



Universidad
Zaragoza



Facultad de Educación
Universidad Zaragoza

Máster de Profesorado en E.S.O., Bachillerato y F.P.

Trabajo Fin de Máster

Especialidad de Matemáticas

“PROPORCIONALIDAD EN 1º DE E.S.O.”

Autor: Beatriz Arguedas Gutiérrez

Tutor: D. Rafael Escolano Vizcarra

Zaragoza, Junio de 2012

ÍNDICE DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN	1
Objetivos del Máster y el TFM.....	1
Objetivos de la Memoria.....	1
A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR 3	
A.1 Nombra el objeto matemático a enseñar.....	3
A.2 Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.	3
A.3 ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?.....	4
B. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO	5
B.1 ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?.....	5
B.2 La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?.....	7
B.2.1 A partir del análisis de la Educación Primaria.....	7
B.2.2 A partir del análisis del texto de la Legislación	10
B.3 ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?.....	11
C. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO	13
C.1 ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?.....	13
C.2 ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?	13
C.2.1 Sobre el campo de problemas asociado	13
C.2.2 Sobre los sistemas de representación asociados.....	14
C.3 Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.....	15
C.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	16

D.	SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS.....	17
D.1	Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.	17
D.1.1	Según la tarea que involucra el problema	17
D.1.2	Según la magnitud que actúa como incógnita	21
D.1.3	Según el contexto en el que aparece la razón y la naturaleza de las magnitudes entre las que se establece la comparación.....	22
D.2	¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?.....	23
D.3	Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.....	23
E.	SOBRE LAS TÉCNICAS	27
E.1	Diseña los distintos tipos de ejercicios que vas a presentar en el aula.....	27
E.2	¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?.....	29
E.3	Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?.....	30
E.4	Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	30
F.	SOBRE LAS TECNOLOGÍAS (JUSTIFICACIÓN DE LAS TÉCNICAS)	31
F.1	¿Mediante que razonamientos se van a justificar las técnicas?	31
F.2	¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?	32
F.3	Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.	32
G.	SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA.....	33
G.1	Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.....	33
G.1.1	Esquema-resumen de la secuenciación	33
G.1.2	Fases de la secuenciación	34
G.2	Establece una duración temporal aproximada.....	35

H. SOBRE LA EVALUACIÓN	37
H.1 Diseña una prueba escrita para evaluar el aprendizaje realizado por los alumnos.....	37
H.2 ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?	45
H.3 ¿Qué criterios de evaluación se van a tener en cuenta?	46
I. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB	47
I.1 Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.	47
I.1.1 Bibliografía.....	47
I.1.2 Webgrafía	47
ANEXO A PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA LAS SESIONES	49
Actividades para estudiar situaciones de proporcionalidad	49
Actividades para trabajar el concepto de razón	50
Actividades para comparar razones.....	50
Actividades para emplear técnicas de resolución	51
Actividades para practicar con porcentajes	51
Actividades para repasar los conceptos aprendidos.....	52
ANEXO B ACTIVIDAD LÚDICA: “LAS AVENTURAS DE TRONCHO Y PONCHO”	53
Introducción	53
Características de la colección de episodios.....	53
Objetivo	54
Datos del episodio.....	54
Actividades.....	54
ANEXO C ACTIVIDADES DE DESARROLLO DE LAS COMPETENCIAS BÁSICAS DE LOS ALUMNOS.....	57

ACTIVIDAD 1: “¿Cuál es la mejor oferta?”	57
ACTIVIDAD 2: “¿Quién tiene razón?”	58
ACTIVIDAD 3: “¿Qué nutrientes nos aportan los cereales?”	59

ANEXO D USO DE LA CALCULADORA PARA OBTENER PORCENTAJES	61
Calculadora no científica.....	61
Calculadora científica	61

MEMORIA

INTRODUCCIÓN

La realización de este Trabajo Fin de Máster se enmarca dentro de una de las asignaturas del Máster Universitario en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas.

Objetivos del Máster y el TFM

El Máster Universitario en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas tiene como objetivo facilitar que el alumno adquiera la formación pedagógica y didáctica obligatoria en nuestra sociedad para el ejercicio de la profesión docente con arreglo a lo establecido en la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, el Real Decreto 1393/2007, el Real Decreto 1834/2008, y en la Orden ECI 3858/2007 de 27 de diciembre.

Según se refleja en la Guía Docente, el Trabajo Fin de Máster es una asignatura que constituye la síntesis de los aprendizajes realizados por el estudiante. Es una actividad en la que el estudiante materializa las competencias, conocimientos y aptitudes adquiridos a lo largo de la titulación.

Objetivos de la Memoria

El objetivo de esta Memoria es presentar de manera clara y concisa los distintos aspectos que implica la enseñanza de la proporcionalidad en 1º de E.S.O.

Esta Memoria se divide en nueve capítulos; además, se incluyen una serie de Anexos con información adicional que sería de utilidad en el desarrollo de los contenidos en el aula.

A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

En este capítulo se hace una breve exposición de los aspectos que va a tratar el desarrollo del posterior análisis, para ofrecer así una visión global del marco en el que se enmarca la didáctica del objeto matemático en cuestión.

A.1 Nombra el objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático que se va a estudiar en el presente trabajo va a ser la "Proporcionalidad", perteneciente al área de Aritmética.

En el Currículo Aragonés, se enmarca dentro del bloque de conocimiento de Números de 1º de E.S.O. Se transcriben a continuación los contenidos de este bloque que se fijan en la legislación para este curso:

Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales.

Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Utilización de técnicas escritas o con calculadora para hallar aumentos y disminuciones porcentuales. Aplicación de la proporcionalidad.

Así como los criterios de evaluación:

Utilizar los procedimientos básicos en la proporcionalidad numérica (como la regla de tres o el cálculo de porcentajes) para obtener cantidades directamente proporcionales a otras, en un contexto de resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana, eligiendo la notación y las aproximaciones adecuadas y valorándolas de acuerdo con el enunciado. Los estudiantes han de mostrar su capacidad para relacionar magnitudes directamente proporcionales mediante una fracción, para utilizar la igualdad de fracciones en la búsqueda del término desconocido de una proporción y para llevar el control de las magnitudes con las que trabajan, de las aproximaciones decimales de los datos y de los cálculos intermedios.

A.2 Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

El curso en el que se encuentra este objeto matemático es 1º de E.S.O., primer curso de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, dentro del conocimiento de la asignatura de Matemáticas.

A.3 ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

La proporcionalidad numérica está íntimamente relacionada con el significado de razón del número racional positivo, entendiendo esta razón como la medida de cantidad de una magnitud cuando se toma como unidad de medida otra cantidad de magnitud.

Para que la proporcionalidad tenga sentido es necesario estudiar si las magnitudes implicadas en un problema son proporcionales y para ello hay que asegurarse de que se cumple una condición de linealidad o regularidad.

En este estudio van a aparecer diferentes sistemas de representación asociados al concepto de proporcionalidad: fracción a/b , porcentaje $a\%$, escala $a:b$ o decimal a,b .

También va a ser necesario utilizar diferentes técnicas, como la de reducción a la unidad, el razonamiento algebraico y la regla de tres.

Así, los objetivos que tenemos con nuestra enseñanza son los siguientes:

- ❖ Reconocer si dos magnitudes son directamente proporcionales.
- ❖ Aplicar diferentes técnicas para resolver problemas de proporcionalidad.
- ❖ Utilizar diferentes sistemas de representación en la resolución de dichos problemas.

B. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

En este capítulo se hace una reflexión acerca de las condiciones en las que los alumnos afrontan el aprendizaje de los nuevos conceptos, analizando la enseñanza que han recibido previamente. La enseñanza de la proporcionalidad en el primer curso de Educación Secundaria ha de realizarse aprovechando los conocimientos anteriores de los alumnos y motivándolos para incorporar los nuevos conceptos.

No es de extrañar que algunos encuentren dificultades. Por ello, habrá que tener especial cuidado en que los nuevos conceptos sean comprendidos y que estén, en la medida de lo posible, relacionados con los conocimientos previos de los alumnos para que no lo vean como un tema “aislado” y separado de toda aplicación práctica.

B.1 ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Con esta secuencia didáctica se comienza formalmente el estudio de la proporcionalidad. Los alumnos suelen llegar a 1º de E.S.O. con un conocimiento previo muy dispar.

Normalmente no tendrán problemas en adquirir los procedimientos de cálculo con números naturales, pero sí encontrarán algunas dificultades trabajando con fracciones o porcentajes. Es aquí donde debemos intentar ayudarles a superar estas barreras. Este trabajo previo es fundamental para poder rentabilizar el esfuerzo que supone adquirir los conceptos que aquí se introducen.

La proporcionalidad numérica es un concepto que resulta a los alumnos complejo y difícil de comprender, no sólo por las dificultades que muestran para realizar operaciones con números racionales, sino también por las dificultades asociadas a la comprensión de la razón como medida “singular” que implica a dos magnitudes.

Dada la complejidad que comporta el concepto de razón en esta propuesta, resultaría conveniente repasar los significados del número racional positivo como medida, atendiendo a las magnitudes implicadas en cada contexto.

A pesar de que el mayor problema es conceptual, y no de cálculo, hay una serie de técnicas que el alumno debería conocer de cursos anteriores para afrontar con éxito esta secuencia didáctica y que sería adecuado repasar para asegurarnos de que pueden afrontar los nuevos contenidos. En el caso concreto de la proporcionalidad, convendría repasar los aspectos que se detallan a continuación.

✓ **OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES**

¿Cómo se multiplica o divide un número por 10, 100, 1.000...?

Para multiplicar un número por 10, 100, 1.000..., se desplaza la coma a la derecha tantos lugares como ceros tenga la unidad: 1, 2, 3...

$$3,47 \cdot 100 = 347$$

$$589 \cdot 1.000 = 589.000$$

Para dividir un número entre 10, 100, 1.000..., se desplaza la coma a la izquierda tantos lugares como ceros tenga la unidad: 1, 2, 3...

$$25,87 : 100 = 0,2587$$

$$29 : 10 = 2,9$$

¿Para qué? Se utilizará para trabajar con porcentajes.

✓ **OPERACIONES CON FRACCIONES**

¿Cómo se amplifican y simplifican fracciones?

AMPLIFICACIÓN: Multiplicamos numerador y denominador por un mismo número distinto de cero y mayor que la unidad.

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{ka}{kb}$$

SIMPLIFICACIÓN: Dividimos numerador y denominador por un mismo número distinto de cero y mayor que la unidad.

$$\frac{a}{b} = \frac{a:k}{b:k} = \frac{ka}{kb}$$

¿Para qué? Se necesitará para estudiar series de razones iguales.

✓ **RELACIÓN ENTRE LOS NÚMEROS DECIMALES Y LAS FRACCIONES**

¿Cómo pasar de números decimales exactos a fracciones?

Se pone en el numerador el número decimal sin la coma, y en el denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras haya a la derecha de la coma. Simplificamos después todo lo que podamos.

$$1,6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

¿Para qué? Se utilizará para trabajar con proporciones.

B.2 La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

B.2.1 A partir del análisis de la Educación Primaria

❖ SOBRE EL CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD

Los conocimientos previos son de gran importancia, pues son muy necesarios para la correcta comprensión de los nuevos contenidos. En la Educación Primaria, los alumnos reciben enseñanza de los conceptos de razón, proporción y porcentaje.

Al analizar el tratamiento que se le da a la proporcionalidad en la escuela se aprecia que en un principio es utilizada como una “herramienta útil” y mucho más adelante como una función. De este modo, los alumnos se enfrentan a muchos problemas que resuelven apoyándose en las propiedades de la proporcionalidad:

- la idea de “tantas veces más o tantas veces menos” (si compro el triple de objetos, pagaré el triple) es una de las propiedades de linealidad que usan con mayor frecuencia aunque no la hayan aprendido en la escuela;
- el coeficiente de proporcionalidad es puesto en juego particularmente en los casos en los que se vinculan dos magnitudes de la misma naturaleza como en el caso de las mezclas (cinco vasos de agua por cada uno de jarabe) o en la ampliación y reducción de figuras a escala (las dimensiones en el papel son cien veces más pequeñas que en la realidad). En la escuela, aprenderán luego cómo simbolizar el coeficiente de proporcionalidad y cómo operar con él.

Al finalizar la Educación Primaria, la noción de proporcionalidad está ligada a cierto tipo de razonamiento contextualizado, apoyado por alguna de las dos propiedades mencionadas anteriormente: crecimiento lineal y constante de proporcionalidad.

Un concepto se va formando a medida que los sujetos van descubriendo qué tienen en común todos los elementos que pertenecen a una clase. Detectan aquello que es común y luego pueden discernir qué objetos no cumplen con las condiciones necesarias para pertenecer a esa clase. Por eso, en el trabajo con la proporcionalidad también es necesario presentar a los alumnos situaciones en las que el aumento en las dos variables en juego no sea proporcional.

El tratamiento de la proporcionalidad pone en evidencia que, desde un principio, los alumnos pueden resolver situaciones de proporcionalidad aplicando procedimientos locales y personales, como lo hacían en la Educación Primaria. Poco a poco, a partir del estudio de las proporciones numéricas y de la construcción del

significado del coeficiente de proporcionalidad, esos procedimientos locales se irán generalizando hasta emplear otros métodos más complejos.

Determinar si dos magnitudes son directamente proporcionales, suele ofrecer problemas a los alumnos. Debido a que este tipo de magnitudes están presentes en la vida cotidiana, hay que hacerles ver la necesidad de que las magnitudes cumplan una serie de condiciones:

- Que exista una condición de linealidad entre estas magnitudes.
- Que se pueda definir una constante de proporcionalidad: es aquí donde aparece la razón como medida de una cantidad de magnitud por unidad de medida de otra cantidad de magnitud.
- Que la modificación de las cantidades no haga variar la razón entre dichas cantidades.

El siguiente ejemplo sirve para ilustrar el análisis de estas condiciones en un problema concreto:

“Un coche que circula a velocidad constante recorre un trayecto de 320 kilómetros en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros recorrería si circulara durante 2 horas?”

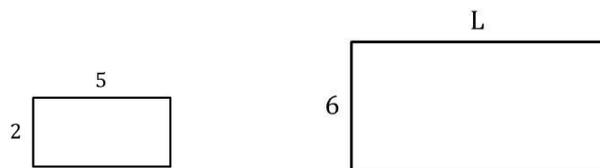
- Existe condición de linealidad entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en ello: *la velocidad es constante.*
- Se puede definir una constante de proporcionalidad: *(320 kilómetros/3 horas=106,67 km/h)*. En este caso, también tendría sentido la razón inversa *(3 horas/320 kilómetros=0,009375 h/km)*.
- La modificación de las cantidades no hace variar la razón entre dichas cantidades: es una consecuencia inmediata de la condición de linealidad.

Los alumnos de Educación Primaria son capaces de resolver problemas como el que se acaba de mostrar; otra cuestión diferente es la de constatar si comprenden verdaderamente el significado de las magnitudes implicadas en la situación de proporcionalidad. De hecho, diferentes estudios realizados tanto a nivel nacional como internacional alertan de las dificultades de los alumnos para razonar el procedimiento empleado.

❖ **SOBRE EL RAZONAMIENTO ADITIVO FRENTE AL MULTIPLICATIVO**

Diversas investigaciones han puesto de manifiesto que los estudiantes basan su razonamiento intuitivo sobre las razones y proporciones en técnicas aditivas y de recuento en lugar de razonar en términos multiplicativos, lo que indica una deficiencia importante.

Por ejemplo, cuando se les pide encontrar la longitud del lado L en la figura inferior, los alumnos contestan con frecuencia que es 9 ($5+4$) en lugar de 15 ($5 \cdot 3$). Consideran que si la altura ha aumentado 4 unidades, lo mismo sucederá con la anchura. Esto es, los alumnos tienden a sumar una cantidad en lugar de multiplicar por un factor de escala.



Técnica aditiva vs técnica multiplicativa

Por ello, es muy importante que los alumnos tengan claro el hecho de que cuando al aumentar una magnitud aumente también la otra, no significa que sean directamente proporcionales, sino que se han de verificar las condiciones detalladas anteriormente.

B.2.2 A partir del análisis del texto de la Legislación

En el Boletín Oficial de Aragón, en la Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón (B.O.A. 65, 1 de junio de 2007), se describen los siguientes contenidos de la materia:

Bloque 1. Números y operaciones

- *Fracciones. Contextos en que aparecen. Funciones que cumplen: medir, repartir, comparar y transformar. La fracción como comparación de cantidades de magnitud: porcentaje. Expresión de partes utilizando porcentajes. Cálculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales.*

- *Equivalencia entre números fraccionarios y decimales: paso de fracción decimal a número decimal, paso de número decimal exacto a fracción, paso de fracción a número decimal: número decimal periódico. Correspondencia entre fracciones sencillas, números decimales y porcentajes.*

Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de cantidades de magnitudes

- *La técnica de medir: comparación con la unidad y expresión del resultado de la medida. Comparación de objetos según longitud, peso/masa o capacidad, de manera directa o indirecta. Realización de experiencias de medición de cantidades de distintas magnitudes -longitud, capacidad, masa, tiempo y superficie- utilizando unidades e instrumentos no convencionales.*

Una vez expuestos los conocimientos previos que el alumno debe poseer para afrontar el aprendizaje del nuevo objeto matemático en 1º de E.S.O., y después de haber comprobado que el B.O.A. exige que se vean estos contenidos en la Educación Primaria, etapa inmediatamente anterior a la que se está tratando, podemos concluir que el alumno se presenta en condiciones de afrontar con garantías la enseñanza del nuevo objeto matemático.

B.3 ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Es conveniente llevar a cabo una serie de actividades de tipo práctico, donde el alumno pueda explorar sus conocimientos de manera activa. Realizar estas actividades supone un medio eficaz para presentar a los alumnos los conceptos e ideas fundamentales que deben tener para abordar la secuencia didáctica. Se trata de una puesta a punto antes de pasar a tratar los contenidos.

El objetivo es ofrecer una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos que pongan en juego relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes.

A continuación se describen dos actividades para evaluar la comprensión inicial de los alumnos sobre la proporcionalidad, siendo conscientes de que no son totalmente representativas del amplio campo de problemas asociado a la razón.

Actividad 1: Dibujos a escala

Sobre papel cuadriculado se pedirá a los alumnos que dibujen una figura sencilla sobre las líneas de la cuadrícula. A continuación deberán dibujar otra figura con la misma forma, pero de mayor tamaño. La imagen inferior muestra un ejemplo de la propuesta.

Una vez dibujadas ambas figuras, se preguntará la relación que existe entre los lados correspondientes de cada figura. Se intentará que lleguen a la conclusión de que los lados de la segunda se obtienen multiplicando cada lado de la primera por un valor, que es precisamente lo que llamaremos razón de semejanza.

Esta actividad permitirá relacionar la idea geométrica de semejanza con el concepto numérico de razón, que se tratará a continuación.

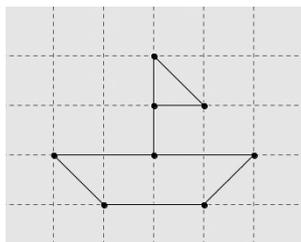


Figura inicial

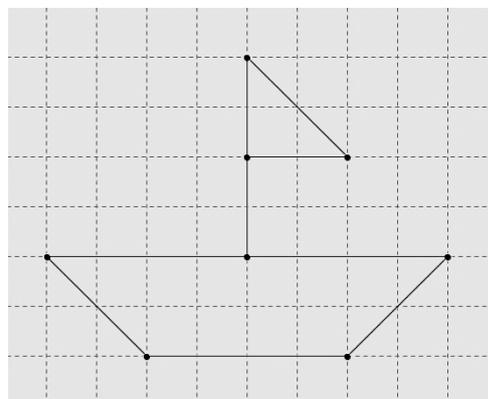


Figura semejante

Actividad 2: Razones entre cantidades de magnitud

Esta actividad servirá para alertar a los alumnos sobre el abuso que se hace de la proporcionalidad al sobredimensionar el efecto de la linealidad, pues si bien se produce en un gran número de casos, no ocurre en todos, como se verá en alguno de los ejemplos.

Hay que destacar en este punto que aunque reflejemos en este punto el valor de la razón, todavía no pediremos a los alumnos que lo calculen, ya que todavía no hemos introducido este concepto. Lo haremos cuando comencemos el tratamiento de la proporcionalidad.

“Para cada uno de los contextos que se indican a continuación, indica las condiciones que deben cumplir las magnitudes para que tenga sentido medir una de las cantidades de magnitud con la unidad de medida de la otra magnitud.”

a) *Para 300 alumnos hay un patio de 2400 m².*

Sí tiene sentido la proporcionalidad.

CONDICIÓN: que los alumnos se distribuyan uniformemente en la superficie del patio.

En este caso, existen dos razones. La primera es $300/2400=1/8=0,125$ alumnos/m², que nos indica que en un espacio de 1 m² caben 0,125 alumnos. La segunda es $2400/300=8$ m²/alumno, que nos indica que cada alumno necesita un espacio de 8 m².

b) *Por 125 euros me han dado 175 dólares.*

Sí tiene sentido la proporcionalidad.

CONDICIÓN: que el cambio entre euros y dólares sea estable.

En este caso, también existen dos razones. La primera es $125/175=5/7=0,714$ euros/dólar, que nos indica que por cada dólar nos dan 0,714 euros. La segunda es $175/125=7/5=1,4$ dólares/euro, que nos indica que por cada euro nos dan 1,4 dólares.

c) *Laura tiene 10 años y tiene una estatura de 120 cm.*

No tiene sentido la proporcionalidad, ya que la edad y la estatura nos son magnitudes proporcionales.

C. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

En este capítulo se describen las principales características de la proporcionalidad, analizándola en el contexto actual y en el histórico.

C.1 ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La proporcionalidad es una relación entre magnitudes medibles. Es uno de los escasos conceptos matemáticos ampliamente difundido en la población, ya que es intuitiva y de uso común. Su importancia queda constatada por la utilidad de la misma en la vida diaria de nuestro alumnado, ya que les ayudará a conocer distintas magnitudes y compararlas, haciéndoles conscientes de que estamos inmersos en un mundo de magnitudes, donde casi todo es susceptible de ser medido.

Nuestra sociedad está evolucionando de manera acelerada en los últimos tiempos y en la actualidad es necesario un mayor dominio de las destrezas y conocimientos matemáticos que hace unos años. Actualmente, la proporcionalidad está presente en diversos estudios: la evolución del cáncer, la problemática del cambio climático, el control de la economía...

Las comparaciones de precios, el uso de escalas en los mapas, la solución de problemas de porcentajes son algunos ejemplos de situaciones prácticas en las que es necesario emplear las proporciones. Todas estas situaciones servirán para introducir el concepto de razón.

C.2 ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

C.2.1 Sobre el campo de problemas asociado

En efecto, la medida en general, y el trueque en particular van a ser útiles a la hora de introducir el objeto matemático. Estos dos aspectos fueron el detonante de la aparición del objeto matemático de la proporcionalidad y van a aparecer en los problemas que plantearemos a lo largo de las sesiones.

Dado que el campo de problemas organizado por la razón es muy extenso, en este trabajo no se va a destacar ningún problema sobre los demás como generador de este concepto, si bien Oller (2012) sitúa la razón de ser en el trueque.

C.2.2 Sobre los sistemas de representación asociados

a) Notación fraccionaria

La fracción es el sistema de representación más habitual para comunicar ideas de razón. La sintaxis de este sistema de representación tiene la ventaja de que hace explícitas las cantidades de magnitud que se comparan. La fracción con el significado de razón está constatada históricamente. En efecto, en las tablillas económicas encontradas en Asiria y en Babilonia aparecen fracciones con el significado de razón que informan de diversas actividades comerciales como cambios o trueques, y actividades financieras como préstamos e intereses (Michel, 1992; p. 87). En la antigua civilización egipcia, la fracción aparece como solución de problemas de proporcionalidad entre el número de hogazas de pan y la “fuerza” o “pesu” del pan, que es la magnitud recíproca de la densidad del grano, es decir, el cociente del número de hogazas y la cantidad de grano empleado (Boyer, 1986; p. 36).

b) Notación porcentual

Las situaciones problemáticas que organiza la razón hacen emerger otros sistemas de representación del número racional positivo, como el porcentaje. La sintaxis de la notación porcentual presenta variaciones importantes con respecto a la notación fraccionaria: el porcentaje no explicita las cantidades que se comparan, indica la comparación multiplicativa entre una cantidad y 100 unidades de la unidad de medida con la que se mide la otra cantidad.

c) Notación decimal

La expresión decimal indica la medida de una cantidad de magnitud cuando se mide con la unidad de medida de otra o de la misma magnitud. El número decimal tiene el significado de “tanto por uno”; es decir, la medida de una cantidad de la magnitud M_1 (medida con la unidad u_1) que se corresponde con la unidad u_2 , de otra magnitud M_2 . Las magnitudes pueden ser iguales o diferentes, y en el caso de ser iguales pueden estar medidas con la misma o con distinta unidad.

d) Notación de escala

En este caso, la comparación se establece entre magnitudes iguales. Normalmente, esta escala indica la ampliación o reducción que se aplica para que un objeto quede claramente representado en el plano del dibujo. Se define la escala como la relación entre la dimensión dibujada respecto de su dimensión real.

C.3 Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

El aprendizaje de las Matemáticas, para ser fructífero y responder a las demandas de los alumnos y de la sociedad, debe estar vinculado siempre que sea posible a situaciones reales próximas y de interés para el alumno.

¿Cómo podemos enseñar entonces la proporcionalidad de manera práctica? Los contextos en los que podemos ilustrar la razón de ser de la proporcionalidad son muy variados y atienden a los siguientes campos:

- CAMPO 1. Situaciones en las que resulta adecuado emplear la proporcionalidad.
- CAMPO 2. Situaciones de comparación de razones.
- CAMPO 3. Situaciones en las que se utiliza una de las siguientes tres técnicas para la resolución de problemas: reducción a la unidad, razonamiento algebraico o regla de tres.

Un buen punto de partida para ejemplificar el significado de razón puede ser la preparación de una receta. La composición de una receta está sujeta a las proporciones exactas de cada uno de sus componentes. Para preparar un plato determinado, es necesario utilizar unas cantidades proporcionales a otras, a partir de una cantidad dada.

“Una receta de cocina recomienda mezclar 8 cucharadas de azúcar con medio litro de leche para hacer un pastel. Si se dispone de un litro de leche ¿cuántas cucharadas de azúcar hay que mezclar?”

Para resolver el problema desde el significado de razón debemos comprobar si se cumple la condición de proporcionalidad, es decir, si tiene sentido suponer que la proporción entre las cantidades de ingredientes se mantiene constante. Después, una vez verificada esta condición, se trata de medir las cucharadas de azúcar que se mezclan con la unidad de la otra magnitud: un litro de leche.

La fracción “8 cucharadas de azúcar/(1/2) litro de leche” equivale a “16 cucharadas de azúcar/1 litro de leche”. Esta solución, que es precisamente el valor de la razón indica lo siguiente: “hay que mezclar 16 cucharadas de azúcar por cada litro de leche”.

Aunque el valor del porcentaje es muy elevado, también sería correcto utilizar la notación porcentual 1.600% para indicar la proporción entre azúcar y leche, es decir, que hay que mezclar 1.600 cucharadas de azúcar por cada 100 litros de leche.

Problemas como éste nos permiten emplear las proporciones para calcular la cantidad que se necesita de cada ingrediente, en el caso de una receta, o de cualquier otra de las magnitudes que aparezcan en un problema de proporcionalidad. Podemos ver con ello que a medida que va creciendo una magnitud también lo hace la otra, de manera proporcional.

C.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Se optará por una metodología sustentada en la resolución de problemas. Ésta se concretará del siguiente modo: el profesor planteará una situación problemática (por ejemplo: ¿la estatura y la edad de una persona son magnitudes proporcionales? o ¿el número de cromos que compro y el dinero que pago por ellos están relacionados?) y se dejará a los alumnos que planteen una solución trabajando en grupo (o en ocasiones de forma individual).

En esta metodología, el profesor se convierte en promotor de la investigación: únicamente presentará el problema y enseñará algunos aspectos o conocimientos mínimos necesarios para abordarlo. Después, su labor será de observación activa del trabajo de los alumnos organizados en grupos, comprobando el trabajo y el avance de los mismos, mientras aclara las dudas que puedan surgir.

Cuando los alumnos hayan resuelto el problema, se procederá a realizar una puesta en común de las soluciones aportadas por los grupos y, finalmente, el profesor institucionalizará el conocimiento resaltando los conceptos o técnicas que hayan aparecido en la fase de resolución.

En resumen, se procurará que en todo momento sean los alumnos los que se enfrenten a las situaciones planteadas, siendo ellos mismos los que se planteen preguntas y empleen diferentes alternativas para resolver los problemas. La labor del profesor no será la de realizar exposiciones para transmitir saberes, sino que consistirá en diseñar y plantear problemas y actividades que potencien el aprendizaje colaborativo y que sean adecuadas para que surja el conocimiento en el aula. Una vez que hayan trabajado de modo autónomo, será el profesor el encargado de realizar el proceso de institucionalización.

D. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

En este capítulo se exponen los diferentes tipos de problemas que organiza la razón, cuya presencia es habitual en la vida cotidiana. El objetivo de los problemas que se van a presentar es conseguir afianzar los conocimientos aprendidos mediante su aplicación en contextos reales y, a la vez, motivar a los alumnos haciéndoles ver la presencia y utilidad de las Matemáticas en la realidad.

D.1 Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

El campo de problemas que organiza la razón es muy amplio. Así, las magnitudes físicas, como la velocidad, densidad o caudal, los indicadores sociales, como la densidad de población, el consumo medio por habitante, las situaciones de cambio o trueque, y las proporciones entre mezclas son razones entre magnitudes distintas que modelizan fenómenos cotidianos. Otras razones establecen comparaciones entre magnitudes iguales como es el caso de la escala asociada a la semejanza geométrica, la probabilidad, el porcentaje de aumento o descuento de precios.

Los distintos tipos de problemas con los que se va a trabajar se pueden clasificar atendiendo a tres criterios fundamentalmente:

- 1) Según la tarea que involucra el problema
- 2) Según la magnitud que actúa como incógnita
- 3) Según el contexto en el que aparece la razón y la naturaleza de las magnitudes entre las que se establece la comparación

D.1.1 Según la tarea que involucra el problema

La tabla inferior muestra los diferentes campos de problemas que se van a mostrar en clase atendiendo a una clasificación en función del primer criterio: la tarea que los alumnos han de llevar a cabo.

	CAMPOS DE PROBLEMAS
TIPO 1	Estudio de la condición de proporcionalidad y definición de la razón.
TIPO 2	Resolución de problemas mediante la comparación de razones.
TIPO 3	Resolución de problemas mediante la aplicación de una técnica alternativa a la comparación de razones: reducción a la unidad, razonamiento algebraico o regla de tres.

TIPO 1: Estudio de la condición de proporcionalidad y definición de la razón

Esta actividad está estrechamente relacionada con la empleada para analizar los conocimientos previos de los alumnos en el Apartado B.3. De esta forma, existe un nexo de unión entre los conocimientos que tenían y los que van a adquirir. En este punto, los alumnos ya pueden calcular el valor de la razón. Así, el enunciado sería similar al de la actividad planteada anteriormente, introduciendo el concepto de razón.

“Para cada uno de los contextos que se indican a continuación, indica las condiciones que deben cumplir las condiciones de magnitud para que tenga sentido establecer la razón y, si es posible, calcula la razón y explica su significado.”

- a) *En 3 folios hay 40 problemas.*

Sí tiene sentido la proporcionalidad.

CONDICIÓN: que todos los problemas ocupen el mismo espacio de papel.

RAZÓN:

$$k = \frac{40 \text{ problemas}}{3 \text{ folios}} = \frac{40}{3} \text{ problemas/folio} = 13,3 \text{ problemas/folio}$$

- b) *Por un anuncio de 35 palabras, Lucía ha pagado 12 €.*

Sí tiene sentido la proporcionalidad.

CONDICIÓN: que todas las palabras valgan lo mismo.

RAZÓN:

$$k = \frac{12 \text{ €}}{35 \text{ palabras}} = \frac{12}{35} \text{ €/palabra} = 0,34 \text{ €/palabra}$$

- c) *Por un río bajan 346 m³ de agua en 5 horas.*

Sí tiene sentido la proporcionalidad.

CONDICIÓN: que la cantidad de agua que baja (caudal) sea constante.

RAZÓN:

$$k = \frac{346 \text{ m}^3}{5 \text{ horas}} = \frac{346}{5} \text{ m}^3/\text{hora} = 69,2 \text{ m}^3/\text{hora}$$

TIPO 2: Resolución de problemas mediante la comparación de razones

El objetivo es estimular la discusión y experimentación en la comparación y predicción de razones. Hemos de procurar que los alumnos distingan las situaciones de comparación multiplicativa (proporcionalidad) de las no multiplicativas, proporcionando ejemplos y discutiendo las diferencias entre ellas.

El procedimiento que vamos a emplear va a ser la obtención del tanto por uno en cada una de las situaciones, para deducir así la respuesta a la pregunta planteada.

“Calcula las razones en los casos en los que tenga sentido y, después compara su valor para contestar a la pregunta.”

- a) *En la Tienda A, si compras 3 camisetas, te regalan 4 discos, y en la Tienda B, si compras 4 camisetas te regalan 5 discos.*

¿En qué tienda es más rentable comprar?

Sí tiene sentido la proporcionalidad.

CONDICIÓN: que se conserve la proporción entre camisetas compradas y discos regalados.

Tienda A:

$$k_A = \frac{4 \text{ discos}}{3 \text{ camisetas}} = \frac{4}{3} \text{ discos/camiseta}$$

Tienda B:

$$k_B = \frac{5 \text{ discos}}{4 \text{ camisetas}} = \frac{5}{4} \text{ discos/camiseta}$$

$$k_A = \frac{4}{3} > k_B = \frac{5}{4} \Rightarrow \text{Es más rentable comprar en la Tienda A.}$$

- b) *En la Región A, hay 120 personas en 8 km², y en la Región B, hay 130 personas en 9 km².*

¿En qué región hay más densidad de población?

Sí tiene sentido la proporcionalidad.

CONDICIÓN: que las personas se distribuyan uniformemente en el territorio.

Región A:

$$k_A = \frac{120 \text{ personas}}{8 \text{ km}^2} = \frac{120}{8} \text{ personas/km}^2 = 15 \text{ personas/km}^2$$

Región B:

$$k_A = \frac{130 \text{ personas}}{9 \text{ km}^2} = \frac{130}{9} \text{ personas/km}^2 = 14,4 \text{ personas/km}^2$$

$$k_A = \frac{120}{8} > k_B = \frac{130}{9} \Rightarrow \text{La Región A tiene más densidad de población.}$$

TIPO 3: Resolución de problemas mediante la aplicación de una técnica alternativa a la comparación de razones

Al resolver los problemas, van a aparecer tres técnicas que serán de utilidad para obtener la solución y que se han mencionado anteriormente: reducción a la unidad, razonamiento algebraico o regla de tres.

Aunque estas técnicas se explican con detalle en un apartado posterior, a continuación se muestra un ejemplo de problema para ilustrar cada una de ellas.

“Juan ha realizado una larga caminata: ha recorrido 10 kilómetros y ha tardado 3 horas. ¿Cuántos kilómetros habría recorrido si hubiera caminado durante 2 horas?”

Sí tiene sentido la proporcionalidad.

CONDICIÓN: que la velocidad de Juan sea constante.

1) REDUCCIÓN A LA UNIDAD

$$\text{Razón} = \frac{10 \text{ kilómetros}}{3 \text{ horas}} = 3,33 \text{ km/h}$$

$$\text{Kilómetros que recorre en 2 horas} = \frac{10 \text{ kilómetros}}{3 \text{ horas}} \cdot 2 \text{ horas} = 6,67 \text{ km}$$

2) RAZONAMIENTO ALGEBRAICO

$$\frac{10 \text{ km}}{3 \text{ horas}} = \frac{x}{2 \text{ horas}}$$

$$x = \frac{2 \cdot 10}{3} = 6,67 \text{ km}$$

3) REGLA DE TRES

10 km _____ 3 horas

x _____ 2 horas

$$x = \frac{2 \cdot 10}{3} = 6,67 \text{ km}$$

$$x = 6,67 \text{ km}$$

Empleando cualquiera de las tres técnicas mencionadas, se obtiene la misma solución: *Juan habría recorrido 6,67 kilómetros*, si bien el razonamiento empleado para llegar al resultado es diferente.

D.1.2 Según la magnitud que actúa como incógnita

- I. Se conoce la razón de proporcionalidad y una de las cantidades que interviene en la razón y se pregunta por la otra cantidad de magnitud.

EJEMPLO: *“En una clase hay 3 niñas por cada 2 niños. Si en la clase hay 15 niñas, ¿cuántos niños hay?”*

- II. Se conocen dos cantidades de magnitud que están relacionadas y se pregunta por la razón de proporcionalidad.

EJEMPLO: *“En una clase hay 15 niñas y 10 niños, ¿qué razón hay entre el número de niñas y el número de niños?”*

- III. Se conoce la razón de proporcionalidad y la cantidad total de una magnitud y se pregunta por la cantidad de cada parte comparada por la razón.

EJEMPLO: *“En una clase hay 3 niñas por cada 2 niños. Si en la clase hay 25 alumnos, ¿cuántos niños y cuántas niñas hay en esa clase?”*

D.1.3 Según el contexto en el que aparece la razón y la naturaleza de las magnitudes entre las que se establece la comparación

COMPARACIÓN ENTRE DOS MAGNITUDES DISCRETAS	
CONTEXTO 1	<p>MODELO UNIÓN: modelo de comparación de dos partes de un todo. <i>“En una clase hay 12 chicos y 15 chicas. La razón que hay entre el número de chicos y chicas es $4/5$.”</i></p>
CONTEXTO 2	<p>MODELO DE DENSIDAD: modelo de cambio o trueque. <i>“Si la relación entre euro y dólar es $2/3$, entendemos que 2 dólares equivalen a 3 euros.”</i></p>

COMPARACIÓN ENTRE DOS MAGNITUDES CONTINUAS		
CONTEXTO 1	Magnitudes iguales	<p>ESCALA: <i>“El plano de planta de una casa está a escala $1:50$.”</i></p> <p>DESCUENTO/AUMENTO: <i>“Los artículos en rebajas tienen un 15% de descuento.”</i></p>
	Objetos de igual naturaleza	
CONTEXTO 2	Magnitudes iguales	<p>MEZCLA: <i>“La receta indica que hay que mezclar 2 cucharadas de azúcar con 5 cucharadas de leche.”</i></p>
	Objetos de distinta naturaleza	
CONTEXTO 3	Magnitudes distintas	<p>MODELIZACIÓN DE FENÓMENOS FÍSICOS (velocidad, caudal,...): <i>“Un coche que circula a velocidad constante recorre un trayecto de 7 km en 5 minutos.”</i></p>
	Objetos de distinta naturaleza	

COMPARACIÓN ENTRE UNA MAGNITUD CONTINUA Y UNA DISCRETA		
CONTEXTO 1	Objetos de distinta naturaleza	<p>DENSIDAD DE POBLACIÓN: <i>“La densidad de población de España es de $93,51 \text{ hab/km}^2$.”</i></p>
CONTEXTO 2	Objetos de distinta naturaleza	<p>CONSUMO DE UNA MAGNITUD POR HABITANTE: <i>“El consumo medio de agua es de 1,75 litros de agua por persona y día.”</i></p>

D.2 ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Se espera que los alumnos utilicen la técnica de reducción a la unidad para resolver los problemas de proporcionalidad planteados, dado que es la más natural en cuanto a que incorpora razonamientos aritméticos, que son los más conocidos para los alumnos en este nivel.

Ahora bien, para que los alumnos apliquen con éxito esta técnica, es necesario no sólo que analicen las magnitudes implicadas y entiendan bien el contexto en el que se sitúa el problema, sino que además sean capaces de elegir adecuadamente la razón, en función de la solución que queramos obtener, por ejemplo: *parte 1/parte 2*; *parte 2/parte 1*; *parte 1/parte total*; *parte 2/parte total*.

D.3 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Se dará gran importancia a la resolución de problemas y al procedimiento empleado para ello. Debido a la recurrencia de los enunciados, es importante tener claro cómo resolver un problema de proporcionalidad.

Es importante destacar en este punto que una de las claves de la resolución de problemas de proporcionalidad reside en la identificación de las magnitudes que intervienen y las relaciones que existen entre ellas. Es conveniente que sean los propios alumnos los que reflexionen sobre ello, sin la ayuda del profesor.

El método es similar al que los alumnos han podido seguir para cualquiera de los problemas vistos en ocasiones anteriores, si bien se puede adaptar a los conceptos relacionados con el objeto matemático de la proporcionalidad. Así, los pasos que se deben tener en cuenta son los siguientes:

- 1) Analizar el contexto en el que se sitúa el problema.
- 2) Identificar las magnitudes implicadas.
- 3) Preguntarse si las magnitudes cumplen o no la condición de proporcionalidad. Si es el caso, obtener el valor de la razón, es decir, el valor resultante de la comparación de las magnitudes implicadas. Esta razón puede tener o no unidades, así como un nombre específico (caudal, velocidad, densidad, etc.). Además, es importante dejar constancia escrita del significado de esta razón.

- 4) Determinar los sistemas de representación asociados a las cantidades de magnitud que se comparan y a la cantidad resultante de la comparación (fracción a/b , porcentaje $a\%$, escala $a:b$, decimal a,b).
- 5) Emplear la razón para calcular la magnitud que aparece como incógnita utilizando una de las tres técnicas descritas: método de reducción a la unidad, razonamiento algebraico o regla de tres.

En los problemas de proporcionalidad resulta adecuado además que los alumnos comprueben la utilidad de reducir enunciados con datos largos o complicados a otros iguales con cantidades más pequeñas y sencillas, para después poder generalizar el método y poderlo aplicar al problema planteado.

Ejemplo

Pedro quiere comprarse una bici que cuesta 260 €. Si la tienda le hace un descuento del 15%, ¿cuál es el precio final de la bici?



- 1) El contexto en el que nos encontramos es el de una oferta por el que el precio de la compra va a disminuir.
- 2) Las magnitudes implicadas son el precio que paga el cliente y el precio inicial del artículo.
- 3) El sistema de representación asociado es el porcentaje (15%), pero también puede utilizarse la fracción (15/100) o el decimal (0,15).
- 4) La razón es la siguiente:

$$\frac{85}{100}$$

El porcentaje 15% que se nos da como dato indica que por cada 100 € de compra, se hace una rebaja de 15 €, es decir, pagas 85 € por cada 100 € de compra. Dicho de otro modo, pagas 0,85 € por cada 1 € de compra.

- 5) La equivalencia que nos permite obtener el precio que Pedro pagará por la bici es la siguiente:

$$\frac{85}{100} = \frac{x}{260}$$

$$x = 221 \text{ €}$$

Si empleáramos un razonamiento multiplicativo y teniendo en cuenta que pagamos 0,85 € por cada 1 € de compra, como nuestra compra tiene un valor de 260 €, el importe final será 260 veces mayor, esto es:

$$0,85 \cdot 260 = 221 \text{ €}$$

E. SOBRE LAS TÉCNICAS

En este capítulo se muestran los diferentes métodos de resolución que se van a exponer en clase para resolver los problemas planteados. Esta exposición seguirá un orden tal que los alumnos puedan ver las diferentes formas de proceder, en función de los datos que se tienen y la naturaleza de los datos que intervienen en los problemas.

Al resolver las situaciones problemáticas de proporcionalidad, van a aparecer las siguientes técnicas:

- **TÉCNICAS DE CÁLCULO OPERACIONAL:** referidas a operaciones con números decimales, operaciones con fracciones y transformaciones entre los diferentes sistemas de representación de la razón.
- **TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN:** referidas a los métodos específicos empleados para resolver problemas de proporcionalidad, es decir, reducción a la unidad, razonamiento algebraico y regla de tres.

E.1 Diseña los distintos tipos de ejercicios que vas a presentar en el aula.

Se van a exponer los distintos tipos de problemas en función de la técnica de resolución empleada y no en función de las técnicas de cálculo operacional, ya que éstas no forman parte exclusivamente de la proporcionalidad, sino que se emplean en el estudio de otros objetos matemáticos además de éste.

Para ilustrar las técnicas, se propone un problema a continuación, donde se puede ver la aplicación de cada una de ellas:

“El plano de planta de una casa está dibujado a escala 1:50. Si sobre el plano se mide la anchura de un pasillo y se obtiene 18 mm, ¿cuál es la anchura real del pasillo?”

Se trata de un contexto de escalas, en el que se establece una relación entre magnitudes de la misma naturaleza (longitud) medidas en la misma unidad (mm). A continuación, se van a exponer tres técnicas distintas para resolver el problema, en el orden en que se mostrarían a los alumnos en clase, para que así pudieran ver las diferencias que hay entre cada caso.

- **Aplicar el método de reducción a la unidad.**

El uso de fracciones unitarias es una de las técnicas más apropiadas para resolver los problemas de proporcionalidad. El método de reducción a la unidad permite calcular el valor que corresponde a cualquier otra cantidad a partir del valor que corresponde a la unidad.

La razón 1:50 indica que 1 unidad de longitud en el plano equivale a 50 unidades de longitud en la realidad.

$$\frac{50 \text{ mm en la realidad}}{1 \text{ mm en el plano}} \cdot 18 \text{ mm en el plano} = 900 \text{ mm en la realidad} = 90 \text{ cm}$$

La anchura real del pasillo es de 90 cm.

Este procedimiento es el que tiene en cuenta el verdadero significado de razón, pues hace estudiar a fondo la naturaleza de las magnitudes y permite calcular las incógnitas mediante multiplicaciones.

- **Emplear el razonamiento algebraico.**

El valor de la incógnita se obtiene a partir de una equivalencia entre razones que se establece a partir de los datos, y en la que sólo se desconoce uno de los términos.

$$\frac{1}{50} = \frac{18}{x}$$

- **Utilizar la regla de tres.**

Con este procedimiento se pueden resolver problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y se requiere calcular el cuarto.

$$1 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 50$$

$$18 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x$$

$$x = \frac{18 \cdot 50}{1} = 900$$

$$x = 900 \text{ mm} = 90 \text{ cm}$$

Utilizar la regla de tres equivale al fin y al cabo a utilizar proporciones. Se ha de intentar que los alumnos comprendan esto antes de institucionalizar el proceso.

E.2 ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

En esta propuesta, nos decantaríamos por el método de reducción a la unidad, por ser la que conduce a la resolución de los problemas a través de una multiplicación, con un razonamiento más próximo al de los alumnos. No obstante, se incorporarán también las otras dos técnicas mencionadas.

El motivo para darle una mayor importancia a la técnica de reducción a la unidad frente a las otras dos es porque es la que refuerza en mayor medida el significado de las operaciones.

Por otro lado, es conveniente realizar unas breves observaciones sobre cada una de las tres técnicas:

- 1) REDUCCIÓN A LA UNIDAD: Es la más cercana a los procedimientos empleados por los alumnos en la Educación Primaria, que eran puramente aritméticos.
- 2) RAZONAMIENTO ALGEBRAICO: Conlleva el establecimiento de una igualdad de razones donde se ha de aplicar la propiedad de las fracciones equivalentes de que “el producto de extremos es igual al producto de medios” y un conocimiento superior, el algebraico, mucho más alejado de los alumnos de este nivel.
- 3) REGLA DE TRES: Oculta el verdadero significado de la razón, ya que al presentar las cantidades de magnitud de forma aislada dificulta la comprensión de la razón como relación entre magnitudes.

	TIPO DE TÉCNICA
Reducción a la unidad	Aritmética
Razonamiento algebraico	Algebraica
Regla de tres	Gráfica

E.3 Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Evidentemente, con las tres técnicas se obtiene el mismo resultado, si bien el procedimiento resulta más abstracto y alejado del concepto de razón cuanto más alejado del razonamiento aritmético esté, como sucede en el caso de la regla de tres.

Se debe tener en cuenta que los métodos como la regla de tres no son apropiados para desarrollar adecuadamente el razonamiento proporcional y no se deberían introducir hasta que los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente.

Aunque aplicada correctamente, la regla de tres supone una cierta ventaja en el proceso de solución, pues se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero, con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin entender realmente lo que están haciendo. En cierto modo, este método les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la relación entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. La regla de tres se llega a aplicar en ocasiones de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o inadecuada.

E.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La introducción de las diferentes técnicas se realizará a través de un barrido de los diferentes campos de problemas que se mostraron en el Apartado D.1:

- 1) Según la tarea que involucra el problema
- 2) Según la magnitud que actúa como incógnita
- 3) Según el contexto en el que aparece la razón y la naturaleza de las magnitudes entre las que se establece la comparación

F. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS (JUSTIFICACIÓN DE LAS TÉCNICAS)

En este capítulo se hace una breve reflexión acerca de las justificaciones de las técnicas que se utilizan para resolver los problemas. Si los alumnos conocen las tecnologías que dan lugar a las técnicas, tendrán más recursos con los que tomar decisiones, razonar y resolver problemas.

Si bien nos encontramos en el primer curso de la Educación Secundaria, curso en el que puede que los alumnos no tengan todavía la madurez suficiente para afrontar razonamientos largos y complicados, es conveniente que desde el principio se acostumbren a analizar el porqué de ciertos procedimientos, y no quedarse solamente con la técnica.

F.1 ¿Mediante que razonamientos se van a justificar las técnicas?

Los razonamientos de las técnicas asociadas a la proporcionalidad directa se encuentran en el estudio de las comparaciones multiplicativas entre dos cantidades de magnitud bajo determinadas condiciones de linealidad.

La justificación de los diversos conceptos y técnicas a introducir en el aula, se realizará mediante la comprobación (a modo de verificación o validación) de las conjeturas que los alumnos establecen para resolver los diversos problemas planteados relacionados con el aspecto del objeto.

En este sentido, y dada la edad de los alumnos y su todavía temprana etapa evolutiva, no se prestará especial atención al rigor en las justificaciones, sino que se realizará un especial énfasis en que sean los propios alumnos los que vayan adquiriendo el conocimiento de forma constructiva (con la guía y ayuda del profesor para mantener un cierto rigor).

Se comprobarán simplemente que se cumplen las reglas deducidas a través de casos concretos, y también se analizará cuándo no se cumplen y el porqué, es decir, deduciendo el motivo por el que tienen lugar ciertos casos particulares).

F.2 ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

La principal aportación del profesor deberá ser la de motivar a los alumnos para que se pregunten acerca de las condiciones de regularidad entre magnitudes, verbalicen el significado de la razón y las manipulaciones simbólicas de la misma para resolver los problemas.

Se intentará que los alumnos reflexionen sobre los nuevos conocimientos adquiridos, proponiéndoles que analicen las diferentes propuestas que aparezcan en el aula a través del planteamiento de problemas que les lleven a analizar contextos y sistemas de representación diferentes.

F.3 Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Tras realizar la exposición de todos los aspectos relacionados con el objeto matemático de la proporcionalidad, es fundamental que los alumnos se queden con estas ideas:

- Concepto de proporcionalidad, estudiando las magnitudes que aparecen en el problema, verificando que se cumple la condición de proporcionalidad y verbalizándola, junto al valor de la razón que se establece entre las magnitudes.
- Resolución de problemas mediante un razonamiento multiplicativo, o bien a través de otras técnicas, como la reducción a la unidad, el razonamiento algebraico o la regla de tres.

G. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

En este capítulo se expone la organización de los contenidos a lo largo de una serie de sesiones, cuya distribución se adaptará al ritmo de aprendizaje de los alumnos.

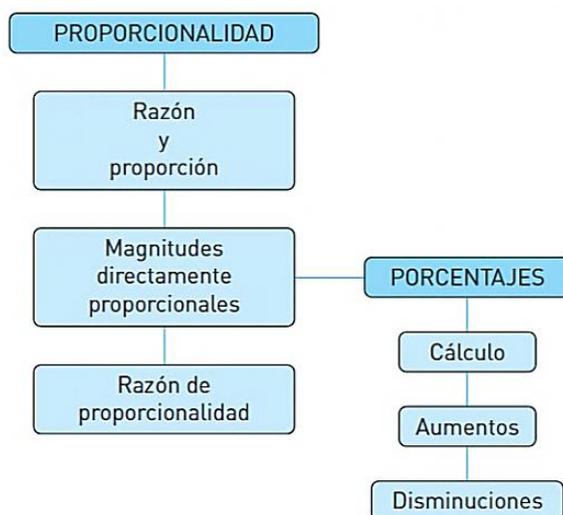
G.1 Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

G.1.1 Esquema-resumen de la secuenciación

En esta secuenciación se trata el concepto de proporcionalidad desde el punto de vista numérico. Aunque muchos de los contenidos no son nuevos para los alumnos, es importante que los manejen con soltura, ya que son vitales para que se desenvuelvan adecuadamente en la sociedad actual. Por ello intentaremos que se produzca un aprendizaje significativo, para que todos los conceptos queden bien afianzados.

Es conveniente que los alumnos tengan presente la gran cantidad de situaciones en las que se aplica la proporcionalidad: compras, repartos, planos,... Partiremos de ejemplos sencillos y cercanos a los alumnos para formar relaciones que expresaremos en forma de fracciones y que darán lugar a razones y posteriormente a proporciones.

El siguiente mapa conceptual muestra los conceptos que se tratarán a lo largo de la secuenciación, mediante actividades variadas que harán que los alumnos pongan en juego diversas destrezas.



Mapa conceptual de los contenidos

G.1.2 Fases de la secuenciación

La secuencia didáctica se desarrollará en sesiones de 50 minutos de duración, que se distribuirán a lo largo de diferentes fases, como muestra la siguiente tabla.

FASE	NÚMERO DE SESIONES
Inicial	1
Desarrollo	3
Aplicación y Síntesis	3
Evaluación	1
Generalización	1
TOTAL DE SESIONES	9

- FASE INICIAL: servirá para introducir el objeto matemático mediante el planteamiento de sencillas actividades que permitirán analizar los conocimientos previos de los alumnos.
- FASE DE DESARROLLO: servirá para explicar los conceptos relacionados con la proporcionalidad, junto a las diferentes técnicas y tecnologías que serán de utilidad para la resolución de los problemas.
- FASE DE APLICACIÓN Y SÍNTESIS: servirá para aplicar los nuevos conocimientos en diferentes situaciones que permitirán ver a los alumnos la multitud de situaciones de la vida cotidiana donde la proporcionalidad está presente.
- FASE DE EVALUACIÓN: servirá para analizar el grado de adquisición de los conocimientos de los alumnos a partir de la realización de una prueba escrita donde se pongan en juego las destrezas aprendidas a lo largo de la secuencia didáctica.
- FASE DE GENERALIZACIÓN: servirá para que los alumnos sean conscientes de los errores que han cometido en la prueba de evaluación, mediante una puesta en común de las respuestas correctas y de los resultados obtenidos en la misma.

En el siguiente apartado se muestra una exposición de las actividades de enseñanza-aprendizaje que se llevarían a cabo en las sesiones. Para cada una de las fases, se recoge el objetivo que se pretende alcanzar y el desarrollo a llevar a cabo. Asimismo en el Anexo A, se propone una serie de actividades que serían adecuadas para realizar en clase, de manera que los alumnos pudieran practicar lo aprendido, a la vez que adquieren las destrezas necesarias para asimilar correctamente los nuevos conceptos.

G.2 Establece una duración temporal aproximada.

SESIÓN 1

OBJETIVO: Analizar los conocimientos previos de los alumnos e introducir el objeto matemático de la proporcionalidad.

DESARROLLO:

Como actividad de iniciación, plantearemos a los alumnos una serie de situaciones en las que intervengan diferentes magnitudes en diversos contextos. Los alumnos tendrán que analizar si estas magnitudes están relacionadas, para saber así si son o no directamente proporcionales.

SESIONES 2, 3, 4

OBJETIVO: Trabajar los conceptos relacionados con la proporcionalidad.

DESARROLLO:

Mediante el planteamiento de situaciones variadas, se intentará que los alumnos trabajen con diferentes contextos y sistemas de representación y busquen sus propias estrategias para enfrentarse a los problemas, para que sean capaces de decidir cuáles son las más válidas.

Se realizará una puesta en común siempre que sea posible, con el fin de que los alumnos puedan exponer las conclusiones a las que han llegado tras su proceso de resolución. Será en este punto donde el profesor realice el proceso de institucionalización de todos los aspectos que considere convenientes.

SESIONES 5, 6, 7

OBJETIVO: Resolver problemas en contextos variados y con métodos diferentes.

DESARROLLO:

Los alumnos se enfrentarán a problemas, que habrán de resolver aplicando alguno de los tres métodos siguientes: reducción a la unidad, razonamiento algebraico o regla de tres, mostrando el razonamiento seguido para llevarlos a cabo.

Es conveniente que sean conscientes de la necesidad de comprobar siempre que las magnitudes implicadas en un problema son directamente proporcionales antes de realizar ningún cálculo.

SESIÓN 8

OBJETIVO: Conocer el grado de adquisición de los nuevos contenidos mediante una prueba de evaluación.

DESARROLLO:

Se realizará una prueba escrita de forma individual, que constará de 8 actividades de diferente nivel de complejidad, en los que los alumnos deberán poner en práctica todos los procedimientos en los que se han ejercitado a lo largo de la secuencia didáctica.

SESIÓN 9

OBJETIVO: Analizar los resultados y poner en común los errores cometidos en la prueba de evaluación.

DESARROLLO:

Se corregirá la prueba de evaluación en la pizarra (por el profesor o los alumnos), resolviendo todas las dudas, curiosidades y preguntas planteadas.

H. SOBRE LA EVALUACIÓN

En este capítulo se muestra la prueba de evaluación que se diseñaría teniendo en cuenta los conceptos y procedimientos que se han tratado a lo largo de la secuencia didáctica. También se exponen aquí los objetivos de la evaluación, la respuesta esperada y los criterios de calificación para cada uno de los problemas planteados.

H.1 Diseña una prueba escrita para evaluar el aprendizaje realizado por los alumnos.

PROBLEMA 1
<p>ENUNCIADO:</p> <p>Señala en qué casos existe proporcionalidad.</p> <ul style="list-style-type: none">a) El peso de los tomates y su precio.b) Horas viajando y kilómetros recorridos.c) Bombillas encendidas y el gasto de electricidad.d) La edad de una persona y su estatura.
<p>OBJETIVO:</p> <p>Evaluar si los alumnos saben determinar si dos magnitudes son directamente proporcionales o no.</p>
<p>RESPUESTA ESPERADA:</p> <p><i>Hay proporcionalidad en los tres primeros casos: a), b) y c). No sucede así en el caso d), ya que la estatura de una persona no es proporcional a su edad.</i></p>
<p>CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:</p> <ul style="list-style-type: none">✓ Valoración de cada apartado: 0,25 puntos. TOTAL: 1 punto.✓ La respuesta sólo se considerará válida si se da un razonamiento para decir que las magnitudes son proporcionales.

PROBLEMA 2**ENUNCIADO:**

Para preparar 6 raciones de paella se necesitan 300 gramos de arroz. Completa la tabla de proporcionalidad para distintas raciones. Además, calcula la razón de proporcionalidad o la constante de proporcionalidad directa.

Nº de raciones	6	12	2	1
Gramos	300			

**OBJETIVO:**

Evaluar si los alumnos saben completar tablas que relacionan magnitudes directamente proporcionales, calculando la razón de proporcionalidad.

RESPUESTA ESPERADA:

Nº de raciones	6	12	2	1
Gramos	300	600	100	50

$$k = \frac{300 \text{ gramos de arroz}}{6 \text{ raciones}} = 50 \text{ gramos de arroz/ración}$$

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

- ✓ Valoración de cada ítem de la tabla: 0,25 puntos. Valoración del cálculo de la razón: 0,25 puntos. TOTAL: 1 punto.
- ✓ Las respuestas de la tabla tendrán que ser coherentes con el valor de la razón calculado. Si éste no es correcto, pero los valores de la tabla sí lo son, se considerarán igualmente correctos.

PROBLEMA 3

ENUNCIADO:

Hemos encontrado dos ofertas de un mismo producto en dos supermercados distintos. La primera de ellas dice: "7 chocolatinas por 2,10 €", y la segunda: " 9 chocolatinas por 3 €, y te damos otras 3 chocolatinas más de regalo". ¿Dónde estaríamos haciendo la mejor compra?



OBJETIVO:

Evaluar si los alumnos saben comparar dos razones y analizar qué técnica utilizan.

RESPUESTA ESPERADA:

Empleamos el método de reducción a la unidad:

OFERTA 1:

$$\text{Precio por chocolatina} = \frac{2,10 \text{ €}}{7 \text{ chocolatinas}} = 0,3 \text{ €/chocolatina}$$

OFERTA 2:

$$\text{Precio por chocolatina} = \frac{3 \text{ €}}{12 \text{ chocolatinas}} = 0,25 \text{ €/chocolatina}$$

Nos conviene más comprar en la segunda tienda, ya que el precio que resulta de cada chocolatina es menor.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

- ✓ Valoración de la razón de cada oferta: 0,25 puntos. Valoración de la respuesta: 0,5 puntos. TOTAL: 1 punto.
- ✓ No se ha de emplear necesariamente el método de reducción a la unidad, pero la elección de una u otra oferta ha de estar fundamentada en un argumento sólido, basado en alguna de las técnicas empleadas en clase.

PROBLEMA 4**ENUNCIADO:**

Una máquina fabrica 400 clavos en 5 horas. ¿Cuánto tiempo necesitará para hacer 1.000 clavos?

OBJETIVO:

Evaluar si los alumnos saben resolver un problema de proporcionalidad y detectar la técnica que utilizan, que no ha de ser necesariamente el método de reducción a la unidad, que es la que se muestra a continuación.

RESPUESTA ESPERADA:

Empleamos el método de reducción a la unidad:

$$\text{Horas para fabricar cada clavo} = \frac{5 \text{ h}}{400 \text{ clavos}} = 0,0125 \text{ horas/clavo}$$

Si se quieren fabricar 1.000 clavos:

$$\text{Horas para fabricar 1.000 clavos} = \frac{0,0125 \text{ h}}{1 \text{ clavo}} \cdot 1.000 \text{ clavos} = 12,5 \text{ horas}$$

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

- ✓ Valoración del problema: 1 punto.
- ✓ Se puede emplear cualquiera de las técnicas que se han aprendido, con la condición de que los pasos se sigan en un orden correcto y razonado.

PROBLEMA 5

ENUNCIADO:

El precio de dos tercios de una finca es de 9.036 €, y el resto tiene 2.070 km².

- a) ¿Cuál es el precio de toda la finca?
- b) ¿Y su superficie?
- c) ¿Cuánto cuesta cada km²?

OBJETIVO:

Evaluar si los alumnos saben resolver un problema de proporcionalidad y detectar la técnica que utilizan, que no ha de ser necesariamente el razonamiento algebraico, que la que se muestra a continuación.

RESPUESTA ESPERADA:

- a) *Empleamos un razonamiento algebraico con una igualdad de razones:*

$$\frac{2}{3} = \frac{9.036 \text{ €}}{x}$$
$$x = \frac{9.036 \cdot 1}{\frac{2}{3}} = 13.554 \text{ €}$$

- b) *Como antes, empleamos una equivalencia de razones:*

$$\frac{1}{3} = \frac{2.070 \text{ km}^2}{x}$$
$$x = \frac{2.070 \cdot 1}{\frac{1}{3}} = 6.210 \text{ km}^2$$

- c) *Calculamos el valor de la razón:*

$$\text{Precio de cada km}^2 = \frac{13.554 \text{ €}}{6.210 \text{ km}^2} = 2,18 \text{ €/km}^2$$

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

- ✓ Valoración de apartados a) y b): 0,25 puntos cada uno. Valoración de apartado c): 0,5 puntos. TOTAL: 1 punto.
- ✓ Se puede emplear cualquiera de las técnicas que se han aprendido, con la condición de que los pasos se sigan en un orden correcto y razonado.
- ✓ El apartado c) tiene una puntuación mayor porque el resultado depende de los cálculos anteriores.

PROBLEMA 6**ENUNCIADO:**

En el mercado, 1 kilogramo de tomates cuesta 1,77 €.

- a) ¿Cuánto costarán 4 kilogramos?
b) ¿Cuántos kilogramos se podrán comprar con 6,2 €?

OBJETIVO:

Evaluar si los alumnos saben resolver un problema de proporcionalidad y detectar la técnica que utilizan, que no ha de ser necesariamente la regla de tres, que es la que se muestra a continuación.

RESPUESTA ESPERADA:

- a) *Empleamos una regla de tres para calcular el precio de 4 kg de tomates:*

$$1 \text{ kg} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 1,77\text{€}$$

$$4 \text{ kg} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x$$

$$x = \frac{4 \cdot 1,77}{1} = 7,08 \text{ €}$$

- b) *Empleamos de nuevo una regla de tres para calcular cuántos kg de tomates compraríamos con 6,2 €:*

$$1 \text{ kg} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 1,77 \text{ €}$$

$$x \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 6,2 \text{ €}$$

$$x = \frac{6,2 \cdot 1}{1,77} = 3,5 \text{ kg}$$

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

- ✓ Valoración de cada apartado: 0,5 puntos. TOTAL: 1 punto.
- ✓ Se puede emplear cualquiera de las técnicas que se han aprendido, con la condición de que los pasos se sigan en un orden correcto y razonado.

PROBLEMA 7

ENUNCIADO:

La superficie de España es de 506.019 km². De esta superficie, el 9,4% corresponde a Aragón.

- ¿Qué significa el porcentaje 9,4%?
- ¿Qué superficie tiene Aragón?
- ¿Y el resto de España?

OBJETIVO:

Evaluar si los alumnos saben expresar lo que indica la notación porcentual y si pueden calcular el porcentaje de una determinada cantidad.

RESPUESTA ESPERADA:

- El porcentaje 9,4% indica que de cada 100 km² de superficie en España, 9,4 km² corresponden a Aragón.*
- La superficie de Aragón se halla con el cálculo de un sencillo porcentaje:*

$$9,4\% \text{ de } 506.019 = \frac{9,4 \cdot 506.019}{100} = 47.565,79 \text{ km}^2$$

- La superficie del resto de España se obtiene restando esta cantidad del total, que corresponde precisamente al 90,6% de la superficie.*

$$506.019 - 47.565,19 = 458.453,21 \text{ km}^2$$

$$90,6\% \text{ de } 506.019 = \frac{90,6 \cdot 506.019}{100} = 458.453,21 \text{ km}^2$$

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

- ✓ Valoración de apartado a): 1 punto Valoración de apartados b) y c): 0,5 puntos cada uno. TOTAL: 2 puntos.
- ✓ El cálculo de porcentajes de cantidades tan elevadas nos permitirá evaluar el manejo de la calculadora. En caso de que haya errores de cálculo por esta causa, se valorará la gravedad para considerarlo incorrecto o dar la mitad de la puntuación.
- ✓ El apartado a) tiene una puntuación mayor porque el alumno debe mostrar si ha entendido lo que indica la notación porcentual.

PROBLEMA 8**ENUNCIADO:**

Decidimos hacer una excursión escolar. El 20 % de los alumnos de la clase quiere ir al Museo de la Ciencia, mientras que el 60 % quiere ir al Planetario. Un total de 15 alumnos decide ir al Planetario.

- ¿Cuántos alumnos habrá en la clase?
- ¿Cuántos alumnos han elegido la otra excursión?

OBJETIVO:

Evaluar si los alumnos saben resolver un problema de proporcionalidad y detectar la técnica que utilizan, que no ha de ser necesariamente mediante una igualdad de razones, como se muestra a continuación.

RESPUESTA ESPERADA:

Museo de la Ciencia – 20%

Planetario – 60% - 15 alumnos

- Calculamos el número de alumnos en la clase:*

$$\frac{60\% \text{ de la clase}}{15 \text{ alumnos}} = \frac{100\% \text{ de la clase}}{x}$$

$$x = \frac{15 \cdot 100}{60} = 25 \text{ alumnos}$$

- Calculamos el número de alumnos que quieren ir al Museo de la Ciencia:*

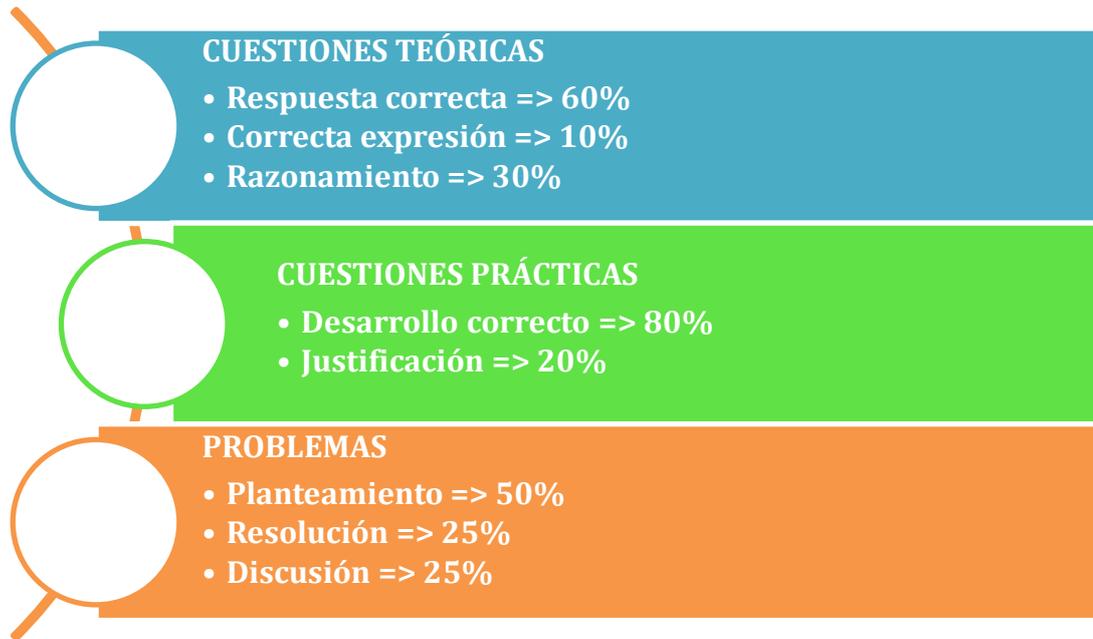
$$20\% \text{ de } 25 = \frac{20 \cdot 25}{100} = 5 \text{ alumnos}$$

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

- ✓ Valoración de cada apartado: 1 punto. TOTAL: 2 puntos.
- ✓ Se puede emplear cualquiera de las técnicas que se han aprendido, con la condición de que los pasos se sigan en un orden correcto y razonado.

H.2 ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Es necesario tener fijados unos criterios de calificación claros y precisos. Aunque estos criterios se han detallado en cada uno de los problemas de la prueba, se expone a continuación unos criterios generales, que también se habrían de tener en cuenta en función del carácter teórico o práctico de la respuesta, o si se trata de un problema, ya que las destrezas que se ponen en juego en cada tipo de actividad son distintas:



H.3 ¿Qué criterios de evaluación se van a tener en cuenta?

Para la calificación final, se tendrán en cuenta los siguientes pesos para cada una de las tareas realizadas:

- **Prueba de evaluación:** examen que evalúa todos los contenidos vistos y determina el aprendizaje (aproximadamente un 50% de la nota).
- **Trabajo en clase:** tareas que manda el profesor en las sesiones desarrolladas en el aula, bien individualmente o bien en grupo (aproximadamente un 15% de la nota).
- **Trabajo en casa:** deberes individuales para aplicar los conceptos vistos en el aula (aproximadamente un 15% de la nota).
- **Cuaderno de trabajo:** ejercicios realizados a lo largo de la secuenciación, en los que se valorará la presentación clara y ordenada, la ortografía y la corrección de los resultados (aproximadamente un 10% de la nota).
- **Actitud:** participación, interés, estudio, asistencia a clase con el material necesario, comportamiento educado y correcto (aproximadamente un 10% de la nota).



Porcentajes para calcular la calificación final

I. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

I.1 Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

I.1.1 Bibliografía

- [1] Vizmanos, J.R. y Anzola, M. (2007) “Matemáticas 1º E.S.O.” Madrid. Editorial SM.
- [2] Álvarez, M.D. “Matemáticas 1º E.S.O.” (2007). Madrid. Editorial Santillana.
- [3] Escolano, R. (2007). “Enseñanza del número racional positivo desde los modelos de medida y cociente”. Servicio de publicaciones de la Universidad de Zaragoza.
- [4] Gairín, J.M. y Escolano, R. (2009) “Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional”. Suma, 62, pp. 35-48.
- [5] Oller, A.M. “Proporcionalidad aritmética: una propuesta para alumnos de Secundaria”. (2012) Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.
- [6] Material no publicado de la asignatura “Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria” perteneciente a la Titulación de Magisterio de la Universidad de Zaragoza.

I.1.2 Webgrafía

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/>

<http://www.matematicas.profes.net/>

<http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/>

<http://www.angelitoons.com/index.php/troncho-y-poncho>

