

І. Ш. НЕВЛЮДОВ, Н. П. ДЕМСЬКА, В. А. ПАЛАГІН, І. В. БОЦМАН

## МАТРИЧНО-СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГНУЧКИХ МІЖЗ'ЄДНАНЬ І КОМПОНЕНТІВ МЕМС

Конструкції сучасної електронної техніки є складними механічними системами з безліччю жорстких зв'язків, а їх мікромініатюризція у багатьох випадках дійшла до фізичної межі розмірного, зарядового та енергетичного квантування компонентів. Для таких механічних систем, з неklasичними для механіки способами кріплення окремих конструктивних елементів, складно побудувати розрахункову модель, досить просту і в той же час таку, що добре відображає фізичні і динамічні властивості. Для забезпечення механічної міцності міжз'єднань та зверхтонких електронних компонентів необхідною є можливість визначення напружено-деформованого стану елементів конструкцій. Ці причини зумовлюють необхідність застосування чисельних методів для розрахунку динамічних параметрів конструкцій міжз'єднань електронної техніки, що дозволить підвищити показники надійності розроблених засобів, що відповідають вимогам нормативно-технічної документації по механічним характеристикам, скоротити терміни і вартість їх створення. **Предметом** даної роботи є дослідження деформації балки постійного поперечного перерізу під дією осьових сил, згинальних моментів і крутного моменту щодо поздовжньої осі. **Метою** даної роботи є визначення деформації елементів конструкції пристроїв з використанням матриці жорсткості при відомому векторі зовнішніх сил. Для досягнення поставленої мети необхідне вирішення наступних **завдань**: розглянути існуючі методи опису та аналізу, які враховують специфіку використовуваних конструкцій і технологічних процесів виготовлення конкретних структур МЕМС; дослідити сутність цих методів; провести розрахунок переміщень і деформацій, використовуючи метод скінченних елементів; використовуючи матрицю жорсткості, визначити деформації елементів конструкції пристроїв; провести розрахунок деформації балки постійного поперечного перерізу під дією осьових сил, згинальних моментів і крутного моменту щодо поздовжньої осі. **Висновки**: матриця жорсткості, побудована з використанням матричного функціонального аналізу, дозволяє забезпечити розрахунок деформації елементів МЕМС і гнучких електронних міжз'єднань.

**Ключові слова**: мікроелектромеханічні системи; міжз'єднання; метод скінченних елементів; напружено-деформований стан; деформація; зсув.

### Вступ

На даний момент тенденції виробництва ґрунтуються на впровадженні нових рішень і технологій Industry 4.0, IoT, хмарних сервісів і т.п [1, 2], найважливішу роль в працездатності яких грають сучасні технічні засоби автоматизації (сенсори, виконавчі пристрої, регулятори, тощо), які мали б забезпечити необхідний рівень точності, параметри швидкодії, малі габаритно-масові характеристики, високу функціональність, низьке енергоспоживання і вартість [1].

Основною проблемою інтеграції сучасних технічних засобів для впровадження технології Industry 4.0 залишається те, що нині, всі готові деталі базуються на традиційних електронних компонентах жорстких (гнучко-жорстких) друкованих плат, які мають значну товщину і обмежені в гнучкості, а також не можуть мати повністю адаптоване апаратне рішення для кожного конкретного розміру і форми об'єкта автоматизації [3]. Тому сучасні технології йдуть від традиційного дизайну жорсткої електроніки в майбутнє гнучких форм-факторів, які можуть запропонувати нові функціональні можливості, які раніше не були можливі, особливо на ринках, таких як медицина, IoT, сенсори і смарт-текстиль [4, 5].

Сфера застосування гнучкої електроніки досить широка і охоплює як побутову техніку, так і компоненти військової, авіаційної, космічної, медичної та промислової апаратури. Їх широке застосування в даних сферах обумовлено рядом переваг: компактність, навіть при великій кількості контактів; проста і швидка заміна пошкодженого

кабелю; організація провідників, яка виключає заплутування; з'єднання модулів і виконавчих пристроїв, віддалених один від одного, в рамках одного блоку або виробу; "рухливість" з'єднання [6].

Більшість гнучких схем – всього лише пасивні з'єднувальні елементи, які використовуються для з'єднання таких електронних компонентів, як інтегральні схеми, резистори, конденсатори, однак, деякі з них можуть застосовуватися і для створення взаємного зв'язку між іншими електронними блоками як безпосередньо чи через з'єднувачі.

Для їх створення характерно широке використання нових матеріалів, конструктивно-технологічних рішень, мікромініатюризція, автоматизація та інтелектуалізація всіх етапів створення виробів. Необхідність враховувати принципи функціонування приладів і систем, зростаючі вимоги до точності, надійності, швидкодії, обсяги інформації, що опрацьовується [7], визначає необхідність використання і розвитку різних напрямків функціональної електроніки, мікросистемної техніки (МСТ) і нанотехнологій, інтелектуальних і 4D технологій.

МСТ, як сполучна ланка між мікроелектронікою, мікромеханікою і нанотехнологіями сприяє їх взаємному розвитку та збереженню темпів розвитку електронних пристроїв згідно емпіричному закону Мура [8]. Мікроелектромеханічні системи (МЕМС), як одним з напрямків МСТ, забезпечує створення мікромініатюрних міжз'єднань, основною проблемою яких є зменшення жорсткості, як окремих елементів, так і всієї конструкції в цілому. Проблеми, що виникають у зв'язку з цим вирішуються різними способами. Одним з універсальних принципів

забезпечення міцності конструкцій є використання властивості пружності елементів і пристроїв конструкції, які засновані на аналізі напружено-деформованого стану (НДС) під дією системи зовнішніх сил, розподілів температури, фізичних властивостей матеріалів і особливостей структури [8].

### Постановка задачі та мета досліджень

Різноманітні види міжз'єднань, балки і мембрани є багатфункціональними компонентами МСТ. Вони використовуються в якості плоских пружин (підвісів), в тому числі багатовиткових чутливих елементів сили, тиску, швидкості, потоку, частоти, температури, вмісту газів, консолей, міліліпед, кутів нахилу, прискорення та ін. [9, 10].

Проектування міжз'єднань апаратури, мікромеханічних сенсорів і актюаторів базується на їх ієрархічному поданні як сукупності елементів загального призначення і оцінці параметрів на основі узагальнених механічних і електричних величин.

Елементами загального призначення є шлейфи, балки, мембрани, електростатичні зазори, вузли елементів корпусу. В цілому механічні елементи представляються у вигляді мас, елементів пружності (жорсткості), демпфування і втрат. Електричними параметрами служать напруги і струми.

Механічні узагальнені сили визначають НДС елементів структури, електричні струми та напруги – теплову, електричну та магнітну взаємодію елементів. І ті й інші проявляються у вигляді узагальнених сил (сил, моментів сил, напружень, електричних напруг) та переміщень (деформацій), швидкостей, прискорень, струмів.

Узагальнені сили визначають напружено-деформований стан елементів структури. Використання узагальнених сил, мас, координат базується на принципах фізичних аналогій. Для МЕМС – це електромеханічні аналогії: "сила-напруга" і "сила-струм" [10].

У більшості випадків аналітичні методи аналізу зважаючи на складність геометрії пристроїв, різні властивості окремих мікрообластей розглянутих структур не представляється можливим. Методи опису та аналізу повинні в необхідній мірі враховувати специфіку використовуваних конструкцій і технологічних процесів виготовлення конкретних структур.

Аналітична механіка для опису динамічних процесів руху і деформацій використовує принципи фізичних аналогій, які в термінах узагальнених координат, сил, мас і похідних понять одноманітно представляють залежність параметрів руху і деформацій від діючих сил різної природи, властивостей матеріалів, структури [11, 12]. Методами вирішення подібних задач є метод матричного структурного аналізу [13] та метод скінчених елементів (МСЕ) [14]. Ці методи на даний час є найбільш простими числовими методами для вирішення завдань механіки деформованого твердого тіла; вони успішно застосовується для розрахунку

конструкцій практично будь-якої складності, систем, що мають складну геометричну конфігурацію та нерегулярну фізичну структуру завдяки властивій їм універсальності й алгоритмічності [15, 16].

Сутність методів полягає в розбивці структури на малі (кінцеві) елементи, які взаємодіють між собою в вузлових точках, в яких визначаються фіктивні сили, еквівалентні поверхневим напруженням, розподіленим по межах елементів. Для кожного елемента складається рівняння руху [17].

### Розрахунок елементів матриці жорсткості елемента структури за методом скінчених елементів

Розробка складних МЕМС пристроїв виконується з використанням систем автоматизованого проектування, (Sugar, Coventor, Tanner Pro, MemCad) об'єднання взаємодіючих простих мікромеханічних балок, мембран, електростатичних проміжків, вузлів, кріплень до корпусу та ін., на основі аналізу напружено-деформованого стану під дією системи зовнішніх сил, розподілів температури, фізичних властивостей матеріалів і особливостей структури. МЕМС компоненти, за електромеханічними властивостями дозволяють проектувати різного рівня ієрархії датчики високої швидкодії, чутливості і конструктивно-технологічних параметрів [18]. Перераховані характеристики пов'язані одним загальним для електромеханічних систем рівнянням, що визначає власну резонансну частоту системи  $\omega_0$ , а отже і швидкодію:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{M},$$

де  $K$  – жорсткість, пружність кріплення;  $M$  – рухома маса.

З огляду на зв'язок пружності з чутливістю датчика, отримуємо умову інваріантності балкових, мембранних і мембранно-балкових структур:

$$f_0^2 MS = const.$$

де  $S = 1 / K$ .

Ставлячи потрібні значення однієї з трьох величин визначаємо залежність між двома іншими величинами.

У загальному випадку рівняння руху, в тому числі і деформації механічної системи, що містить основні компоненти: маси  $M$ , втрат і демпфірування  $R$ , пружності (жорсткості)  $K$ , під дією зовнішніх, внутрішніх сил структури, які визначаються розподілом напружень, температури в елементах, фізичними властивостями матеріалів і особливостями конструкції, представляється у вигляді [13, 19]:

$$[m]\{q\} + [R]\{q\} + [K]\{q\} = \{F\}, \quad (1)$$

де  $\{q\}$  – вузлові ступені свободи ( $\{q\} = \{x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n\}$  – вектор (матриця) стовпців координат розташування вузлів  $1 \times i$ );  $\{F\}$  – вектор (матриця) узагальнених сил структури.

Індивідуальні матриці збираються в систему матриць  $[K]$ ,  $[R]$  і  $[m]$  – жорсткості, втрат і мас – відповідно. У матрицях всі елементи пов'язані з загальними вузлами, що досягається суперпозицією вузлів. Індекси елементів вказують в системній матриці безпосереднє значення вузлових координат компонентів.

Зовнішні узагальнені сили  $F$  діють на узагальнені основні фізичні елементи: маси, пружності, елементи втрат і демпфування, розподілені в малих обсягах структури  $ij$  (кінцевих елементах). Матриці мас, втрати, жорсткості складаються з підматриць окремих кінцевих елементів структури з координатами, визначеними індексами  $ij$ :  $m_{ij}$ ,  $k_{ij}$ ,  $r_{ij}$ .

За матричним рівнянням (1) може виконуватись аналіз функціонування пристроїв МЕМС в режимах постійного струму, перехідному, сталому режимі при впливі гармонійних коливань різної частоти, динамічному.

Елементом маси структури зовнішні сили надають прискорення, змінюючи їх кінематичну енергію, на елементах жорсткості під дією пружної деформації змінюється потенційна енергія, переміщення (і деформації) викликають втрати частини енергії пропорційно швидкості переміщень [20].

Розподіл діючих сил між окремими складовими частинами рівняння (1) залежить від характеру діючих сил, конструкції і механічних властивостей матеріалів структури, тобто матриць  $[m]$ ,  $[R]$  і  $[K]$ .

При розрахунках переміщень і деформацій кінцевих елементів використовуються класичні теорії пружності, опору матеріалів, матрично-структурного аналізу і різних методи: скінченних елементів, вузлового аналізу, рівняння динаміки.

Жорсткість розраховується, використовуючи теорему Кастільяно;

$$F_i = \frac{\partial S}{\partial \delta_i},$$

де  $F_i$  – узагальнена сила (тобто сила або момент), а  $\delta_i$  – зміщення координат для трьох ступенів рухливості.

Залежно від характеру діючих сил розрізняють об'ємні, площинні і лінійні напружено-деформовані стани твердого тіла [10].

При об'ємному напруженому стані деформації зсуву визначаються нормальними  $\sigma$  і дотичними  $\tau$  напруженнями, а в загальному випадку для анізотропних матеріалів – тензорами четвертого рангу напруг і деформацій. З урахуванням просторової

симетрії властивостей пружності матеріалів з кубічною кристалічною структурою число незалежних змінних зменшується до 36 [9].

При малих значеннях зсувів об'ємні деформації визначаються наступними лінійними залежностями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{13}\sigma_z + s_{14}\tau_{yz} + s_{15}\tau_{yx} + s_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= s_{21}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{23}\sigma_z + s_{24}\tau_{yz} + s_{25}\tau_{yx} + s_{26}\tau_{xy} \\ \varepsilon_z &= s_{31}\sigma_x + s_{32}\sigma_y + s_{33}\sigma_z + s_{34}\tau_{yz} + s_{35}\tau_{yx} + s_{36}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= s_{41}\sigma_x + s_{42}\sigma_y + s_{43}\sigma_z + s_{44}\tau_{yz} + s_{45}\tau_{zx} + s_{46}\tau_{xy} \\ \gamma_{zx} &= s_{51}\sigma_x + s_{52}\sigma_y + s_{53}\sigma_z + s_{54}\tau_{yz} + s_{55}\tau_{zx} + s_{56}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= s_{61}\sigma_x + s_{62}\sigma_y + s_{63}\sigma_z + s_{64}\tau_{yz} + s_{65}\tau_{zx} + s_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

або у векторно-матричній формі, позначивши для економії місця запису векторів-стовпців деформації та напруг:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}; \\ \varepsilon_i &= s_{ij}\sigma_{ij}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} \\ \sigma_i &= k_{ij}\varepsilon_{ij}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $S$  та  $K$  – матриці, розмірність в яких визначається розмірністю вектор-стовпців,  $k_{ij}$  – коефіцієнти пружності;  $s_{ij}$  – коефіцієнти податливості матеріалу в напрямку дії відповідної напруги, слід зазначити що  $s_{ij} \neq 1/k_{ij}$ ;  $\varepsilon_i$  – відносні деформації (розтягування-стиснення) по осях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\gamma_{ij}$  – кути зсуву в площинах, які визначаються нижніми індексами. Індекси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  для зручності можуть змінюватись на 1, 2, ..., 6, в залежності від системи сил, що діють на структуру.

Описується деформуєча формула пружної структури під дією системи сил (і розподілу температури) трьома розподілами:

$$q_x = q_x(x, y, z); \quad q_y = q_y(x, y, z); \quad q_z = q_z(x, y, z). \quad (5)$$

Відносні (питомі) деформації представляються як часткові похідні розподілів  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ , і при малих деформаціях залежності напруга-зміщення (деформація) будуть лінійними, а їх компоненти визначаються (6) [19]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial q_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial q_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial q_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z}; \quad \varepsilon_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  – являють собою нормальні зміщення, що викликаються нормальними напруженнями  $\sigma$ , а  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  – зміщення зсуву.

Таким чином, для опису пружного напруженого стану в тривимірному просторі потрібно шість компонент.

Термічні напруги, викликані тепловими впливами, можуть розраховуватися за формулою

$$\varepsilon_{Tij} = \delta_{ij} \alpha T \text{ для } i, j = x, y, z, \quad (7)$$

де  $\delta = \begin{cases} 1 \text{ для } j = i \\ 0 \text{ для } j \neq i \end{cases}$  – символ Кронекера. (8)

Деформація структури, при спільному навантаженні системою сил і температурних впливів (у вигляді розподілу температур) визначається сумарним впливом сил і температури

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{Tij}, \quad (9)$$

тоді при

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]; \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})]; \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}; \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}; \gamma = \frac{2(1+\mu)}{E} = G. \end{aligned} \quad (10)$$

З урахуванням температурних впливів:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha T; \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] + \alpha T; \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha T \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}; \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (11)$$

Важливо відзначити, що деформації  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  не залежить від температурних впливів на всю структуру.

З рівнянь (11) виходять такі залежності напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_{xx} + \mu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] - \frac{E\alpha T}{1-2\mu} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_{yy} + \mu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx})] - \frac{E\alpha T}{1-2\mu}; \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_{zz} + \mu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] - \frac{E\alpha T}{1-2\mu} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{xy} \\ \tau_{yx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{zx} \end{aligned} \quad (13)$$

Рівняння (10) і (11) можуть бути записані в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} + \alpha T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha T}{1-2\mu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Всі попередні рівняння напружено-деформованого стану були виражені через модуль пружності Юнга  $E$  і коефіцієнт Пуассона  $\mu$ . Модуль зсуву  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ .

Ввівши позначення векторів-стовпців напруг і деформацій у вигляді:

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}; \quad (16)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}; \quad (17)$$

$$\chi_T = \frac{E}{1-2\mu} \{-1, -1, -1, 0, 0, 0\} = \chi_T^T; \quad (18)$$

$$\chi = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & & & \\ \mu & 1-\mu & \mu & & & \\ \mu & \mu & 1-\mu & & & \\ & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

в матричному записі маємо:

$$\sigma = \chi \varepsilon + \alpha T \chi_T. \quad (20)$$

Помноживши (20) на  $\chi^{-1}$ , отримаємо матричне подання напружено-деформованого стану:

$$\varepsilon = \chi^{-1} \sigma - \alpha T \chi^{-1} \chi_T = \Phi \sigma + \varepsilon_T, \quad (21)$$

де

$$\Phi = \chi^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & \mu & -\mu & & & \\ -\mu & 1 & -\mu & & & \\ -\mu & -\mu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \quad (22)$$

та

$$\varepsilon_T = -\alpha T \chi^{-1} \chi_T = \alpha T \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}. \quad (23)$$

Матричне рівняння (1) дозволяє проводити аналіз функціонування пристроїв МЕМС в режимах постійного струму (direct current), встановленого стану (steady state), перехідного процесу (transient), динамічного режиму (dynamic mode).

Для цього необхідно описати властивості пристрою завданням матриць  $k_{ij}$ ,  $m_{ij}$ ,  $r_{ij}$  кінцевих елементів системи, з урахуванням досліджуваного режиму.

Для аналізу структури на постійному струмі рівняння (1) спрощується до рівняння рівноваги

$$[K]\{q\} = \{F\}, \quad (24)$$

тому що похідні координат дорівнюють нулю.

Рівновага визначається рівністю внутрішніх сил напружено-деформованого стану матеріалу структури, викликаного дією зовнішніх сил, і залежить від механічних властивостей матеріалу: модуля пружності Юнга  $E$ , коефіцієнта Пуассона  $\mu$ , коефіцієнта теплового розширення  $\alpha$ . Ці параметри формують для кожної структури індивідуальну матрицю жорсткості  $[K]$ . Жорсткість – це чисельний показник сили протидії матеріалу елемента структури при його деформації зовнішніми силами, розрахована на одиницю довжини елемента [8].

Матриця жорсткості  $[K]$  залежить також від способу впливу на структуру узагальнених зовнішніх сил (трьох-, двох-, одноірного навантаження).

Фізичний сенс елементів матриці жорсткості  $[K]$  для найбільш загального – тривимірного НДС наступний:

-  $K_{ij}$  – визначає силу, яку необхідно прикласти в напрямку  $j$  для отримання одиничного зсуву в напрямку  $i$ ;

- для значень  $i = j = 1, 2, 3$  елемент деформації є стисненням-розтягуванням під дією нормальних напружень та є рівними  $K_{ij} = \frac{EA}{l}$ , де  $A$  – площа поперечного перерізу балки,  $l$  – її довжина.

Вид матриці жорсткості залежить від сукупності безлічі діючих на структуру сил.

Для опису НДС при об'ємному напруженому стані, матриця має розмірність  $6 \times 6$  в кожному вузлі сітки структури, тобто вектор-стовпець напруг:

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}.$$

Для плоского напруженого стану розрізняють два варіанти навантажень:

- стиснення тонких пластин:  $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy} = 0$ , модуль пружності тонких пластин  $\frac{E}{1-\mu^2}$  [19], вектор деформацій являє:  $\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}$ ;

- розтягування подовжених тіл з постійним поперечним перерізом:  $\varepsilon_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ,  $\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}$ .

Випадок стиснення тонкої пластини, передбачає, що вісь  $Z$  перпендикулярна площині пластини.  $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ , тобто вектори напружень і деформацій мають вигляд:

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}; \quad (25)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}. \quad (26)$$

Закон Гука для плоского напружено-деформованого стану представляється у вигляді матриці  $3 \times 3$ .



Вектор-стовпець напруг, згідно закону Гука:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha T}{1-\mu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Який в матричному вигляді може бути представлений

$$\sigma = \chi \varepsilon + \alpha T \chi_T, \quad (28)$$

де

$$\chi_T = \frac{E}{1-\mu} \{-1, -1, 0\}; \quad (29)$$

$$\chi = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Для визначення деформацій отримуємо

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \alpha T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Крім того, виникає ненульова компонента:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\mu}{E}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \alpha T = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha T. \quad (32)$$

При деформації подовженого кінцевого елемента постійного перетину з рівномірним навантаженням впродовж осі. Слід підкреслити, що вісь  $Z$  змінила напрям у порівнянні з випадком стиснення тонкої пластини. Як і в попередньому випадку:

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}, \quad (33)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}, \quad (34)$$

$$\sigma = \chi \varepsilon + \alpha T \chi_T. \quad (35)$$

Вона не включається в вектор деформацій, тому що є лінійною комбінацією  $\varepsilon_{xx}$  і  $\varepsilon_{yy}$ .

### Розрахунок компонентів матриці жорсткості

Розглянемо приклад розрахунку деформації балки постійного поперечного перерізу під дією осевих сил, згинальних моментів і крутного моменту щодо поздовжньої осі (рис. 1). Позначення компонентів жорсткості відповідає номерам сил (рис. 1).

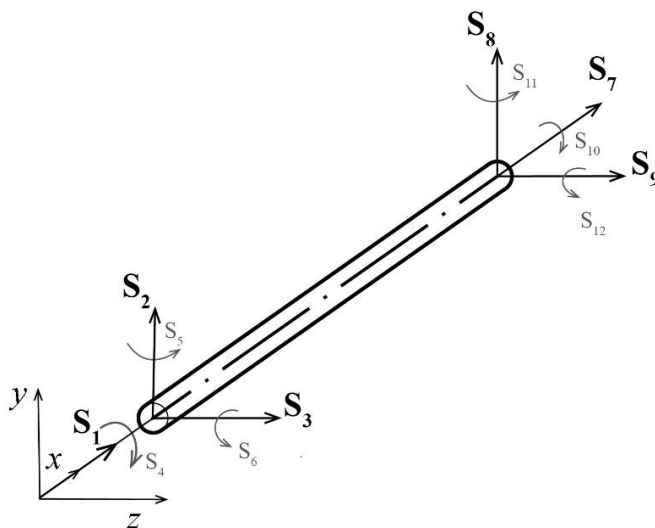


Рис. 1. Деформації балки постійного поперечного перерізу під дією осевих сил, згинальних моментів і крутного моменту щодо поздовжньої осі

Диференціальне рівняння для осевих зсувів  $u$  під дією сили  $S_1$  і теплових напружень:

$$S_1 = -\left(\frac{du}{dx} - \alpha T_m\right)EA,$$

$$T_m = \frac{1}{A} \int T dA,$$

$$S_1 x = -uEA + \alpha T_m EA + C_1 \begin{cases} x=0 & u=u_1 \\ x=l & u=0 \end{cases}.$$

Після інтегрування і врахування граничних умов (див. рис. 2) знаходимо  $C_1 = -S_1 l - \alpha T_m EA l$ .

Маємо

$$S_1 = \frac{EA}{l} u_1 + EA \alpha T_m,$$

$$S_1 = -S_2.$$

Алгебраїчна залежність сила-зміщення виражається залежністю  $S = Ku + Q$  і може використовуватися для визначення коефіцієнтів  $K_{ij}$  і термічних сил  $Q$ . Так  $K_{ij}$ , представляє силу  $S_i$ , необхідну для отримання одиничного переміщення  $u_j$ , коли всі інші сили (включаючи вплив температури) дорівнюють нулю.

$$K_{11} = \left( \frac{S_1}{U_1} \right)_{T=0} = \frac{EA}{l} \text{ та } K_{71} = \left( \frac{S_7}{U_1} \right)_{T=0} = \frac{-EA}{l}.$$

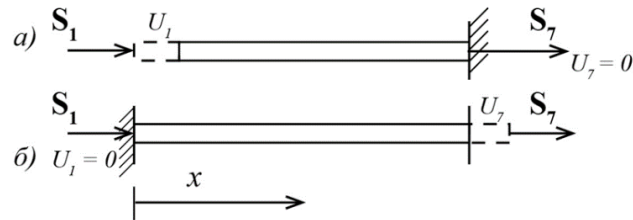


Рис. 2. Осьові зсуви

Обертальні моменти ( $S_4$  і  $S_{10}$ ).

Диференціальне рівняння для крутного моменту балки має вигляд:

$$S_4 = -GI \frac{d\theta}{dx}, \quad (36)$$

де  $GI$  – торсіонна жорсткість поперечного перерізу балки [10, 13].

$$S_4 X = -GI\theta + C_1. \quad (37)$$

Використовуючи граничні умови (див. рис. 3)  $\theta = 0$  при  $x = l$ , отримуємо

$$C_1 = S_4 l. \quad (38)$$

Так як  $\theta = u_4$  при  $x = 0$

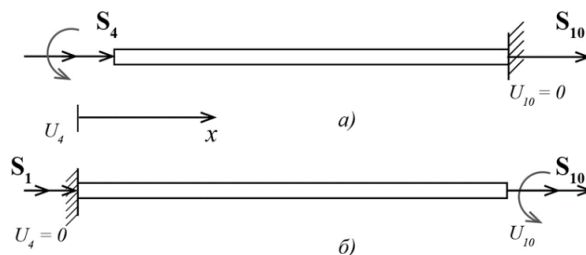


Рис. 3. Обертальні моменти

За рис. 3 виходить  $K_{10,10} = \frac{GI}{l}$ .

Згинальні сили ( $S_2$  і  $S_8$ ), пов'язані з моментами

$$v = v_b + v_s, \quad (42)$$

де  $v_b$  – бічне відхилення, викликане згинальною силою, і  $v_s$  додаткове відхилення, викликане зсувними напругами, так що

Всі інші коефіцієнти в першій колонці  $K$  дорівнюють нулю.

Аналогічно, вважаючи  $u_1 = 0$ , а  $u_7 \neq 0$  (рис. 2, б) можна отримати (або виходячи з симетрії, або рішенням для  $u$ )  $K_{77} = \frac{EA}{l}$ .

Так як температурні впливи на всю балку не викликають зміни її форми (11), то  $K_{ij}$  при крученні і температурних змінах залишаються незмінними.

$$S_4 = \frac{GI}{l}. \quad (39)$$

Використовуючи умову рівноваги для обертальних моментів, маємо

$$S_{10} = -S_4. \quad (40)$$

Отже

$$K_{4,4} = \left( \frac{S_4}{u_4} \right)_{T=0} = \frac{GI}{l}; \quad K_{10,4} = \left( \frac{S_{10}}{u_4} \right)_{T=0} = \frac{-GI}{l}. \quad (41)$$

Всі інші коефіцієнти в четвертій колонці дорівнюють 0. Сили  $Q_4 = Q_{10} = 0$ .

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{-S_2}{GA_s}, \quad (43)$$

де  $A_s$  – ефективна площа поперечного перерізу балки, що не піддається вигину (визначається диференціальним рівнянням Boley and Weiner);

$$EI_z \frac{d^2 v_b}{dx^2} = S_2 x - S_6 - M_{Tz}, \quad (44)$$

де

$$M_{Tz} = \int_A \alpha E T y dA. \quad (45)$$

Інтегруючи (44) і (45), отримаємо

$$EI_z v = \frac{S_2 x^3}{6} - \frac{S_6 x^2}{2} - \frac{M_{Tz} x^2}{2} + \left( C_1 - \frac{S_2 EI_z}{GA_s} \right) x + C_2, \quad (46)$$

де  $M_{Tz} = \int_A \alpha E T y dA$ .

Використовуючи граничні умови

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_s}{dx} = \frac{S_2}{GA_s} \quad \text{при } x=0, x=l, \quad (47)$$

$$v=0 \quad \text{при } x=l$$

$$EI_z v = \frac{S_2 x^3}{6} - \frac{S_8 x^2}{2} - \frac{M_{Tz} x^2}{2} - \frac{S_2 \Phi x l}{12} + (1+\Phi) \frac{l^3 S_2}{12}, \quad (48)$$

де

$$S_6 = \frac{S_2 l}{2} M_{Tz} \quad (49)$$

і

$$\Phi = \frac{12 EI_z}{GA_s l^2}. \quad (50)$$

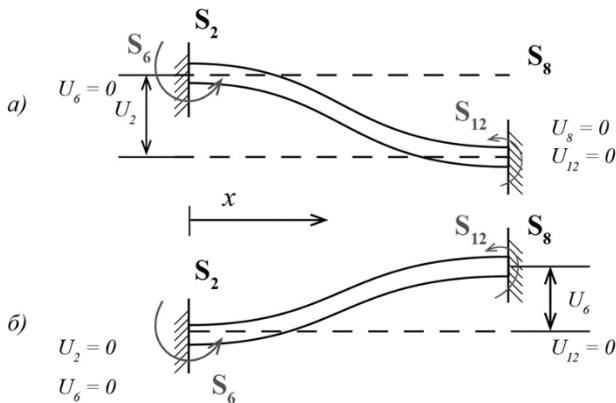


Рис. 4. Згин пластини

З умови рівноваги сил і моментів:

$$S_8 = -S_2,$$

$$S_{12} = -S_2 + S_2 l,$$

при

$$x=0, v=u_4, \quad (51)$$

$$u_2 = (1+\Phi) \frac{l_3 S_2}{12 EI_z}.$$

Використовуючи рівняння (49 – 51) отримуємо

$$K_{2,2} = \left( \frac{S_2}{u_2} \right)_{T=0} = \frac{12 EI_z}{(1+\Phi) l^3}; \quad (52)$$

$$K_{6,2} = \left( \frac{S_6}{u_2} \right)_{T=0} = \left( \frac{S_2 l}{2 u_2} \right)_{T=0} = \frac{6 EI_z}{(1+\Phi) l^2}. \quad (53)$$

При деформації вигину жорсткість дорівнює добутку  $EI_y$ , де  $I_y$  – осьовий момент інерції перерізу відносно осі  $y$ . Для елементів з прямокутним поперечним перерізом  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ ,  $b$  – ширина,  $h$  – товщина елемента. Узагальнені сили, що викликають вигин, дають внесок у вигляді відповідного компонента розтягування-стиснення.

Розраховується вигин від дії і сил і моментів (рис. 5).

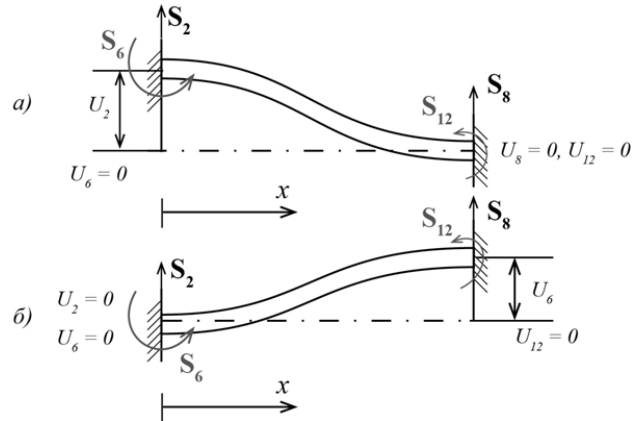


Рис. 5. Вигин пластини

$$K_{8,2} = \left( \frac{S_8}{u_2} \right)_{T=0} = \frac{12 EI_z}{(1+\Phi) l^3}, \quad (54)$$

$$K_{12,2} = \left( \frac{S_{12}}{u_2} \right)_{T=0} = \left( \frac{-S_6 + S_2 l}{u_2} \right)_{T=0} = \frac{6 EI_z}{(1+\Phi) l^2}. \quad (55)$$

Подібним чином (або за принципом умовної симетрії), виходить

$$K_{8,8} = K_{2,2} = \frac{12 EI_z}{(1+\Phi) l^3}, \quad (56)$$

$$K_{12,8} = K_{6,2} = \frac{6 EI_z}{(1+\Phi) l^2}. \quad (57)$$

### Висновки

Для компонентів МЕМС між'єднань найбільш важливим є статичний аналіз, який характеризує стан рівноваги, умовою якої є рівність нулю суми сил та суми моментів сили, що діють на пристрій (механічні, електричні, теплові).

Використовуючи матрицю жорсткості при відомому векторі зовнішніх сил, визначаються деформації елементів конструкції пристроїв.



Вид і розмірність матриці жорсткості кінцевих елементів визначається напруженим станом. Для об'ємного напруженого стану її розмірності  $6 \times 6$ . Для плоского напруженого стану  $3 \times 3$ .

Часткові коефіцієнти  $K_{ij}$  матриці жорсткості пропорційні відповідним коефіцієнтам  $\chi_{ij}$ , а коефіцієнти пропорційності визначається видом деформації. Для деформації розтягування-стиснення жорсткість дорівнює  $\frac{EA}{l}$ , а для деформації зсуву  $\frac{GI_y}{l}$ .

Важливо відзначити, що деформації  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  не залежить від температурних впливів на всю конструкцію.

### Список літератури

1. Невлюдов І. Ш., Пономарьова Г. В., Бортнікова В. О. Імітаційна модель технологічного процесу виготовлення мікроелектромеханічних акселерометрів. *Вчені записки ТНУ імені ВІ Вернадського. Серія: технічні науки*. 2018. Т. 29 (68), Ч. 1. № 1. С. 204–210.
2. Пупена О. М., Ельперін І. В., Міркевич Р. М. Сучасні стандарти інтегрованого керування і шляхи їх впровадження в Україні. *Наукові праці Національного університету харчових технологій*. 2017. Т. 23. № 1. С. 25–41.
3. Gong N. W. Design and applications of inkjet-printed flexible sensate surfaces : дис. Massachusetts Institute of Technology, 2013. URL: <http://hdl.handle.net/1721.1/91434>
4. Wong W. S., Salleo A. (ed.). Flexible electronics: materials and applications. Springer Science & Business Media, 2009. Т. 11. 461 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-74363-9>
5. Timoshenkov, S., Kalugin, V., Korobova, N., Shalimov, A., Kalmikov, D., Golovinsky, M., Aung, K.M., Zhora, V., Plis, N. (2017), "Providing of MEMS inclinometer operation under external influencing factors", *Paper presented at the 2017 IEEE 37th International Conference on Electronics and Nanotechnology, ELNANO 2017*, Proceedings, P. 88–91. DOI: 10.1109/ELNANO.2017.7939721 Retrieved from [www.scopus.com](http://www.scopus.com)
6. Невлюдов І. Ш., Разумов-Фризюк Є. А., Демська Н. П., Гуріна Д. В. Аналіз впливу механічних напружень на можливість мініатюризації гнучких структур електронної техніки на прикладі ZIF з'єднувача. *Проблеми тертя та зношування*. 2017. № 3 (76). С. 74–80. DOI: 10.18372/0370-2197.3(76).11953
7. Davydovskiy, Y., Reva, O., Artiukh, O., Kosenko, V. (2019) "Simulation of computer network load parameters over a given period of time", *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*, No. 3 (9), P. 72–80. DOI: <https://doi.org/10.30837/2522-9818.2019.9.072>
8. Palagin, V., Razumov-Fryziuk, I., Botsman, I., & Nevliudova, V. (2018), "Development of multi-probe connecting devices on flexible polyimide base for MEMS components testing", *Paper presented at the 2018 14th International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design, MEMSTECH 2018*, Proceedings, P. 232–235. DOI: 10.1109/MEMSTECH.2018.8365740
9. Nevliudov, I. S., Borshchov, V. M., Palagin, V. A., Razumov-Fryziuk, I. A., Tymchuk, I. T., Nevliudova, V. V., & Petrova, A. Y. (2019), "Mathematical model of bending two-layer film aluminium-polyimide structure due to temperature changes", *Functional Materials*, No. 26 (2), P. 342–346. DOI: 10.15407/fm26.02.342
10. Невлюдов І. Ш., Палагін В. А. Мікросистемна техніка та нанотехнології : Монографія. К. : НАУ, 2017. 528 с.
11. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М. : Физматлит, 2001. 264 с
12. Павловский М. А., Путьята Т. В. Теоретическая механика. Киев : Вища школа, 1985. 478 с.
13. Przemieniecki, J., Przemieniecki, S. (1968), *Theory of matrix structural analysis*, Vol. 1, New York : McGraw-Hill, 501 p.
14. Бобало Ю. Я., Волочий Б. Ю., Лозинський О. Ю., Мандзій Б. А., Озірковський Л. Д., Федасюк Д. В., Щербовських С. В., Яковина В. С. Математичні моделі та методи аналізу надійності радіоелектронних, електротехнічних та програмних систем : монографія. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2013. 300 с.
15. Hancock, D. A., Walters, A. J., Beuth, J. L. (2000), "Development of an object-oriented fatigue tool", *Engineering with computers*, Vol. 16, No. 2, P. 131–144. DOI: <https://doi.org/10.1007/s003660070016>
16. Nevlyudov, I., Palagin, V., & Botsman, I. (2017), "The general principles of electromagnetic compatibility improving with microsystem technology using", *Paper presented at the 2016 3rd International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2016*, Proceedings, P. 237-238. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2016.7905393
17. Балан Н. Н. Определение упругих свойств подвижных элементов MEMS-структур. Нано-и микросистемная техника. 2004. № 2. С. 14–19.
18. Теслюк В. М. Автоматизація проектування МЕМС на компонентному рівні: монографія. Львів : Видавництво "Львівська політехніка", 2011. 192 с.
19. Woinowsky-Krieger, S. (1956), "Über die verwendung von bipolarkoordinaten zur lösung einiger probleme der plattenbiegung", *Ingenieur-Archiv*, No. 24 (1), P. 47–52. DOI: 10.1007/BF00536955

20. Nevliudov, I., Razumov-Fryziuk, Ie., Palagin, V. (2017), "Improved reliability of interconnects of electronics components", *Paper presented at the 2nd International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics, UkrMiCo 2017*, Proceedings, P. 1–5. DOI: 10.1109/UkrMiCo.2017.8095396.

## References

1. Nevliudov, I. Sh., Ponomarova, H. V., Bortnikova, V. O. (2018), "MEM accelerometers production technological process simulation" ["Imitatsiina model tekhnolohichnoho protsesu vyhotovlennia mikroelektromekhanichnykh akselerometriv"], *Scientific notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. Series : Technical Sciences*, Vol. 29 (68), Part 1, No. 1, P. 204–210.
2. Pupena, O. M., Elperin, I. V., Mirkevych, R. M. (2017), "Modern standards of integrated management and ways of their implementation in Ukraine" ["Suchasni standarty intehrovanoho keruvannia i shliakhy yikh vprovadzhennia v Ukraini"], *Naukovi pratsi Natsionalnoho universytetu kharchovykh tekhnolohii*, Vol. 23, No. 1, P. 25–41.
3. Gong, N. W. (2013) "Design and applications of inkjet-printed flexible sensate surfaces", *Massachusetts Institute of Technology*, <http://hdl.handle.net/1721.1/91434>
4. Wong, W. S., Salleo, A. (ed.) (2009), *Flexible electronics: materials and applications*, Springer Science & Business Media, Vol. 11, 461 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-74363-9>
5. Timoshenkov, S., Kalugin, V., Korobova, N., Shalimov, A., Kalmikov, D., Golovinsky, M., Aung, K.M., Zhora, V., Plis, N. (2017), "Providing of MEMS inclinometer operation under external influencing factors ", *Paper presented at the 2017 IEEE 37th International Conference on Electronics and Nanotechnology, ELNANO 2017*, Proceedings, P. 88–91. DOI: 10.1109/ELNANO.2017.7939721
6. Nevliudov, I. Sh., Razumov-Fryziuk, Ye. A., Demska, N. P., Hurina D. V. (2017), "Influence of mechanical stresses on the possibility of miniaturization of flexible structures of electronic equipment on the example of ZIF connector" ["Analiz vplyvu mekhanichnykh napruzhen na mozhyvist miniaturyzatsii hnuchkykh struktur elektronnoi tekhniki na prykladi ZIF z'iednuvacha"], *Problemy tertia ta znoshuvannia*, No. 3 (76), P. 74–80. DOI: 10.18372/0370-2197.3(76).11953
7. Davydovskiy, Y., Reva, O., Artiukh, O., Kosenko, V. (2019) "Simulation of computer network load parameters over a given period of time", *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*, No. 3 (9), P. 72–80. DOI: <https://doi.org/10.30837/2522-9818.2019.9.072>
8. Palagin, V., Razumov-Fryziuk, I., Botsman, I., & Nevliudova, V. (2018), "Development of multi-probe connecting devices on flexible polyimide base for MEMS components testing ", *Paper presented at the 2018 14th International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design, MEMSTECH 2018*, Proceedings, P. 232–235. DOI: 10.1109/MEMSTECH.2018.8365740
9. Nevliudov, I. S., Borshchov, V. M., Palagin, V. A., Razumov-Fryziuk, I. A., Tymchuk, I. T., Nevliudova, V. V., & Petrova, A. Y. (2019), "Mathematical model of bending two-layer film aluminium-polyimide structure due to temperature changes", *Functional Materials*, No. 26 (2), P. 342–346. DOI: 10.15407/fm26.02.342
10. Nevliudov, I. Sh., Palahin, V. A. (2017), *Microsystem technology and nanotechnology [Mikrosystemna tekhnika ta nanotekhnolohii]*, Kyiv, NAU, 528 p.
11. Hantmakher, F. R. (2001), *Lectures on analytical mechanics [Lektsyy po analytycheskoi mekhanike]*, Moscow, Fyzmatlyt, 264 p.
12. Pavlovskiy, M. A., Putiata, T. V. (1985), *Theoretical mechanics [Teoretycheskaia mekhanika]*, Kyiv, Vyshcha shkola, 478 p.
13. Przemieniecki, J., Przemieniecki, S. (1968), *Theory of matrix structural analysis*, Vol. 1, New York : McGraw-Hill, 501 p.
14. Bobalo, Yu. Ya Volochii., B. Yu., Lozynskiy, O. Yu., Mandzii, B. A., Ozirkovskiy, L. D., Fedasiuk, D. V., Shcherbovskiy, S. V., Yakovyna, V. S. (2013), *Mathematical models and methods of reliability analysis of radio-electronic, electrotechnical and software systems [Matematychni modeli ta metody analizu nadiinosti radioelektronnykh, elektrotekhnichnykh ta prohramnykh system]* : monograph, Lviv, Vydavnytstvo Lvivskoi politekhniki, 300 p.
15. Hancq, D. A., Walters, A. J., Beuth, J. L. (2000), "Development of an object-oriented fatigue tool", *Engineering with computers*, Vol. 16, No. 2, P. 131–144. DOI: <https://doi.org/10.1007/s003660070016>
16. Nevliudov, I., Palagin, V., & Botsman, I. (2017), "The general principles of electromagnetic compatibility improving with microsystem technology using", *Paper presented at the 2016 3rd International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2016*, Proceedings, P. 237–238. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2016.7905393.
17. Balan, N. N. (2004), "Determination of the elastic properties of movable elements of MEMS structures" ["Opredelenye upruhykh svoystv podvyzhnykh elementov MEMS-struktur"], *Nano-y mikrosystemnaia tekhnika*, No. 2, P. 14–19.
18. Tesliuk, V M. (2011) *Automation of MEMS design at the component level [Avtomatyzatsiia proektuvannia MEMS na komponentnomu rivni]*, Lviv, Vydavnytstvo "Lvivska politekhnika", 192 p.
19. Woinowsky-Krieger, S. (1956), "Über die verwendung von bipolarkoordinaten zur lösung einiger probleme der plattenbiegung", *Ingenieur-Archiv*, No. 24 (1), P. 47–52. DOI: 10.1007/BF00536955.
20. Nevliudov, I., Razumov-Fryziuk, Ie., Palagin, V. (2017), "Improved reliability of interconnects of electronics components", *Paper presented at the 2nd International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics, UkrMiCo 2017*, Proceedings, P. 1–5. DOI: 10.1109/UkrMiCo.2017.8095396.

Received 28.02.2020

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Невлюдов Ігор Шакирович** – доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, завідувач кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та мехатроніки, Харків, Україна; email: igor.nevliudov@nure.ua; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9837-2309>.

**Невлюдов Игорь Шакирович** – доктор технических наук, профессор, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, заведующий кафедрой компьютерно-интегрированных технологий, автоматизации и мехатроники, Харьков, Украина.

**Nevliudov Igor** – Doctor of Sciences (Engineering), Professor, Kharkiv National University of Radio Electronics, Head of the Department of Computer-Integrated Technologies, Automation and Mechatronics, Kharkiv, Ukraine.

**Демська Наталія Павлівна** – Харківський національний університет радіоелектроніки, старший викладач кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та мехатроніки, Харків, Україна; email: demska.nataliia@nure.ua, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9931-9964>.

**Демская Наталия Павловна** – Харьковский национальный университет радиоэлектроники, старший преподаватель кафедры компьютерно-интегрированных технологий, автоматизации и мехатроники, Харьков, Украина.

**Demaska Nataliia** – Kharkiv National University of Radio Electronics, Senior Lecturer of the Department of Computer-Integrated Technologies, Automation and Mechatronics, Kharkiv, Ukraine.

**Палагін Віктор Андрійович** – доктор технічних наук, доцент, Харківський національний університет радіоелектроніки, професор кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та мехатроніки, Харків, Україна; email: victor.palagin@nure.ua; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9837-2309>.

**Палагин Виктор Андреевич** – доктор технических наук, доцент, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, профессор кафедры компьютерно-интегрированных технологий, автоматизации и мехатроники, Харьков, Украина.

**Palagin Victor** – Doctor of Sciences (Engineering), Associate Professor, Kharkiv National University of Radio Electronics, Professor of the Department of Computer-Integrated Technologies, Automation and Mechatronics, Kharkiv, Ukraine.

**Боцман Ірина Володимирівна** – кандидат технічних наук, Харківський національний університет радіоелектроніки, доцент кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та мехатроніки, Харків, Україна; email: irina.botsman@nure.ua; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1110-9602>.

**Боцман Ирина Владимировна** – кандидат технических наук, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, доцент кафедры компьютерно-интегрированных технологий, автоматизации и мехатроники, Харьков, Украина.

**Botsman Irina** – PhD (Engineering Sciences), Kharkiv National University of Radio Electronics, Associate Professor of the Department of Computer-Integrated Technologies, Automation and Mechatronics, Kharkiv, Ukraine.

## МАТРИЧНО-СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГИБКИХ МЕЖСОЕДИНЕНИЙ И КОМПОНЕНТОВ МЭМС

Конструкции современной электронной техники являются сложными механическими системами с множеством жестких связей, а их микроминиатюризация во многих случаях дошла до физического предела размерного, зарядового и энергетического квантования компонентов. Для таких механических систем, с неклассическими для механики способами крепления отдельных конструктивных элементов, сложно построить расчетную модель, достаточно простую и в то же время такую, которая хорошо отражает физические и динамические свойства. Для обеспечения механической прочности межсоединений и сверхтонких электронных компонентов необходима возможность определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций. Эти причины обуславливают необходимость применения численных методов для расчета динамических параметров конструкций межсоединений электронной техники, которая позволит повысить показатели надежности разрабатываемых средств, соответствующих требованиям нормативно-технической документации по механическим характеристикам, сократить сроки и стоимость их создания. **Предметом** данной работы является исследование деформации балки постоянного поперечного сечения под действием осевых сил, изгибающих моментов и крутящего момента относительно продольной оси. **Целью** данной работы является определение деформации элементов конструкции устройств с использованием матрицы жесткости при известном векторе внешних сил. Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих **задач**: рассмотреть существующие методы описания и анализа, учитывающих специфику используемых конструкций и технологических процессов изготовления конкретных структур МЭМС; исследовать сущность этих методов; провести расчет перемещений и деформаций, используя метод конечных элементов; используя матрицу жесткости, определить деформации элементов конструкции устройств; провести расчет деформации балки постоянного поперечного сечения под действием осевых сил, изгибающих моментов и крутящего момента относительно продольной оси. **Выводы**: матрица жесткости, построенная с использованием матричного функционального анализа, позволяет обеспечить расчет деформации элементов МЭМС и гибких электронных межсоединений.

**Ключевые слова**: микроэлектромеханические системы; межсоединения; метод конечных элементов; напряженно-деформированное состояние; деформация; смещение.

## MATRIX-STRUCTURAL ANALYSIS OF THE STRESS-DEFORMED STATUS OF THE FLEXIBLE INTERFACES AND MEMS COMPONENTS

The designs of modern electronic technology are complex mechanical systems with many rigid bonds, and their microminiature in many cases has reached the physical limit of the dimensional, charge and energy quantization of components. For such mechanical systems, with non-classical methods for mechanics of fastening of separate structural elements, it is difficult to build a design model, simple enough and at the same time one that well reflects physical and dynamic properties. To ensure mechanical strength of interconnects and ultra-thin electronic components, it is necessary to determine the stress-strain state of structural elements. These reasons necessitate the use of numerical methods to calculate the dynamic parameters of the design of electronic equipment interconnections, which will improve the reliability of the developed tools that meet the requirements of regulatory technical

documentation on mechanical characteristics, shorten the time and cost of their creation. **Subject** matter of this work is the study of beam deformation of constant cross section under the action of axial forces, bending moments and torque relative to the longitudinal axis. **Goal** this work is to determine the deformation of the elements of the structure of the devices using the stiffness matrix with a known vector of external forces. To achieve this goal, it is necessary to solve the following **tasks**: to consider the existing methods of description and analysis, which take into account the specificity of the structures and technological processes used to manufacture specific structures MEMS; explore the nature of these methods; calculate displacements and deformations using the finite element method; using the stiffness matrix to determine the deformation of the structural elements of the devices; to calculate the deformation of the beam of constant cross-section under the action of axial forces, bending moments and torque relative to the longitudinal axis. **Conclusions**: stiffness matrix, constructed using functional analysis, allows for the calculation of deformation of MEMS elements and electronic interconnect flexible.

**Keywords**: microelectromechanical systems; interconnections; finite element method; stress-strain state; deformation; displacement.

*Бібліографічні описи / Bibliographic descriptions*

Невлюдов І. Ш., Демська Н. П., Палагін В. А., Боцман І. В. Матрично-структурний аналіз напружено-деформованого стану гнучких між'єднань і компонентів МЕМС. *Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості*. 2020. № 1 (11). С. 122–133. DOI: <https://doi.org/10.30837/2522-9818.2020.11.122>.

Nevliudov, I., Demska, N., Palagin, V., Botsman I. (2020), "Matrix-structural analysis of the stress-deformed status of the flexible interfaces and MEMS components", *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries*, No. 1 (11), P. 122–133. DOI: <https://doi.org/10.30837/2522-9818.2020.11.122>.