*Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika* *ISBN: 978-602-6122-20-9*
*hal 1035-1050 November 2016* *http://jurnal.fkip.uns.ac.id*

# DISTRIBUSI STASIONER RANTAI MARKOV UNTUK PREDIKSI CURAH HUJAN DI WILAYAH JAWA BARAT

**Firdaniza, Nurul Gusriani, Emah Suryamah**

**Departemen Matematika Universitas Padjadjaran**
firdaniza@unpad.ac.id

**Abstrak:** Curah hujan adalah fenomena alam yang termasuk salah satu variabel iklim dan diamati setiap waktu di setiap tempat.Data curah hujan merupakan data *time series*, yang bersifat acak. Di dalamnya merupakan data perpindahan dari satu waktu ke waktu lainnya yang dapat dinyatakan sebagai keadaan intensitas rendah, sedang atau tinggi.Prediksi curah hujan sangat diperlukan untuk kehidupan masyarakat dan mendukung perekonomian. Selain itu prediksi curah hujan merupakan antisipasi pencegahan jika intensitas hujan tinggi akan terjadi dalam waktu panjang. Salah satu metode prediksi curah hujan yang dapat digunakan adalah pendekatan proses stokastik. Rantai Markov merupakan bagian dari proses stokastik yang dapat digunakan untuk prediksi curah hujan waktu sekarang berdasarkan satu waktu sebelumnya. Fokus penelitian ini adalah penerapan Rantai Markov untuk prediksi curah hujan.Melalui rantai Markov diperoleh peluang jangka panjang untuk fenomena curah hujan. Dalam penelitian ini dikaji distribusi stasioner dan limit peluang rantai Markov dan penerapannya untuk prediksi curah hujan di wilayah Jawa Barat. Untuk jangka panjang diprediksi curah hujan untuk kota Bogor dan Tasikmalaya cenderung tinggi, sementara untuk kota Bandung, Sumedang, dan Indramayu curah hujan cenderung rendah. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi bahan rekomendasi bagi pihak yang terkait langsung dalam mengambil langkah pecegahan akibat curah hujan.

Kata kunci:***curah hujan, distribusi stasioner, prediksi, rantai Markov***

## PENDAHULUAN

Hujan merupakan salah satu fenomena alam yang sangat dibutuhkan namun juga dapat menjadi bencana jika melebihi batas.Pihak yang sangat membutuhkan hujan adalah bidang pertanian.Artinya, kehidupan petani bergantung kepada curah hujan.Curah hujan yang diharapkan adalah yang sesuai dengan kebutuhan air untuk masing-masing tanaman.

Curah hujan merupakan jumlah air yang jatuh di permukaan tanah datar selama periode tertentu yang diukur dengan satuan tinggi (mm) di atas permukaan horizontal bila tidak terjadi evaporasi, runoff dan infiltrasi. Jadi, jumlah curah hujan yang diukur, sebenarnya adalah tebalnya atau tingginya permukaan air hujan yang menutupi suatu daerah luasan di permukaan tanah.Satuan curah hujan yang umumnya dipakai oleh BMKG adalah milimeter (mm).Curah hujan 1 (satu) milimeter, artinya dalam luasan satu meter persegi pada tempat yang datar tertampung air setinggi 1 (satu) milimeter atau tertampung air sebanyak 1 (satu) liter atau 1000 ml.

Intensitas hujan merupakan banyaknya curah hujan persatuan jangka waktu tertentu.Besarnya intensitas curah hujan berbeda-beda tergantung kepada lamanya curah hujan dan frekuensi terjadinya hujan.Intensitas hujan yang tinggi jarang terjadi dalam jangka waktu yang lama, sebaliknya, intensitas hujan yang rendah biasanya terjadi dalam waktu yang lama.

Data curah hujan merupakan data time series, yang bersifat acak. Di dalamnya merupakan data perpindahan dari satu waktu ke waktu lainnya yang dapat dinyatakan sebagai keadaan intensitas rendah, sedang atau tinggi.

Proses stokastik merupakan suatu alat matematika yang dapat digunakan untuk memodelkan fenomena data yang bergantung pada waktu (P. Nicolas, 2013).

Rantai Markov merupakan proses stokastik dengan parameter diskrit yang memenuhi sifat Markov, kejadian yang akan datang hanya bergantung kepada keadaan hari ini. Data curah hujan merupakan data bergantung waktu yang menunjukkan perpindahan keadaan.

Prediksi curah hujan di masa mendatang sangat diperlukan guna antisipasi pencegahan jika intensitas hujan tinggi akan terjadi dalam waktu panjang. Karena hal ini, maka pada penelitian ini dilakukan analisis distribusi stasioner rantai Markov dan selanjutnya digunakan untuk memprediksi curah hujan di Wilayah Jawa Barat.

## METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, data yang digunakan adalah data curah hujan di lima kota/kabupaten di wilayah Jawa Barat, yaitu Kota Bogor, Kota Bandung, Kabupataen Sumedang, Kabupaten Tasilmalaya, dan Kabupaten Indramayu. Data yang diolah adalah data curah hujan tiap bulan dari bulan Januari 2004 hingga Agustus 2015.

Diawali dengan menentukan rata-rata curah hujan untuk kelima wilayah, kemudian mendefinisikan ruang keadaan. Data curah hujan adalah salah satu fenomena alam yang merupakan Rantai Markov dengan ruang keadaan diskrit karena datanya berbentuk perpindahan.Ruang keadaan didefinisikan berdasarkan nilai curah hujan tiap bulan terhadap rentang yang ditentukan berdasarkan rata-rata. Pada penelitian ini didefinisikan 3 keadaan, yaitu curah hujan dengan keadaan “rendah”, “sedang”, dan “tinggi”. Curah hujan dikategorikan “rendah” jika curah hujan kurang dari 230 mm, dikatakan “sedang” jika curah hujan mulai dari 230 mm sampai 300 mm, dan dikategorikan “tinggi” jika curah hujan lebih dari 300 mm. Selanjutnya ditentukan jumlah perpindahan untuk masing –masing keadaan dan diperolehlah matriks peluang transisi.

Matriks peluang transisi suatu rantai Markov didefiniskan sebagai

$$P = [p_{ij}] \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

dengan$p_{ij} \geq 0$ dan $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$ , $i, j = 0,1,2, \ldots$

Selanjutnya untuk memeriksa apakah rantai Markov tersebut ergodik atau tidak dilakukan beberapa tahapan. Suatu rantai Markov dikatakan ergodik jika rantai Markov tersebut *irreducible, aperiodic* dan*positive recurrent.* Suatu rantai Markov dikatakan *irreducible* jika rantai Markov tersebut hanya mempunyai satu kelas komunikasi, artinya setiap keadaan saling berkomuikasi. Keadaan *i* dan *j* dikatakan saling berkomunikasi (dinotasikan dengan $\leftrightarrow j$ ), jika keadaan *j* dapat dicapai dari keadaan *i* dan keadaan *i* dapat dicapai dari keadaan *j*, artinya terdapat bilangan bulat$m \geq 0 \;\; dan \; n \geq 0$ sehingga $p_{ij}^{m} > 0$ dan $p_{ij}^{n} > 0$.

**Definisi 1.**

Keadaan *i* memiliki periode *d(i)* , jika *d(i)* merupakan faktor persekutuan terbesar dari *n*, untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, sehingga $p_{ii}^{n} > 0$.

$$d(i) = \text{gcd}\{n \geq 1 \mid p_{ii}^{n} > 0\}$$

Jika *d(i)*= 1, keadaan *i* adalah *aperiodic*, dan jika *d(i)*>1, keadaan *i* adalah periodik. (Osaki, S., 1992)

**Teorema 1.**

Jika $i \leftrightarrow j$ maka $d(i) = d(j)$ (Osaki, S., 1992).

Untuk menentukan klasifikasi keadaan *recurrent*, *transient* dan *positive recurrent* dapat menggunakan definisi atau teorema berikut.

Misalkan suatu peluang keadaan *i* ke keadaan *j* pertama kali dalam *n* langkah didefinsisikan sebagai berikut:

$$f_{ij}^{n} = P\{X(n) = j, X(r) \neq j, r = 1,2,3, \dots, n-1 \mid X(0) = i\}$$

dimana$f_{ij}^{0} = 0$ dan $f_{ij}^{1} = p_{ij}$ dan peluang transisi keadaan *j* dicapai dari keadaan *i* didefinisikan

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{n}$$

(Osaki, S., 1992)

**Definisi 2.**

Jika $f_{ii} = 1$, maka keadaan $i$ disebut *recurrent*. Jika $f_{ii} < 1$, maka keadaan $i$ disebut *transient*. (Osaki, S., 1992)

**Teorema 2.**

Keadaan *i* dikatakan *recurrent* jika dan hanya jika$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$

Keadaan *i* dikatakan *transient* jika dan hanya jika$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} < \infty$ **(**Osaki, S., 1992)

**Definisi 3.**

Untuk suatu rantai Markov, semua keadaan *recurrent* diklasifikasikan menjadi *positive* (*non-null*) *recurrent* atau *null recurrent* dilihat dari $\mu_j < \infty$ atau $\mu_j = \infty$ dimana

$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{n}$menyatakan rata-rata waktu *recurrent* untuk keadaan $j$.

Penggunaan definisi 3 ini pada prakteknya tidaklah mudah karena nantinya merupakan deret yang terkadang memerlukan analisis konvergensi yang rumit. Untuk itu dapat menggunakan teorema berikut.

**Teorema 3.**

Jika keadaan *j*adalah *recurrent* dan *aperiodic*, maka$p_{jj}^{n} \to \frac{1}{\mu_j}$, untuk $n \to \infty$.

Artinya, jika dengan teorema 3 ini diperoleh nilai dari $p_{jj}^{n}$ untuk $n \to \infty$, maka nilai dari $\mu_j$ dapat dihitung.

**Teorema4.**

Jika suatu rantai Markov adalah *ergodic*, maka terdapat limit peluang $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi j$ *, i,j=0, 1, 2, ...*yang tidak tergantung pada keadaan awal *i*, dimana

$\{\pi_j, j = 0, 1, 2, ...\}$adalah distribusi stasioner dari rantai Markov solusi unik dan positif dari$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}$ , $j = 0, 1, 2, ...$dengan$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari data curah hujan tiap bulan di lima wilayah Jawa Barat, yakni Kota Bogor, Kota Bandung, Sumedang, Tasikmalaya dan Indramayu dari bulan Januari 2004 hingga bulan Agustus 2015, ditentukan kategori (ruang keadaan) yaitu keadaan 0, 1, dan 2 yang menyatakan curah hujan "rendah", "sedang" dan "tinggi".

Jumlah perpindahan tiap keadaan terlihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Jumlah Transisi dari keadaan *i* ke keadaan *j*
data curah hujan di lima Wilayah Jawa Barat

(i) Kota Bogor

| $(j)(i)$ | 0 | 1 | 2 | Jumlah |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 26 | 2 | 11 | 39 |
| 1 | 2 | 3 | 10 | 15 |
| 2 | 12 | 10 | 63 | 85 |
| Jumlah | | | | 139 |

(ii) Kota Bandung

| $(j)(i)$ | 0 | 1 | 2 | Jumlah |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 70 | 20 | 2 | 92 |
| 1 | 14 | 11 | 9 | 34 |
| 2 | 9 | 2 | 2 | 13 |
| Jumlah | | | | 139 |

(iii) Sumedang

| $(j)(i)$ | 0 | 1 | 2 | Jumlah |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 52 | 9 | 5 | 66 |
| 1 | 6 | 2 | 10 | 18 |
| 2 | 9 | 7 | 39 | 55 |
| Jumlah | | | | 139 |

(iv) Tasikmalaya

| $(j)(i)$ | 0 | 1 | 2 | Jumlah |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 34 | 5 | 13 | 52 |
| 1 | 8 | 7 | 10 | 25 |
| 2 | 11 | 12 | 39 | 62 |
| Jumlah | | | | 139 |

(v) Indramayu

| $(j)(i)$ | 0 | 1 | 2 | Jumlah |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 82 | 3 | 10 | 95 |
| 1 | 7 | 6 | 5 | 18 |
| 2 | 7 | 9 | 10 | 26 |
| Jumlah | | | | 139 |

Dari Tabel 1 diperoleh matriks peluang transisi untuk masing-masing wilayah Bogor, Bandung, Sumedang, Tasikmalaya, Indramayu sebagai berikut.

$$A = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.667 & 0.051 & 0.282 \\ 0.133 & 0.200 & 0.667 \\ 0.141 & 0.118 & 0.741 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.761 & 0.217 & 0.022 \\ 0.412 & 0.324 & 0.265 \\ 0.692 & 0.154 & 0.154 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.788 & 0.136 & 0.076 \\ 0.333 & 0.111 & 0.556 \\ 0.164 & 0.127 & 0.709 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.654 & 0.096 & 0.250 \\ 0.320 & 0.280 & 0.400 \\ 0.177 & 0.194 & 0.629 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.863 & 0.032 & 0.105 \\ 0.389 & 0.333 & 0.278 \\ 0.269 & 0.346 & 0.385 \end{bmatrix}$$

Karena setiap keadaan dari setiap materiks peluang transisi tersebut hanya mempunyai satu kelas komunikasi, maka rantai Markov untuk kelima wilayah tersebut *Irreducible*. Dengan menggunakan definisi 1 dan teorema 1 diperoleh bahwa semua keadaan *aperiodic*. Selanjutnya dengan menggunakan teorema 2, setiap keadaan adalah *recurrent*. Kemudian, untuk memeriksa *positive recurrent*, dihitung matriks peluang transisi *n*( $n \to \infty$) langkah.

Dengan bantuan Matlab, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$A^{100} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.2957 & 0.1070 & 0.5974 \\ 0.2957 & 0.1070 & 0.5974 \\ 0.2957 & 0.1070 & 0.5974 \end{bmatrix}$$

$$B^{100} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.6722 & 0.2363 & 0.0915 \\ 0.6722 & 0.2363 & 0.0915 \\ 0.6722 & 0.2363 & 0.0915 \end{bmatrix}$$

$$C^{100} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.4943 & 0.1294 & 0{,}3763 \\ 0.4943 & 0.1294 & 0{,}3763 \\ 0.4943 & 0.1294 & 0{,}3763 \end{bmatrix}$$

$$D^{100} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.3852 & 0.1710 & 0.4439 \\ 0.3852 & 0.1710 & 0.4439 \\ 0.3852 & 0.1710 & 0.4439 \end{bmatrix}$$

$$E^{100} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0.6994 & 0.1248 & 0.1758 \\ 0.6994 & 0.1248 & 0.1758 \\ 0.6994 & 0.1248 & 0.1758 \end{bmatrix}$$

Maka berdasarkan teorema 3, $p_{jj}^{n} \rightarrow \frac{1}{\mu_j}$, sehingga diperoleh, $\mu_j$ untuk masing-masing wilayah sebagai berikut:

$$\mu_j\,(A) = [3.382 \quad 9.346 \quad 1.674]$$
$$\mu_j\,(B) = [1.488 \quad 4.232 \quad 10.929]$$
$$\mu_j\,(C) = [2.023 \quad 7.728 \quad 2.657]$$
$$\mu_j\,(D) = [2.596 \quad 5.848 \quad 2.253]$$
$$\mu_j\,(E) = [1.430 \quad 8.013 \quad 5.688]$$

Hal ini menunjukkan bahwa dengan definisi 3, setiap keadaan adalah *positive recurrent.*Sehingga semua rantai Markov dengan matriks peluang transisi tersebut merupakan rantai Markov yang ergodik (*irreducible*,*aperiodic* dan *positive recurrent*). Selanjutnya dengan teorema 4, diperoleh distribusi stasioner rantai Markov $\pi_j$ yang dapat dilihat dari matriks peluang transisi pangkat *n* yang cukup besar ( $n \rightarrow \infty$) yang menghasilkan entri setiap barisnya sama. Dari matriks peluang transisi 100 langkah diperoleh nilai distribusi stasioner atau peluang jangka panjang sebagai berikut:

(1) $\pi_j\,(A) = [0.2957 \quad 0.1070 \quad 0.5974]$

Artinya, untuk kota Bogor, kemungkinan curah hujan akan rendah 29.57%, kemungkinan akan sedang 10.70%, dan kemungkinan akan tinggi sebesar 59.74%.

(2) $\pi_j(B) = [0.6722 \quad 0.2363 \quad 0.0915]$

Untuk kota Bandung, kemungkinan curah hujan akan rendah 67.22%, kemungkinan akan sedang 23.63%, dan kemungkinan akan tinggi sebesar 9.15%.

(3) $\pi_j(C) = [0.4943 \quad 0.1294 \quad 0.3763]$

Untuk kabupaten Sumedang, kemungkinan curah hujan akan rendah 49.43%, kemungkinan akan sedang 12.94%, dan kemungkinan akan tinggi sebesar 37.63%.

(4) $\pi_j(D) = [0.3852 \quad 0.1710 \quad 0.4439]$

Untuk kabupaten Tasikmalaya, kemungkinan curah hujan akan rendah 38.52%, kemungkinan akan sedang 17.10%, dan kemungkinan akan tinggi sebesar 44.39%.

(5) $\pi_j(E) = [0.6994 \quad 0.1248 \quad 0.1758]$

Untuk kabupaten Indramayu, kemungkinan curah hujan akan rendah 69.94%, kemungkinan akan sedang 12.48%, dan kemungkinan akan tinggi sebesar 17.58%.

## SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan distribusi stasioner rantai Markov dihasilkan prediksi curah hujan untuk beberapa wilayah di Jawa Barat dalam jangka panjang sebagai berikut:

a. Untuk kota Bogor dan Tasikmalaya curah hujan cenderung tinggi.
b. Untuk kota Bandung, Sumedang, dan Indramayu curah hujan cenderung rendah.

## DAFTAR PUSTAKA

Doubleday, Kevin J., Julius N. Esunge. (2011). Application of Markov Chains to Stock Trends. *Journal of Mathematics and Statistics*, 7 (2): 103-106

P. Nicolas, 2013. Understanding Markov Chains, Examples and Applications, Springer

Osaki, Shunji. (1992). *Applied Stochastic System Modeling*. Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

**BIDANG : STATISTIKA**

# ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI LINIER SEDERHANA BAYESIAN DENGAN DISTRIBUSI *PRIOR* INFORMATIF

Dina Ariek Prasdika[1], Dewi Retno Sari Saputro[2], Triwik Jatu[3]

[1]Mahasiswa Program Studi Matematika FMIPA UNS
[2,3]Pengajar Program Studi Matematika FMIPA UNS
[a)]dina.ariek@gmail.com

**Abstrak:** Dalam setiap pemodelan dengan dasar model nondeterministik selalu terkait dengan estimasi parameter model, seperti halnya pada model regresi linier sederhana. Metode yang sering digunakan untuk mengestimasi parameter yaitu metode klasik dan metode Bayes. Metode klasik sepenuhnya mengandalkan proses inferensi pada data yang diambil dari populasi. Estimasi parameter dengan metode klasik pada umumnya menggunakan metode *least square* dan *Likelihood.* Metode klasik yang hanya didasarkan pada informasi saat ini yang diperoleh dari sampel tanpa memperhitungkan informasi awal dari parameter regresi. Jika informasi awal tentang parameter diketahui yaitu distribusi *prior*, maka estimasi parameter dapat menggunakan metode Bayes. Metode Bayesian menyatakan seberapa jauh derajat kepercayaan subjektif harus berubah secara rasional ketika ada petunjuk baru. Metode Bayesian menggabungkan informasi distribusi *prior* dengan informasi sampel dan hasilnya dinyatakan dengan distribusi *posterior*. Pemilihan *prior* secara umum dilakukan berdasarkan diketahui atau tidaknya informasi tentang parameter. Informasi parameter yang diketahui disebut *prior informatif*. Tujuan dari penelitian ini untuk menentukan estimasi parameter model regresi linier sederhana Bayesian dengan distribusi *prior* informatif. Metode yang digunakan pada penulisan penelitian ini adalah studi literatur. Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa estimasi parameter regresi linier sederhana dengan *prior* informatif merupakan harga harapan ditribusi *posterior*.

**Kata kunci**: Model Regresi, Estimasi Parameter, Distribusi Prior, Prior Informatif

## PENDAHULUAN

Model regresi merupakan alat statistik yang digunakan untuk mengetahui pola hubungan fungsional antara variabel dependen dan variabel independen yang dipengaruhi oleh beberapa parameter regresi yang belum diketahui nilainya (Sembiring,1995). Metode yang sering digunakan untuk mengestimasi parameter yaitu metode klasik dan metode Bayes. Metode klasik memandang parameter sebagai besaran yang tidak diketahui harganya dan sepenuhnya mengandalkan proses inferensi pada data sampel yang diambil dari populasi. Estimasi parameter dengan metode klasik pada umumnya menggunakan metode *least square* dan *likelihood.* Prinsip metode *least square* adalah meminimumkan jumlah eror dari persamaan regresi. Metode ini dapat digunakan untuk estimasi parameter dalam model regresi linear tanpa memperhatikan bentuk distribusi erornya. Agar dapat menghasilkan estimator yang baik terdapat beberapa asumsi harus dipenuhi, yaitu eror harus berdistribusi normal, variansi sama dan eror harus saling independent. Jika bentuk distribusi eror diketahui, suatu metode alternatif untuk mengestimasi parameter dapat menggunakan metode *maximum likelihood*. Metode *maximum likelihood* digunakan untuk mencari nilai dari satu atau lebih parameter. Tujuan estimasi parameter dengan metode ini untuk menentukan parameter-parameter yang memaksimumkan probabilitas (*likelihood*) dari data sampel.

Metode maksimum *likelihood* sangat sensitif terhadap data *ekstrim.* Data *ekstrim* ini berpengaruh terhadap nilai rata- rata dan variansinya Menurut Nimmah (2014),. Maka dari itu untuk mengatasi hal tersebut digunakan metode Bayesian untuk mengestimasi parameter (Walpole dan Myers,1995). Prinsip metode Bayesian disamping memanfaatkan data sampel yang diperoleh dari populasi juga memperhitungkan suatu distribusi awal yang disebut distribusi *prior*. Distribusi *prior* merupakan distribusi subjektif yang didasarkan pada keyakinan seseorang tentang parameter (Iswari, dkk, 2014). Teorema Bayes adalah sebuah teorema dengan dua penafsiran berbeda. Dalam penafsiran Bayes, teorema ini menyatakan seberapa jauh derajat kepercayaan subjektif harus berubah secara rasional saat ada petunjuk baru. Metode Bayesian menggabungkan informasi distribusi *prior* dengan informasi sampel dan hasilnya dinyatakan dengan distribusi *posterior.* Sedangkan penentuan parameter distribusi *prior* yang didasarkan pada data yang ada disebut *prior* informatif. *Prior* informatif mempengaruhi distribusi *posterior* dan bersifat sangat subjektif (Gelman,dkk, 2004).

Kajian yang terkait dengan penelitian ini adalah Permaningsih pada 2007 dengan metode Bayesian pada model regresi linier yang diterapkan pada data curah hujan. Penelitaian lainnya dilakukan oleh Mutia pada tahun 2012 dengan judul Penerapan Model regresi linier Bayesian untuk mengestimasi parameter dan interval *kredible* yang diterapkan pada data pendapatan dan pngeluaran masyarakat Salatiga tahun 2011. Maka dari itu tujuan penelitian ini untuk menentukan estimasi parameter model regresi linier sederhana Bayesian dengan distribusi *prior* informatif.

**METODE PENELITIAN**

Metode yang digunakan dalam penulisan artikel ini adalah studi literatur, dengan mengumpulkan referensi berupa jurnal, artikel, dan buku yang dapat mendukung pembahasan tentang estimasi parameter regresi linier sederhana dengan metode *bayesian prior* informatif.

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah menguraikan regresi linier sederhana serta menentukan fungsi densitas, menentukan fungsi *likelihood* dari fungsi densitas. Selanjutnya, menentukan distribusi *prior* menggunakan prior informatif, menentukan distribusi *posterior*, lalu menentukan estimasi parameter regresi dengan prior informatif.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini akan dibahas meliputi model regresi linier sederhana, fungsi *likelihood*, distribusi *prior*, distribusi *posterior*, dan estimasi parameter regresi sederhana dengan *prior* informatif**.**

*A. Model Regresi Linier Sederhana*

Model regresi linier dilihat dari banyaknya variabel bebasnya dibagi menjadi model regresi linier sederhana dan regresi linier berganda (Sembiring, 1995). Regresi linier sederhana mempunyai satu variabel independen dan satu variabel dependen. Regresi linier berganda mempunyai lebih dari satu variabel independen dan satu variabel dependen. Model regresi linier sederhana yaitu

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \qquad (1)$$

dengan $i = 1,2,\dots,n$ serta $y_i$ merupakan variabel dependen ke-*i*; $x_i$ merupakan pengamatan variabel independen ke-*i*; $\beta_0$ dan $\beta_1$ merupakan parameter regresi; $\varepsilon_i$ merupakan variabel acak eror atau sisa ke-*i*, serta $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ .Persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Karena $\varepsilon_i$ berdistribusi normal maka $(y_i|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2) \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$. Fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(y_i|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right) \qquad (2)$$

*B. Fungsi Likelihood*

Menurut Bain pada tahun 1992, fungsi *likelihood* adalah fungsi densitas bersama dari *n* variabel random $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ dan dinyatakan dalam bentuk

$f(y_1, y_2, \dots, y_n; \beta)$. Jika $y_1, y_2, \dots, y_n$ ditetapkan, maka fungsi likelihood adalah fungsi dari parameter $\beta$ dan dinotasikan dengan $L(\beta)$. Jika $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ menyatakan suatu sampel random dari $f(y; \beta)$, maka

$$L(\beta) = f(y_1; \beta) f(y_2; \beta) \dots f(y_n; \beta)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \beta)$$

Apabila rumus *likelihood* diterapkan pada fungsi densitas persamaan (2) maka fungsi likelihoodnya sebagai berikut

$$f(y|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} . exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})\right)$$
$$= (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} . exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})\right) \quad (3)$$

*C. Distribusi Prior*

*Prior* merupakan bentuk distribusi *frequency* yang merupakan objektif pada suatu parameter yang lebih rasional untuk dipercayai, atau *prior* merupakan suatu representasi subjektifitas dalam memandang sebuah parameter menurut penilitian peneliti (Siska, 2011). Permasalahan dalam metode Bayesian adalah bagaimana memilih distribusi *prior* dimana *prior* menunjukkan ketidakpastian tentang parameternya yang tidak diketahui. Distribusi *prior* informatif mengacu pada pemberian parameter dari ditribusi *prior* yang telah dipilih baik distribusi *prior* konjugat maupun tidak. *Prior* konjugat merupakan *prior* yang dikombinasi dengan fungsi *likelihood* akan menghasilkan distribusi *posterior* yang sama dengan distribusi *prior*.

Dari persamaan (3) log *likelihood* kuadratik dalam $\boldsymbol{\beta}$ sehingga log- *likelihood* diatur ulang menjadi normal dalam $(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}})$ dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}$. Fungsi likelihoodnya sebagai berikut

$$f(y|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} . exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})\right)$$

$$= (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} . exp -\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)^T\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) + \left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)^T(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}})\right)$$

$$= (\sigma^2)^{-\frac{v}{2}} . ex\,p\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right) \times (\sigma^2)^{-\frac{n-v}{2}}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)^T(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})\left(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) \quad (4)$$

dengan $vs^2 = \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)^T \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)$ dan $v = n - k$ , $k$ merupakan jumlah koefisien regresi.

Berdasarkan persamaan (4), bentuk distribusi *prior*nya yaitu $f(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = f(\sigma^2) f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2)$ dengan $\sigma^2$ berdistribusi invers-Gamma $(a_0, b_0)$ dengan $a_0 = {}^{v_0}/_2$ dan $b_0 = v_0 s_0^2$. Fungsi kepadatan probabilitas *prior* dinyatakan sebagai berikut:

$$f(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\left({}^{v_0}/_2+1\right)} \exp\left(-\frac{v_0 s_0^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

*Prior* bersyarat $\boldsymbol{\beta}|\sigma^2$ berdistribusi $N(\mu_0, \sigma^2 \Lambda_0^{-1})$. dengan $\mu_0$ ditentukan secara subjektif**.** Fungsi kepadatan probabilitas *prior* ditulis sebagai berikut

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\left({}^{k}/_2\right)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu_0})^T \boldsymbol{\Lambda_0} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu_0})\right) \quad (6)$$

Dari persamaan (5) dan (6) diperoleh distribusi *prior* sebagai berikut

$$f(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\left({}^{v_0}/_2+1\right)} \exp\left(-\frac{v_0 s_0^2}{2\sigma^2}\right) (\sigma^2)^{-\left({}^{k}/_2\right)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu_0})^T \boldsymbol{\Lambda_0} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu_0})\right) \quad (7)$$

*D. Distribusi Posterior*

Menurut Bostad (2007), metode inferensi dengan menggunakan data sampel dan data *prior* disebut dengan metode Bayesian. Teorema Bayes merupakan alat untuk mengkombinasikan distribusi $\theta$ dan distribusi $\boldsymbol{y}$ dengan syarat $\theta$ untuk mendapatkan distribusi $\theta$ dengan syarat $y$ yang dinyatakan dalam persamaan berikut

$$(\theta|y, X) = \frac{f(\theta, y)}{f(y)} = \frac{f(y|\theta) f(\theta)}{f(y)}, f(y) \neq 0 \quad (8)$$

dimana $f(y) = \sum_\theta f(\theta) f(y|\theta)$, untuk $\theta$ diskrit dan $f(y) = \int f(\theta) f(y|\theta) d\theta$ untuk $\theta$ Karena $f(y)$ tidak bergantung pada nilai $\theta$ maka $f(y)$ dianggap konstan. Persamaan (8) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(\theta|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \propto f(y|\theta) f(\theta) \quad (9)$$

$f(\theta|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ merupakan informasi sampel yang didapat dari fungsi *likelihood* dan $f(\theta)$ merupakan distribusi *prior.*

Kombinasi antara distribusi *prior* dan vektor data akan menghasilkan distribusi *posterior* (Brikes, dkk, 1993). Distribusi *posterior* dengan menggunakan pesamaan (9) dinyatakan sebagai berikut

$$Posterior \propto Likelihood\ x\ Prior.$$

Distribusi posterior *yang* diperoleh dari persamaan (3) dan (7) didapatkan persamaan sebagai berikut

$$f\left((\boldsymbol{\beta},\sigma^2)\middle|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{X})\right) \propto f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X},(\boldsymbol{\beta},\sigma^2))\, f(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)$$

$$\propto f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X},(\boldsymbol{\beta},\sigma^2))\, f(\sigma^2) f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2)$$

$$\propto (\sigma^2)^{-n/2}.\, exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\boldsymbol{X\beta})^T(y-\boldsymbol{X\beta})\right)$$

$$\times (\sigma^2)^{-(a_0+1)} exp\left(-\frac{b_0}{2\sigma^2}\right)$$

$$\times (\sigma^2)^{-(k/2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_0})^T\boldsymbol{\Lambda_0}(\boldsymbol{\beta}\right.$$

$$\left.-\boldsymbol{\mu_0})\right) \qquad (10)$$

*E. Estimasi Parameter Regresi Linier Sederhana dengan Prior Informatif*

Estimasi parameter pada metode Bayesian berhubungan dengan distribusi *prior* dan *posterior*. Harga harapan atau mean dari parameter merupakan estimator Bayesian.Pengaturan ulang dari persamaan (10) didapatkan persamaan sebagai berikut

$$f\left((\boldsymbol{\beta},\sigma^2)\middle|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{X})\right) \propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n}{2}+a_0+1+\frac{k}{2}\right)} exp$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left((y-\boldsymbol{X\beta})^T(y-\boldsymbol{X\beta})+b_0+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_0})^T\boldsymbol{\Lambda_0}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_0})\right)$$

$$\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n}{2}+a_0+1+\frac{k}{2}\right)} exp\,\frac{1}{2\sigma^2}\left((y-\boldsymbol{X\beta})^T(y-\boldsymbol{X\beta})+\right.$$

$$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu0}T\boldsymbol{\Lambda0\beta}-\boldsymbol{\mu0}+b0$$

$$\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n}{2}+a_0+1+\frac{k}{2}\right)} exp\,\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{y^Ty}-\boldsymbol{2\beta^TX^Ty}+\boldsymbol{\beta^TX^TX\beta}+\right.$$

$$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu0}T\boldsymbol{\Lambda0\beta}-\boldsymbol{\mu0}+b0$$

atau

$$log\, f\left((\boldsymbol{\beta},\sigma^2)\middle|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{X})\right)$$

$$\propto log\left[(\sigma^2)^{-\left(\frac{n}{2}+a_0+1+\frac{k}{2}\right)} exp\right.$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{y^Ty}-\boldsymbol{2\beta^TX^Ty}+\boldsymbol{\beta^TX^TX\beta}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_0})^T\boldsymbol{\Lambda_0}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_0})\right.$$

$$\left.\left.+\,b_0\right)\right]$$

$$\propto \left[\left[-2\left(\frac{n}{2}+a_0+1+\frac{k}{2}\right)\log(\sigma)\right] - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{y^T y} - \boldsymbol{2\beta^T X^T y} + \boldsymbol{\beta^T X^T X \beta} + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_0})^T \boldsymbol{\Lambda_0}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_0}) + b_0\right)\right]$$

Nilai maksimum dari fungsi tersebut diperoleh dengan cara mencari turunan pertamanya terhadap $\boldsymbol{\beta}$ dan disama dengankan nol sehingga diperoleh

$$2\boldsymbol{\Lambda_0}\boldsymbol{\hat{\beta}} - 2\boldsymbol{\Lambda_0}\boldsymbol{\mu_0} - 2\boldsymbol{X^T y} + \boldsymbol{X^T X}\boldsymbol{\hat{\beta}} = 0$$

$$\boldsymbol{2\hat{\beta}}\left(\boldsymbol{\Lambda_0} + \boldsymbol{X^T X}\right) - \boldsymbol{2}\left(\boldsymbol{\Lambda_0}\boldsymbol{\mu_0} + \boldsymbol{X^T y}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{\hat{\beta}}\left(\boldsymbol{\Lambda_0} + \boldsymbol{X^T X}\right) = \left(\boldsymbol{\Lambda_0}\boldsymbol{\mu_0} + \boldsymbol{X^T y}\right)$$

$$\boldsymbol{\hat{\beta}} = \left(\boldsymbol{\Lambda_0} + \boldsymbol{X^T X}\right)^{\boldsymbol{-1}}\left(\boldsymbol{\Lambda_0}\boldsymbol{\mu_0} + \boldsymbol{X^T y}\right) = \boldsymbol{\mu_n}$$

mean *posterior* $\boldsymbol{\mu_n}$ dapat dinyatakan dalam kuadrat terkecil $\hat{\beta}$ dan mean *prior* dinyatakan dalam bentuk matrik presisi $\boldsymbol{\Lambda_0} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sigma^2}$.

Persamaan kuadrat dalam eksponensial diatur kembali ke bentuk kuadrat dalam

$$(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_n})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_0})^T\boldsymbol{\Lambda_0}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_0})$$

$$= (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_n})^T(\boldsymbol{X^T X}+\boldsymbol{\Lambda_0})(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_n}) + \boldsymbol{y^t y} - \boldsymbol{\mu_n^T}(\boldsymbol{X^T X}+\boldsymbol{\Lambda_0})\boldsymbol{\mu_n} + \boldsymbol{\mu_0^T}\boldsymbol{\Lambda_0}\boldsymbol{\mu_0} \quad (9)$$

Distribusi *posterior* dapat dinyatakan sebagai distribusi normal dikalikan dengan distribusi invers- gamma dari persamaan (8) dan (9) dinyatakan sebagai berikut

$$f(\boldsymbol{\beta},\sigma^2|\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}) \propto (\sigma^2)^{-\left({k}/{2}\right)}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_n})^T(\boldsymbol{X^T X}+\boldsymbol{\Lambda_0})(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_n})\right) \times$$
$$(\sigma^2)^{-\left({n+v_0}/{2}-1\right)}\exp\left(-\frac{b_0+\boldsymbol{y^t}-\boldsymbol{\mu_n^T}(\boldsymbol{X^T X}+\boldsymbol{\Lambda_0})\boldsymbol{\mu_n}+\boldsymbol{\mu_0^T}\boldsymbol{\Lambda_0}\boldsymbol{\mu_0}}{2\sigma^2}\right).$$

Distribusi *posterior* dapat dinyatakan sebagai berikut

$$f(\boldsymbol{\beta},\sigma^2|\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}) \propto f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2,\boldsymbol{y},\boldsymbol{X})\, f(\sigma^2|\boldsymbol{y},\boldsymbol{X})$$

sehingga distribusinya yaitu $N\left(\mu_n,\sigma^2(\boldsymbol{X^T X}+\boldsymbol{\Lambda_0})^{-1}\right)$ dan invers- Gamma $(a_0, b_0)$ dengan parameternya yaitu

$$\boldsymbol{\Lambda_n} = (\boldsymbol{X^T X}+\boldsymbol{\Lambda_0}), \boldsymbol{a_n} = \frac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{v_0}}{\boldsymbol{2}},$$

$$\boldsymbol{b_n} = \boldsymbol{b_0} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{y^t} - \boldsymbol{\mu_n^T}(\boldsymbol{X^T X}+\boldsymbol{\Lambda_0})\boldsymbol{\mu_n} + \boldsymbol{\mu_0^T}\boldsymbol{\Lambda_0}\boldsymbol{\mu_0})$$

## SIMPULAN

Distribusi prior informatif $f(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = f(\sigma^2)f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2)$ dengan $\sigma^2$ berdistribusi invers-Gamma $(a_0, b_0)$ dan $f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2)$ berdistribusi $N(\mu_0, \sigma^2\Lambda_0^{-1})$. Distribusi posterior $p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \propto p(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})\, p(\sigma^2|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ dengan $p(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ berdistribusi $N\left(\mu_n, \sigma^2(\boldsymbol{X^T X} + \boldsymbol{\Lambda_0})^{-1}\right)$ dan $p(\sigma^2|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ berdistribusi invers-Gamma $(a_0, b_0)$. Estimator bayes dari distribusi *posterior* didapatkan $\boldsymbol{\mu_n} = (\boldsymbol{X^T X} + \boldsymbol{\Lambda_0})^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{X^T y} + \boldsymbol{\Lambda_0 \mu_0})$**.**

## DAFTAR PUSTAKA

Bain, L. J. dan M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics,* second ed., Buxbury Press, Inc., California, 1992

Birkes, D. and Y. Dodge, *Altenative Method of Regression*, John Wiley and Sons, Inc.,New York, 1993

Bolstad, W.M. *Introduction to Bayesian Statistics Second Edition.* A John Wiley & Sons. Inc: America, 2007

Iswari A.A.I.A. Candra, Sumarjaya I Wayan, and Srinadi I.G.A.Made.2014. *Analisis Regresi Bayes Linear Sederhana dengan Prior Noninformatif, E-Jurnal Matematika*, Vol. 3,pp 38-44

Gelman, A., Carlin John, B., Stern Hal, S., dan Rubin Donald, B., *Bayesian Data Analysis*, 2nd ed, New York: Chapman & Hall, 2004.

Ni'mah, R. Agoestanto, A., *Estimator Bayes Untuk Rata- Rata Tahan Hidup Dari Distribusi Rayleigh pada Data Disensor Tipe II*. UNNES Journal of Mathematics, 2014.

Mutiarani,V. Setiawan, A., dan Parhusip, H. A. *Penerapan model regresi Linier Bayesian Untuk Mengestimasi Parameter dan Interval Kredibel*. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY, 2012

Parmaningsih T.Jatu. *Metode Bayesian pada model Regresi Linier*. Laporan Skripsi S1 Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Sebelas Maret, Surakarta, 2007

Sembiring, R.K. *Analisis Regresi*, ITB, Bandung, 1995 .

Siska A. Candra.*Inferensi Statistik Distribusi Binomial dengan Metode Bayes Menggunakan Prior Konjugat*. Laporan skripsi S1 Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Diponegoro, 2011

Walpole,R.E dan Myers, R.H. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insyinyur dan Ilmuwan Edisi ke-4*. Alih bahasa oleh Sembiring, R.K. Penerbit ITB; Bandung , 1995.