dos conclusiones. Una, que los resultados son una razonable aproximación a la realidad, y que por ello, el algoritmo desarrollado puede ser útil. Otra, que el número de secciones reales utilizadas para la generación del cauce es importante, como parece lógico *a priori*, y que por lo tanto cuanto más secciones reales haya más fieles a la realidad son los resultados.

Por otro lado, se utiliza el modelo 2D, para comparar el MDT generado con el algoritmo, y otro obtenido por [6]. En este caso, se han comparado las huellas de inundación de ambos MDTs, así como las variables hidráulicas, con el objetivo de evaluar que efectos tiene sobre la hidráulica de la llanura de inundación el cauce generado a partir de la interpolación. Los resultados en este caso no han podido ser evaluados de una forma correcta, debido al diferente

mallado del MDT de [6], y del generado con el algoritmo. En el caso de [6], el número de celdas utilizadas ha sido mucho menor, y por ello, las diferencias entre ambos MDTs se han debido básicamente a ello. Aún así, en ambos casos los resultados no han sido muy diferentes, y por lo tanto, se puede decir que el MDT obtenido en el presente trabajo no produce grandes cambios en la hidráulica respecto a la realidad. Para una correcta evaluación, sin embargo, es necesario poseer datos reales medidos directamente en campo.

Los resultados obtenidos demuestran que aunque no sean todo lo bueno que se desearía, son en cierta forma una buena aproximación a la realidad. Por lo tanto, el método de interpolación empleado para la obtención de un MDT puede ser útil cuando no se posea información directa del cauce.

Cabe destacar, que similar al algoritmo desarrollado en el presente trabajo, existen otros [11][12]. En el trabajo de [11], el método de interpolación tanto en planta como en la elevación del cauce es lineal. Para ello, la interpolación se hace en un sistema de referencia local donde las variables son la longitud de arco del cauce, y la distancia desde el centro del mismo a los márgenes. En cambio, en el trabajo de [12], también se hace uso de la interpolación lineal para la interpolación en planta y de la elevación, pero en un sistema de referencia global. En ambos trabajos, sin embargo, se aplica un suavizador en los márgenes para evitar grandes diferencias en la elevación entre la llanura de inundación y el cauce. En el algoritmo del presente trabajo no se ha hecho uso de ningún suavizador, debido a que ello supone hacer una aproximación más en la topografía del terreno, y ello, puede introducir diferencias significativas respecto a la realidad. Por ejemplo, si existiera un dique entre el cauce y la llanura, el suavizador que lo hace es promediar la elevación, puede hacerlo desaparecer, y de esta manera cambiar el escenario sobre el cual simular. Es por ello, que se ha tomado la decisión de no usarlo. Por lo tanto, aunque la idea de obtener un MDT completo mediante la interpolación es común en los tres trabajos, el método y desarrollo no lo es, y consecuentemente, el presente trabajo supone una novedad.

Como trabajo futuro cabe decir que el algoritmo presentado requiere todavía de más desarrollo. Esto se debe a que no ha sido diseñado, de forma especial, para la representación de las posible islas que pudiera haber en el río, y por lo tanto, se debe mejorar este aspecto. Por otro lado, es necesario comprobar los resultados obtenidos con datos medidos directamente en campo. En este sentido, es interesante poder validar el algoritmo en otros ríos aparte del Ebro.

Apéndice I

En este apéndice se tratará de obtener la ecuación de interpolación cúbica por *splines* de Hermite:

$$f_i(x) = y = h_{00}(t)y_i + h_{10}(t)(x_{i+1} - x_i)m_i + h_{01}(t)y_{i+1} + h_{11}(t)(x_{i+1} - x_i)m_{i+1} \quad (1)$$

Siendo t un parámetro de normalización para pasar de $[x_i, x_{i+1}]$ a $[0, 1]$, tal que:

$$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (2)$$

m_i y m_{i+1} expresan el valor de la primera derivada, o lo que es lo mismo a y'_i y y'_{i+1} , respectivamente. Y por último, h_{00} , h_{10} , h_{01} y h_{11} forman la base de las funciones de Hermite.

$$h_{00}(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad (3)$$

$$h_{10}(t) = t^3 - 2t^2 + t \quad (4)$$

$$h_{01}(t) = -2t^3 + 3t^2 \quad (5)$$

$$h_{11}(t) = t^3 - t^2 \quad (6)$$

Obtención de la función de interpolación

A la hora de interpolar se busca un interpolador cúbico por *splines* que interpole los puntos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) , respetando el valor de la primera derivada en los mismos.

Por lo tanto, la función de interpolación general será de la forma

$$f_i(x) = y = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 \quad \text{con } x \in [x_i, x_{i+1}], \quad y \in [y_i, y_{i+1}] \quad (7)$$

Esta, se puede normalizar en función de un parámetro t (2):

$$f_i(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \quad \text{con } t \in [0, 1] \quad (8)$$

En total hay 4 incógnitas en la ecuación, y para resolverla se necesitan 4 datos. 2 de estos datos los obtenemos de conocer el valor de la función en los nodos (x_i, y_i) , o lo que es lo mismo en $t = 0, 1$. Y otros 2, de conocer el valor de la primera derivada, $f_i(0) = m'_i = (x_{i+1} - x_i)m_i$ y $f_i(1) = m'_{i+1} = (x_{i+1} - x_i)m_{i+1}$, también en los mismo nodos. De esta manera es sistema es totalmente determinable.

Para ello, haciendo las sustituciones pertinentes:

$$f_i(0) = a = y_i \quad (9)$$

$$f_i(1) = a + b + c + d = y_{i+1} \quad (10)$$

De las primeras derivadas:

$$f'_i(0) = b = m'_i \quad (11)$$

$$f'_i(1) = b + 2c + 3d = m'_{i+1} \quad (12)$$

El sistema matricialmente se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ m'_i \\ m'_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (13)$$

Resolviendo el sistema, por ejemplo mediante sustituciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} a &= y_i \\ b &= m'_i \\ c &= -3y_i + 3y_{i+1} - 2m'_i - m'_{i+1} \\ d &= 2y_i - 2y_{i+1} + m'_i + m'_{i+1} \end{aligned} \quad (14)$$

De tal forma que la ecuación (8) se puede escribir como:

$$f_i(t) = y_i + m'_i t + (-3y_i + 3y_{i+1} - 2m'_i - m'_{i+1}) t^2 + (2y_i - 2y_{i+1} + m'_i + m'_{i+1}) t^3 \quad (15)$$

o reagrupando los términos y expresándolo en función de x :

$$\begin{aligned} f_i(x) &= (2t^3 - 3t^2 + 1) y_i + (t^3 - 2t^2 + t) (x_{i+1} - x_i) m_i + (-2t^3 + 3t^2) y_{i+1} + (t^3 - t^2) (x_{i+1} - x_i) m_{i+1} \\ &= h_{00}(t) y_i + h_{10}(t) (x_{i+1} - x_i) m_i + h_{01}(t) y_{i+1} + h_{11}(t) (x_{i+1} - x_i) m_{i+1} \end{aligned} \quad (16)$$

De esta forma obteniéndose la expresión (1).

Bibliografía

- [1] M. Morales-Hernandez, P. García-Navarro, J. Murillo. A large time step 1D upwind explicit scheme (CFL>1): Application to shallow water equations. *Journal of Computational Physics Volume 231 Issue 19, Pages 6532-6557*. (2012)
- [2] Murillo, J., García-Navarro, P., Burguete, J., and Brufau, P.. A conservative 2D model of inundation flow with solute transport over dry bed. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 52(10), 1059–1092. (2006)
- [3] Murillo, J., García-Navarro, P., Burguete, J., and Brufau, P.. The influence of source terms on stability, accuracy and conservation in two-dimensional shallow flow simulation using triangular finite volumes. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 54(5), 543–590. (2007)
- [4] Murillo, J., García-Navarro, P., and Burguete, J.. Conservative numerical simulation of multi-component transport in two dimensional unsteady shallow water flow. *J. Comput. Phys.*, 228(15), 5539–5573. (2009)
- [5] Pilar Brufau, Pilar García Navarro. Conceptos básicos de hidrodinámica de superficie.
- [6] M. González-Sanchis, J. Murillo, B. Latorre, F. Comín and P. García-Navarro, M. ASCE. Transient Two-Dimensional Simulation of Real Flood Events in a Mediterranean Floodplain. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 138. ©ASCE, ISSN 0733-9429/2012/7-629– 641. (2012)
- [7] Dou Guoren: Suspended load transport and calculation of erosion and deposition in tidal currents. *Journal of Hydraulic Engineering*. (1963)
- [8] Han Qiwei and He Mingmin. Mathematical model (1D) of reservoir deposition and riverbed evolution. *Journal of Sediment Research*. (1987)
- [9] Lin Bingnan, Huang Juqing and Li Xinchun. Tide sediment transport mathematical model for Qiantang River Estuary. *Journal of Sediment Research (Nisha Yanjiu)*, No.2. (1981)
- [10] Chang, H. H.. Mathematical model for erodible channels. *J. Hydraul. Div., Am. Soc. Civ. Eng.*, 108(5), 678–689. (1982)
- [11] Venkatesh M. Merwade, Aaron Cook, Julie Coonrod: GIS techniques for creating river terrain models for hydrodynamic modeling and flood inundation mapping. *Environmental Modelling and Software* 23(10-11): 1300-1311. (2008)
- [12] B.Schäppi, P.Schneider, P.Burlando. Integrating river cross section measurements with digital terrain models for improved flow modelling applications. *Computers and Geosciences* 36 707–716. (2010)

- [13] Shanker Kumar Sinnakaudan, Aminuddin Ab Ghani, Mohd. Sanusi S. Ahmad, Nor Azazi Zakaria: Flood risk mapping for Pari River incorporating sediment transport. *Environmental Modelling and Software* 18, 119–130. (2003)
- [14] Jasrul Nizam Ghazali, Amirrudin Kamsin: A Real Time Simulation and Modeling of Flood Hazard. *12th WSEAS International Conference on SYSTEMS, Heraklion, Greece.* (2008)
- [15] Bates, P. D., Horritt, M. S., and Hervouet, J.M.. Investigating two-dimensional, finite element predictions of floodplain inundation using fractal generated topography. *Hydrol. Processes*, 12(8), 1257–1277. (1998)
- [16] Bates, P. D., et al.. Simplified two-dimensional numerical modeling of coastal flooding and example applications. *Coastal Eng.*, 52(9), 793–810. (2005)
- [17] Somes, N. L. G., Bishop, W. A., and Wong, T. H. F.. Numerical simulation of wetland hydrodynamics. *Environ. Int.*, 25(6–7), 773–779. (1999)
- [18] Horrit, M. S., and Bates, P. D.. Evaluation of 1D and 2D numerical models for predicting river flood inundation. *J. Hydrol. (Amsterdam)*, 268(1–4), 87–99. (2002)
- [19] Beffa, C., and Connell, R. J.. Two-dimensional flood plain flow. I: Model description. *J. Hydrol. Eng.*, 6(5), 397–402. (2001)
- [20] Cobby, D. M., Mason, D. C., Horritt, M. S., and Bates, P. D.. Two-dimensional hydraulic flood modelling using a finite-element mesh decomposed according to vegetation and topographic features derived from airborne scanning laser altimetry. *Hydrol. Processes*, 17(10), 1979–2000. (2003)
- [21] Bates, P. D., and De Roo, A. P. J.. A simple raster-based model for flood inundation simulation. *J. Hydrol. (Amsterdam)*, 236(1–2), 54–77. (2000)
- [22] Bates, P. D., Anderson, M. G., Baird, L., Walling, D. E., and Simm, D.. Modelling floodplain flows using a two-dimensional finite element model. *Earth Surf. Processes Landforms*, 17(6), 575–588. (1992)
- [23] Junk, W. J., Bayley, P. B., and Sparks, R. E.. The flood pulse concept in river-floodplain systems. *Canadian Special Publication in Fisheries and Aquatic Sciences*, 106(1), 110–127. (1989)
- [24] Vreugdenhil, C. B.. Numerical methods for shallow-water flow. *Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands.* (1994)
- [25] Wu, W.. Computational river dynamics. *Taylor and Francis, London.* (2007)
- [26] Florsheim, J. L., and Mount, J. F.. Restoration of floodplain topography by sand-splay complex formation in response to intentional levee breaches, lower Cosumnes River, California. *Geomorphology*, 44(1–2), 67–94. (2002)
- [27] Vazquez-Cendon, M. E.. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. *J. Comput. Phys.*, 148(2), 497–526. (1999)

- [28] Hubbard, M. E., and García-Navarro, P.. Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients. *J. Comput. Phys.*, 165(1), 89–125. (2000)
- [29] Zhou, J. G., Causon, D. M., Mingham, C. G., and Ingram, D. M.. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations. *J. Comput. Phys.*, 168(1), 1–25. (2001)
- [30] Audusse, E., Bouchut, F., Bristeau, M. O., Klein, B., and Perthame, R.. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *J. Sci. Comput.*, 25(6), 2050–2065. (2004)
- [31] Liang, Q., and Borthwick, A. G. L.. Adaptive quadtree simulation of shallow flows with wetdry fronts over complex topography. *Comput. Fluids*, 38(2), 221–234. (2009)
- [32] Zhao, D. H., Shen, H. W., Tabios, G. Q., III, Lai, J. S., and Tan, W. Y.. Finite-volume two-dimensional unsteady-flow model for river basins. *J. Hydraul. Eng.*, 120(7), 863–883. (1994)
- [33] Bradford, S. F., and Sanders, B. F.. Finite-volume model for shallow water flooding of arbitrary topography. *J. Hydraul. Eng.*, 128(3), 289–298. (2002)
- [34] Audusse, E., Bouchut, F., Bristeau, M. O., Klein, B., and Perthame, R.. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *J. Sci. Comput.*, 25(6), 2050–2065. (2004)
- [35] Liang, Q.. Flood simulation using a well-balanced shallow flow model. *J. Hydraul. Eng.*, 136(9), 669–675. (2010)
- [36] Cook, A., and Merwade, V.. Effect of topographic data, geometric configuration and modelling approach on flood inundation mapping. *J. Hydrol. (Amsterdam)*, 377(1–2), 131–142. (2009)
- [37] Reutebuch, S.E., McGaughey, R.J., Andersen, H.-E., Carson, W.W.. Accuracy of a high-resolution lidar terrain model under a conifer forest canopy. *Canadian Journal of Remote Sensing*, 29(5):527-535. (2003)
- [38] Karolina Korzeniowska, Malgorzata Lacka. Generating dem from LIDAR data comparison of available software tools. *Archives of Photogrammetry, Cartography and Remote Sensing*, Vol. 22, pp. 271-284 ISSN 2083-2214. (2011)
- [39] Dal Cin, C., L. Moens, P.H. Dierickx, G. Bastin and Y. Zech. 2005. An Integrated Approach for Realtime Floodmap Forecasting on the Belgian Meuse River. *Natural Hazards* 36: 237–256. (2005)
- [40] Martin Vide, J. P.. Ingeniería de los ríos. *Ediciones UPC, Barcelona*. (2002)
- [41] M. B. Abbott. *Computacional Hydraulics*. Ashgate Pub. Comp.. (1992)
- [42] J. A. Cunge, F. M. Holly, A. Verwey. Practical aspects of computational river hydraulics. *Pitman Pub. Inc.*. (1989)
- [43] Roe, P. L.. A basis for upwind differencing of the two-dimensional unsteady Euler equations. *Numerical methods in fluid dynamics, Vol II, Oxford University Press, Oxford, UK*. (1986)

- [44] Cea, L., J. Puertas, and Vazquez-Cendon, M. E.. Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 14(3), 303–341. (2007)
- [45] Ratan Joarder, G. Jagadeesh. Roe linearization for the Euler equations augmented by the convective terms from the $k - \omega$ turbulence model. *Numerical methods in fluids, Volume 57, Issue 10, pages 1569–1576.* (2008)
- [46] Schumm, S and Kahn H.. Experimental Study of Channel Patterns. *Bulletin of the Geological Society of America (83) pp. 1755–1770.* (1972)
- [47] Richards, K.. Rivers. *Methuen and Co., New York. 361 pp.* (1982)
- [48] Rodrigo B. Platte, Lloyd N. Trefethen and Arno B. J. Kuijlaars. Impossibility of fast stable approximation of analytic functions from equispaced samples.
- [49] http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_Coordenadas_Universal_Transversal_de_Mercator.