UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: Economia Monetária e Financeira

O Debate Crescimento Neo-Clássico / Crescimento Endógeno
num Modelo de Crescimento Bi-Sectorial

ORLANDO MANUEL DA COSTA GOMES

Orientação: Prof. Doutor Paulo Meneses Brasil de Brito

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Miguel Pedro Brito St. Aubyn
Vogais: Prof. Doutor Alfredo Marvão Pereira
Prof. Doutor Paulo Meneses Brasil de Brito

Setembro / 1996

O DEBATE CRESCIMENTO NEO-CLÁSSICO / CRESCIMENTO ENDÓGENO NUM MODELO DE CRESCIMENTO BI-SECTORIAL *

RESUMO: Com o objectivo de comparar equilíbrios de longo prazo de crescimento nulo / crescimento positivo, é construído um modelo de optimização inter-temporal do consumo para um agente representativo que enfrenta duas restrições de recursos, as quais descrevem o processo de produção em cada um dos dois sectores (produtivo e educativo) que se supõe existirem na economia. Tendo sempre subjacente um ambiente de concorrência perfeita, o modelo estudado permite separar três casos, dois respeitantes a situações de crescimento endógeno e um outro que define um equilíbrio de crescimento nulo que pode ser identificado com a teoria de crescimento neo-clássica. Conclui-se, através de simulação numérica, que existem diferenças importantes entre as duas classes de modelos (de crescimento neo-clássico e de crescimento endógeno) quer no processo de ajustamento para o equilíbrio, quer na caracterização do próprio estado de equilíbrio, quer ainda na forma como este pode ser perturbado exogenamente através, por exemplo, de um choque tecnológico.

PALAVRAS CHAVE: Crescimento económico; Capital humano; Modelos de crescimento; Taxa de crescimento; Funções de produção.

THE NEO-CLASSICAL GROWTH / ENDOGENOUS GROWTH DEBATE IN A TWO-SECTOR GROWTH MODEL

ABSTRACT: With the objective of confronting zero growth / positive growth long run steady-states, it is built an inter-temporal consumption optimisation model for a representative agent who faces two resource constraints, which describe the production process on each of the two sectors (productive and educational) that are supposed to exist on the economy. Always with an underlying perfect competition environment, the model studied permits to separate three cases, two respecting to endogenous growth situations and another one that defines a zero growth steady-state that can be identified with the neo-classical growth theory. It is found, through numerical simulation, that exists important differences between the two classes of models (neo-classical growth models and endogenous growth models) in the adjustment process towards the steady-state, in the characterisation of the steady-state itself and also in the way that this steady-state can be exogenously disturbed through, for example, a technological shock.

KEY WORDS: Economic growth; Human capital; Growth models; Growth rate; Production functions.

---

* AGRADECIMENTOS: A presente dissertação foi realizada no âmbito do programa PRAXIS XXI, a cujos responsáveis agradeço o apoio financeiro concedido; estou, também, particularmente grato a todos aqueles (familiares, colegas e professores) que nos últimos 6 anos me acompanharam e me apoiaram enquanto estudante do ISEG; por fim, apraz-me ainda registar a forma sempre interessada e disponível como decorreu o processo de orientação da tese.

ÍNDICE

FIGURAS E QUADROS

1. INTRODUÇÃO

A moderna teoria do crescimento económico tem a sua origem, em parte, na importante contribuição de Solow (1956). Este autor estabelece, através de uma formalização matemática simples, um mecanismo segundo o qual o crescimento do produto em dada economia é resultado da acção de um conjunto de outras variáveis, destacando-se entre estas o capital físico, uma vez que é a maior ou menor capacidade de investimento em máquinas e equipamentos que determina o processo de crescimento; tudo o resto (progresso técnico, taxa de crescimento da população, comportamento dos indivíduos, ...) é exógeno, no sentido em que nenhuma destas variáveis seria manipulável de um ponto de vista meramente económico.

O modelo de Solow parte de uma estrutura de mercado concorrencial em que o produto é gerado por uma função de produção agregada de propriedades neo-clássicas (rendimentos marginais decrescentes do factor capital e rendimentos constantes à escala); a utilização de uma função de produção com estas propriedades induziu a que o modelo de Solow e subsequentes extensões viessem a adquirir a designação de teoria de crescimento neo-clássica.

A teoria de crescimento neo-clássica radica a sua ideia base na lei dos rendimentos marginais decrescentes; segundo tal lei, ao acrescentar unidades sucessivas de capital à produção esta tende a crescer a uma taxa progressivamente inferior, de modo que a economia converge para um ponto de saturação do investimento, a que corresponde uma situação de crescimento nulo. Ainda com base na lei dos rendimentos marginais decrescentes, a teoria neo-clássica justifica um processo de crescimento mais acelerado nos países menos dotados de capital, onde o investimento teria um impacto superior na produção àquele que se observa em países com maior disponibilidade de recursos. Assim, não só todos os países tenderiam, na óptica neo-clássica, para um equilíbrio de longo prazo caracterizado pela ausência de crescimento, como também o fariam a velocidades diferentes, permitindo um processo de convergência entre economias, ou seja, um processo de aproximação dos países pobres aos países ricos[1].

O paradigma neo-clássico apresenta várias insuficiências, as quais estão na base da emergência da nova teoria do crescimento - a teoria do crescimento endógeno. Os pontos fracos do modelo neo-clássico podem sintetizar-se no seguinte:

i) O problema dos rendimentos decrescentes - o modelo neo-clássico apenas consegue justificar um padrão de evolução para as economias, rejeitando, em quaisquer circunstâncias, a permanência de períodos em que as taxas de crescimento das economias sejam constantes ou crescentes; contudo, a realidade histórica desmente a inevitabilidade de um produto marginal sempre decrescente. Não são raros os casos reais de evolução crescente da taxa de crescimento durante períodos de tempo relativamente longos.

ii) A questão da convergência e da mobilidade de factores - Lucas (1988) e (1990) critica a crença na possibilidade de convergência de taxas de crescimento entre países pobres e países ricos. Robert Lucas constata que a previsão neo-clássica de que os países menos dotados de capital fisico tenderão a crescer mais rapidamente que os restantes de modo que, ao fim de um certo prazo, todos crescerão assimptoticamente à mesma taxa, não tem correspondência com aquilo que na realidade acontece. Uma observação atenta das taxas de crescimento em diversos países nos anos mais recentes permite evidenciar uma grande diversidade - em alguns países assiste-se, de facto, a uma tendência de recuperação como preconizada pelo modelo neo-clássico, mas a regra é constituída por

[1] As diferentes velocidades no processo de crescimento das economias tem sido um tema fundamental de estudo empírico - ver, por exemplo, Barro e Sala-i-Martin (1995), Romer (1994) ou Pack (1994). Os resultados admitem a provável existência de um processo de convergência como o descrito, mas só no interior de grupos de países em que as condições definidas por outros factores (taxa de crescimento da população, taxa de poupança, nível de tecnologia, ...) são semelhantes.

um grande número de nações menos desenvolvidas em que é evidente o alargamento do fosso entre as suas taxas de crescimento e as dos países mais ricos.

A acrescer à argumentação anterior há ainda o papel dos fluxos internacionais de factores. Segundo a lógica neo-clássica, os investimentos a realizar, num contexto de economia aberta em que existe livre circulação de capitais, procurariam os locais em que a sua remuneração fosse superior; dada a maior rentabilidade do capital em regiões em que este é escasso (os rendimentos do capital físico são decrescentes, logo serão superiores em locais em que ele existe em pouca quantidade) as relações económicas entre nações encarregar-se-iam de deslocalizar o capital físico de onde é abundante para onde existe escassez induzindo, assim, movimentos rápidos no sentido de igualar as dotações do factor capital entre economias. Mais uma vez, verifica-se que tais movimentos de capital entre fronteiras são irrealistas; não há, na prática, qualquer tendência significativa para o capital se deslocar de onde é excedentário para onde é quase inexistente.

iii) Tecnologia e crescimento endógeno - em Romer (1990) e (1994), o ponto de ruptura com a teoria neo-clássica encontra-se na vertente tecnológica. Do seu ponto de vista, ao tomar a tecnologia como exógena e ao considerar que as mesmas oportunidades tecnológicas estão disponíveis em todos os países do mundo, a teoria de Solow redunda numa grosseira má especificação da realidade. Para Paul Romer é claro que só um modelo de crescimento em que a tecnologia e o conhecimento são parte integrante das decisões de optimização dos agentes pode permitir interpretar correctamente os verdadeiros mecanismos pelos quais se rege o crescimento do produto em determinada economia. Outro ponto de discórdia é o da estrutura de mercado - Romer (1994) demonstra que numa economia que produz, para além de bens físicos, conhecimento e em que o sector de inovação tecnológica tem um papel preponderante, a estrutura de mercado não pode corresponder a um ambiente de concorrência perfeita. Só uma estrutura concorrencial em que se verifique considerável poder de mercado permite a criação de tecnologia pelo sector privado, gerando-se rendas de monopólio que num mercado de concorrência perfeita, como o é o da teoria neo-clássica, não existiriam.

Dada a aparente contradição que a teoria neo-clássica evidenciava (revelando-se, por um lado, como um paradigma teórico bem estruturado e capaz de fornecer uma explicação lógica para o processo de crescimento das economias mas, por outro lado, pouco plausível de um ponto de vista de associação às experiências concretas de desenvolvimento), a teoria do crescimento submergiu durante mais de duas décadas, tendo a atenção da ciência económica direccionado-se para questões de outra natureza; a revolução das expectativas racionais, ligada ao estudo das flutuações de curto prazo e correspondente debate sobre a eficácia das políticas monetárias e orçamentais perante tais flutuações levou ao esquecimento, neste período de tempo, da questão macroeconómica do crescimento.

É com Romer (1986) e Lucas (1988) que o estudo do crescimento económico ganha novo fôlego. A ideia fundamental é a de contrapôr ao crescimento exógeno e limitado no tempo tal como definido por Solow, um processo de crescimento que é simultâneamente endógeno e sustentável (endógeno porque a evolução das variáveis que o condicionam, como a tecnologia, é agora determinada no interior do modelo e sustentável porque as novas variáveis endógenas, constituíndo o prato da balança que se contrapõe à tendência decrescente dos rendimentos marginais do capital físico, possibilitam uma taxa de crescimento do produto não decrescente ao longo do tempo, à medida que cresce a dotação de factores).

Apesar do carácter pioneiro das obras de Paul Romer e Robert Lucas, as raízes da teoria do crescimento endógeno remontam à década de 60, onde alguns autores, como Arrow (1962), Uzawa (1964) e Nelson e Phelps (1966) levantam diversas questões que põem em causa a teorização neo-clássica do crescimento; estas questões, que viriam a ser recuperadas pelos autores do crescimento endógeno, respeitam ao papel do conhecimento e do processo de aprendizagem como factor importante na negação da inevitabilidade de rendimentos decrescentes do capital, à possibilidade de presença de externalidades na produção de conhecimento, à separação entre produção de bens e produção de conhecimento e à endogeneização do processo de inovação tecnológica, entre outros assuntos.

A investigação em torno da teoria do crescimento endógeno, apesar de ter sempre subjacente a justificação dos acréscimos do produto através de causas endógenas, tenderia a dispersar-se por inúmeros temas de análise. Duas correntes assumem especial preponderância:

#1- Modelização da inovação e difusão tecnológica como motores do crescimento;

#2- Separação capital físico / capital humano como meio de justificar a presença de rendimentos marginais do capital constantes ou crescentes.

O desenvolvimento da vertente tecnológica da teoria do crescimento endógeno depende, em grande parte, da contribuição de Paul Romer. Romer (1987) e (1990) introduz na teoria do crescimento endógeno uma verdadeira teoria do progresso tecnológico, ao considerar que o esforço de investimento em investigação e desenvolvimento (I&D) que as economias desenvolvem deve ser considerado variável endógena no processo de crescimento, pois da sua optimização pode depender o sucesso da política de crescimento económico. Dada a importância basilar das decisões conscientes e racionais de investimento em actividades de I&D tomadas por agentes maximizadores do lucro, Romer põe em causa que uma economia orientada para a inovação e para o progresso tecnológico possa ser regida por uma estrutura de mercado concorrencial em que cabe ao estado todo e qualquer investimento em actividades nas quais se verifica um desfazamento entre quem investe e quem obtém os lucros. A actividade de I&D tem exactamente esta característica - sendo a tecnologia um bem não rival, o esforço de inovação não será realizado, num ambiente concorrencial, por privados, pois outros, que não contribuiram para a actividade criativa, usufruiriam tanto dela como os que a realizaram. Uma alternativa à intervenção estatal é aquela que os autores do crescimento endógeno, por exemplo Grossman e Helpman (1994), propõem: abandonar o ambiente de concorrência perfeita no sector tecnológico, reconhecendo a existência de patentes e práticas de sigilo[2], traduzindo-se estas na formação de poder de

[2] O que na prática corresponde a admitir que a tecnologia, apesar de ser não rival, é parcialmente exclusiva, donde não será um bem público puro. Nestas circunstâncias, a intervenção estatal não pode mesmo ser a solução mais desejável.

monopólio, de modo que o ambiente de concorrência imperfeita se constituiria como única alternativa viável no estudo do crescimento económico.

A segunda corrente de crescimento endógeno distingue-se da primeira num aspecto essencial: agora, à semelhança do modelo de Solow e da teoria neo-clássica em geral, a tecnologia é exógena, centrando-se a análise do crescimento na variável capital; o modelo AK, uma das mais simples versões de explicação do processo de crescimento enquanto endógeno e sustentável, limita-se a alterar o modelo de Solow num único aspecto: a função de produção considerada; no referido modelo, a função de produção neo-clássica é substituída por uma função de produção que exibe rendimentos marginais do capital constantes, permitindo justificar um processo de crescimento que não tende inevitavelmente para um equilíbrio de longo prazo caracterizado pela estagnação da taxa de crescimento do produto. Como se referirá em maior pormenor na secção 2, a hipótese de rendimentos não decrescentes do capital é justificável se se entender este agregado num sentido mais abrangente que o de simples conjunto de máquinas e equipamentos disponíveis.

O modelo AK faz uma dissociação implícita entre capital físico e capital humano; outros modelos de crescimento tornam esta separação explícita ao admitir que a acumulação de capital humano se realiza de forma diferente da acumulação de capital físico, propondo então sectores distintos e com tecnologias distintas na produção de cada uma das formas de capital. Este tipo de modelos tem sido exaustivamente explorado na literatura, tendo ao artigo inicial de Lucas (1988) seguido-se outras referências importantes como Rebelo (1991), Caballé e Santos (1993), Mulligan e Sala-i-Martin (1993) e Bond, Wang e Yip (1996). Embora o modelo de Lucas tenha sido estudado essencialmente na sua componente analítica, a qual considera um ambiente concorrencial em que o crescimento sustentável é legitimado através da suposição de que a produção de capital humano não está sujeita a rendimentos decrescentes (o que é admissível se se pensar que educar mais um indivíduo não acarreta custos adicionais em relação aos custos de educação do indivíduo anterior), um outro aspecto contribui decisivamente para o realismo da argumentação de Lucas - o reconhecimento do carácter único do capital humano face às restantes formas de capital; só o capital humano é reprodutível através do simples contacto entre grupos de pessoas, de tal modo que a actividade social que encerra torna a sua contribução para o processo produtivo superior à que resulta do mero investimento realizado. Em Lucas (1988), existe um efeito externo do capital humano porque a interacção entre as pessoas provoca fenómenos de aprendizagem não remunerados. A externalidade associada ao capital humano, que induz um óptimo social superior ao óptimo privado, poderá ser a verdadeira fonte de crescimento endógeno, que os economistas, de uma forma ou de outra, atribuem à capacidade humana.

O modelo de Lucas é, num aspecto, antagónico à teoria de Romer - enquanto Romer coloca o poder inventivo dos indivíduos nas mãos do sector produtivo (as pessoas só produzem ideias em troca de incentivos monetários), Lucas afirma que as ideias provêm da interacção social e não são resultado do esforço individual e egoísta de cada um; as ideias surgem naturalmente a partir das aptidões humanas, acarretando a natureza humana mais do que comportamentos racionais tendentes à obtenção de remunerações acrescidas, e neste sentido a actividade social poderá, mais do que o esforço consciente de investimento em I&D, justificar as experiências reais de crescimento.

As duas correntes referidas são, de facto, as mais importantes na actual teoria do crescimento; isto não significa, no entanto, que não existam outros temas de análise; por exemplo, Barro e Becker (1989) e Becker, Murphy e Tamura (1990) introduzem na discussão sobre o crescimento a questão da fertilidade e dos fenómenos populacionais - estes autores estudam de que forma a taxa de crescimento da população, variável exógena na teoria neo-clássica, pode ser incluída numa possível explicação endógena do crescimento; genericamente, a conclusão a retirar é a de que a taxa de fertilidade se relaciona de forma inversa com a formação de capital humano[3] e, em consequência, o potencial de crescimento do produto *per capita* será inferior em economias cuja taxa de natalidade é elevada.

---

[3] Este resultado é confirmado empiricamente em vários estudos; ver, por exemplo, Barro (1991) e Barro e Lee (1993).

Mais recentemente, os teóricos do crescimento endógeno têm orientado o estudo do crescimento para um cenário de economia aberta, procurando compreender de que forma a teoria pode justificar experiências de crescimento tão diversas entre países cujas condições no início dos seus processos de crescimento eram praticamente idênticas[4]. A nova teoria do crescimento tem, então, por missão fornecer uma explicação lógica para a enorme diversidade na evolução das taxas de crescimento entre economias, diversidade essa que constitui a regra no mundo actual.

Referências importantes na teorização e discussão da problemática do crescimento em economia aberta são, por exemplo, Lucas (1993) e Romer (1994). Lucas desenvolve um modelo tipo AK para justificar a tendência, constatada empiricamente, de perpetuação das desigualdades entre países, salvaguardando a possibilidade de convergência em função da capacidade demonstrada pela economia em aumentar o nível de capital humano via produção interna (sob a forma de investimento na educação formal e principalmente sob a forma de aprendizagem no trabalho, fruto da melhor organização e maior racionalização do processo produtivo) e não em função da injecção de capitais externos (que, como se referiu, não tem grande significado para os teóricos do crescimento endógeno).

Em contrapartida, Romer não considera crucial a distinção entre capital físico e capital humano, notando que ambos são objectos no sentido em que a sua acumulação sugere poupança e um custo de oportunidade - se um país pobre não reduzir o seu nível de vida no presente, substituíndo consumo por poupança, não conseguirá acumular capital seja ele físico ou humano. A ênfase é, então, colocada no processo de produção e difusão de ideias - Romer defende que, ao contrário dos objectos, as ideias são directamente difundíveis entre países sem quaisquer custos, donde a cooperação internacional pode ser suficiente para resolver parte dos problemas das nações mais pobres.

Sintetizadas as principais referências na teorização do crescimento económico, torna-se possível situar o presente objecto de estudo: será desenvolvido um modelo que põe

---

[4] Lucas (1993) refere como caso paradigmático os contrastes no processo de crescimento das economias filipina e sul-coreana.

em contraste situações de crescimento neo-clássico e de crescimento endógeno e que terá sempre subjacente um ambiente concorrencial em que se elimina a possibilidade de qualquer tipo de externalidades na acumulação de factores produtivos. Esta análise ir-se-á basear num modelo de crescimento endógeno, o qual posteriormente será modificado de forma a incluir uma situação de crescimento neo-clássico; a questão tecnológica será negligenciada, considerando-se a tecnologia como factor exógeno e, portanto, a vertente a evidenciar é a da separação capital fisico / capital humano e a da possibilidade de admitir as alternativas rendimentos decrescentes / rendimentos constantes. O objectivo será, assim, o de debater em condições de modelização próximas, quais as semelhanças e dissemelhanças que se encontram entre as duas teorias.

A secção 2 debate com maior pormenor a distinção entre as duas classes de modelos no que toca ao tipo de rendimentos marginais do capital considerados. A secção 3 indica de que forma um modelo de crescimento endógeno pode ser analizado ao mesmo nível de um modelo de crescimento neo-clássico, introduzindo em seguida o modelo a desenvolver. A quarta secção destina-se a generalizar o modelo de crescimento endógeno apresentado na secção 3 de forma a incluir duas novas possibilidades: um outro caso de crescimento endógeno e uma situação de crescimento de características neo-clássicas. A quinta secção faz uma primeira distinção importante entre as duas classes de modelos ao determinar taxas de crescimento de equilíbrio positivas para as situações de crescimento endógeno em claro contraste com as taxas de crescimento nulas que definem o estado de equilíbrio neo-clássico. A resolução do modelo conduz a um conjunto de equações canónicas, encontradas na secção 6, que vão permitir construir um sistema linearizado a partir do qual a dinâmica comparativa local é analizada. Na sétima secção, inicia-se o estudo de dinâmica comparativa, salientando-se novamente a separação crescimento neo-clássico / crescimento endógeno, agora no que respeita à dimensão da trajectória de equilíbrio do modelo. As secções 8 e 9 destinam-se a evidenciar o comportamento e o sentido de evolução que as diversas variáveis tomam, numa primeira fase, no ajustamento para o equilíbrio de longo prazo e, numa segunda fase, quando sujeitas a perturbações exteriores ao sistema económico, nomeadamente nos níveis de tecnologia; uma vez mais, serão postas em confronto as duas classes de modelos. Este estudo de dinâmica comparativa local, será realizado com base numa simulação numérica que utiliza valores que caracterizam uma economia próxima da evidência empírica. Por fim, a secção 10 destina-se a algumas considerações e conclusões relevantes.

2. CRESCIMENTO NEO-CLÁSSICO E CRESCIMENTO ENDÓGENO

A teoria de crescimento neo-clássica e a teoria do crescimento endógeno distinguem-se fundamentalmente pela diferente forma como encaram a possibilidade de crescimento económico no longo prazo. À teoria neo-clássica respeita a ideia de que o crescimento de longo prazo só é possível em virtude de causas exógenas; caso não ocorra qualquer perturbação exterior ao sistema económico, tenderá a perpetuar-se um estado de equilíbrio, atingido após um processo mais ou menos célere de convergência, ao qual corresponderá uma taxa de crescimento do produto *per capita* nula. Na teoria do crescimento endógeno, admite-se a presença de uma taxa de crescimento positiva que se manterá no tempo sem que para tal seja necessária qualquer influência externa à estrutura económica em causa; variáveis exógenas, como o nível de tecnologia, afectam, também neste caso, a evolução da taxa de crescimento do produto *per capita*, porém a ocorrência de qualquer processo de inovação tecnológica não é condição necessária para que os níveis de produto, acumulação de capital e consumo se mantenham afastados de um hipotético ponto de equilíbrio de crescimento nulo[5].

Analiticamente, a distinção entre os dois paradigmas teóricos reside na forma como se percebe a evolução dos rendimentos marginais a que está sujeita a acumulação dos

---

[5] Em rigor, num modelo de crescimento de características neo-clássicas, a taxa de crescimento de equilíbrio da economia (que corresponderá, neste caso, à taxa de crescimento dos agregados produto, capital e consumo) não será nula, mas sim equivalente à taxa de crescimento da população. Porém, como a análise a efectuar terá por base variáveis *per capita*, a variável representativa do crescimento da economia será a taxa de crescimento do produto *per capita*, a qual, esta sim, é nula no estado de equilíbrio neo-clássico.

factores de produção reprodutíveis (nomeadamente o capital, físico e/ou humano). Nos modelos de índole neo-clássica, a tendência natural da economia para o declínio da sua taxa de crescimento encontra justificação na convicção de que a acumulação de capital está sujeita a rendimentos marginais decrescentes (acrescentando uma unidade adicional de capital à produção, o produto sofrerá um acréscimo inferior relativamente à introdução da unidade de capital anterior). Em contrapartida, um modelo de crescimento endógeno caracterizar-se-á pela exploração da ideia de que a economia demonstra capacidade de fazer crescer o produto na exacta medida em que aumenta a dotação de capital para a produção, admitindo-se, por conseguinte, a presença de rendimentos marginais do capital constantes.

O debate crescimento limitado no tempo (teoria neo-clássica) / crescimento sustentável (teoria do crescimento endógeno), ou rendimentos decrescentes / rendimentos constantes, está presente na comparação entre modelo Solow-Swan e modelo AK[6], comparação esta que é extensível a modelos de crescimento com determinação endógena da poupança (modelos tipo Ramsey). A diferença de fundo entre a concepção neo-clássica e o modelo AK reside na forma adoptada para a função de produção; a uma função de produção que utiliza os factores capital e trabalho e que obedece às propriedades neo-clássicas de rendimentos constantes à escala e de rendimentos marginais decrescentes na acumulação de ambos os factores produtivos, a nova teoria do crescimento contrapõe, através do modelo AK, uma formalização que apesar de também supôr rendimentos de escala constantes, recorre a um único factor de produção - o capital. Dado que a propriedade de rendimentos constantes à escala é fundamental na cosideração de um ambiente de concorrência perfeita, com o qual estes modelos de crescimento pretendem ser compatíveis, a hipótese de existência de um único factor produtivo permitirá conciliar o referido ambiente competitivo com a ausência de rendimentos marginais decrescentes no factor capital, de tal modo que se torna possível justificar um processo de crescimento endógeno nas mesmas condições de mercado em que Solow (1956) estabelece os fundamentos do crescimento neo-clássico. Ao admitir

[6] Ver, por exemplo, Barro e Sala-i-Martin (1995), capítulo 1.

que a economia funciona unicamente com base na utlilização do factor capital, o modelo AK aparentemente negligencia o segundo factor de produção neo-clássico, o trabalho; o argumento avançado para contrariar esta ideia consiste em considerar o conceito de capital como um conceito lato, de forma que inclua simultâneamente o capital físico (máquinas e equipamentos utilizados na produção) e o capital humano, representando este o factor trabalho devidamente ponderado pela qualificação média da mão-de-obra disponível.

Apesar da formalização simples e directa que o modelo AK faz do processo de crescimento enquanto endógeno e sustentável, não aparenta ser muito credível a possibilidade de capital físico e capital humano serem considerados em conjunto como um único factor produtivo. O reconhecimento da especificidade de cada uma das formas de capital levou à propagação de uma classe alternativa de modelos de crescimento endógeno - modelos de dois sectores - em que se torna novamente possível, em analogia com o modelo de Solow, tomar separadamente os factores capital e trabalho (este sob a forma de capital humano). Esta nova classe de modelos poderá ser também, graças à identidade nos factores de produção adoptados, objecto de comparação com o modelo neo-clássico de um só sector[7].

Aqui, o objectivo será o de situar o debate crescimento neo-clássico / crescimento endógeno a um nível complementar aos atrás citados. Ter-se-á como referência uma economia composta por dois sectores (capital físico e capital humano produzidos através de tecnologias distintas) e o ponto de partida será o modelo Uzawa-Lucas, explorado entre outros em Lucas (1988), Rebelo (1991), Caballé e Santos (1993) e Mulligan e Sala-i-Martin (1993). Este modelo descreve um processo de crescimento endógeno no sentido em que quer no sector produtivo (de bens de consumo e capital físico) quer no sector educativo (que produz capital humano), os rendimentos marginais do capital, entendido novamente em sentido amplo de forma a incluir capital físico e capital humano, são constantes. Continuando a ter por base o cenário bi-sectorial referenciado, a hipótese de rendimentos constantes será então confrontada com outras alternativas

[7] Uma comparação a este nível pode ser encontrada, entre outros, em Lucas (1988).

(nomeadamente, a presença de rendimentos decrescentes num ou no outro sector) de forma a evidenciar os principais pontos de coincidência e de ruptura entre as duas teorias.

3. FORMALIZAÇÃO DO CRESCIMENTO ENDÓGENO E O MODELO UZAWA-LUCAS

Nesta secção é apresentado o modelo de crescimento endógeno bi-sectorial que estará na origem da análise a efectuar; antes disso, é descrita a técnica a utilizar posteriormente na sua resolução.

3.1 *Dinâmica Comparativa Local em Modelos de Crescimento Endógeno*

Em contraste com o que se verifica relativamente a modelos de crescimento de características neo-clássicas (cujas taxas de crescimento de equilíbrio são nulas), nos modelos de crescimento endógeno o estudo de dinâmica comparativa local não surge, na literatura, de forma igualmente explícita. A principal dificuldade resulta de o próprio estado de equilíbrio ser definido por uma situação dinâmica, isto é, por uma situação em que os diversos agregados que caracterizam a evolução da economia não são, agora, constantes. Esta dificuldade pode, no entanto, ser facilmente dirimida, bastando para tal que se transforme o modelo de crescimento endógeno original num outro modelo em que se elimina a tendência de crescimento de longo prazo; sobre este novo modelo poderá incidir, de forma paralela ao que acontece no modelo de crescimento neo-clássico, um estudo de dinâmica comparativa local que possibilite não só entender como as várias variáveis endógenas convergem para o estado de equilíbrio, como também observar como esse equilíbrio pode ser perturbado em virtude de qualquer choque exterior ao sistema económico. Para melhor perceber o funcionamento deste mecanismo de normalização[8] tome-se o seguinte exemplo:

[8] O qual se baseia na normalização efectuada em Caballé e Santos (1993).

- Considere-se o problema de controle óptimo (P1), usualmente identificado com o modelo de Ramsey,

$$\begin{aligned} &\underset{C}{Max} \int_0^{\infty} U(c).e^{(n-\rho)t}.dt \\ &s.a:\ \dot{k} = f(k) - c - (n+\delta_k).k \qquad \text{(P1)} \\ &k(0) = k_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

O problema (P1) define um cenário em que dado agente representativo da economia procura maximizar a utilidade do seu consumo, *U*(*c*), ao longo do tempo, estando simultâneamente sujeito a uma restrição de recursos que, basicamente, reflecte a forma como unidades sucessivas de capital, *k*, são acrescentadas à produção, traduzindo-se esta na função produtiva *f*(*k*). A definição do problema e das variáveis que o compõem, será discutida em maior pormenor com a apresentação do modelo Uzawa-Lucas na sub-secção seguinte.

Na secção 2 salientou-se que crescimento neo-clássico e crescimento endógeno se distinguem de acordo com o tipo de rendimentos marginais do capital na função de produção; desta forma, (P1) pode respeitar a qualquer das duas classes de modelos consideradas, uma vez que isso vai depender das propriedades a evidenciar pela função de produção *f*(*k*).

Se o modelo é efectivamente neo-clássico (rendimentos marginais do factor *k* decrescentes), tal significa que a condição $\dot{k}=0$ define verdadeiramente um estado de equilíbrio de crescimento nulo, podendo os níveis de capital e de consumo de equilíbrio, $\bar{k}$ e $\bar{c}$, serem directamente relacionados, com base na restrição de recursos: $f(\bar{k}) = \bar{c} + (n+\delta_k).\bar{k}$.

Caso se verifique uma situação de crescimento endógeno (rendimentos marginais do factor *k* constantes), $\dot{k}=0$ traduzirá uma situação em que as variáveis *k* e *c*, variáveis endógenas do modelo, crescem no equilíbrio a uma taxa constante; perante esta circunstância, a dinâmica local do modelo não pode ser analizada, uma vez que a técnica a utilizar para este fim (cálculo de trajectórias de equilíbrio com base nos vectores próprios correspondentes aos valores próprios negativos associados à matriz jacobiana a determinar) apenas é válida para o caso em que, no equilíbrio, as variáveis endógenas do modelo detêm um crescimento nulo. Supondo que a taxa de crescimento de equilíbrio (que se designará por v) é não só constante como igual para ambos os agregados,

$$\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} = \frac{\dot{\bar{c}}}{\bar{c}} = v \tag{3.1}$$

facilmente se depreenderá que estas duas variáveis podem ser transformadas, através de um processo de normalização, em variáveis de crescimento nulo no equilíbrio; definindo:

$$\begin{cases} k_n = k.e^{-v.t} \\ c_n = c.e^{-v.t} \end{cases} \tag{3.2}$$

directamente se conclui que as novas variáveis gozam da mesma propriedade de crescimento de equilíbrio nulo que as variáveis do modelo neo-clássico. Assim sendo, um modelo de crescimento endógeno que utilize em alternativa às variáveis originais, as variáveis normalizadas definidas em (3.2), poderá ser objecto de análise da mesma forma que o é o problema (P1) para o caso neo-clássico. Para proceder à normalização do problema (P1) substitui-se k e c neste modelo pelas variáveis explicitadas em (3.2); para tal é necessário averiguar se a função de utilidade e a função de produção apresentadas são homogéneas e qual o seu grau de homogeneidade. Como se constatará, com a explicitação destas funções para o modelo Uzawa-Lucas, supõe-se que a função de utilidade é homogénea de grau $1-\theta$[9]: $U(c) = U(c_n.e^{v.t}) = U(c_n).e^{(1-\theta).v.t}$, e que a função de produção é homogénea de grau 1: $f(k) = f(k_n.e^{v.t}) = f(k_n).e^{v.t}$; com estas propriedades e sabendo que a seguinte diferenciação é válida: $\dot{k} = (k_n.e^{v.t})^{\bullet} = \dot{k}_n.e^{v.t} + k_n.v.e^{v.t}$, obtém-se um novo problema que corresponde ao modelo de crescimento endógeno sem tendência:

$$\underset{c_n}{Max} \int_0^{\infty} U(c_n).e^{[(1-\theta).v+n-\rho].t}.dt$$

$$s.a: \dot{k}_n = f(k_n) - c_n - (v+n+\delta_k).k_n \tag{P2}$$

$$k_n(0) = k_{n0} \text{ dado}$$

[9] θ é um parâmetro do modelo; o seu significado económico será apresentado posteriormente.

Sintetizando, a dinâmica comparativa local pode ser analizada para o caso de crescimento endógeno da mesma forma que num modelo de propriedades neo-clássicas; a única diferença reside na necessidade de executar um processo de normalização que se destina a eliminar a tendência de crescimento de longo prazo caracteristica dos modelos de crescimento endógeno. Esta técnica de resolução de modelos de crescimento endógeno será aplicada na secção 5 para transformação do modelo bi-sectorial a construir com base no modelo Uzawa-Lucas, este a descrever de seguida.

3.2 Caracterização do Modelo Uzawa-Lucas

O modelo Uzawa-Lucas é um modelo de crescimento endógeno bi-sectorial, desenvolvido, por exemplo, em Lucas (1988) ou Caballé e Santos (1993), o qual parte de uma estrutura sobre a qual é conveniente referir os seguintes aspectos:

- Existem dois sectores na economia que produzem separadamente, e através de tecnologias distintas, capital físico / bens de consumo e capital humano; ambas as formas de capital são utilizadas como factores de produção - o capital humano nos dois sectores e o capital físico exclusivamente no sector produtivo.

- O modelo é composto por quatro variáveis endógenas: duas variáveis de controle, o consumo *per capita* (c) e a fracção de capital humano a utilizar no sector produtor de bens (u), e duas variáveis de estado, o montante de capital físico disponível para a produção (K) e a variável respeitante à eficiência média do trabalho ou variável representativa do capital humano (h). Todas estas variáveis são dependentes do tempo e, em rigor, deveriam ser apresentadas como $c(t)$, $u(t)$, $K(t)$ e $h(t)$[10].

- A definição de capital humano adoptada corresponderá à ideia de que existe uma quantidade física de mão-de-obra na economia, a designar por trabalho simples, $L(t)$, a qual, em termos de contribuição para a produção deverá ser ponderada pela qualidade ou eficiência média do trabalho, $h(t)$. O capital humano total da economia é, então, definido por $H(t) \equiv h(t).L(t)$ e substitui o trabalho simples enquanto factor directamente utilizável

[10] A omissão da dependência temporal das variáveis faz-se apenas por uma questão de simplificação das notações.

na produção de bens. Note-se que L e H são, à semelhança das anteriores, variáveis dependentes do factor temporal, embora, no que segue, esse factor seja, regra geral, omitido.

- A variável L terá um duplo significado, na medida em que não equivalerá somente à quantidade de trabalhadores ou mão-de-obra total, mas também à população total. Supõe-se ainda que esta crescerá a uma taxa constante, positiva e exógena, n, o que poderá ser representado numa de duas formas:

$$\frac{\dot{L}}{L} = n \tag{3.3}$$

ou

$$L = L(0).e^{n.t} \tag{3.4}$$

A expressão (3.4) resulta da resolução da equação diferencial (3.3), em que o ponto sobre a variável significa a sua diferenciação em relação ao tempo. $L(0)$, em (3.4), designa o valor da variável L no momento inicial, ou seja, no momento do tempo em que t=0. Posteriormente, mostrar-se-á que é conveniente proceder à normalização de L, impondo $L(0)$=1.

- As variáveis exógenas do modelo, isto é, as variáveis que afectam o comportamento da economia mas que não são determinadas exclusivamente pelo sistema económico, serão o nível de tecnologia em cada um dos sectores, A (produtivo) e B (educativo), a taxa de crescimento da população, n, as taxas de depreciação das duas formas de capital, δ_k e δ_h , e ainda o factor de desconto, ρ. Ignora-se a possibilidade de dependência temporal de qualquer uma destas variáveis, no sentido em que elas não evoluirão continuamente no tempo em antítese ao que acontece com as variáveis endógenas. Apenas se admite a sua evolução descontínua sob a forma de perturbações sobre o estado de equilíbrio da economia. Ao longo do processo de ajustamento das variáveis endógenas para o equilíbrio, elas corresponderão a quantidades constantes que em nada perturbam o problema de optimização.

Os parâmetros tecnológicos, A e B, são ambos positivos e em alternativa à sua constância poder-se-ia supôr o seu crescimento a uma taxa constante, tal como se procedeu para a variável população. Esta sofisticação do modelo não seria, no entanto, de grande relevância, dado que para os propósitos enunciados (estudo da dinâmica de ajustamento das variáveis endógenas e análise de perturbações exógenas sobre o equilíbrio de longo prazo), ela não acarretaria alterações de fundo; considerar que a tecnologia é constante em alternativa a afirmar que ela cresce a uma taxa constante terá, por seu lado, como vantagem, o menor peso de notação na resolução do modelo. Saliente-se ainda que as taxas de depreciação das duas formas de capital serão, para além de constantes, sempre não negativas, $\delta_k \geq 0$ e $\delta_h \geq 0$ e, em princípio, distintas[11]. Finalmente, o factor de desconto, ρ, representará uma quantidade constante e positiva.

Sobre o ambiente económico subjacente ao modelo, saliente-se que a economia em causa é uma economia fechada; neste contexto, o produto equivalerá ao rendimento e o investimento à poupança. Supõe-se também a ausência de qualquer tipo de externalidade e que se trata de uma economia concorrencial, onde o equilíbrio é atingido através da competição entre empresas em conjugação com o comportamento optimizador das famílias. Na ausência de externalidades, o equilíbrio competitivo ou descentralizado corresponderá à solução do problema de óptimo social, o qual permite entender as restrições de recursos a tomar como as restrições que o agente representativo da economia terá de enfrentar na tentativa de optimizar a utilidade do seu fluxo de consumo. Dada a correspondência entre as soluções centralizada e competitiva, a análise limitar-se-á ao problema de óptimo.

Quanto à hipótese de tecnologias distintas para a produção e para a educação, esta sugere que enquanto o capital humano constitui o único resultado da produção do sector educativo, o sector produtivo produz da mesma forma um único bem homogéneo, mas neste caso tal bem pode ser utilizado indistintamente como bem de consumo ou usado de novo na produção como bem de capital; o investimento em capital físico será, por conseguinte, substituto perfeito do consumo, no sentido em que uma unidade de

---

[11] Empiricamente, constata-se que a depreciação do capital físico é geralmente superior à depreciação do capital humano.

consumo pode ser transformada sem custos numa unidade de capital físico ou, de outro modo, o preço relativo do capital físico face ao consumo será unitário.

A produção de bens / capital físico tem subjacente a seguinte função de produção agregada:

$$Y = F(K, u.H) \tag{3.5}$$

O resultado do processo produtivo, Y, terá, numa economia autárcita como a que se descreve, dois fins: consumo e investimento. Dado que o fluxo de investimento bruto da economia corresponde aos acréscimos temporais da variável capital físico em conjunto com o capital sujeito a depreciação, $I_k = \dot{K} + \delta_k.K$, e que o consumo agregado poderá ser representado pelo consumo individual multiplicado pela população total, então, a seguinte identidade é válida:

$$Y \equiv C + I_k \Leftrightarrow Y \equiv c.L + \dot{K} + \delta_k.K \tag{3.6}$$

Reordenando os termos da expressão (3.6) e substituindo o valor do produto ou rendimento agregado pela respectiva função de produção que o gera, (3.5), obtém-se a primeira restrição de recursos que o agente representativo enfrenta:

$$\dot{K} = F(K, u.h.L) - c.L - \delta_k.K \tag{3.7}$$

O sector educativo utiliza uma tecnologia alternativa à do sector produtor de bens e por esta razão a função que descreve o processo produtivo do capital humano será distinta de (3.5). O modelo Uzawa-Lucas supõe uma função de produção não dependente do factor capital físico para a produção de capital humano, donde:

$$Y_H = G[(1-u).h.L] \tag{3.8}$$

ou, de acordo com a suposição a fazer posteriormente de que esta função é linear, directamente em variáveis *per capita*:

$$y_h = g[(1-u).h] \tag{3.9}$$

O produto gerado pelo sector educativo, Y_H, será em parte utilizado no sector produtor de bens, destinando-se o remanescente a novo investimento em capital humano; da mesma forma que se definiu o investimento em capital físico, o investimento bruto por unidade de capital humano representar-se-á por $i_h = \dot{h} + \delta_h.h$, donde a segunda restrição de recursos vem,

$$i_h = y_h \Leftrightarrow \dot{h} = g[(1-u).h] - \delta_h.h \tag{3.10}$$

Dadas as restrições (3.7) e (3.10), ao agente representativo compete fazer o melhor uso possível dos recursos disponíveis de forma a atingir o objectivo a que se propõe. O objectivo da família representativa será o de maximizar a utilidade do consumo num horizonte infinito e as decisões de consumo serão tomadas no momento t=0 no sentido em que estará em causa a utilidade total do consumo futuro devidamente descontada de forma a poder ser avaliada no momento presente; a função objectivo correspondente a cada consumidor será, portanto:

$$u_0 = \int_0^{\infty} U(c).e^{-\rho.t}.dt \tag{3.11}$$

A utilidade agregada do consumo será equivalente à utilidade do consumo individual ou *per capita* multiplicada pelo número de indivíduos, L, de modo que:

$$U_0 = \int_0^{\infty} U(c).L.e^{-\rho.t}.dt \tag{3.12}$$

Poderá interpretar-se (3.12) como a soma ponderada de todos os fluxos futuros de utilidade, soma esta que corresponde, como referido, à utilidade total no momento inicial.

Ainda sobre (3.12), saliente-se que a utilidade é dinástica, isto é, o agente representativo não se preocupa unicamente com a utilidade do seu consumo, mas também com o bem-estar dos descendentes ou gerações futuras, num horizonte infinito. A utilidade do consumo futuro é descontada à taxa ρ>0; a taxa ρ é uma taxa de preferência inter-temporal no sentido em que quanto maior o valor que ela assume, maior será a utilidade que se atribui ao consumo actual ou próximo relativamente ao consumo distante no tempo. No caso limite ρ=0 seria indiferente aos indivíduos consumir hoje ou consumir em qualquer momento no futuro, donde eles seriam totalmente altruístas já que não procederiam a qualquer distinção entre a sua própria utilidade e a dos seus descendentes, numa dinastia que, relembre-se, se supõe infinita. Para a presente análise, ρ será sempre positivo o que significa que existirá sempre algum grau de egoísmo: os particulares valorizam mais a própria utilidade que a utilidade das gerações posteriores.

De acordo com o ambiente descrito, o modelo Uzawa-Lucas assume a seguinte estrutura:

$$\underset{c,u}{Max}\ U_0 = \int_0^{\infty} U(c).L.e^{-\rho.t}.dt$$

$$s.a: \dot{K} = F(K,u.h.L) - c.L - \delta_k.K$$

$$\dot{h} = g[(1-u).h] - \delta_h.h \qquad \text{(P3)}$$

$$K(0) = K_0 \ dado$$

$$h(0) = h_0 \ dado$$

4. RENDIMENTOS DECRESCENTES E RENDIMENTOS CONSTANTES NUM MODELO DE CRESCIMENTO BI-SECTORIAL

Nesta secção apresentam-se as propriedades a que a função de utilidade e as funções de produção devem obedecer no modelo Uzawa-Lucas, explicitando para tais funções formas funcionais concretas; em seguida este modelo será generalizado de modo a poder ser confrontado com uma nova situação de crescimento endógeno e com outra situação que respeita a um modelo de crescimento de caracteristicas neo-clássicas.

4.1 *Propriedades da Função de Utilidade e das Funções de Produção*

Para que ao modelo Uzawa-Lucas corresponda um equilíbrio óptimo, a função de utilidade e as funções de produção têm de obedecer a algumas propriedades, as quais permitem explicitar uma forma funcional para essas mesmas funções:

- No que respeita à função de utilidade, esta tem de ser uma função contínua no domínio em que é definida e a sua derivada de segunda ordem deve existir e ser também contínua (função C^2); a função deve ser côncava: $U'(c)>0$ e $U''(c)<0$, $\forall$ $c>0$; as seguintes condições (condições de Inada) devem também verificar-se: $\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty$ e $\lim_{c \to \infty} U'(c) = 0$; $U(c)$ terá, ainda, de exibir uma elasticidade de substituição inter-temporal constante e positiva: $\theta^{-1}>0$. O inverso desta elasticidade, θ, supôr-se-á, de acordo com a evidência empírica, sempre superior à unidade; finalmente, a função deve ser homogénea de grau 1-θ. Dado este conjunto de propriedades, $U(c)$ assumirá a seguinte forma funcional:

$$U(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \tag{4.1}$$

- Quanto às funções de produção, estas correspondem, como descrito na secção transacta, às tecnologias usadas nos dois sectores; (3.5) identifica-se com a tecnologia de produção de bens / capital fisico e (3.9) com a tecnologia de produção de capital humano.

- $Y = F(K, u.H)$ será, à semelhança da função de utilidade, uma função C^2 (função contínua, com derivadas parciais de segunda ordem também contínuas); deve igualmente ser uma função monótona crescente e linearmente homogénea; deve ainda evidenciar a presença de rendimentos marginais positivos e decrescentes em relação a cada factor produtivo; $\forall$ K>0, H>0:

$$F_K = \frac{\partial F}{\partial K} > 0,\ F_{KK} = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,\ F_H = \frac{\partial F}{\partial H} > 0,\ F_{HH} = \frac{\partial^2 F}{\partial H^2} < 0;$$

É suposto também verificarem-se as seguintes condições de Inada:

$$\lim_{K\to 0} F_K = \lim_{H\to 0} F_H = \infty;\ \lim_{K\to\infty} F_K = \lim_{H\to\infty} F_H = 0;$$

E por fim, é essencial que se constate que: $F(K,0)=F(0,u.H)=0$: ambos os factores (capital fisico e capital humano) são indispensáveis à produção. A forma funcional a adoptar, $Y = A.K^{\alpha}.(u.h.L)^{1-\alpha}$, obedece a todas as propriedades referenciadas. Nesta função de produção, A respeita ao nível de tecnologia no sector produtivo e $0\leq\alpha\leq 1$ representa a elasticidade capital fisico-produto no sector produtivo ($0\leq 1-\alpha\leq 1$ será a elasticidade capital humano-produto no mesmo sector); a importância do parâmetro de produtividade α reside no facto de definir, de acordo com a função de produção apresentada, uma tecnologia de rendimentos constantes à escala e rendimentos marginais constantes da totalidade do capital.

- Relativamente a $y_h = g[(1-u).h]$, esta deve ser, do mesmo modo, uma função C^2, côncava, crescente em h e linearmente homogénea (relembre-se que a hipótese de homogeneidade de grau 1 ou de rendimentos constantes à escala, em ambas as funções de produção, é essencial para que o modelo descreva uma economia descentralizada em que os mercados competitivos funcionam eficientemente sem a presença de quaisquer externalidades). A forma funcional a considerar, $y_h = B.(1-u).h$, preenche os requisitos citados; o parâmetro B representa, como já referido, o nível de tecnologia no sector educativo, e neste caso a elasticidade capital humano-produto é unitária (a função é linear).

Uma primeira alteração a introduzir no modelo Uzawa-Lucas como definido em (P3) consistirá na sua apresentação exclusivamente em variáveis *per capita*, de forma a que o modelo considere explicitamente a taxa de crescimento da população. Será então necessário modificar a função objectivo e a restrição correspondente ao capital físico, procedendo do seguinte modo:

- Retomando (3.4) e supondo $L(0)=1$, a utilidade total no momento zero equivale a:

$$U_0 = \int_0^{\infty} U(c).e^{-(\rho-n).t}.dt \tag{4.2}$$

Em (4.2), o termo referente ao factor trabalho ou à população total é eliminado, surgindo em contrapartida um novo factor de desconto, ρ-n, que terá de assumir, à semelhança de ρ, um valor positivo de forma a assegurar que a utilidade do consumo não cresça indefinidamente[12].

- A restrição de recursos (3.7) será modificada tendo em conta uma das condições (3.3) ou (3.4). Recordando que $c \equiv C/L$ e constatando que o rácio capital-trabalho ou quantidade de capital físico por unidade de trabalho corresponde a $k \equiv K/L$, então, a partir de (3.7):

$$(k\dot{.}L) = A.(k.L)^{\alpha}.(u.h.L)^{1-\alpha} - c.L - \delta_k.k.L \tag{4.3}$$

Como $(k\dot{.}L) = \dot{k}.L + k.\dot{L}$ e, por (3.3), $\dot{L} = n.L$, a nova restrição do capital físico, expressa em variáveis *per capita*, assume a forma:

[12] A imposição de um limite superior ao valor que U_0 pode assumir é indispensável para garantir a existência de um equilíbrio óptimo de longo-prazo. A questão será retomada posteriormente (secção 6) com a discussão da forma a adoptar para esta condição de transversalidade consoante o tipo de modelo em causa (neo-clássico ou de crescimento endógeno).

$$\dot{k} = A.k^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha} - c - (n+\delta_k).k \tag{4.4}$$

O problema de optimização respeitante ao modelo Uzawa-Lucas, quando definido em variáveis *per capita*, é então:

$$\underset{c,u}{Max}\ U_0 = \int_0^{\infty} U(c).e^{-(\rho-n).t}.dt$$

$$s.a:\ \dot{k} = A.k^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha} - c - (n+\delta_k).k$$

$$\dot{h} = B.(1-u).h - \delta_h.h \tag{P4}$$

$$k(0) = k_0\ dado$$

$$h(0) = h_0\ dado$$

Defina-se ainda o domínio válido para as variáveis de controle e para as variáveis de estado:

$$c \geq 0;\ u \in [0,1];\ k \geq 0;\ h \geq 0.$$

Dado o conjunto de condições que a função de utilidade e as funções de produção têm de verificar, define-se como solução óptima para a economia em causa o conjunto de trajectórias $\{c, u, k, h\}$ que resolvem o problema de optimização correspondente ao modelo Uzawa-Lucas, como apresentado em (P4). De acordo com Caballé e Santos (1993), no estado de equilíbrio dado pela solução óptima referida é suposto que, quaisquer que sejam $k(0)$ e $h(0)$:

- c, k e h deverão crescer a taxas constantes;
- u deverá ser constante;
- o rácio produto / capital será também constante.

Para encontrar o estado de equilíbrio assim definido será necessário proceder ao estudo das condições necessárias de óptimo que se obtêm do hamiltoniano corrente relativo ao problema (P4). Este estudo será realizado na secção 6.

4.2 Generalização

O modelo Uzawa-Lucas, como descrito por (P4), apresenta duas funções de produção que verificam simultâneamente as propriedades de rendimentos constantes à escala e rendimentos marginais do capital constantes; isto acontece porque os factores de produção considerados são exclusivamente factores de capital e é esta coincidência que permite definir um modelo de crescimento endógeno compatível com uma estrutura de mercado concorrencial. Pretende-se agora generalizar o problema (P4) de modo a que este possa admitir funções de produção mais abrangentes que as do caso Uzawa-Lucas, isto é:

$$\begin{cases} y = A.k^{\alpha}.(u.h)^{\beta} \\ y_h = B.\left[(1-u).h\right]^{\eta} \end{cases} \tag{4.5}$$

Relativamente às funções de produção subjacentes ao problema (P4), considera-se agora, para além do parâmetro α, dois parâmetros de produtividade adicionais: $0<\beta\leq 1-\alpha$ e $0<\eta\leq 1$. O objectivo será o de pôr em contraste as alternativas $\alpha+\beta<1$, $\alpha+\beta=1$ e $\eta<1$, $\eta=1$. Com $\alpha+\beta=1$ e $\eta=1$ retoma-se o modelo Uzawa-Lucas. Nas outras situações surge uma dificuldade: as condições que se definiram para $F(K, u.H)$ e $g[(1-u).h]$ são violadas; mais concretamente, a hipótese fundamental que permitiria considerar um ambiente competitivo sem externalidades, a hipótese de rendimentos constantes à escala em ambas as funções de produção, já não é válida.

A única forma de supôr uma especificação como a pretendida mantendo simultâneamente as condições de economia descentralizada é tomar o factor L como independente do factor H, ou seja, considerar, como em Mankiw, Romer e Weil (1992), três factores de produção:

- dois factores de produção reprodutíveis relativos às duas formas de capital: capital físico e capital humano;

- um factor de produção não reprodutível: o trabalho simples, L.

As novas funções de produção, Y^{*} e Y_H^{*}, serão:

$$Y^{*} = A.K^{\alpha}.(u.H)^{\beta}.(\mu.L)^{1-\alpha-\beta} \tag{4.6}$$

$$Y_H^{*} = B.\left[(1-u).H\right]^{\eta}.\left[(1-\mu).L\right]^{1-\eta} \tag{4.7}$$

com μ a fracção do factor trabalho a utilizar no sector produtor de bens. Y^{*} e Y_H^{*} corresponderão a Y e Y_H para o caso de três factores e as propriedades que ambas as funções de produção devem evidenciar (nomeadamente, a hipótese de rendimentos constantes à escala) voltam a verificar-se.

Um problema subsiste - pretende-se estudar uma estrutura teórica semelhante a (P4), porém com as novas especificações das funções de produção surge mais uma variável de controle, $\mu(t)$. Como o objectivo da análise é o de contrastar situações de rendimentos constantes (crescimento endógeno) com situações de rendimentos decrescentes (modelo neo-clássico) tal continua a ser possível se se adoptar simplesmente as situações limite μ =1 e μ=0, ou seja, se se considerar a hipótese meramente teórica de que o factor não reprodutível é utilizado alternativamente na produção ou na educação e nunca simultâneamente nas duas funções de produção.

Em termos *per capita*, as funções de produção (4.6) e (4.7) poderão ser escritas, para os casos limite μ=0 e μ=1, como:

$$\begin{cases} y^* = A.k^{\alpha}.(u.h)^{\beta} \\ y_h^* = B.(1-u).h \end{cases} \qquad \text{para } \mu=1,$$

e

$$\begin{cases} y^* = A.k^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha} \\ y_h^* = B.\left[(1-u).h\right]^{\eta} \end{cases} \qquad \text{para } \mu=0.$$

Substituíndo as funções de produção de rendimentos marginais constantes do modelo Uzawa-Lucas por cada uma destas novas formulações obter-se-ão dois novos problemas, complementares ao primeiro, e que permitem considerar, ao contrário daquele modelo, situações de rendimentos decrescentes do capital num ou no outro sector, mantendo no entanto a hipótese de rendimentos constantes à escala. Deste modo, as três possibilidades ($\alpha+\beta=1$ e $\eta=1$; $\alpha+\beta<1$ e $\eta=1$; $\alpha+\beta=1$ e $\eta<1$) são compatíveis com o ambiente competitivo e permitem, como se verá, comparar crescimento endógeno e crescimento neo-clássico. A situação em que $\alpha+\beta<1$ e $\eta<1$ é, neste contexto (presença de um único factor não reprodutível), impossível de se verificar em presença de uma estrutura concorrencial, ou seja, necessitará da consideração de efeitos externos; por esta razão, tal situação será ignorada.

As três situações especificadas poderão sintetizar-se no modelo genérico,

$$\underset{c,u}{Max}\ U_0 = \int_0^{\infty} U(c).e^{-(\rho-n).t}.dt$$

$$s.a:\ \dot{k} = A.k^{\alpha}.(u.h)^{\beta} - c - (n+\delta_k).k$$

$$\dot{h} = B.[(1-u).h]^{\eta} - \delta_h.h \qquad \text{(P5)}$$

$$k(0) = k_0\ dado$$

$$h(0) = h_0\ dado$$

que obedece também às seguintes restrições sobre os parâmetros:

$$0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$$

$$0 < \eta \leq 1,\ 0 < \alpha + \beta \leq 1$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta < 1 \Rightarrow \eta = 1 \\ \eta < 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Sobre (P5), modelo mais geral que o modelo Uzawa-Lucas, vai incidir a análise de dinâmica comparativa. Antes de proceder a essa análise, será útil distinguir formalmente as situações de crescimento endógeno das situações de crescimento neo-clássico; é esta tarefa que se realiza na próxima secção.

5. TAXAS DE CRESCIMENTO DE EQUILÍBRIO

Nesta secção constatar-se-á que o problema (P5) é um modelo genérico que inclui situações de crescimento endógeno (crescimento no equilíbrio) e situações de crescimento neo-clássico (ausência de crescimento no equilíbrio). Em virtude deste facto torna-se necessário proceder à normalização referenciada na secção 3.

5.1 *A Dicotomia Crescimento / Ausência de Crescimento no Equilíbrio de Longo Prazo*

Na secção 4 sugeriu-se que o estado de equilíbrio $\{\bar{c},\bar{u},\bar{k},\bar{h}\}$, situação em que as diversas quantidades (as diversas variáveis endógenas) crescem a taxas constantes, obedeceria a um conjunto de características, próprias do modelo Uzawa-Lucas. Tais características ou condições continuam a ser válidas para o modelo mais genérico (P5): $\bar{u}$ é constante, ou seja, cresce a uma taxa nula; $\bar{c}$, $\bar{k}$ e $\bar{h}$ crescem a taxas constantes mas não representam necessariamente quantidades constantes (não crescem a taxas nulas)[13]; o rácio produto / capital de equilíbrio continuará a definir-se como constante. Relativamente a esta última condição ela não é somente válida para o sector produtor de bens, isto é, para o rácio produto / capital físico neste sector, mas também para o sector produtor de capital humano, ou seja, para o rácio produto do sector educativo / capital humano.

A partir destas três propriedades é possível determinar as taxas de crescimento de equilíbrio das variáveis c, k, h, y e y_h, correspondendo, como anteriormente, as últimas duas ao produto *per capita* dos sectores produtivo e educativo, respectivamente. Serão ainda introduzidas duas novas variáveis sobre as quais é também possível retirar conclusões aquando do estudo de dinâmica comparativa: p, rácio dos preços-sombra das duas formas de capital, e q, conceito amplo de produto *per capita*. A estas duas variáveis corresponderá, da mesma forma que para as restantes, um estado de equilíbrio em que crescem a taxas constantes.

A suposição de que o rácio produto / capital físico[14] no sector produtor de bens é constante no estado de equilíbrio, traduz-se algebricamente na seguinte expressão:

$$\frac{\dot{\left(\bar{y}/\bar{k}\right)}}{\left(\bar{y}/\bar{k}\right)} = 0 \qquad (5.1)$$

---

[13] Só no caso de um modelo neo-clássico é que estas taxas de crescimento de equilíbrio são nulas. Para um modelo de crescimento endógeno, as taxas de crescimento são sempre positivas no estado de equilíbrio. É, de resto, esta característica que, como se referiu na secção 2, constitui a distinção principal entre as duas classes de modelos.

[14] Nesta e nas seguintes secções far-se-á referência à variável capital físico sem referir, muitas das vezes, que se trata do capital físico *per capita* ou rácio capital-trabalho e não da quantidade total de capital físico utilizada na produção. Como a taxa de crescimento do capital físico difere nestas suas duas especificações, convém frisar que se entenderá no que segue, e excepto qualquer referência em contrário, capital físico como a variável endógena considerada, k. Um entendimento idêntico deve ser adoptado para as restantes variáveis.

Tendo sido a função de produção definida por $y = A.k^{\alpha}.(u.h)^{\beta}$, é legítimo considerar que no estado de equilíbrio $\bar{y} = A.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{\beta}$, e portanto o rácio produto / capital físico de equilíbrio, vem:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{k}} = A.\bar{k}^{\alpha-1}.(\bar{u}.\bar{h})^{\beta} \qquad (5.2)$$

Recordando que $\dot{\bar{u}} = 0$ ($\bar{u}$ é constante), a diferenciação de (5.2) em ordem ao tempo produz o seguinte resultado:

$$\dot{\left(\frac{\bar{y}}{\bar{k}}\right)} = A.(\alpha-1).\bar{k}^{\alpha-2}.\dot{\bar{k}}.(\bar{u}.\bar{h})^{\beta} + A.\bar{k}^{\alpha-1}.\beta.\bar{u}^{\beta}.\bar{h}^{\beta-1}.\dot{\bar{h}} \qquad (5.3)$$

A substituição de (5.2) e (5.3) em (5.1) permite obter a igualdade

$$(\alpha-1).\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} + \beta.\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}} = 0 \qquad (5.4)$$

que, enfim, sugere a seguinte relação entre as taxas de crescimento do capital físico e do capital humano, no estado de equilíbrio:

$$\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} = \frac{\beta}{1-\alpha}.\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}} \qquad (5.5)$$

Ambas as taxas de crescimento de equilíbrio, $\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}$ e $\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}}$, são, como definidas atrás, constantes, sendo que, para a estrutura económica em causa, a taxa de crescimento do capital físico nunca será superior, no estado de equilíbrio à taxa de crescimento do capital humano. De facto, para as duas alternativas avançadas, $\alpha+\beta<1$ e $\alpha+\beta=1$, a taxa de crescimento do capital físico será, respectivamente, inferior e igual à taxa de crescimento do capital humano.

Ao verificar-se a condição (5.1) impõe-se uma outra relação entre taxas de crescimento de equilíbrio; nomeadamente, a taxa de crescimento do produto *per capita* equivalerá à taxa de crescimento do capital físico. Para demonstrar a veracidade desta asserção diferencie-se o rácio produto / capital de equilíbrio em ordem ao tempo:

$$\dot{\left(\frac{\bar{y}}{\bar{k}}\right)} = \frac{\dot{\bar{y}}.\bar{k} - \bar{y}.\dot{\bar{k}}}{\bar{k}^2} \qquad (5.6)$$

A substituição de (5.6) em (5.1), resulta na seguinte igualdade:

$$\left(\frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{y}}-\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}\right).\bar{y}^2=0 \tag{5.7}$$

a qual, para se verificar, impõe a condição:

$$\frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{y}}=\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} \tag{5.8}$$

isto é, o produto *per capita* e o capital físico (também como variável *per capita*) crescerão forçosamente à mesma taxa de equilíbrio, nunca superior à respectiva taxa de crescimento do capital humano.

O segundo rácio que nos interessa é o rácio produto do sector educativo / capital humano, que se quer também constante no equilíbrio:

$$\frac{\dot{\left(\bar{y}_h/\bar{h}\right)}}{\left(\bar{y}_h/\bar{h}\right)}=0 \tag{5.9}$$

À função de produção $y_h=B.\left[(1-u).h\right]^{\eta}$ corresponde $\bar{y}_h=B.\left[(1-\bar{u}).\bar{h}\right]^{\eta}$ e portanto o referido rácio será:

$$\frac{\bar{y}_h}{\bar{h}}=B.(1-\bar{u})^{\eta}.\bar{h}^{\eta-1} \tag{5.10}$$

Da diferenciação de (5.10), com $\bar{u}$ constante:

$$\dot{\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{h}}\right)}=B.(1-\bar{u})^{\eta}.(\eta-1).\bar{h}^{\eta-2}.\dot{\bar{h}} \tag{5.11}$$

Então, de acordo com (5.9):

$$\frac{\dot{\left(\bar{y}_h/\bar{h}\right)}}{\left(\bar{y}_h/\bar{h}\right)}=(\eta-1).\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}}=0 \tag{5.12}$$

A condição (5.12) significa que a taxa de crescimento de equilíbrio do capital humano será necessariamente nula para o caso em que o parâmetro η não coincide com a unidade, ou seja, para o caso em que se constatam rendimentos decrescentes na acumulação de capital humano no sector educativo.

Novamente, em analogia ao que acontece com o produto *per capita* do sector produtivo, no sector educativo a condição (5.9) significa que:

$$\left(\frac{\dot{\bar{y}}_h}{\bar{y}_h}-\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}}\right).\bar{y}_h^2=0 \tag{5.13}$$

e portanto, o produto do sector educativo cresce a uma taxa de equilíbrio idêntica à do capital humano:

$$\frac{\dot{\bar{y}}_h}{\bar{y}_h}=\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}} \tag{5.14}$$

Na secção 2, o debate crescimento neo-clássico / crescimento endógeno foi colocado de modo que a presença ou ausência de rendimentos marginais decrescentes nas formas de capital adoptadas definiria o tipo de modelo em causa. Estamos agora em condições de, para as situações concretas subjacentes ao modelo desenvolvido, distinguir crescimento neo-clássico de crescimento endógeno. Retomando as relações referentes às taxas de crescimento de equilíbrio do capital físico e do capital humano, (5.5) e (5.12), será conveniente apresentá-las sob a forma do seguinte sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}}=\dfrac{1-\alpha}{\beta}.\dfrac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}\\[2ex](\eta-1).\dfrac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}}=0\end{cases} \tag{5.15}$$

Um modelo de crescimento neo-clássico descreve um situação em que, no estado de equilíbrio de longo prazo, os diversos agregados económicos cessam de crescer; nomeadamente, a seguinte condição é válida:

$$\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}=\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}}=0 \tag{5.16}$$

Em contrapartida, crescimento endógeno será sinónimo de uma situação em que pelo menos uma das duas taxas de crescimento de equilíbrio referidas é não nula:

$$\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}}\neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}\neq 0 \tag{5.17}$$

Para que se possa verificar crescimento endógeno, observa-se que, de acordo com o sistema (5.15), η será igual à unidade de forma a garantir uma taxa de crescimento de equilíbrio do capital humano diferente de zero ou, alternativamente, caso $\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}}=0$, possibilita-se uma taxa de crescimento do capital físico positiva se se verificar, em (5.15), $\frac{1-\alpha}{\beta}=0$. São, então, condições de crescimento endógeno η=1 e/ou $\frac{1-\alpha}{\beta}=0$ ou, como condição única:

$$(\eta-1).\frac{1-\alpha}{\beta}=0 \tag{5.18}$$

Como se exclui a possibilidade α=1 (0<α<1), o crescimento endógeno será garantido para η=1. Em contrapartida, se η<1 haverá crescimento tipo neo-clássico. Assim, para as três situações que definem o nosso modelo, uma delas respeitará ao caso neo-clássico (η <1, $\alpha+\beta=1$) enquanto as restantes duas (η=1, $\alpha+\beta=1$; η=1, $\alpha+\beta<1$) representam situações de crescimento endógeno.

Um outro agregado para o qual é necessário encontrar a taxa de crescimento de equilíbrio é o consumo *per capita*. Da restrição de recursos correspondente à evolução temporal do capital físico obtém-se, para o estado de equilíbrio, a seguinte taxa de crescimento:

$$\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}=A.\bar{k}^{\alpha-1}.(\bar{u}.\bar{h})^{\beta}-\frac{\bar{c}}{\bar{k}}-\delta_k \tag{5.19}$$

A primeira parcela do segundo membro de (5.19) é equivalente ao rácio produto-capital físico, como definido em (5.2), donde, reordenando os termos da equação anterior:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{k}}=\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}+\frac{\bar{c}}{\bar{k}}+\delta_k \tag{5.20}$$

Recordando que a taxa de crescimento de equilíbrio do capital físico é constante, tal como o é a taxa de depreciação respeitante a esta forma de capital, da diferenciação de (5.20) em ordem ao tempo, resulta:

$$\dot{\left(\frac{\bar{y}}{\bar{k}}\right)}=\dot{\left(\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\right)}=\frac{\dot{\bar{c}}.\bar{k}-\bar{c}.\dot{\bar{k}}}{\left(\bar{k}\right)^2} \tag{5.21}$$

Para que a condição (5.1) seja válida para (5.20) e (5.21) a seguinte igualdade deve verificar-se:

$$\frac{\dot{\bar{c}}.\bar{k} - \bar{c}.\dot{\bar{k}}}{\bar{k}.(\dot{\bar{k}} + \bar{c} + \delta_k.\bar{k})} = 0 \tag{5.22}$$

A veracidade de (5.22) é garantida para $\frac{\dot{\bar{c}}}{\bar{c}} = \frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}$, donde, no estado de equilíbrio, a taxa de crescimento do consumo será idêntica à taxa de crescimento do capital físico.

As seguintes três proposições sintetizam os resultados obtidos atrás:

PROPOSIÇÃO 5.1- Crescimento neo-clássico e crescimento endógeno distinguem-se, na presente formulação teórica, unicamente através do valor assumido pelo parâmetro η. Com η=1 garante-se a possibilidade de crescimento positivo de longo prazo (crescimento endógeno); em contrapartida, situações em que η<1 traduzem-se na ausência de variáveis que crescem no estado de equilíbrio (crescimento neo-clássico).

PROPOSIÇÃO 5.2- Para uma taxa de crescimento de equilíbrio da variável capital humano, *h*, constante e não negativa, *v*, o capital físico por unidade de trabalho simples, *k*, e o consumo *per capita*, *c*, crescerão, na respectiva situação de equilíbrio, a uma mesma taxa $\frac{\beta}{1-\alpha}.v$, que de acordo com as restrições impostas aos parâmetros α e β, nunca será superior à taxa referente ao capital humano.

PROPOSIÇÃO 5.3- Dadas as condições impostas para definir o estado de equilíbrio, as taxas de crescimento do produto de cada um dos sectores, produtivo e educativo, terão de corresponder respectivamente, nesse mesmo equilíbrio, às taxas de crescimento do capital físico e do capital humano.

É ainda possível determinar a taxa de crescimento de dois agregados adicionais no estado de equilíbrio. Estes agregados são, em analogia às variáveis definidas em Barro e Sala-i-Martin (1995), o rácio dos preços-sombra entre as duas formas de capital e o produto total *per capita*. O rácio dos preços-sombra ou preço-sombra do capital humano em unidades de bens define o preço relativo de uma das formas de capital, o capital humano, face à outra, o capital físico. Adiantando uma das condições de óptimo a obter na secção seguinte, este preço relativo será dado por:

$$p = \frac{p_h}{p_k} = \frac{A}{B} \cdot \frac{\beta}{\eta} \cdot \frac{u^{\beta-1}.k^{\alpha}.h^{\beta}}{(1-u)^{\eta-1}.h^{\eta}} \tag{5.23}$$

Por produto total entende-se o conjunto da produção dos dois sectores, ou seja, a soma do produto do sector produtor de bens e do produto do sector educativo, este ponderado pelo preço relativo do capital humano em relação ao capital físico, de forma que as duas produções sejam contabilizadas na mesma unidade:

$$q = y + p.y_h = A.k^{\alpha}.(u.h)^{\beta}.\left(1 + \frac{\beta}{\eta} \cdot \frac{1-u}{u}\right) \tag{5.24}$$

Calcule-se, então, as taxas de crescimento de p e q no estado de equilíbrio:

$$\overline{p} = \frac{A}{B} \cdot \frac{\beta}{\eta} \cdot \frac{\overline{u}^{\beta-1}.\overline{k}^{\alpha}.\overline{h}^{\beta}}{(1-\overline{u})^{\eta-1}.\overline{h}^{\eta}} \tag{5.25}$$

Com $\overline{u}$ constante e $\overline{k}$ e $\overline{h}$ variáveis dependentes do factor temporal, a diferenciação de (5.25) em ordem ao tempo resulta na seguinte expressão:

$$\dot{\overline{p}} = \overline{p}.\left[\alpha.\frac{\dot{\overline{k}}}{\overline{k}} + (\beta - \eta).\frac{\dot{\overline{h}}}{\overline{h}}\right] \tag{5.26}$$

De (5.26), tendo presente (5.5), obtém-se a taxa de crescimento para o preço relativo de equilíbrio:

$$\frac{\dot{\overline{p}}}{\overline{p}} = \left(\frac{\beta}{1-\alpha} - \eta\right).\frac{\dot{\overline{h}}}{\overline{h}} \tag{5.27}$$

De acordo com (5.27), se a taxa de crescimento do capital humano é nula, então a taxa de crescimento do rácio dos preços será também nula. Quando a taxa de crescimento do capital humano é positiva, neste caso, como se demonstrou, o parâmetro η terá de ser igual à unidade, e portanto:

$$\frac{\dot{\overline{p}}}{\overline{p}} = \frac{\beta}{1-\alpha} \cdot \frac{\dot{\overline{h}}}{\overline{h}} - \frac{\dot{\overline{h}}}{\overline{h}} = \frac{\dot{\overline{k}}}{\overline{k}} - \frac{\dot{\overline{h}}}{\overline{h}} \tag{5.28}$$

Como caso genérico pode-se admitir que a taxa de crescimento do rácio dos preços é, de acordo com (5.28), igual à diferença entre as taxas de crescimento do capital físico e do capital humano; embora, na realidade, a condição (5.28) tenha sido obtida para o caso particular η=1, ela aplica-se também à situação η<1, situação onde as taxas de crescimento das duas formas de capital são nulas donde a taxa de crescimento do rácio dos preços é também nula, o que confere com (5.27). O crescimento do preço do capital humano por unidade de bens de consumo será sempre, no equilíbrio, negativo ou nulo; a taxa de crescimento de $\bar{p}$ nunca poderá ser positiva dado que se constatou ser verídica a relação $\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} \leq \frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}}$.

Para determinar a taxa de crescimento de $\bar{q}$ procede-se do mesmo modo que para $\bar{p}$; de (5.24) é imediato que:

$$\bar{q} = A.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{\beta}.\left(1+\frac{\beta}{\eta}.\frac{1-\bar{u}}{\bar{u}}\right) \qquad (5.29)$$

Diferenciando (5.29), obtém-se a seguinte taxa de crescimento para o produto total:

$$\frac{\dot{\bar{q}}}{\bar{q}} = \alpha.\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} + \beta.\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}} = \frac{\beta}{1-\alpha}.\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}} = \frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} = \frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{y}} \qquad (5.30)$$

A taxa de crescimento do produto total é idêntica à taxa de crescimento do produto do sector de bens de consumo; tal acontece porque o produto total está avaliado em unidades de bens. É possível considerar também o caso oposto, em que essa avaliação é feita em unidades de capital humano; neste caso, o produto total definir-se-ia como a soma do produto do sector educativo com o produto do sector produtivo, sendo este último ponderado pelo preço dos bens de consumo por unidade de capital humano [preço este que respeita ao inverso de (5.23)]. Correspondendo q_h à nova avaliação do produto total, esta apresenta-se como:

$$q_h = y_h + p^{-1}.y \qquad (5.31)$$

e consequentemente:

$$\bar{q}_h = \bar{y}_h + \bar{p}^{-1}.\bar{y} = B.\left[(1-\bar{u}).\bar{h}\right]^{\eta}.\left(1+\frac{\eta}{\beta}.\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}}\right) \qquad (5.32)$$

Da mesma forma que para (5.30), determina-se a taxa de crescimento do produto total:

$$\frac{\dot{\bar{q}}_h}{\bar{q}_h} = \eta.\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}} \qquad (5.33)$$

Das condições que definem as situações de crescimento neo-clássico / crescimento endógeno, sabe-se que o parâmetro η será unitário para uma taxa de crescimento do capital humano positiva, enquanto que o mesmo parâmetro será inferior à unidade para uma taxa de crescimento de equilíbrio de h nula. Por esta razão pode-se omitir o parâmetro η em (5.33), constatando-se que, à semelhança da situação em que o produto total evolui à taxa de crescimento do produto do sector de bens quando avaliado ao preço desse sector, agora o produto total *per capita* de equilíbrio cresce à mesma taxa do produto do sector educativo, uma vez que é ao seu preço que está a ser avaliado:

$$\frac{\dot{\bar{q}}_h}{\bar{q}_h} = \frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}} = \frac{\dot{\bar{y}}_h}{\bar{y}_h} \tag{5.34}$$

Em síntese:

PROPOSIÇÃO 5.4- *a*) O preço relativo do capital humano por unidade de capital físico mantém-se constante ou decresce no estado de equilíbrio. A impossibilidade de uma taxa de crescimento de equilíbrio positiva para este preço relativo resulta de tal taxa equivaler à diferença entre as taxas de crescimento de equilíbrio do capital físico e do capital humano, diferença esta que de acordo com a proposição 2 é nula ou negativa.

b) A taxa de crescimento do produto conjunto dos dois sectores, no estado de equilíbrio, dependerá de qual o preço a que este agregado é avaliado. Se avaliado ao preço p (em unidades de capital físico ou bens de consumo), a taxa de crescimento do produto total equivale à taxa de crescimento do produto do sector produtivo; se avaliado a p^{-1} (em unidades de capital humano), a referida taxa corresponde à taxa de crescimento de equilíbrio do produto do sector educativo.

5.2 *Normalização do Modelo Original*

Pretendendo-se proceder ao estudo de dinâmica comparativa local do modelo, isto é, à análise da dinâmica de ajustamento das variáveis endógenas para o seu estado de equilíbrio, torna-se necessário modificar o problema (P5) que, de acordo com a estrutura que apresenta, não permite realizar esse objectivo; concretamente, recordando o exemplo da secção 3, tal análise só é possível num modelo em que as variáveis não crescem na proximidade do estado de equilíbrio, de modo que se terá de considerar, em alternativa a c, k e h, variáveis normalizadas de crescimento de equilíbrio nulo.

O procedimento de normalização é o apresentado na secção 3, o qual parte da definição de um conjunto de variáveis que se supõem constantes no estado de equilíbrio: c_n, k_n e h_n. Seja, então, a taxa de crescimento do capital humano, no equilíbrio, designada por v; consequentemente, o capital físico e o consumo crescerão, por (5.5) e (5.22), à taxa $\frac{\beta}{1-\alpha}.v$; nas mesmas circunstâncias c_n, k_n e h_n crescem a taxas nulas. Deste modo, as relações que se estabelecem entre os dois conjuntos de variáveis podem ser expressas no seguinte:

$$h_n = h.e^{-v.t} \Rightarrow h = h_n.e^{v.t} \tag{5.35}$$

$$k_n = k.e^{-\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t} \Rightarrow k = k_n.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t} \tag{5.36}$$

$$c_n = c.e^{-\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t} \Rightarrow c = c_n.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t} \tag{5.37}$$

Refira-se que a normalização efectuada é válida para as três situações subjacentes ao modelo em causa; todas essas situações podem ser obtidas como casos particulares das condições (5.37)-(5.39):

- Em presença de rendimentos marginais constantes na produção e na educação (modelo Uzawa-Lucas) verifica-se $\alpha+\beta=1$ e $\eta=1$, de modo que:

$$h = h_n.e^{v.t}$$

$$k = k_n.e^{v.t}$$

$$c = c_n.e^{v.t}$$

Como se constata, no modelo Uzawa-Lucas, todas as variáveis crescerão à mesma taxa de longo-prazo, v, taxa essa que se supõe positiva no sentido em que definirá uma situação de crescimento endógeno.

- Se existem rendimentos marginais decrescentes apenas no sector produtivo, de modo que $\alpha+\beta<1$ e $\eta=1$, de acordo com (5.18) continuar-se-á a considerar um modelo de crescimento endógeno, em que a taxa de crescimento v é positiva. Contudo, neste caso,

ν não será uma taxa de crescimento comum aos diversos agregados económicos, uma vez que $\bar{c}$ e $\bar{k}$ não crescerão à mesma taxa de $\bar{h}$:

$$h = h_n . e^{\nu . t}$$

$$k = k_n . e^{\frac{\beta}{1-\alpha} . \nu . t}$$

$$c = c_n . e^{\frac{\beta}{1-\alpha} . \nu . t}$$

- Finalmente, quando os rendimentos marginais decrescentes se encontram exclusivamente no sector educativo, $\alpha + \beta = 1$ e $\eta < 1$, sugere-se a existência de um modelo de crescimento neo-clássico a que corresponde, por definição, uma taxa ν nula. Assim sendo:

$$h = h_n$$

$$k = k_n$$

$$c = c_n$$

Deste último conjunto de expressões depreende-se que num modelo de crescimento de características neo-clássicas as variáveis originais coincidem com as variáveis normalizadas, coincidência lógica dado que ao definirem-se como constantes no estado de equilíbrio, as variáveis neo-clássicas não necessitam ser sujeitas a qualquer normalização.

Tendo definido as variáveis normalizadas, é agora necessário substituí-las no problema de óptimo (P5) o que origina um modelo reformulado ao qual corresponde um estado de equilíbrio $\{\bar{c}_n , \bar{u}, \bar{k}_n , \bar{h}_n\}$ em que:

$$\frac{\dot{\bar{c}}_n}{\bar{c}_n} = \frac{\dot{\bar{u}}}{\bar{u}} = \frac{\dot{\bar{k}}_n}{\bar{k}_n} = \frac{\dot{\bar{h}}_n}{\bar{h}_n} = 0 \tag{5.38}$$

Inicie-se esta substituição pela função de utilidade. Recuando à secção 4, considere-se de novo $U(c)$ como definido em (4.1) e substitua-se (5.37) nesta função:

$$U(c) = \frac{\left(c_n . e^{\frac{\beta}{1-\alpha} . \nu . t} \right)^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{c_n^{\,1-\theta}}{1-\theta} . e^{(1-\theta) . \frac{\beta}{1-\alpha} . \nu . t} \tag{5.39}$$

Como se pretende maximizar U_0, dado por (4.2), procede-se à substituição de $U(c)$ pela expressão encontrada em (5.39):

$$U_0 = \int_0^{\infty} U(c_n).e^{-\left[\rho - n - (1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right].t}.dt \tag{5.40}$$

Obteve-se com (5.40) uma nova expressão para a utilidade total, na qual é relevante a alteração encontrada no factor de desconto. Relativamente às restrições de recursos demonstra-se, em apêndice, que:

$$\dot{k}_n = A.k_n^{\alpha}.(u.h_n)^{\beta} - c_n - \left(n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).k_n \tag{5.41}$$

$$\dot{h}_n = B.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta} - (\delta_h + v).h_n \tag{5.42}$$

Com as novas restrições, (5.41) e (5.42), e dada a nova expressão para U_0, (5.40), estamos em condições de apresentar o modelo definitivo, aquele que será verdadeiramente objecto de análise:

$$\begin{aligned} &\underset{c_n,u}{Max}\ U_0 = \int_0^{\infty} U(c_n).e^{-\left[\rho - n - (1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right].t}.dt \\ &s.a:\ \dot{k}_n = A.k_n^{\alpha}.(u.h_n)^{\beta} - c_n - \left(n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).k_n \\ &\dot{h}_n = B.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta} - (\delta_h + v).h_n \\ &k_n(0) = k_{n0}\ dado \\ &h_n(0) = h_{n0}\ dado \end{aligned} \tag{P6}$$

O problema (P6) deve ainda obedecer às seguintes restrições sobre variáveis e parâmetros:

$$c_n \geq 0,\ u \in [0,1],\ k_n \geq 0,\ h_n \geq 0$$

$$0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$$

$$0 < \eta \leq 1,\ 0 < \alpha + \beta \leq 1,\ v \geq 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta < 1 \Rightarrow \eta = 1 \text{ e } v > 0 \\ \eta < 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \text{ e } v = 0 \end{cases}$$

6. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE ÓPTIMO, SISTEMA DE EQUAÇÕES CANÓNICAS E ESTADO DE EQUILÍBRIO

Na presente secção resolve-se o problema de controle óptimo (P6), determinando, em primeiro lugar, as suas condições de maximização de primeira ordem, e em seguida, chegando ao sistema de equações canónicas subjacente a tais condições. Ainda nesta secção, retoma-se a caracterização do estado de equilíbrio iniciada na secção precedente, encontrando-se um conjunto de desigualdades que permitem evitar soluções de canto para a variável u.

6.1 *Determinação do Sistema de Equações Canónicas*

Considere-se o hamiltoniano corrente respeitante ao problema (P6):

$$\aleph = \frac{c_n^{1-\theta}}{1-\theta} + p_k \cdot \left[A.k_n^{\alpha}.(u.h_n)^{\beta} - c_n - \left(n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v \right).k_n \right] +$$

$$+ p_h \cdot \left\{ B.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta} - (\delta_h + v).h_n \right\} \tag{6.1}$$

Em (6.1), $p_k = \lambda_k . e^{-\left[\rho - n - (1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right].t}$ corresponde ao preço-sombra do capital físico, avaliado no momento t (λ_k é o mesmo preço-sombra avaliado no momento zero). Da mesma forma se define $p_h = \lambda_h . e^{-\left[\rho - n - (1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right].t}$, onde p_h é o preço-sombra do capital humano avaliado no momento t e λ_h o mesmo preço-sombra avaliado no momento zero.

Por aplicação do princípio de Pontryagin obtêm-se as condições de primeira ordem ou condições necessárias de óptimo do problema:

$$\aleph_{c_n} = 0 \Leftrightarrow c_n^{-\theta} - p_k = 0 \Leftrightarrow c_n^{-\theta} = p_k \tag{6.2}$$

$$\aleph_u = 0 \Leftrightarrow p_k . A.k_n^{\alpha} . \beta . u^{\beta-1}.h_n^{\beta} = p_h . B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.h_n^{\eta} \tag{6.3}$$

$$\dot{p}_k = \left[\rho - n - (1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.v \right].p_k - \aleph_{k_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{p}_k = \left[\rho + \delta_k + \theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.v - A.\alpha.k_n^{\alpha-1}.(u.h_n)^{\beta} \right].p_k \tag{6.4}$$

$$\dot{p}_h = \left[\rho - n - (1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right].p_h - \aleph_{h_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{p}_h = \left\{\rho - n + \delta_h - \left[(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha} - 1\right].v - B.\eta.(1-u)^{\eta}.h_n^{\eta-1}\right\}.p_h -$$

$$-A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta}.h_n^{\beta-1}.p_k \tag{6.5}$$

$$\dot{k}_n = \aleph_{p_k} \Leftrightarrow \dot{k}_n = A.k_n^{\alpha}.(u.h_n)^{\beta} - c_n - \left(n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).k_n \tag{6.6}$$

$$\dot{h}_n = \aleph_{p_h} \Leftrightarrow \dot{h}_n = B.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta} - (\delta_h + v).h_n \tag{6.7}$$

A condição (6.2) significa que no sector produtivo (sector produtor de bens de consumo / capital físico) o resultado da produção terá, em cada momento do tempo, de ser igualmente valorizado em cada um dos seus possíveis usos: consumo e investimento (acumulação de capital físico). Analogamente, a condição seguinte, (6.3), respeita à ideia de que o tempo deve ser igualmente valorizado nos seus dois usos: produção e acumulação de capital humano; esta condição permite obter o rácio de preços apresentado na secção anterior. As equações (6.4) e (6.5) dão as taxas de variação dos preços dos dois tipos de capital, p_k e p_h, e, finalmente, (6.6) e (6.7) correspondem às sobejamente referidas restrições de recursos.

As equações (6.4) a (6.7) constituem o sistema canónico sobre o qual deve incidir o estudo de dinâmica comparativa do modelo; neste sistema, as variáveis c_n e u definem-se a partir de (6.2) e (6.3) e as quatro equações diferenciais descrevem a evolução temporal dos dois preços-sombra e das duas variáveis de estado. Para que, em alternativa a este sistema, se tenha um conjunto de equações em que se evidencie o comportamento no tempo das quatro variáveis endógenas do modelo, torna-se necessário substituir (6.4) e (6.5) por equações diferenciais respeitantes às duas variáveis de controle. Em apêndice, demonstra-se como é realizada esta transformação; como resultado obtêm-se as duas seguintes equações:

$$\dot{c}_n = \frac{1}{\theta}.c_n.\left[A.\alpha.k_n^{\alpha-1}.(u.h_n)^{\beta} - \left(\rho + \delta_k + \theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right)\right] \tag{6.8}$$

$$\dot{u} = \frac{u.(1-u)}{\beta - 1 + u.(\eta - \beta)} \left\{ (1+\beta-\eta).\delta_h - (1-\alpha).(n+\delta_k) + \right.$$

$$\left. + \alpha.\frac{c_n}{k_n} - [\beta + u.(\eta - \beta)].B.[(1-u).h_n]^{\eta-1} \right\} \tag{6.9}$$

O sistema a estudar será, então, composto pelas equações (6.8), (6.9), (6.6) e (6.7).

6.2 *Estado de Equilíbrio e Condições para um Equilíbrio Interior Óptimo*

Na secção 5, o estado de equilíbrio foi exaustivamente explorado, sendo a análise orientada fundamentalmente para a percepção de quais as taxas de crescimento a que os diversos agregados económicos estão sujeitos nesse mesmo equilíbrio. Agora, com o sistema de equações canónicas obtido, é possível aprofundar a descrição das características que definem o equilíbrio de longo prazo. A normalização efectuada permite assegurar que, no estado de equilíbrio:

$$\dot{c}_n = \dot{u} = \dot{k}_n = \dot{h}_n = 0 \tag{6.10}$$

A imposição de (6.10) ao sistema de equações canónicas resulta num conjunto de relações válidas no estado de equilíbrio:

$$\dot{c}_n = 0 \Rightarrow A.\alpha.\bar{k}_n^{\alpha-1}.(\bar{u}.\bar{h}_n)^{\beta} = \rho + \delta_k + \theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.v \tag{6.11}$$

$$\dot{u} = 0 \Rightarrow (1+\beta-\eta).\delta_h - (1-\alpha).(n+\delta_k) + \alpha.\frac{\bar{c}_n}{\bar{k}_n} =$$

$$= [\beta + \bar{u}.(\eta - \beta)].B.[(1-\bar{u}).\bar{h}_n]^{\eta-1} \tag{6.12}$$

$$\dot{k}_n = 0 \Rightarrow A.\bar{k}_n^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h}_n)^{\beta} = \bar{c}_n + \left(n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).\bar{k}_n \tag{6.13}$$

$$\dot{h}_n = 0 \Rightarrow B.[(1-\bar{u}).\bar{h}_n]^{\eta} = (\delta_h + v).\bar{h}_n \tag{6.14}$$

Notando que de (6.11) e (6.13) resulta:

$$\alpha.\frac{\bar{c}_n}{\bar{k}_n} = \rho + (1-\alpha).\delta_k - \alpha.n + (\theta - \alpha).\frac{\beta}{1-\alpha}.v \tag{6.15}$$

substituíndo (6.15) em (6.12), obter-se-á uma relação entre os valores de equilíbrio das variáveis $\bar{h}_n$ e $\bar{u}$:

$$\bar{h}_n = \left\{ \frac{[\beta + \bar{u}.(\eta - \beta)].B}{\rho + (1+\beta-\eta).\delta_h - n + (\theta - \alpha).\frac{\beta}{1-\alpha}.v} \right\}^{\frac{1}{1-\eta}} . \frac{1}{1-\bar{u}} \tag{6.16}$$

A expressão (6.16) só é válida para o caso neo-clássico (η<1); a correspondente relação para a situação de crescimento endógeno (η=1) elimina à partida $\bar{h}_n$, de modo que:

$$\frac{[\beta + \bar{u}.(\eta - \beta)].B}{\rho + (1+\beta-\eta).\delta_h - n + (\theta - \alpha).\frac{\beta}{1-\alpha}.v} = 1 \tag{6.17}$$

A partir das expressões (6.16) e (6.17) determinam-se as seguintes definições para a variável u no seu estado de equilíbrio, dadas unicamente em função de parâmetros exógenos[15]:

- Crescimento neo-clássico:

$$\bar{u} = \frac{\rho + (1-\eta).\delta_h - n}{\rho + \delta_h - n} \tag{6.18}$$

- Crescimento endógeno:

$$\bar{u} = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)-(1-\theta).\beta}.\left[\frac{\rho - n}{B} - (1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.\left(1 - \frac{\delta_h}{B}\right)\right] \tag{6.19}$$

Como caso particular de (6.19) temos o modelo Uzawa-Lucas, em que:

$$\bar{u} = \frac{1}{\theta}.\left[\frac{\rho - n}{B} - (1-\theta).\left(1 - \frac{\delta_h}{B}\right)\right] \tag{6.20}$$

Uma expressão equivalente a (6.20) pode ser encontrada em Caballé e Santos (1993), onde a sua condição (29) define $\bar{u}$ da mesma forma.

Apesar de se ter excluído à partida a possibilidade η=0, é curioso constatar a partir de (6.18) que, nesta situação concreta, $\bar{u}=1$, o que, como é óbvio, ter-se-ia de verificar uma vez que se η=0 não há sector educativo e consequentemente todo o capital humano será aplicado no sector produtivo, isto é, $\bar{u}=1$.

Como se depreende das expressões (6.18) e (6.19), uma das condições que se supôs como caracterizadora da situação de equilíbrio, a condição de que $\bar{u}$ é constante, é verdadeira para qualquer taxa de crescimento v positiva ou nula, independentemente dos

[15] Os cálculos a efectuar para a determinação de $\bar{u}$ nas duas situações encontram-se em apêndice (apêndice 3).

valores assumidos pelos parâmetros α, β e η. Recorrendo ao conjunto de relações de equilíbrio, (6.11) a (6.14), é possível ainda confirmar a veracidade da suposição de que $\bar{c}_n$, $\bar{k}_n$ e $\bar{h}_n$ são também constantes; após algumas substituições e simplificações:

• Crescimento neo-clássico:

$$\begin{cases} \bar{c}_n = \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \left(\dfrac{A}{\rho+\delta_k}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left[\rho+(1-\alpha).\delta_k - \alpha.n\right] \cdot \dfrac{\rho+(1-\eta).\delta_h - n}{\rho+\delta_h - n} \cdot \\ \qquad \cdot \left(\dfrac{B}{\delta_h}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} \cdot \left(\dfrac{\eta.\delta_h}{\rho+\delta_h - n}\right)^{\frac{\eta}{1-\eta}} \\ \bar{k}_n = \left(\dfrac{\alpha.A}{\rho+\delta_k}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \dfrac{\rho+(1-\eta).\delta_h - n}{\rho+\delta_h - n} \cdot \left(\dfrac{B}{\delta_h}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} \cdot \left(\dfrac{\eta.\delta_h}{\rho+\delta_h - n}\right)^{\frac{\eta}{1-\eta}} \\ \bar{h}_n = \left(\dfrac{B}{\delta_h}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} \cdot \left(\dfrac{\eta.\delta_h}{\rho+\delta_h - n}\right)^{\frac{\eta}{1-\eta}} \end{cases} \tag{6.21}$$

• Crescimento endógeno:

$$\begin{cases} \bar{c}_n = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \left[\rho+(1-\alpha).\delta_k - \alpha.n + (\theta-\alpha).\dfrac{\beta}{1-\alpha}.v\right].\bar{k}_n \\ \bar{k}_n = \left(\dfrac{\alpha.A}{\rho+\delta_k+\theta.\dfrac{\beta}{1-\alpha}.v}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \\ \qquad \cdot \left\{\dfrac{1-\alpha}{(1-\alpha)-(1-\theta).\beta} \cdot \left[\dfrac{\rho-n}{B} - (1-\theta).\dfrac{\beta}{1-\alpha}.\left(1-\dfrac{\delta_h}{B}\right)\right]\right\}^{\frac{\beta}{1-\alpha}} . \bar{h}_n^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \end{cases} \tag{6.22}$$

O sistema (6.21) revela que num modelo de crescimento neo-clássico, todas as variáveis endógenas podem ser obtidas, no equilíbrio, exclusivamente em função de parâmetros exógenos, donde directamente se constata que todas estas variáveis assumem, no estado de equilíbrio, valores constantes. Num modelo de crescimento endógeno esta conclusão não surge de forma tão directa; na realidade, o sistema de equações canónicas apresentado indica-nos que, na situação de crescimento endógeno, existem cinco variáveis endógenas para apenas quatro equações uma vez que v, apesar de constante no estado de equilíbrio, constitui também uma variável do modelo. Assim, a resolução de

(6.11)-(6.14) para as variáveis $\bar{c}_n$, $\bar{u}$, $\bar{k}_n$, $\bar{h}_n$ e v sugere um grau de indeterminação que impossibilita a obtenção de soluções fechadas para todas as variáveis. À semelhança de $\bar{u}$, é possível encontrar para a variável v o seu valor de equilíbrio de longo prazo unicamente em função de parâmetros exógenos; o mesmo já não é possível para as variáveis $\bar{c}_n$, $\bar{k}_n$ e $\bar{h}_n$ que, de acordo com (6.22), apenas serão determinadas em função de relações entre cada par de variáveis. Tal não invalida porém que, de acordo com as respectivas definições, $\bar{c}_n$, $\bar{k}_n$ e $\bar{h}_n$ representem quantidades constantes.

Foi referido que a variável relativa à taxa de crescimento de equilíbrio do capital humano, v, pode ser determinada, para o caso de crescimento endógeno, exclusivamente em função de parâmetros e variáveis exógenas; para constatar que assim acontece recorde-se que, com η=1, $v = B.(1-\bar{u}) - \delta_h$, donde, tendo em consideração a definição de $\bar{u}$ em (6.19), resulta que:

$$v = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)-(1-\theta).\beta}.(B-\delta_h-\rho+n) \tag{6.23}$$

O resultado (6.23) é importante uma vez que, para dada economia, permite determinar *a priori* a taxa a que esta crescerá no seu estado de equilíbrio. Saliente-se que, tendo presentes as duas especificações consideradas para um modelo de crescimento endógeno, no modelo Uzawa-Lucas todos os agregados económicos relevantes crescerão à taxa:

$$v = \frac{1}{\theta}.(B-\delta_h-\rho+n) \tag{6.24}$$

enquanto que num modelo em que subsistem rendimentos decrescentes no sector produtivo, (6.23) é a taxa de crescimento de equilíbrio do capital humano mas não a taxa de crescimento do capital físico, do consumo e do produto; a taxa de crescimento destes agregados, todos considerados em variáveis *per capita*, será:

$$\frac{\beta}{1-\alpha}.v = \frac{\beta}{(1-\alpha)-(1-\theta).\beta}.(B-\delta_h-\rho+n) \tag{6.25}$$

Ao concretizar de início, na secção 3, a nossa modelização teórica, foi imediatamente imposta a condição de que todo o capital físico seria utilizado exclusivamente num dos sectores da economia. Definiu-se, assim, uma solução de canto para a variável representativa da fracção de capital físico a afectar ao sector produtivo, de modo que o modelo em causa se tornou num caso particular de uma situação mais genérica que poderia ter sido considerada. Em contrapartida, à variável u não foi imposta qualquer restrição no sentido em que o seu equilíbrio poderia corresponder a uma solução interior ou definir, alternativamente, uma das duas possíveis soluções de canto: u=0 ou u=1. Porém, para salvaguardar a hipótese de que o estudo da dinâmica comparativa do modelo no estado de equilíbrio, não se limita à situação de um só sector (u=1) ou à situação em que existem dois sectores completamente dissociados (u=0)[16] será necessário impôr condições que impossibilitem a existência de soluções de canto, ou seja, que garantam um equilíbrio interior.

Pretendendo que subsista um equilíbrio interior, a dupla desigualdade $0<\bar{u}<1$ pode ser imposta a (6.18) e (6.19), de modo a obter um conjunto de restrições ou condições de fronteira a verificar:

- Para o caso neo-clássico:

$$0<\frac{\rho+(1-\eta).\delta_h-n}{\rho+\delta_h-n}<1 \tag{6.26}$$

As duas condições implícitas em (6.26) são:

$$\text{i) } \rho+(1-\eta).\delta_h-n>0 \tag{6.27}$$

$$\text{ii) } -\eta.\delta_h<0 \tag{6.28}$$

A desigualdade (6.27) significa que ρ-n, factor de desconto total para o caso neo-clássico, terá de ser superior à quantidade negativa $-(1-\eta).\delta_h$; esta condição não contradiz a condição de transversalidade ρ-n>0 que terá igualmente de ser imposta. Para η positivo, a condição (6.28) verificar-se-á para todo o δ_h também positivo (exclui-se assim, no caso neo-clássico, a possibilidade de um equilíbrio interior em presença de uma taxa de depreciação do capital humano nula).

- Para a situação de crescimento endógeno:

---

16 Se u=0, o sector produtivo terá como único factor de produção o capital físico e o sector educativo utilizará exclusivamente capital humano; neste sentido, os dois sectores estão dissociados porque a produção de cada um não estará em nada dependente da produção do outro.

$$0<\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)-(1-\theta).\beta}.\left[\frac{\rho-n}{B}-(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.\left(1-\frac{\delta_h}{B}\right)\right]<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.B<\rho-n+(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.\delta_h<B \qquad (6.29)$$

No caso de crescimento endógeno evidencia-se mais uma condição que resulta da imposição de um equilíbrio interior; dada a expressão (6.11) constata-se que o produto marginal do capital físico no equilíbrio, $A.\alpha.\bar{k}_n^{\alpha-1}.(\bar{u}.\bar{h}_n)^{\beta}$, é constante; na solução de canto $\bar{u}$=0 este produto seria nulo, donde o investimento não seria lucrativo e consequentemente a produção não teria sequer lugar. Ao admitir $\bar{u}$>0 garante-se um produto marginal positivo e a seguinte condição é verdadeira:

$$\rho+\delta_k+\theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.v>0$$

e como, no equilíbrio de crescimento endógeno $v=B.(1-\bar{u})-\delta_h$, verificar-se-á, de forma mais genérica:

$$\rho+\delta_k+\theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.(B-\delta_h)>0 \qquad (6.30)$$

A desigualdade correspondente a (6.30) na situação neo-clássica é simplesmente $\rho+\delta_k>0$, condição que se verifica sempre, de acordo com as hipóteses do modelo construído.

Como referido, (6.30) impõe um limite mínimo à rentabilidade do capital físico; em paralelo a esta condição, a segunda desigualdade em (6.29) impõe um mesmo tipo de limite à rentabilidade do capital humano. Estas condições fazem sentido apenas para a situação de crescimento endógeno já que no caso neo-clássico uma delas é uma mera tautologia e a outra se limita a impôr que a taxa de depreciação do capital humano é positiva. A desigualdade restante respeita a uma condição de transversalidade que impede que a função objectivo do problema possa tomar um valor ilimitado; note-se que a expressão em causa, primeira desigualdade de (6.29), poderia ter sido obtida directamente de U_0: para a utilidade total não ser ilimitada, o factor de desconto total teria de ser positivo, ou seja, $\rho-n+(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.v>0$, o que corresponde à desigualdade encontrada; para perceber que assim é, constate-se que, para $\overline{u}>0$, $v<B-\delta_h$ e portanto $\rho-n+(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.(B-\delta_h)$ é também uma quantidade positiva, o que garante a veracidade da desigualdade (6.29).

Para o caso neo-clássico é necessário apenas impôr que a condição de transversalidade se verifique; para que a utilidade não cresça ilimitadamente:

$$\rho-n>0$$

condição que é englobada pela desigualdade (6.27), encontrada atrás.

A questão da interioridade da solução óptima será sintetizada na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 6.1- Para que as relações de equilíbrio resultantes da determinação das condições de primeira ordem do problema (P6) correspondam a um equilíbrio interior óptimo, é necessário que as seguintes desigualdades sejam verificadas:

	Crescimento endógeno	Crescimento neo-clássico
a) Produtividade mínima do capital físico	$\rho+\delta_k+\theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.(B-\delta_h)>0$	-
b) Produtividade mínima do capital humano	$\rho-n+(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.\delta_h<B$	$\delta_h>0$
c) Condição de transversalidade	$\rho-n+(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.\delta_h>(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.B$	$\rho+(1-\eta).\delta_h-n>0$

Na próxima secção inicia-se o estudo de dinâmica comparativa do modelo, com a determinação do sistema linearizado relativo às equações canónicas encontradas e com o cálculo dos respectivos valores próprios.

7. TIPO DE DINÂMICA ASSOCIADA AO MODELO - OS VALORES PRÓPRIOS DA MATRIZ J

De acordo com o exposto nas secções anteriores, o problema (P6), que obedece a um conjunto de condições de interioridade, define um modelo que descreve o comportamento de uma economia que consoante os valores dos parâmetros de produtividade (α, β e η) apresentará ou não crescimento sustentável. O estudo de dinâmica comparativa local do problema permitirá evidenciar as diferentes soluções; os resultados a obter, os quais advêm da comparação das duas classes de modelos quando tomadas duas restrições de recursos, irão revelar que num modelo de crescimento endógeno, como o modelo Uzawa-Lucas, existe uma trajectória de equilíbrio de dimensão unitária (uma recta), enquanto que num modelo de crescimento de características neo-clássicas, a trajectória estável ou de equilíbrio corresponde a um plano, sendo, portanto, bi-dimensional. Analiticamente, esta diferença significa que dos quatro valores próprios associados ao sistema linearizado a determinar, terão sinal negativo dois no caso de crescimento neo-clássico e apenas um no caso de crescimento endógeno - ambos os sistemas definirão um equilíbrio ponto-sela[17] mas a dimensão da trajetória estável será, como referido, diferente. O objectivo desta secção consiste, desta forma, na descrição do tipo de dinâmica subjacente ao problema (P6) com base nos valores próprios a encontrar.

Retome-se o sistema canónico composto pelas equações diferenciais correspondentes à evolução temporal das duas variáveis de controle, (6.8) e (6.9), e à evolução temporal das duas variáveis de estado, (6.6) e (6.7). Um primeiro passo no estudo da dinâmica do modelo consiste na linearização deste sistema na proximidade do estado de equilíbrio. Para proceder a esta linearização considera-se um sistema matricial em que se separa variáveis endógenas e variáveis exógenas, do seguinte modo:

---

[17] Segue-se aqui uma interpretação de equilíbrio ponto sela idêntica àquela que é adoptada no apêndice matemático de Barro e Sala-i-Martin (1995): qualquer situação em que o sistema não é globalmente estável (valores próprios todos negativos) ou globalmente instável (valores próprios todos positivos), corresponde a um equilíbrio ponto-sela.

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_n \\ \dot{u} \\ \hdashline \dot{k}_n \\ \dot{h}_n \end{bmatrix} = J.\begin{bmatrix} c_n - \bar{c}_n \\ u - \bar{u} \\ \hdashline k_n - \bar{k}_n \\ h_n - \bar{h}_n \end{bmatrix} + \Phi.\begin{bmatrix} dA \\ dB \\ dn \\ d\delta_k \\ d\delta_h \\ d\rho \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

A matriz $J = \left[j_{i_1,i_2} \right]$, $(i_1 = 1,\ldots,4;\ i_2 = 1,\ldots,4)$, refere-se ao jacobiano do sistema, enquanto $\Phi = \left[\varphi_{m_1,m_2} \right]$, $(m_1 = 1,\ldots,4;\ m_2 = 1,\ldots,6)$, é a matriz de coeficientes das variáveis exógenas; a partição apresentada nos vectores do sistema (7.1) separa variáveis de controle de variáveis de estado (partição semelhante será introduzida nas matrizes J e Φ). É necessário, inicialmente, proceder ao cálculo das matrizes J e Φ (os elementos destas matrizes correspondem à derivação de cada equação diferencial em ordem a cada variável, endógenas no caso de J e exógenas no caso de Φ) e, em seguida, recordando que se pretende analisar a dinâmica de ajustamento das variáveis na proximidade do estado de equilíbrio, simplificam-se as duas matrizes tendo em consideração as diversas relações que se estabelecem no referido estado de equilíbrio. Após este processo de simplificação, obtém-se:

$$J = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & \frac{\bar{c}_n}{\bar{u}}.\left[\frac{\beta}{\theta}.\left(\rho^* + n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right)\right] & -\frac{\bar{c}_n}{\bar{k}_n}.\left[\frac{1-\alpha}{\theta}.\left(\rho^* + n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right)\right] & \frac{\bar{c}_n}{\bar{h}_n}.\left[\frac{\beta}{\theta}.\left(\rho^* + n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right)\right] \\ \frac{\bar{u}.(1-\bar{u})}{\varepsilon}.\frac{\alpha}{\bar{k}_n} & \eta.\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}}.(\delta_h + v) & -\frac{\bar{u}.(1-\bar{u})}{\varepsilon}.\frac{\alpha.\bar{c}_n}{\bar{k}_n^2} & \frac{\bar{u}.(1-\eta).(\varepsilon+1)}{\varepsilon}.\frac{(\delta_h + v)}{\bar{h}_n} \\ \hdashline -1 & \frac{\bar{k}_n}{\bar{u}}.\left[\frac{\beta}{\alpha}.\left(\rho^* + n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right)\right] & \rho^* & \frac{\bar{k}_n}{\bar{h}_n}.\left[\frac{\beta}{\alpha}.\left(\rho^* + n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right)\right] \\ 0 & -\eta.\frac{\bar{h}_n}{1-\bar{u}}.(\delta_h + v) & 0 & -(1-\eta).(\delta_h + v) \end{array}\right] \tag{7.2}$$

$$\Phi = \left[\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{\theta}\left(\rho^{*}+n+\delta_k+\frac{\beta}{1-\alpha}.\nu\right).\frac{1}{A}.\bar{c}_n & 0 & 0 & -\frac{1}{\theta}.\bar{c}_n & 0 & -\frac{1}{\theta}.\bar{c}_n \\
0 & -\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}.\frac{\delta_h+\nu}{B}.\bar{u} & -\frac{\bar{u}.(1-\bar{u})}{\varepsilon}.(1-\alpha) & -\frac{\bar{u}.(1-\bar{u})}{\varepsilon}.(1-\alpha) & \frac{\bar{u}.(1-\bar{u})}{\varepsilon}.(1+\beta-\eta) & 0 \\
\hline
\frac{1}{\alpha}\left(\rho^{*}+n+\delta_k+\frac{\beta}{1-\alpha}.\nu\right).\frac{1}{A}.\bar{k}_n & 0 & -\bar{k}_n & -\bar{k}_n & 0 & 0 \\
0 & \frac{\delta_h+\nu}{B}.\bar{h}_n & 0 & 0 & -\bar{h}_n & 0
\end{array}\right] \quad (7.3)$$

Nestas matrizes:

- $\rho^{*}=\rho-n-(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.\nu$, é o factor de desconto total, que será sempre uma quantidade positiva (recorde-se a condição de transversalidade).
- $\varepsilon=\beta-1+\bar{u}.(\eta-\beta)$: de acordo com os valores dos parâmetros β e η e considerando o domínio de $\bar{u}$ ($0<\bar{u}<1$) conclui-se que ε é uma constante negativa mas superior a -1, isto é, $-1<\varepsilon<0$.

Para determinar os valores próprios da matriz J é preciso calcular previamente os respectivos traço e determinante. Neste tipo de problema (problema de controle óptimo descontado, de horizonte infinito e com duas restrições de recursos), o traço do jacobiano corresponderá sempre ao dobro do factor de desconto. Facilmente se demonstra que, para o nosso modelo específico, assim acontece. Sendo o traço definido pela soma dos elementos da diagonal principal da matriz, resulta que:

$$Tr(J)=\eta.\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}}.(\delta_h+\nu)+\rho^{*}-(1-\eta).(\delta_h+\nu)=\frac{\bar{u}-(1-\eta)}{1-\bar{u}}.(\delta_h+\nu)+\rho^{*} \quad (7.4)$$

Das condições de equilíbrio encontradas na secção 6, considere-se de novo (6.15) e a seguinte igualdade que resulta de (6.14):

$$B.\left[(1-\bar{u}).\bar{h}_n\right]^{\eta-1}=\frac{\delta_h+\nu}{1-\bar{u}} \quad (7.5)$$

Substituindo (6.15) e (7.5) em (6.12), obtém-se:

$$\rho - n + \left(1 - \eta - \eta.\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}}\right).\delta_h - \left[(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha} + \eta.\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}}.v\right] = 0 \qquad (7.6)$$

Reordenando os termos de (7.6), de forma a isolar o factor de desconto total:

$$\rho - n - (1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.v = \frac{\bar{u}-(1-\eta)}{1-\bar{u}}.\delta_h + \eta.\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}}.v \qquad (7.7)$$

Finalmente, somando e subtraíndo η-1 à parcela do segundo membro de (7.7) relativa à variável v, esta vem $\left(\eta.\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}} + \eta - 1 - \eta + 1\right).v$, que equivalentemente se poderá escrever como $\frac{\bar{u}-(1-\eta)}{1-\bar{u}}.v + (1-\eta).v$, e portanto:

$$\rho^* = \frac{\bar{u}-(1-\eta)}{1-\bar{u}}.(\delta_h + v) + (1-\eta).v \qquad (7.8)$$

Como já foi várias vezes referido, $(1-\eta).v$ será sempre igual a zero e, por conseguinte, levando em consideração (7.8), o traço de J, em (7.3), corresponde efectivamente ao dobro do factor de desconto total:

$$Tr(J) = 2.\rho^* \qquad (7.9)$$

Quanto ao determinante, o seguinte resultado é encontrado:

$$|J| = -\frac{1}{\theta}.\bar{c}_n.\frac{1-\alpha}{\bar{k}_n}.\eta.(1-\eta).\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}}.\frac{1}{\varepsilon}.\left(\rho^* + n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).(\delta_h + v)^2 \qquad (7.10)$$

A expressão (7.10) indica-nos que, sendo $\varepsilon<0$ e todos os restantes parâmetros positivos, então:

$$\begin{cases} |J| = 0 & \text{se} \quad \eta = 1 \\ |J| > 0 & \text{se} \quad \eta < 1 \end{cases}$$

Tendo presente o teorema fundamental da álgebra segundo o qual o determinante de uma matriz equivale ao produto dos valores próprios associados a essa mesma matriz, depreende-se que para um modelo de crescimento de características neo-clássicas ($\eta<1$) não existirá qualquer valor próprio nulo, de modo que ao seu equilíbrio não está associado qualquer tipo de bifurcação local; mais se constata que, sendo o determinante positivo, só existirá um equilíbrio ponto-sela se o número de valores próprios positivos e negativos fôr idêntico (dois valores próprios positivos / dois valores próprios negativos) uma vez que as duas restantes possibilidades (os quatro valores próprios com o mesmo sinal) definem situações de estabilidade ou instabilidade global. No caso de crescimento endógeno ($\eta=1$) resulta imediatamente que o equilíbrio do modelo reflecte uma situação de bifurcação local, uma vez que pelo menos um dos valores próprios será nulo.

Calcule-se então os valores próprios; para efectuar este cálculo segue-se, fundamentalmente, a técnica apresentada em Brito (1995)[18], segundo a qual os quatro valores próprios, λ_i, $(i=1,\ldots,4)$, são obtidos através da seguinte fórmula:

$$\lambda_i = \frac{Tr(J)}{4} \pm \left\{ \left[\frac{Tr(J)}{4}\right]^2 - \frac{\mathrm{K}}{2} \pm \left[\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right)^2 - |J|\right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.11}$$

O elemento K, em (7.11), corresponde a $M(2)-(\rho^*)^2$, em que $M(2)$ representa a soma dos menores principais de ordem dois da matriz J; o resultado desta soma é:

$$M(2) = \left(\rho^* + n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).\frac{\bar{c}_n}{\bar{k}_n}.\left[\frac{\theta-\alpha}{\theta}.\frac{\beta.(1-\bar{u})}{\varepsilon} - \frac{1}{\theta}.(1-\alpha)\right] +$$
$$+(\rho^*)^2 + \eta.\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}}.(1-\eta).(\delta_h+v)^2.\frac{1}{\varepsilon}$$

e consequentemente:

$$\mathrm{K} = \left(\rho^* + n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).\frac{\bar{c}_n}{\bar{k}_n}.\left[\frac{\theta-\alpha}{\theta}.\frac{\beta.(1-\bar{u})}{\varepsilon} - \frac{1}{\theta}.(1-\alpha)\right] +$$
$$+\eta.\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}}.(1-\eta).(\delta_h+v)^2.\frac{1}{\varepsilon} \tag{7.12}$$

Defina-se agora as seguintes constantes:

$$\omega_1 \equiv \left(\rho^* + n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).\frac{\bar{c}_n}{\bar{k}_n}.\frac{\theta-\alpha}{\theta}.\frac{\beta.(1-\bar{u})}{\varepsilon}$$

$$\omega_2 \equiv -\left(\rho^* + n + \delta_k + \frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).\frac{\bar{c}_n}{\bar{k}_n}.\frac{1}{\theta}.(1-\alpha)$$

$$\omega_3 \equiv \eta.\frac{\bar{u}}{1-\bar{u}}.(1-\eta).(\delta_h+v)^2.\frac{1}{\varepsilon}$$

[18] Esta técnica é desenvolvida para situações em que a matriz J verifica certas condições de simetria que não se encontram em (7.2). Porém, ela continua a ser válida para a matriz Jacobiana apresentada já que a relação base necessária à sua validade, $M(3) = \frac{Tr(J)}{2}.\left\{M(2) - \left[\frac{Tr(J)}{2}\right]^2\right\}$, também aqui se verifica. $M(2)$ é a soma dos menores principais de ordem 2 da matriz J e $M(3)$ a soma dos menores principais de ordem 3 da mesma matriz.

Verifica-se de imediato que K=$\omega_1+\omega_2+\omega_3$ e $|J|=\omega_2.\omega_3$. Como se pretende considerar $\theta>1$[19], então $\theta>\alpha$ e, por conseguinte, ω_1 será, à semelhança de ω_2, uma quantidade negativa:

$$\omega_1<0,\ \omega_2<0$$

Quanto a ω_3 é, ainda, uma quantidade negativa, mas apenas no caso de crescimento neo-clássico, já que é nula para $\eta=1$:

$$\begin{cases}\omega_3=0 \text{ se } \eta=1\\ \omega_3<0 \text{ se } \eta<1\end{cases}$$

Em consequência da definição de K como a soma dos três elementos referenciados, ter-se-á $\frac{K}{2}<0$. É também importante determinar o sinal de $\left(\frac{K}{2}\right)^2-|J|$; como $\left(\frac{K}{2}\right)^2$ e $|J|$ não têm sinais contrários, será necessário constatar que:

$$\left(\frac{K}{2}\right)^2-|J|=\frac{1}{4}.(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2-\omega_2.\omega_3=$$

$$=\frac{1}{4}.\left[\omega_1^2+2.\omega_1.(\omega_2+\omega_3)+\omega_2^2+\omega_3^2-2.\omega_2.\omega_3\right]=$$

$$=\frac{1}{4}.\left[\omega_1^2+2.\omega_1.(\omega_2+\omega_3)+(\omega_2-\omega_3)^2\right]$$

Como $\omega_1<0$, $\omega_1^2>0$, $\omega_2+\omega_3<0$, $(\omega_2-\omega_3)^2>0$, então $\left(\frac{K}{2}\right)^2-|J|$ será uma quantidade positiva e a sua raíz quadrada é, consequentemente, um número real. Os quatro valores próprios respeitantes ao problema (P6) vêm, deste modo:

$$\lambda_{1,2,3,4}=\frac{\rho^*}{2}\pm\left\{\left(\frac{\rho^*}{2}\right)^2-\frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{2}\pm\frac{1}{2}\left[\omega_1^2+2.\omega_1.(\omega_2+\omega_3)+(\omega_2-\omega_3)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Os sinais dos valores próprios, aquilo que para já é fundamental determinar, diferirão consoante o valor assumido pelo parâmetro η:

[19] Alguns artigos, como Caballé e Santos (1993), centram o estudo de dinâmica comparativa de modelos de crescimento endógeno de dois sectores na imposição de diferentes alternativas ao valor que o parâmetro θ pode assumir. Aqui, a única possibilidade considerada para o inverso da elasticidade de substituição inter-temporal da utilidade do consumo é aquela que é relevante do ponto de vista empírico, θ superior à unidade.

• Se η=1, verifica-se ω_3=0, e portanto:

$$\lambda_i = \frac{\rho^*}{2} \pm \left\{ \left(\frac{\rho^*}{2} \right)^2 - \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \pm \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \rho^*,\ 0,\ \frac{\rho^*}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho^*}{2} \right)^2 - (\omega_1+\omega_2)} \qquad (7.13)$$

Recordando que $\omega_1+\omega_2<0$, prontamente se conclui que para esta situação (crescimento endógeno) existem quatro raízes reais para o polinómio característico, sendo duas positivas, uma nula e apenas uma negativa, o que corresponde a uma situação de bifurcação local onde o braço estável é uni-dimensional; um equilíbrio definido por esta situação reflecte a ausência de estabilidade estrutural.

• Para η<1, ter-se-á ω_3 <0 e o determinante da matriz J será positivo; como se demonstrou ser verdade que $\left(\frac{K}{2}\right)^2 - |J|$ é uma quantidade também positiva, a seguinte dupla desigualdade é verdadeira:

$$0 < \left(\frac{K}{2}\right)^2 - |J| < \left(\frac{K}{2}\right)^2$$

Em consequência,

$$\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - |J|} < -\frac{K}{2}$$

e portanto, também se verifica:

$$-\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - |J|} > -\frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - |J|} > 0 \qquad (7.14)$$

Definindo:

$$\omega_4 = -\frac{K}{2} + \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - |J|}\ ;\ \omega_5 = -\frac{K}{2} - \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - |J|}$$

os valores próprios do caso neo-clássico correspondem a:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\rho^*}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho^*}{2} \right)^2 + \omega_4}\ ;\ \lambda_{3,4} = \frac{\rho^*}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho^*}{2} \right)^2 + \omega_5} \qquad (7.15)$$

De (7.14) conclui-se que $\omega_4 > 0$ e $\omega_5 > 0$, donde dois valores próprios serão positivos e os outros dois negativos; os quatro valores próprios são raízes reais. Este cenário caracteriza uma situação em que o sub-espaço associado à trajectória estável é bi-dimensional e monótono.

8. TRAJECTÓRIAS ESTÁVEIS E DINÂMICA DE AJUSTAMENTO DAS VARIÁVEIS ENDÓGENAS

O estudo de dinâmica comparativa a realizar será composto por duas fases. Numa primeira fase, que constitui o objecto desta secção, analiza-se o comportamento que as variáveis definidas como endógenas (consumo, capital físico, capital humano e fracção de capital humano a utilizar no sector produtor de bens) evidenciam durante o processo de ajustamento para o seu estado de equilíbrio de longo prazo. É importante salientar que esta é uma análise pré-estado de equilíbrio que permite constatar de que forma esse equilíbrio é alcançado pelas diferentes variáveis; a caracterização do próprio estado de equilíbrio e do modo como as variáveis endógenas aí se comportam foi já realizada nas secções 5 e 6. Uma segunda fase consiste em, após atingido o estado de equilíbrio, observar como este pode ser perturbado pela acção de variáveis exógenas; analiza-se, então, de que modo a economia reage a tais perturbações, isto é, determina-se qual o efeito destas sobre os valores de equilíbrio das variáveis endógenas. Esta segunda fase da análise dinâmica do modelo será o objecto de estudo da secção 9.

8.1 *Valores de Equilíbrio*

Dado que o estudo de dinâmica comparativa, em qualquer das suas fases, envolve cálculos consideravelmente volumosos, ir-se-á trabalhar, no que segue, com valores concretos para os diversos parâmetros; ao efectuar o estudo de dinâmica por simulação numérica possibilita-se uma maior clareza nos resultados a obter embora, em contrapartida, se perca algum grau de generalidade nas conclusões a retirar. Para realizar esta simulação será necessário designar quais os valores a atribuir aos parâmetros do modelo; segue-se aqui, uma vez mais, Caballé e Santos (1993), que consideram uma economia, segundo eles próxima da evidência empírica, na qual: os níveis de tecnologia no sector produtivo e no sector educativo são, respectivamente, A=1 e B=0,05; a utilidade do consumo é descontada à taxa ρ=0,05; a taxa de crescimento da população será de 1,5%, isto é, n=0,015; o capital físico deprecia-se a uma taxa de 1%, δ_k=0,01, e o capital humano não está sujeito a qualquer depreciação, δ_h=0; o inverso da elasticidade de substituição inter-temporal da utilidade do consumo assume o valor θ=1,5; por fim, os parâmetros de produtividade adoptados são α=0,3; β=0,7 e η=1. Caballé e Santos (1993) trabalham com um modelo tipo Uzawa-Lucas e, por conseguinte, consideram rendimentos marginais do capital constantes em ambos os sectores da economia; na nossa análise, de forma a evidenciar as diferentes situações subjacentes ao modelo desenvolvido, adoptam-se as alternativas β=0,6 / β=0,7 e η=0,9 / η=1 - estas pequenas diferenças nos valores dos parâmetros vão possibilitar a distinção crescimento neo-clássico / crescimento endógeno.

Para realizar o estudo de dinâmica comparativa será necessário, num primeiro momento, utilizar os valores admitidos para o conjunto de parâmetros do modelo com o objectivo de determinar os valores de equilíbrio das variáveis endógenas, e em seguida proceder ao cálculo da matriz de vectores próprios associada aos valores próprios do jacobiano encontrado na secção anterior; a partir da matriz dos vectores próprios obtêm-se, então, as inclinações das trajectórias de equilíbrio entre as diversas variáveis endógenas, inclinações estas que possibilitam caracterizar o seu comportamento dinâmico. Para calcular os valores de equilíbrio de cada uma das variáveis endógenas basta tomar as relações encontradas na secção 6; considerando cada um dos três casos separadamente:

- Caso 1- Modelo Uzawa-Lucas (β=0,7;η=1):

O valor de equilíbrio para a variável u é dado directamente pela expressão (6.20); substituindo nesta os parâmetros adoptados obtém-se $\bar{u}$=0,8 o que significa que, para o caso concreto em estudo, 80% do capital humano é utilizado na produção directa de bens, enquanto que o remanescente, 20%, se destina ao sector educativo. De forma igualmente directa, determina-se a taxa de crescimento ν através da condição (6.24); procedendo à substituição dos parâmetros pelos respectivos valores encontra-se uma taxa de crescimento de 1%, isto é, ν=0,01. Se se suposer que as taxas referentes aos vários parâmetros (taxa de crescimento da população, taxas de depreciação, ...) são taxas médias anuais, então é legítimo considerar que a economia em causa cresce a uma taxa média anual de 1%[20]; recorde-se que, no modelo Uzawa-Lucas, ν é uma taxa de crescimento de equilíbrio comum à generalidade dos agregados económicos, isto é:

$$\frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}}=\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}=\frac{\dot{\bar{c}}}{\bar{c}}=\frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{y}}=\frac{\dot{\bar{y}}_h}{\bar{y}_h}=\frac{\dot{\bar{q}}}{\bar{q}}=\frac{\dot{\bar{q}}_h}{\bar{q}_h}=\nu=0{,}01$$

De entre os agregados considerados, apenas o rácio dos preços não cresce a esta taxa, uma vez que este rácio é constante no equilíbrio, no caso do modelo Uzawa-Lucas. Do sistema (6.22) resultam os restantes valores de equilíbrio de variáveis endógenas; neste sistema existem três variáveis e apenas duas equações, o que significa que o sistema só tem solução caso se atribua um valor arbitrário a uma dessas variáveis. Assim, considerando $\bar{h}_n$=1, poder-se-á determinar os valores de equilíbrio das outras duas variáveis, que serão: $\bar{k}_n$=6,3971 e $\bar{c}_n$=1,3754.

Ainda tendo presente a secção 6, e apesar de já se ter confirmado a existência de um equilíbrio interior ($\bar{u}$=0,8), é importante referir que os valores fixados para os parâmetros obedecem às condições de interioridade; de facto:

$$a)\ \rho+\delta_k+\theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.(B-\delta_h)>0 \ \Rightarrow\ 0{,}135>0;$$

$$b)\ \rho-n+(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.\delta_h<B \ \Rightarrow\ 0{,}035<0{,}05;$$

$$c)\ \rho-n+(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.\delta_h>(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.B \ \Rightarrow\ 0{,}035>-0{,}025.$$

Tendo encontrado os valores de equilíbrio das variáveis endógenas é também possível determinar os valores de equilíbrio das variáveis relativas ao produto e ao rácio de

[20] Considerar-se-á como variável representativa do crescimento económico a taxa de crescimento do produto total da economia quando avaliado em unidades de bens, q, ou, simplesmente, a taxa de crescimento do produto do sector produtivo, y; para as três situações concretas do modelo estas duas taxas de crescimento são idênticas no equilíbrio, donde é indiferente considerar uma ou outra.

preços; dado que no modelo Uzawa-Lucas estas crescem no estado de equilíbrio da mesma forma que as variáveis endógenas, os valores de equilíbrio só são determináveis para um conjunto de variáveis também elas normalizadas; recuando à secção 5, relembre-se as taxas de crescimento de equilíbrio dos diversos agregados - um conjunto de variáveis normalizadas, constantes no estado de equilíbrio, será, desta forma:

$$y_n = y.e^{-\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t}; \quad y_{hn} = y_h.e^{-v.t};$$

$$p_n = p.e^{-\left(\frac{\beta}{1-\alpha}-\eta\right).v.t}; \quad q_n = q.e^{-\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t}; \quad q_{hn} = q_h.e^{-v.t}$$

Para estas variáveis normalizadas, o seu valor de equilíbrio resulta prontamente da sua definição, isto é:

- Valor de equilíbrio para o produto do sector produtivo:

$$\overline{y}_n = A.\overline{k}_n^{\alpha}.(\overline{u}.\overline{h}_n)^{\beta} = 1{,}4926$$

- Valor de equilíbrio para o produto do sector educativo:

$$\overline{y}_{hn} = B.\left[(1-\overline{u}).\overline{h}_n\right]^{\eta} = 0{,}01$$

- Preço do capital humano por unidade de capital físico, no equilíbrio:

$$\overline{p}_n = \frac{A}{B}.\frac{\beta}{\eta}.\frac{\overline{u}^{\beta-1}.\overline{k}_n^{\alpha}.\overline{h}_n^{\beta}}{(1-\overline{u})^{\eta-1}.\overline{h}_n^{\eta}} = 26{,}1213$$

- Produto total de equilíbrio, quando avaliado em unidades de bens / capital físico:

$$\overline{q}_n = \overline{y}_n + \overline{p}_n.\overline{y}_{hn} = 1{,}7539$$

- Produto total de equilíbrio, quando avaliado em unidades de capital humano:

$$\overline{q}_{hn} = \overline{y}_{hn} + \overline{p}_n^{-1}.\overline{y}_n = 0{,}0671$$

Encontrados os valores de equilíbrio para todas as variáveis relevantes da economia, está caracterizado o comportamento desta no equilíbrio de longo prazo; concretamente, no modelo Uzawa-Lucas, e no que respeita às variáveis endógenas:

$$\overline{h} = e^{0{,}01.t}; \quad \overline{k} = 6{,}3971.e^{0{,}01.t}; \quad \overline{c} = 1{,}3754.e^{0{,}01.t}$$

ou seja, como se referiu, estas variáveis não são constantes no equilíbrio, crescendo sim à taxa de 1%; mais se sabe que a parcela de capital humano a utilizar na produção de bens é de 80% no equilíbrio e que as restantes variáveis crescem à taxa, também de equilíbrio, de 1% sobre o valor base encontrado, com excepção para o rácio dos preços que se manterá constante no valor 26,1213. O passo seguinte consiste em saber como evoluem as variáveis para este equilíbrio de longo prazo que se acabou de caracterizar; antes de proceder a este estudo quantifique-se a situação de equilíbrio para os restantes dois casos:

- Caso 2- Rendimentos decrescentes no sector produtivo (β=0,6;η=1):

Este segundo caso respeita também a um modelo de crescimento endógeno, sendo a principal diferença relativamente ao modelo Uzawa-Lucas a de que não existe uma única taxa de crescimento de equilíbrio comum à generalidade dos agregados económicos.

Comece-se por verificar a veracidade das condições de interioridade: a dupla desigualdade $(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.B<\rho-n+(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.\delta_h<B$ verifica-se (-0,0214<0,035 <0,05); da mesma forma, a condição respeitante à produtividade do capital físico ajusta-se aos valores adoptados para os parâmetros: 0,1243>0. Deste modo garante-se que, também para esta situação, o valor de equilíbrio da variável u é superior a zero e inferior à unidade; o verdadeiro valor de $\overline{u}$ é obtido da expressão (6.19), verificando-se que $\overline{u}$=0,79, isto é, 21% do capital humano acumulado na economia é utilizado na formação de mais capital humano, enquanto que 79% tem como destino o sector produtivo; observe-se que neste caso a fracção de capital humano a utilizar no sector produtivo, no equilíbrio, é ligeiramente inferior à do modelo Uzawa-Lucas, o que se deve ao facto de a produtividade do capital humano no sector produtivo (expressa pelo parâmetro β) ser agora menor, numa economia que se mantém em tudo o resto idêntica. A taxa de crescimento ν é determinada pela condição (6.23), de onde resulta ν=0,0105 - esta taxa corresponde à taxa de crescimento da acumulação de capital humano, do produto do sector educativo e do produto total quando avaliado em unidades de capital humano:

$$\frac{\dot{\overline{h}}}{\overline{h}}=\frac{\dot{\overline{y}}_h}{\overline{y}_h}=\frac{\dot{\overline{q}}_h}{\overline{q}_h}=\nu=0{,}0105$$

Quanto ao capital físico, ao consumo, ao produto do sector produtivo e ao produto conjunto dos dois sectores quando avaliado em unidades de bens, estes agregados crescem, de acordo com a análise realizada na secção 5, a uma taxa inferior a v, dada por $\frac{\beta}{1-\alpha}.v$; portanto:

$$\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}=\frac{\dot{\bar{c}}}{\bar{c}}=\frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{y}}=\frac{\dot{\bar{q}}}{\bar{q}}=0{,}009$$

No que respeita ao rácio de preços, a sua taxa de crescimento de equilíbrio é, para a presente situação, equivalente à diferença entre as taxas de crescimento do capital físico e do capital humano, ou seja, $\bar{p}$ cresce à taxa negativa -0,015. Tendo correspondido a taxa de crescimento da economia à taxa de crescimento do produto quando avaliado em unidades de bens, observa-se que esta economia cresce, no equilíbrio, a uma taxa de 0,9%, portanto inferior à taxa de crescimento do modelo Uzawa-Lucas; este resultado justifica-se pela menor produtividade do capital humano no sector produtivo, no presente caso.

Os valores de equilíbrio para as variáveis endógenas normalizadas $\bar{c}_n$, $\bar{k}_n$ e $\bar{h}_n$ determinam-se da mesma forma que no caso anterior, como resultado da resolução do sistema (6.22). Novamente, ter-se-á de impôr um valor arbitrário para uma das variáveis, $\bar{h}_n$=1, donde, para as restantes: $\bar{c}_n$=1,4072 e $\bar{k}_n$=6,6691. Para um mesmo valor de referência do capital humano, os valores de equilíbrio do consumo e do capital físico obtidos são superiores aos do modelo Uzawa-Lucas, o que é resultado de uma taxa v maior na presente situação.

Os valores de equilíbrio para os vários produtos e para o rácio dos preços são determinados como no modelo Uzawa-Lucas; efectuando os devidos cálculos:

$$\bar{y}_n=1{,}5339;\ \ \bar{y}_{hn}=0{,}0105;\ \ \bar{p}_n=23{,}2997;\ \ \bar{q}_n=1{,}7785;\ \ \bar{q}_{hn}=0{,}0763$$

O equilíbrio para as variáveis originais caracteriza-se agora por taxas de crescimento diversas para os agregados capital físico e consumo por um lado, e capital humano por outro; assim:

$$\bar{h}_n=e^{0{,}0105.t};\bar{k}_n=6{,}6691.e^{0{,}009.t};\bar{c}_n=1{,}4072.e^{0{,}009.t}$$

• Caso 3- Modelo neo-clássico (β=0,7; η=0,9):

No modelo neo-clássico depara-se com uma dificuldade inicial: os valores adoptados para os parâmetros não permitem definir um equilíbrio interior; concretamente, sendo a taxa de depreciação do capital humano nula, por (6.18) constata-se que se está perante a solução de canto $\bar{u}$=1. Para que a condição de interioridade δ_h>0 não seja violada suponha-se agora que a taxa de depreciação do capital humano é idêntica à taxa de depreciação do capital físico, isto é, δ_h=0,01; altera-se assim o valor atribuído a este parâmetro, para que se restabeleça a possibilidade de obtenção de um equilíbrio interior. Neste caso, conclui-se, por (6.18), que $\bar{u}$=0,8, donde a alteração na taxa de depreciação do capital humano permite não só evitar soluções de canto, como também obter uma distribuição de capital humano pelos dois sectores que é idêntica à do modelo Uzawa-Lucas. A outra restrição resultante da definição de equilíbrio interior, no caso neo-clássico, é também verificada para o novo valor de δ_h: $\rho+(1-\eta).\delta_h-n>0 \Rightarrow$ 0,036>0. No modelo neo-clássico sabe-se, por definição, que a taxa de crescimento de equilíbrio, v, é nula, e como consequência o sistema (6.21) permite encontrar os valores de equilíbrio das variáveis consumo, capital físico e capital humano exclusivamente em função dos parâmetros definidos e portanto sem necessidade de atribuir um valor arbitrário a uma das variáveis; da resolução deste sistema resulta: $\bar{c}_n$=6,9763, $\bar{k}_n$=39,8647 e $\bar{h}_n$=5. Estes valores de equilíbrio não são passíveis de comparação com os do modelo de crescimento endógeno uma vez que, como se salientou, não resultam da imposição de um qualquer valor à variável capital humano.

As taxas de crescimento de equilíbrio das diferentes variáveis são, no caso neo-clássico, como já se fez notar, todas nulas, ou seja, as variáveis normalizadas coincidem com as variáveis originais e portanto os valores de equilíbrio destas são, ao contrário do que acontece nas situações de crescimento endógeno, quantidades constantes. Os valores de equilíbrio das restantes variáveis, que correspondem também a quantidades constantes, serão:

$$\bar{y}=7{,}9729;\ \bar{y}_h=0{,}05;\ \bar{p}=31{,}0059;\ \bar{q}=9{,}5232;\ \bar{q}_h=0{,}3071$$

8.2 *Dinâmica de Convergência*

Até ao momento caracterizou-se o estado da economia no equilíbrio; nesta caracterização, a presente secção não introduz praticamente nenhum resultado novo, uma vez que a simulação numérica efectuada vem apenas confirmar as ideias já avançadas em secções anteriores: as taxas de crescimento de equilíbrio são distintas consoante o modelo em causa, sendo que num modelo de crescimento de características neo-clássicas o estado de equilíbrio define uma situação que exclui a possibilidade de crescimento sustentável; os dois modelos de crescimento endógeno explorados distinguem-se, por seu lado, pela possibilidade ou impossibilidade de existência de taxas de crescimento de equilíbrio comuns aos principais agregados económicos. Em seguida descreve-se o processo de ajustamento que as várias variáveis realizam desde o estado inicial da economia até ao ponto que define o equilíbrio de longo-prazo; os três casos são novamente evidenciados de forma separada:

- Caso 1- Modelo Uzawa-Lucas:

A anteceder a análise dinâmica de ajustamento das variáveis, é necessário calcular a matriz dos vectores próprios associada aos valores próprios do jacobiano do sistema; no modelo Uzawa-Lucas, tendo presentes os valores definidos para os parâmetros e os valores de equilíbrio obtidos para as variáveis endógenas, de (7.2) resulta que:

$$J = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0{,}0602 & -0{,}0075 & 0{,}0481 \\ -0{,}1251 & 0{,}04 & 0{,}0269 & 0 \\ \hdashline -1 & 1{,}3994 & 0{,}04 & 1{,}1195 \\ 0 & -0{,}05 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tratando-se de um caso de crescimento endógeno, sabe-se que o determinante desta matriz é nulo, enquanto que o seu traço equivale ao dobro do factor de desconto total: $Tr(J)$=0,08. Relativamente aos valores próprios, estes serão determinados a partir de (7.13): λ_1=-0,1750; λ_2=0; λ_3=0,2150; λ_4=0,04. Confirma-se a existência de um valor próprio negativo, outro nulo e dois positivos, resultado comum a qualquer modelo de crescimento endógeno.

A cada um dos valores próprios encontrados está associado um vector próprio, cuja determinação passa pela resolução do sistema:

$$[J-\lambda_i.I].P_i=\overline{0} \tag{8.1}$$

com i=1,...,4, I uma matriz identidade, $\overline{0}$ um vector nulo e $P_i=[P_{1i}\ P_{2i}\ P_{3i}\ P_{4i}]^T$ o vector próprio associado ao valor próprio λ_i. A resolução do modelo por simulação numérica encontra justificação nos cálculos demasiados volumosos que tal resolução implicaria no caso de utilização directa dos parâmetros no cálculo da matriz dos vectores próprios. Resolvendo o sistema (8.1) resulta a seguinte matriz P:

$$P=\left[P_{ij}\right]=\left[\begin{array}{cc:cc} -0{,}0764 & -0{,}2078 & 0 & 0 \\ 0{,}0798 & 0 & -0{,}1518 & 0{,}6247 \\ \hdashline -0{,}9936 & -0{,}9664 & -0{,}9878 & 0 \\ 0{,}0228 & -0{,}1511 & 0{,}0353 & -0{,}7809 \end{array}\right]$$

, i=1,...,4; j=1,...,4. É com base na matriz P que se determina de que forma as variáveis endógenas evoluem conjuntamente para o equilíbrio de longo prazo.

Nas situações de crescimento endógeno, como referido na secção 7, a trajectória de equilíbrio é uni-dimensional e por conseguinte existe um único valor próprio negativo. Designando o vector próprio associado a esse valor próprio por $P_1=[P_{11}\ P_{21}\ P_{31}\ P_{41}]^T$, as inclinações das diversas trajectórias estáveis entre cada par de variáveis endógenas do modelo determinam-se, com base em P_1, da seguinte forma:

- Sendo a trajectória estável do modelo uni-dimensinal, é necessário supôr que uma das variáveis endógenas, ou, mais especificamente, uma das variáveis de estado, assume o estatuto de variável pré-determinada, isto é, de variável que se ajusta gradualmente ao longo do tempo; as restantes três variáveis poderão, em contrapartida, saltar descontinuamente, representando pois variáveis não pré-determinadas.

Supondo que a variável capital humano é a variável pré-determinada do modelo, as inclinações das trajectórias de equilíbrio entre esta e cada uma das restantes variáveis endógenas são dadas por:

$$\begin{bmatrix} i_{hc} \\ i_{hu} \\ i_{hk} \end{bmatrix}=\frac{1}{P_{41}}.\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

O elemento i_{hc} representa a inclinação da trajectória estável entre as variáveis capital humano e consumo, ou seja, designa qual o sentido e a amplitude da variação de c_n quando h_n varia uma unidade, isto no decorrer do processo de ajustamento para o equilíbrio. O mesmo tipo de interpretação é válido para as restantes duas inclinações. A partir destes três declives caracteriza-se todo o processo de convergência das variáveis endógenas para o equilíbrio de longo prazo; este instrumento de análise aplica-se não apenas ao caso Uzawa-Lucas mas também à outra situação de crescimento endógeno, já que nesta a trajectória de equilíbrio é também uni-dimensional (existe também um só valor próprio negativo).

- Em contrapartida, no caso neo-clássico o sub-espaço associado à trajectória estável é bi-dimensional, tomando dois valores próprios valores negativos; para esta situação é possível determinar a inclinação das trajectórias de equilíbrio entre cada variável de estado e cada variável de controle, ficando por determinar de que forma evoluem conjuntamente as duas variáveis de estado. Analiticamente, as referidas inclinações são dadas pela multiplicação da sub-matriz de P correspondente aos valores próprios negativos e às variáveis de controle com o inverso da sub-matriz respeitante aos mesmos valores próprios e às variáveis de estado, isto é:

$$\begin{bmatrix} i_{kc} & i_{hc} \\ i_{ku} & i_{hu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{31} & P_{32} \\ P_{41} & P_{42} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{P_{31}\cdot P_{42} - P_{41}\cdot P_{32}} \cdot \begin{bmatrix} P_{11}\cdot P_{42} - P_{12}\cdot P_{41} & P_{12}\cdot P_{31} - P_{11}\cdot P_{32} \\ P_{21}\cdot P_{42} - P_{22}\cdot P_{41} & P_{22}\cdot P_{31} - P_{32}\cdot P_{21} \end{bmatrix} \qquad (8.3)$$

O elemento i_{kc} da matriz calculada respeita à inclinação da trajectória estável ou de equilíbrio entre as variáveis capital físico e consumo; os restantes elementos definem o mesmo tipo de inclinações para as respectivas variáveis.

A diferença fundamental entre as duas classes de modelos reside, portanto, na dimensão do sub-espaço estável, dimensão esta que vai permitir encontrar trajectórias de equilíbrio de naturezas diferentes consoante o caso. Concretamente, a presença de um sub-espaço estável de dimensão unitária traduz-se na definição de uma única variável pré-determinada, existindo então três variáveis não pré-determinadas, isto é, três variáveis sujeitas à transposição de um qualquer ponto fora da trajectória sela ou de equilíbrio para esta trajectória, onde essas variáveis convergem em simultâneo com a variável pré-determinada para o equilíbrio de longo prazo; se, pelo contrário, o sub-espaço associado à trajectória estável é bi-dimensional, as variáveis de estado são ambas pré-determinadas, donde se possibilita apenas a identificação das trajectórias de convergência entre cada uma das variáveis de estado e cada uma das variáveis de controle.

Retome-se o modelo Uzawa-Lucas; de acordo com o atrás exposto, este modelo corresponde a uma situação em que se assume apenas uma variável pré-determinada: o capital humano. Será, deste modo, possível encontrar as inclinações das trajectórias de equilíbrio entre esta e cada uma das restantes variáveis endógenas, através de (8.2):

$$i_{hc}=-3,3525 \Rightarrow \dot{c}_n=-3,3525.\dot{h}_n$$

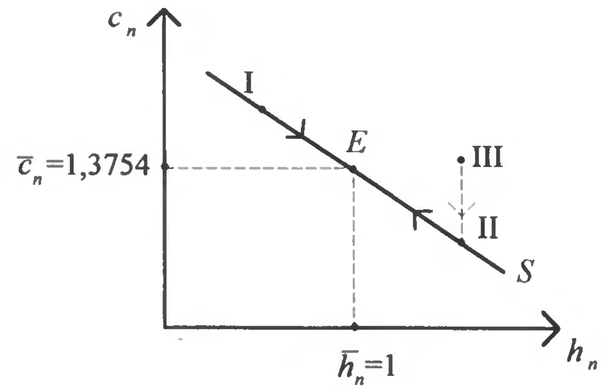
$$i_{hu}=3,5 \Rightarrow \dot{u}=3,5.\dot{h}_n$$

$$i_{hk}=-43,58 \Rightarrow \dot{k}_n=-43,58.\dot{h}_n$$

De acordo com os declives encontrados para as separatrizes estáveis, justifica-se o processo de ajustamento dinâmico das variáveis para o respectivo equilíbrio, do seguinte modo:

i) A inclinação da trajectória sela respeitante à relação entre as variáveis capital humano e consumo é negativa, o que significa que a acumulação de capital humano e o consumo variam, na convergência para o equilíbrio, de forma qualitativamente oposta:

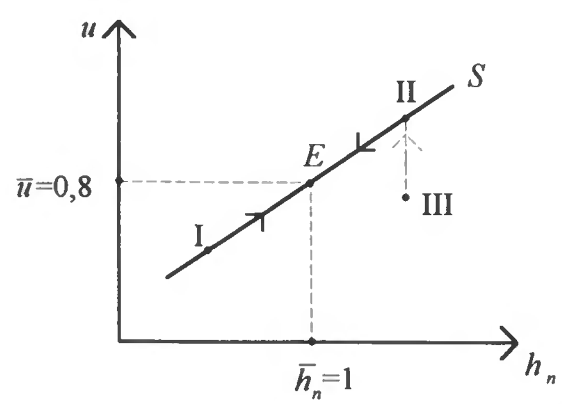
FIGURA 1 - Trajectória de equilíbrio entre as variáveis h_n e c_n, no modelo Uzawa-Lucas



O gráfico da figura 1 respeita à trajectória estável (*S*) entre as variáveis h_n e c_n; a recta *S* tem inclinação -3,3525 e o ponto *E* representa o ponto de equilíbrio para o qual a economia tende. Se o ponto de partida da economia é o ponto I, verificar-se-á um processo de investimento em capital humano que provoca um aumento no valor deste agregado, em simultâneo com um decréscimo do consumo, de forma que se converge para o equilíbrio *E*; em termos quantitativos, o acréscimo unitário do capital humano utilizado na economia é acompanhado por uma quebra do consumo em 3,3525 unidades. De forma análoga, para uma economia que parte do ponto II, constata-se um decréscimo na acumulação de capital humano (um processo de desinvestimento nesta forma de capital) que se sucede a par de um acréscimo no consumo; esta situação manter-se-á até o equilíbrio de longo prazo ser atingido. Por fim, o ponto III caracteriza uma situação em que a economia se encontra afastada da trajectória de equilíbrio; neste caso, a variável não pré-determinada (c_n) é transposta automaticamente para a trajectória de equilíbrio sem que se altere o valor de h_n; atingida a trajectória de equilíbrio para a variável c_n, a economia comporta-se como no caso II.

ii) A inclinação da separatriz estável entre capital humano e fracção de capital humano a utilizar no sector produtivo é positiva: a variação de h_n e de u é qualitativamente idêntica no ajustamento para o equilíbrio. Deste modo, um processo de acumulação de capital humano acontece em simultâneo com a deslocalização do capital humano do sector educativo para o sector produtivo, ou, de outra forma, quanto mais se investe nesta forma de capital maior será a proporção da mesma utilizada na produção directa de bens. Para o valor concreto obtido, um acréscimo de uma unidade na quantidade de capital humano disponível na economia significa que a fracção de capital humano utilizada no sector produtivo aumenta em 3,5 unidades. Esta trajectória de equilíbrio pode ser representada graficamente da mesma forma que no caso anterior:

FIGURA 2- Trajectória de equilíbrio entre as variáveis h_n e u, no modelo Uzawa-Lucas



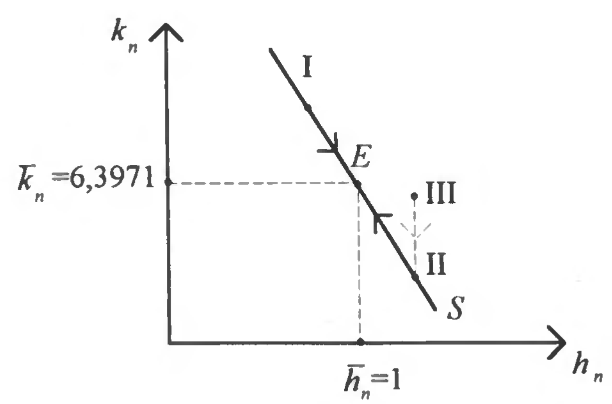
O ponto I refere-se agora a uma situação inicial em que quer h_n quer u se encontram abaixo do seu valor de equilíbrio, e portanto têm tendência a crescer em simultâneo até ser atingido o ponto E. No ponto II, h_n e u detêm valores superiores aos de equilíbrio tendo, então, tendência a reduzir-se em conjunto no processo de ajustamento. No ponto III, a variável u, variável não pré-determinada, converge para a trajectória de equilíbrio, onde ambas as variáveis decrescerão em simultâneo para o ponto E.

iii) Finalmente, a relação entre as variáveis representativas das duas formas de capital é dada pela inclinação negativa da respectiva trajectória estável, o que traduz uma situação em que, no ajustamento para o equilíbrio, capital humano e capital físico evoluem de forma qualitativamente inversa: quando se introduz mais capital físico no processo produtivo, a quantidade de capital humano utilizada reduz-se e vice-versa.

Quantificando: se a acumulação de capital humano sofre um acréscimo de uma unidade, a acumulação de capital físico reduz-se em 43,58 unidades.

Desenhando a trajectória de equilíbrio depreende-se que esta admite um processo de ajustamento em que a quantidade de capital humano aumenta se a quantidade de capital físico se reduzir (economia parte do ponto I) ou, alternativamente, um processo de convergência em que a quantidade de capital humano se reduz a par de um acréscimo na quantidade de capital físico (economia parte do ponto II); a variável k_n é a variável não pré-determinada, variável que tenderá para a trajectória de equilíbrio a partir de qualquer ponto (III) na sua proximidade:

FIGURA 3- Trajectória de equilíbrio entre as variáveis h_n e k_n, no modelo Uzawa-Lucas



De acordo com a análise realizada, a variável capital humano relaciona-se com as restantes variáveis do modelo, no ajustamento para o equilíbrio, da seguinte forma: se no estado inicial da economia, o valor do capital humano é inferior ao valor que assumirá no estado de equilíbrio [$h_n(0)<\bar{h}_n$] este agregado tenderá a sofrer um acréscimo no processo de convergência; conjuntamente com este acréscimo na variável h_n, de acordo com as trajectórias de equilíbrio calculadas, o capital físico sofrerá uma redução, o consumo reduzir-se-á também e o capital humano transferir-se-á do sector educativo para o sector produtivo. Se, pelo contrário, o valor inicial da variável capital humano fôr superior ao seu valor de equilíbrio [$h_n(0)>\bar{h}_n$], as trajectórias estáveis indicam que o processo de ajustamento se faz com um acréscimo do capital físico, um acréscimo do consumo e a transferência de capital humano do sector produtivo para o sector educativo; simbolicamente, a dinâmica de ajustamento das variáveis endógenas para o equilíbrio no modelo Uzawa-Lucas, resume-se a:

$$\begin{cases} h_n(0) < \bar{h}_n & \Rightarrow \quad \Delta^- c_n,\ \Delta^+ u,\ \Delta^- k_n,\ \Delta^+ h_n \\ h_n(0) > \bar{h}_n & \Rightarrow \quad \Delta^+ c_n,\ \Delta^- u,\ \Delta^+ k_n,\ \Delta^- h_n \end{cases}$$

A análise da dinâmica de ajustamento é extensível às variáveis y_n, y_{hn}, p_n, q_n e q_{hn}. Considere-se de novo a definição de produto do sector produtivo: $\bar{y}_n = A.\bar{k}_n^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h}_n)^{\beta}$; pretendendo-se saber qual o sentido de variação de y_n em função do sentido de variação das variáveis endógenas, a diferenciação em ordem ao tempo da função de produção apresentada permite esclarecer de que forma evolui esta variável:

$$\dot{y}_n = y_n \cdot \left[\alpha.\frac{\dot{k}_n}{k_n} + \beta.\left(\frac{\dot{u}}{u} + \frac{\dot{h}_n}{h_n} \right) \right] \tag{8.4}$$

Admita-se um acréscimo unitário da variável capital humano, $\dot{h}_n$=1. De acordo com as inclinações calculadas para as trajectórias estáveis, resulta que $\dot{k}_n$=-43,58 e $\dot{u}$=3,5; o sentido de variação do produto do sector produtivo no ajustamento para o equilíbrio depende do sinal de (8.4), o que significa que, dados os valores dos parâmetros α e β e as amplitudes de variação fixadas para as variáveis endógenas, o referido produto crescerá positivamente no período de ajustamento se as variáveis k_n, u e h_n forem tais que verifiquem: $(2{,}45.h_n+0{,}7.u).k_n>13{,}074.u.h_n$. O sentido de ajustamento para o equilíbrio da variável produto do sector produtivo é, assim, para um acréscimo unitário da variável capital humano, ambíguo, pois depende dos valores que em dado momento do tempo, anterior ao equilíbrio, as variáveis endógenas assumem.

Um mesmo tipo de estudo pode ser efectuado para as restantes variáveis; por exemplo, no que respeita à evolução do produto do sector educativo, no período que antecede o equilíbrio, tem-se que:

$$\dot{y}_{hn} = y_{hn} \cdot \left[\eta.\left(\frac{\dot{h}_n}{h_n} - \frac{\dot{u}}{1-u} \right) \right] \tag{8.5}$$

Para um acréscimo unitário em h_n, $\dot{h}_n=1$, verificou-se que $\dot{u}=3{,}5$, donde o efeito sobre o produto do sector educativo será também incerto para o referido acréscimo, uma vez que h_n e u vão variar em sentido contrário; para se verificar $\dot{y}_{hn}>0$, é necessário que as variáveis h_n e u detenham valores que obedeçam à condição: $1\text{-}u>3{,}5.h_n$. Para as variáveis p_n, q_n e q_{hn}, constata-se, pelos mesmos motivos, uma certa ambiguidade.

Descrita, para o caso Uzawa-Lucas, a evolução conjunta das quatro variáveis endógenas do modelo para o respectivo equilíbrio e constatada a impossibilidade de determinação precisa do sentido de variação de outros agregados relevantes, realiza-se, em seguida, uma análise semelhante para as outras duas situações do nosso modelo:

- Caso 2- Rendimentos decrescentes no sector produtivo:

De acordo com os valores adoptados para os parâmetros e os valores de equilíbrio correspondentes a cada uma das variáveis endógenas, a matriz jacobiana deste modelo surge, de forma quantificada, como:

$$J=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0{,}0524 & -0{,}0072 & 0{,}0414 \\ -0{,}0888 & 0{,}0395 & 0{,}0187 & 0 \\ \hline -1 & 1{,}2410 & 0{,}0395 & 0{,}9804 \\ 0 & -0{,}05 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O traço de J é $2\rho^{*}=0{,}079$ (inferior ao do modelo Uzawa-Lucas), enquanto que o determinante é nulo. Os valores próprios determinam-se de acordo com (7.13), sendo $\lambda_1=-0{,}1422$; $\lambda_2=0$; $\lambda_3=0{,}1817$; $\lambda_4=0{,}0395$. Como no modelo Uzawa-Lucas, este segundo caso de crescimento endógeno caracteriza-se pela existência de dois valores próprios positivos, um deles equivalente ao factor de desconto total, um valor próprio nulo e outro negativo; desta forma, o modo de análise do processo de dinâmica comparativa será idêntico ao anterior.

O cálculo da matriz dos vectores próprios faz-se da mesma forma que para o caso Uzawa-Lucas - através do sistema (8.1):

$$P=\left[\begin{array}{cc|cc} -0{,}0804 & -0{,}2035 & 0{,}0088 & 0 \\ 0{,}0633 & 0 & -0{,}136 & 0{,}6199 \\ \hline -0{,}9945 & -0{,}9644 & -0{,}99 & 0 \\ 0{,}0222 & -0{,}1687 & 0{,}0374 & -0{,}7847 \end{array}\right]$$

De acordo com (8.2) resultam as seguintes inclinações das trajectórias estáveis, para a presente situação:

$$i_{hc}=-3{,}6127 \Rightarrow \dot{c}_n=-3{,}6127.\dot{h}_n$$

$$i_{hu}=2{,}8446 \Rightarrow \dot{u}=2{,}8446.\dot{h}_n$$

$$i_{hk}=-44{,}6989 \Rightarrow \dot{k}_n=-44{,}6989.\dot{h}_n$$

Facilmente se depreende que a única diferença na evolução dinâmica das variáveis endógenas entre este caso e o modelo Uzawa-Lucas é de natureza quantitativa, uma vez que do ponto de vista qualitativo o processo de ajustamento é similar.

Sendo a dinâmica de ajustamento idêntica nos dois casos, a análise gráfica efectuada para o modelo Uzawa-Lucas encontra aqui um mesmo tipo de justificações. Quanto às variáveis relativas ao produto de cada sector, ao rácio de preços-sombra e ao produto conjunto dos dois sectores, novamente se depreende que o seu processo de ajustamento depende de quais os valores assumidos pelas variáveis endógenas em cada momento do tempo.

Resuma-se as conclusões sobre a dinâmica de ajustamento para o equilíbrio, em modelos de crescimento endógeno, na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 8.1- De acordo com os valores atribuídos aos parâmetros do modelo, este descreve, em ambas as possíveis situações de crescimento endógeno, um processo de ajustamento para o equilíbrio de longo prazo em que apenas a variável u acompanha o sentido de evolução do capital humano. As variáveis capital físico e consumo convergem para o equilíbrio evoluíndo em sentido contrário ao do agregado capital humano. Sobre a dinâmica de ajustamento de outras variáveis, como o produto de cada um dos sectores, não é possível retirar conclusões absolutas.

- Caso 3- Modelo neo-clássico:

No caso neo-clássico, que, recorde-se, utiliza um parâmetro diferente dos usados para os casos de crescimento endógeno (δ_h=0,01), a análise de dinâmica comparativa inicia-se, uma vez mais, com o cálculo da matriz jacobiana:

$$J=\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0{,}2442 & -0{,}0049 & 0{,}0391 \\ -0{,}0086 & 0{,}036 & 0{,}0015 & -0{,}001 \\ \hdashline -1 & 6{,}9763 & 0{,}035 & 1{,}1162 \\ 0 & -0{,}225 & 0 & -0{,}001 \end{array}\right]$$

O traço desta matriz corresponde novamente ao dobro de ρ^*: 0,07; o determinante é agora não nulo e terá de ser calculado de acordo com (7.10): $|J|$=1,26x10^{-6}, e os valores próprios determinam-se através de (7.15), obtendo-se: λ_1=-0,0998; λ_2=-0,0025; λ_3=0,1348; λ_4=0,0375; confirmam-se directamente os resultados da secção 7: dois valores próprios são positivos, enquanto os outros dois são negativos. Note-se ainda que $\lambda_1+\lambda_3=\lambda_2+\lambda_4=\rho^*$.

A obtenção da matriz dos vectores próprios implica a resolução, para cada um dos valores próprios, do sistema (8.1), resultando:

$$P=\left[\begin{array}{cc:cc} -0{,}0711 & -0{,}1625 & -0{,}0141 & -0{,}0761 \\ 0{,}0067 & -0{,}0007 & 0{,}0167 & -0{,}1680 \\ \hdashline -0{,}9973 & -0{,}9808 & 0{,}9994 & 0{,}0395 \\ 0{,}0151 & -0{,}1081 & -0{,}0277 & 0{,}9820 \end{array}\right]$$

Para a situação neo-clássica, na qual a trajectória de equilíbrio é bi-dimensional (dois valores próprios são negativos), ter-se-á de supôr a existência de duas variáveis pré-determinadas e em consequência as inclinações das trajectórias estáveis parciais entre cada par de variáveis são determinadas de forma diferente da que se utilizou no caso de crescimento endógeno. Da matriz (8.3) resultam as seguintes trajectórias sela:

$$i_{kc}=0{,}0828 \Rightarrow \dot{c}_n=0{,}0828.\dot{k}_n$$

$$i_{hc}=0{,}7521 \Rightarrow \dot{c}_n=0{,}7521.\dot{h}_n$$

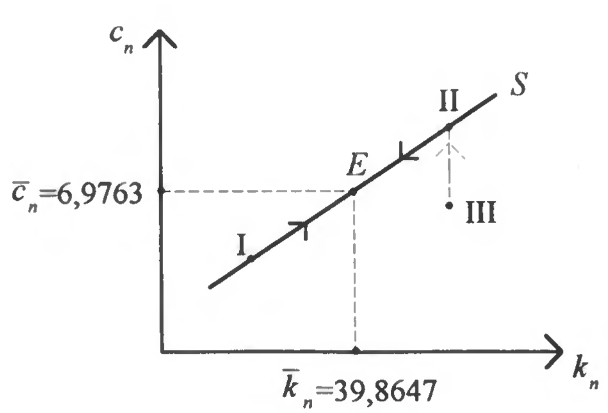
$$i_{ku}=-0{,}0058 \Rightarrow \dot{u}=-0{,}0058.\dot{k}_n$$

$$i_{hu}=0{,}059 \Rightarrow \dot{u}=0{,}059.\dot{h}_n$$

Apesar de se obter, nesta situação, um maior número de trajectórias de equilíbrio que nos casos anteriores, não é possível, para o modelo neo-clássico, fazer uma análise da dinâmica de ajustamento tão completa como nas situações de crescimento endógeno, uma vez que não é determinável o sentido de evolução conjunto das duas formas de capital, ou seja, das duas variáveis de estado, que são aqui também duas variáveis pré-determinadas. Descreva-se o processo de convergência neste modelo:

i) A inclinação da trajectória estável correspondente à relação entre as variáveis capital físico e consumo é positiva, o que significa que a acumulação de capital e o consumo variam na convergência para o equilíbrio de forma qualitativamente idêntica; graficamente, esta relação pode ser evidenciada utilizando o mesmo tipo de representação que no modelo Uzawa-Lucas; assim:

FIGURA 4- Trajectória de equilíbrio entre as variáveis k_n e c_n, no modelo neo-clássico



O ponto E é, de novo, o ponto de equilíbrio do modelo; o ponto I representa uma situação em que o ajustamento dinâmico da economia se efectua com acréscimos positivos simultâneos nos agregados consumo e capital físico, enquanto o ponto dois representa a situação inversa. No caso neo-clássico, o capital físico tem um papel idêntico ao do capital humano (é também uma variável pré-determinada), donde é possível descrever a situação III, em que o estado inicial da economia se encontra afastado da trajectória de equilíbrio, como uma situação em que é a variável c_n, variável não pré-determinada, que converge isoladamente para a trajectória de equilíbrio.

ii) A trajectória de equilíbrio entre as variáveis c_n e h_n detém, no modelo neo-clássico, inclinação também positiva; agora, ao contrário do que sucede no caso de crescimento endógeno, consumo e capital humano convergem no mesmo sentido para o estado de equilíbrio.

iii) A trajectória estável respeitante à relação entre as variáveis k_n e u tem inclinação negativa: com o acréscimo de capital físico utilizado na economia, o capital humano tende a transferir-se do sector produtivo para o sector educativo - a acumulação de capital físico varia em sentido contrário à proporção de capital humano destinada à produção de bens / capital físico.

iv) Por fim, a inclinação da trajectória estável entre h_n e u é positiva, o que significa que a par da acumulação de capital humano verifica-se uma deslocação desta forma de capital do sector educativo para o sector produtivo; este resultado é semelhante àquele que é evidenciado na figura 2, para o caso de crescimento endógeno.

Representações gráficas análogas à da figura 4 poderiam ser efectuadas para as três últimas trajectórias evidenciadas; em tais figuras salientar-se-ia o processo de ajustamento de cada par de variáveis para o equilíbrio ao longo da trajectória estável e o salto a que as variáveis não pré-determinadas, c_n e u, estariam sujeitas na convergência para as trajectórias de equilíbrio.

Como referido, a possibilidade de descrever integralmente o processo de ajustamento das variáveis endógenas é dificultada pelo facto das relações entre os elementos dos vectores próprios associados aos valores próprios negativos não permitirem evidenciar qual o comportamento conjunto das variáveis relativas às duas formas de capital. Assim, será apenas possível fazer a seguinte suposição:

- Se capital físico e capital humano evoluirem em sentidos opostos durante o processo de ajustamento é evidente o sentido de evolução da variável u, uma vez que esta sofre um acréscimo positivo com um aumento da dotação de capital humano e com uma redução da dotação de capital físico, sofrendo um decréscimo na situação contrária.

Neste caso, é ambíguo o sentido de variação de c_n, dependendo este da amplitude de variação da quantidade de cada uma das formas de capital.

- Se capital físico e capital humano evoluem de forma qualitativamente igual no ajustamento para o equilíbrio, o sentido de variação da variável consumo é inequívoco (se há um processo de investimento positivo nas duas formas de capital, o nível de consumo crescerá em consonância) e, em contrapartida, fica por esclarecer se a transferência de capital humano se faz do sector educativo para o produtivo ou se sucede o contrário.

De novo, no que respeita aos agregados y, y_h, p, q e q_h, a hipótese de determinar um sentido de variação evidente para estas variáveis não é muito credível, uma vez que tal sentido de convergência estará dependente da relação de ajustamento (desconhecida) entre as duas formas de capital.

Sintetizando:

PROPOSIÇÃO 8.2- Na situação neo-clássica, na qual não é possível estabelecer uma relação evidente entre a dinâmica de ajustamento das duas variáveis de estado, a simulação numérica realizada permite constatar que: a variável consumo evolui no mesmo sentido que qualquer uma das formas de capital; um acréscimo na quantidade de capital físico que a economia utiliza provoca a transferência de capital humano do sector produtivo para o sector educativo; e, por fim, um acréscimo do montante de capital humano traduz-se na deslocação desta forma de capital do sector educativo para o sector produtivo. Não é inequívoco de que forma outras variáveis, como o produto gerado em cada sector, convergem para o estado de equilíbrio.

9. PERTURBAÇÕES EXÓGENAS SOBRE O ESTADO DE EQUILÍBRIO - EFEITOS DE CURTO E LONGO PRAZO

Na secção 8 verificou-se de que forma a economia tende para o estado de equilíbrio em função da evolução das variáveis endógenas. Atingido o estado de equilíbrio, cessa o processo evolutivo da economia e, em consequência, as variáveis normalizadas adoptadas deixam de variar; sobre este estado de equilíbrio podem agora incidir perturbações que o vão modificar, sendo estas potenciais fontes exógenas de crescimento económico[21].

9.1 *Choques Tecnológicos*

Tendo em consideração as variáveis exógenas definidas, ir-se-á admitir apenas um caso exemplificativo: a possibilidade de choques ou perturbações no nível de tecnologia de cada um dos sectores (continua a supôr-se que a taxa de crescimento da população, a taxa de desconto e as taxas de depreciação de cada uma das formas de capital, funcionam como meras constantes). Os multiplicadores, de curto e longo prazo, susceptíveis de serem determinados para possíveis perturbações nas duas variáveis de tecnologia, são obtidos de acordo com as fórmulas descritas em apêndice; os resultados do cálculo dos multiplicadores resumem-se nos seguintes quadros:

[21] No modelo neo-clássico, em que o crescimento de equilíbrio é nulo, só a possibilidade de perturbações exógenas evita a estagnação da economia no longo prazo; na concepção de Solow, a ocorrência de choques tecnológicos é precisamente o argumento mais utilizado para justificar o crescimento económico de longo prazo, uma vez que este é excluido num equilíbrio caracterizado unicamente pelo comportamento das variáveis endógenas.

QUADRO 1- Multiplicadores de Longo Prazo:

	dA			dB		
	Caso 1	*Caso* 2	*Caso* 3	*Caso* 1	*Caso* 2	*Caso* 3
$\Delta\widetilde{c}_n(\infty)$	0,0448	0,0572	10	16,5859	14,9925	1395,3
$\Delta\widetilde{u}(\infty)$	0	0	0	−0,2186	−0,9458	0
$\Delta\widetilde{k}_n(\infty)$	0,2086	0,2712	56,9	−5,9533	−6,0859	7972,9
$\Delta\widetilde{h}_n(\infty)$	−1,3960	−1,6192	0	15,2722	16,7058	1000
$\Delta\widetilde{y}_n(\infty)$	−1,4440	−1,4715	3,4	15,2549	13,8532	1594,6
$\Delta\widetilde{y}_{hn}(\infty)$	−0,0140	−0,0170	0	0,1637	0,2227	9
$\Delta\widetilde{p}_n(\infty)$	11,1949	15,3753	13,2882	−124,8302	−150,9168	620,1177
$\Delta\widetilde{q}_n(\infty)$	14,9013	21,7164	109,4	−166,7977	−212,4491	6817,8
$\Delta\widetilde{q}_{hn}(\infty)$	−0,0937	−0,1236	0	1,0207	1,2437	55,2857

QUADRO 2- Multiplicadores de Curto Prazo:

	dA			dB		
	Caso 1	*Caso* 2	*Caso* 3	*Caso* 1	*Caso* 2	*Caso* 3
$\Delta\widetilde{c}_n(0)$	−4,6351	−5,7926	5,2530	67,7852	75,3461	−16,6384
$\Delta\widetilde{u}(0)$	4,8859	4,6061	0,3289	−53,6712	−48,4672	−12,9832
$\Delta\widetilde{k}_n(0)$	−60,6276	−72,1065	0	659,6069	740,6462	0
$\Delta\widetilde{h}_n(0)$	0	0	0	0	0	0
$\Delta\widetilde{y}_n(0)$	2,1374	0,3906	2,2949	−23,9256	−5,3591	−90,5749
$\Delta\widetilde{y}_{hn}(0)$	−0,2443	−0,2303	−0,0740	2,6836	2,4234	2,9212
$\Delta\widetilde{p}_n(0)$	−122,1	−129,9	−8,9244	1333,8	1348,1	352,2357
$\Delta\widetilde{q}_n(0)$	−186,5	−204,3	−71,2	2037	2118,9	2808,4
$\Delta\widetilde{q}_{hn}(0)$	0,1047	0,1535	0,0740	−1,1501	−1,6156	−2,9212

Como se observa, um choque permanente (que se perpetua no tempo) e não antecipado (que não é possível prever em períodos de tempo precedentes) sobre a tecnologia de cada um dos dois sectores da economia, provoca dois tipos de efeitos: um efeito de curto prazo sobre as variáveis não pré-determinadas, que se verifica no exacto momento em que a perturbação tem lugar, e um efeito de longo prazo que incide sobre todas as variáveis do modelo e que se traduz na formação de um novo estado de equilíbrio para o qual a economia tende assimptoticamente.

Em relação ao modelo Uzawa-Lucas (caso 1) verifica-se que um choque tecnológico que provoque um acréscimo de uma unidade na variável exógena tecnologia do sector produtivo (A) produz os seguintes efeitos sobre o estado de equilíbrio da economia: a variável consumo sofre um decréscimo imediato no momento do choque de 4,6351 unidades, porém, com o evoluir do tempo esta variável aproxima-se do seu nível de equilíbrio de modo que, no longo prazo, o efeito de um choque tecnológico sobre o consumo é positivo, aumentando este agregado em 0,0448 unidades. Este efeito de sub-consumo de curto prazo é justificável através da ideia de que se as condições de produção sofrem um aperfeiçoamento imediato isso significa que se deverá poupar no curto prazo (em detrimento do consumo) com o objectivo de aumentar a capacidade produtiva e assim aumentar as possibilidades de consumo no futuro. Quanto à variável u, a inovação tecnológica produz um efeito imediato de curto prazo positivo sobre a fracção de capital humano a utilizar no sector produtivo - mais uma vez, melhorando as condições de produção no sector produtivo, os recursos da economia serão canalizados em direcção a este sector; no entanto, no longo prazo, a distribuição de capital humano entre os dois sectores não sofre qualquer alteração face ao estado de equilíbrio. O capital fisico, à semelhança do consumo, sofre um decréscimo acentuado no curto prazo em presença de um choque tecnológico no sector produtivo, enquanto que no longo prazo, o nível de equilíbrio deste factor de produção será ligeiramente superior ao nível de equilíbrio inicial. Finalmente, no que respeita à variável capital humano, esta não estará sujeita a qualquer salto inicial, uma vez que se trata de uma variável pré-determinada, enquanto que no longo prazo a quantidade desta forma de capital utilizada na economia tende a decrescer. Para outras variáveis alguns resultados são dignos de nota: no curto prazo, o choque tecnológico provoca um acréscimo do produto do sector produtivo que é contrariado por um decréscimo do produto do sector educativo e em consequência, dada a variação negativa sobre o rácio dos preços, obtém-se o algo curioso resultado de que o produto conjunto dos dois sectores aumenta quando avaliado ao preço do capital humano e diminui quando avaliado ao preço do capital físico. No longo prazo, a inovação tecnológica resulta num equilíbrio do produto de cada um dos sectores a um nível inferior ao que precedeu a perturbação mas, graças a uma variação positiva do rácio dos preços, o produto conjunto dos dois sectores, quando avaliado ao preço do capital físico, aumenta.

Alternativamente a um processo de inovação tecnológica no sector produtor de bens, é possível identificar como um choque tecnológico no sector educativo (na variável B) provoca a alteração das condições de equilíbrio. Uma perturbação positiva em B vai implicar um acréscimo do consumo de grande amplitude no curto prazo, que se manterá no longo prazo apesar de menos acentuado; a fracção de capital humano a utilizar no sector produtivo sofre, por seu lado, uma alteração negativa no curto prazo que se tenderá a manter no longo prazo embora com menor intensidade e, portanto, o aperfeiçoamento da tecnologia do sector educativo dá lugar a uma transferência de capital humano do sector produtivo para o sector educativo; no que respeita ao capital físico, este tende a sofrer um acréscimo acentuado no curto prazo, enquanto que no longo prazo se observa um valor de equilíbrio para o capital físico inferior à situação pré-choque; por fim, quanto ao capital humano, sabe-se que esta variável não está sujeita a qualquer variação inicial, e portanto o único efeito será de longo prazo, o qual é positivo nesta situação: a inovação tecnológica no sector educativo provoca um maior investimento em capital humano. Para as restantes variáveis depreende-se que, no curto prazo, o produto do sector educativo aumenta, em contraste com a redução do produto do outro sector; porém, como o acréscimo do preço relativo do capital físico por unidades de capital humano é claramente positivo, acaba por se constatar um acréscimo do produto total quando avaliado em unidades de capital físico, e um decréscimo quando avaliado ao preço inverso. Relativamente ao longo prazo, o novo estado de equilíbrio caracteriza-se por um acréscimo do produto de ambos os sectores, acréscimo este que só encontra reflexo no produto total quando este é avaliado em unidades de capital humano; no caso contrário, a redução verificada no rácio dos preços-sombra reflecte um efeito negativo sobre o produto total, tudo isto, recorde-se, em função de um choque tecnológico positivo no sector produtor de capital humano.

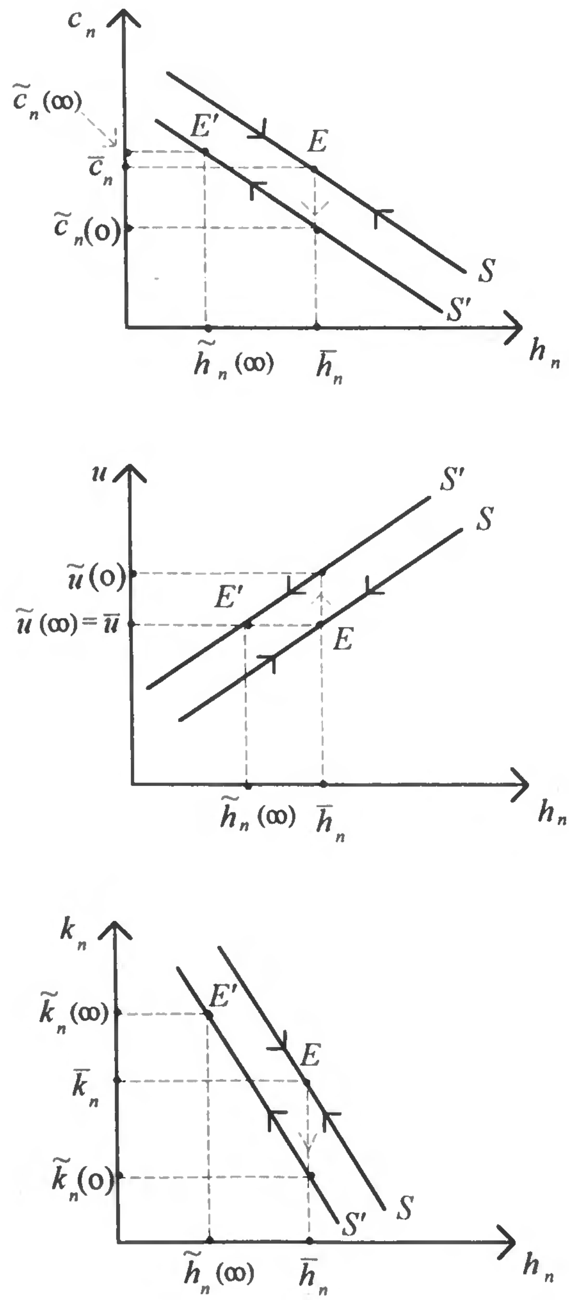
Para a situação de crescimento endógeno e rendimentos decrescentes no sector produtivo (caso 2), os quadros 1 e 2 permitem verificar, como seria de supôr uma vez que o tipo de dinâmica subjacente é idêntico, que não existem diferenças de fundo em relação ao modelo Uzawa-Lucas: quer um choque tecnológico no sector produtivo, em A, quer um choque tecnológico no sector educativo, em B, provocam efeitos qualitativamente semelhantes em ambos os casos; existem apenas diferenças de quantidade que resultam de um produto marginal inferior no sector produtivo no caso 2.

O caso 3 (modelo neo-clássico) apresenta diferenças importantes relativamente aos restantes dois. Se a perturbação respeita à variável A, no curto prazo o consumo aumenta, tornando-se este aumento progressivamente mais acentuado até ser atingida a situação de longo prazo; quanto à variável u, esta tem um comportamento similar perante o choque tecnológico ao que acontecia nas situações de crescimento endógeno: o capital humano tende a deslocar-se do sector educativo para o sector produtivo no momento imediatamente após o choque, porém não existe qualquer alteração no longo prazo face à situação inicial. Na situação neo-clássica, as variáveis correspondentes às duas formas de capital são ambas variáveis pré-determinadas, tendo a perturbação, em consequência, efeito nulo, no curto prazo, sobre estas; no longo prazo, o montante de capital físico tende a aumentar e o capital humano não sofre qualquer alteração. O produto do sector produtivo está sujeito a um salto inicial positivo, para um choque em A, aumentando o nível deste produto ainda mais no longo prazo; o produto do sector educativo decresce no curto prazo em virtude da transferência de capital humano do sector produtivo para o sector educativo, enquanto que no longo prazo não sofre qualquer variação, dado que as variáveis u e h_n também não variam. Merece ainda referência, no quadro 1, a não variação no longo prazo do produto total quando avaliado ao preço do capital humano; as outras variáveis, p_n e q_n, têm comportamentos idênticos, no curto e no longo prazo, ao que sucedia nas situações de crescimento endógeno. Finalmente, para um choque tecnológico no sector educativo, o modelo neo-clássico apresenta também algumas diferenças face às situações de crescimento endógeno: o consumo decresce inicialmente para crescer significativamente no longo prazo; a fracção de capital humano utilizada no sector produtivo está sujeita a um salto inicial negativo, mas no longo prazo, ao contrário do que se observa nos casos de crescimento endógeno, não sofre qualquer alteração; as duas formas de capital não variam no curto prazo, pelas razões já anteriormente avançadas, crescendo em conjunto na situação de longo prazo. No que respeita às restantes variáveis, estas apresentam, no curto e no longo prazo, resultados regra geral semelhantes aos das situações de crescimento endógeno.

Uma análise gráfica dos efeitos das perturbações anteriores permite uma compreensão mais absoluta da dinâmica pós-estado de equilíbrio; esta análise tem como referência as figuras apresentadas na secção 8, com base nas quais é possivel ilustrar, por exemplo, o efeito do choque no sector produtivo. Dado que os dois casos de crescimento endógeno são qualitativamente semelhantes, esta análise gráfica será executada pondo em contraste, e sem quantificar, as situações de crescimento endógeno e crescimento neo-clássico:

Seja um choque positivo na variável A; para a situação de crescimento endógeno, tal choque provoca, no curto prazo, a quebra do consumo e do capital físico e o crescimento de u, isto tudo em referência à variável pré-determinada h_n que não se altera; no longo prazo, há um acréscimo do consumo e do capital físico, um decréscimo de capital humano e uma manutenção da variável u ao nível de equilíbrio. Todas estas modificações traduzem-se graficamente em novas trajectórias estáveis para as quais as variáveis não pré-determinadas saltam imediatamente após a perturbação, convergindo então cada uma destas variáveis, conjuntamente com a variável h_n, ao longo da trajectória estável até ao novo equilíbrio; recordando as trajectórias de equilíbrio das figuras 1, 2 e 3:

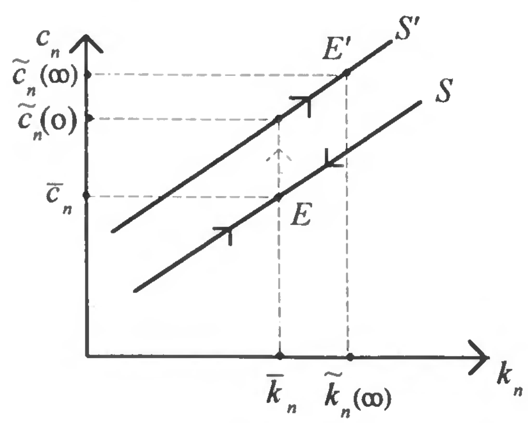
FIGURA 5- Efeito de um choque tecnológico sobre o equilíbrio das variáveis endógenas num modelo de crescimento endógeno



Verifica-se, portanto, que a perturbação na variável A se traduz numa deslocação paralela das trajectórias estáveis S para as novas trajectórias S'; no momento inicial, as variáveis não pré-determinadas saltam imediatamente para a nova trajectória de equilíbrio, sem que se constate qualquer variação na variável pré-determinada, isto é, $\overline{h}_n = \widetilde{h}_n(0)$; atingida a nova trajectória de equilíbrio, as variáveis endógenas poderão, como antes, convergir em simultâneo para o novo equilíbrio (E') ao longo da referida trajectória sela, equilíbrio este dado por $\left\{\widetilde{c}_n(\infty),\ \widetilde{u}(\infty),\ \widetilde{k}_n(\infty),\ \widetilde{h}_n(\infty)\right\}$ onde $\widetilde{u}(\infty) = \overline{u}$, uma vez que a variável u não é perturbada no longo prazo pelo choque tecnológico.

Na situação neo-clássica, a secção 8 foi clara ao indicar que as trajectórias de equilíbrio são encontradas através de um processo de natureza distinta da dos modelos de crescimento endógeno; a figura 4 representa uma dessas trajectórias. Considerando novamente apenas esta trajectória, a título exemplificativo, de acordo com os quadros 1 e 2, o choque positivo na variável tecnológica A produz o seguinte efeito:

FIGURA 6- Efeito de um choque tecnológico sobre o equilíbrio das variáveis c_n e k_n num modelo de crescimento neo-clássico



Agora, k_n é também uma variável não pré-determinada (não varia no curto prazo); a variável c_n, por seu lado, vai variar, provocando uma deslocação paralela da trajectória sela para S', onde a partir do ponto $\left(\overline{k}_n, \widetilde{c}_n(0)\right)$ se inicia um novo ajustamento, ao longo da nova trajectória até ser alcançado o ponto de equilíbrio E', onde, quer o consumo quer o capital físico, assumem valores superiores aos do equilíbrio inicial.

9.2 *Trajectórias de Evolução Temporal*

Até ao momento, o estudo de dinâmica comparativa, em qualquer das suas fases (ajustamento para o equilíbrio ou perturbações sobre o equilíbrio) centrou-se no comportamento das variáveis normalizadas e não sobre o comportamento das variáveis originais, que são aquelas que das quais verdadeiramente interessa conhecer o comportamento dinâmico. Na situação neo-clássica, como já foi sobejamente referido, é indiferente considerar um ou o outro conjunto de variáveis, uma vez que estes se identificam; no caso de crescimento endógeno o mesmo já não acontece, uma vez que as variáveis originais crescem no estado de equilíbrio. Para perceber qual o tipo de evolução temporal que as variáveis originais efectivamente sofrem no caso de crescimento endógeno, representa-se, de seguida, a trajectória ao longo do tempo de cada uma das variáveis endógenas, numa situação que inclui os seguintes momentos:

M1- Ajustamento para o equilíbrio: supõe-se que a variável capital humano evolui de forma crescente para o equilíbrio, sendo o sentido de evolução das restantes variáveis dado de acordo com as trajectórias determinadas na secção 8;

M2- Atingido o equilíbrio, a economia mantém-se neste estado durante um certo período de tempo;

M3- O estado de equilíbrio é perturbado por um choque não antecipado na variável A:

FIGURA 7- Trajectórias de evolução temporal das variáveis originais no modelo de crescimento endógeno

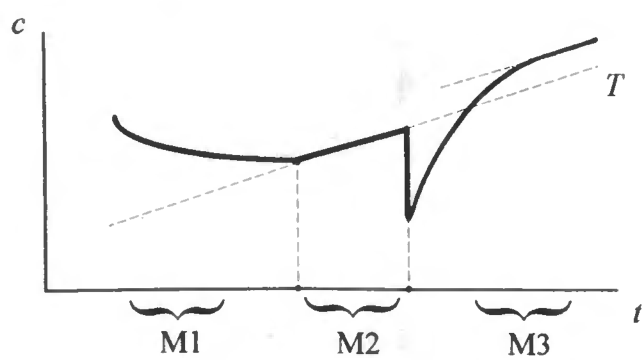
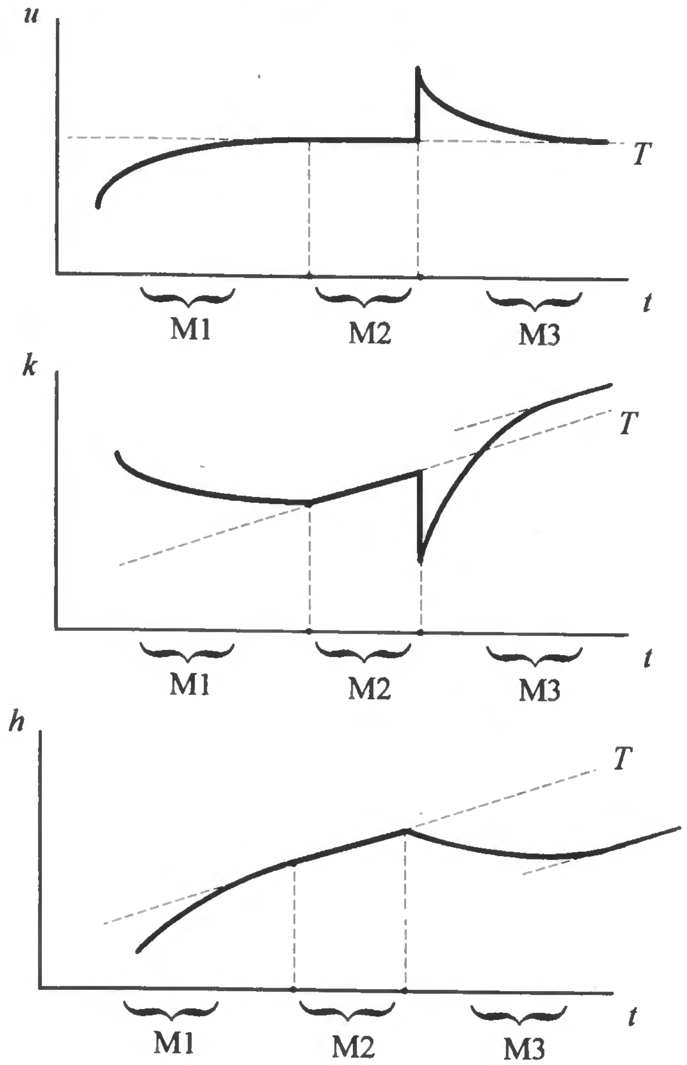


FIGURA 7 (cont.)



Nos 4 gráficos da figura 7, a recta a tracejado, *T*, representa a forma como evoluiriam as variáveis se estas se encontrassem sempre no equilíbrio de longo prazo; no período de ajustamento (M1), as variáveis convergem para essa tendência de longo prazo, de acordo com o tipo de ajustamento caracterizado na secção 8; no estado de equilíbrio (M2), as variáveis c, k e h crescem a taxas constantes sendo apenas a variável u constante; uma perturbação exógena resultante, neste caso, de um dado processo de inovação tecnológica (M3) provoca o abandono dessa trajectória de equilíbrio, evidenciando-se que o capital humano é a única variável que não está sujeita a qualquer salto inicial; no longo prazo, as variáveis c, k e h tendem para uma trajectória paralela a *T*, ou seja, continuarão a crescer à mesma taxa constante a que cresciam antes da perturbação.

Para a situação neo-clássica, trajectórias análogas podem ser construídas, sendo necessário para tal tomar uma hipótese sobre a forma de evolução conjunta das variáveis *k* e *h*; supondo que estas variam em sentidos opostos no ajustamento para o equilíbrio (*h* cresce, *k* decresce) a variável *u* cresce, ficando por determinar o sentido de variação de *c*; procedendo à representação gráfica:

FIGURA 8- Trajectórias de evolução temporal das variáveis originais no modelo neo-clássico

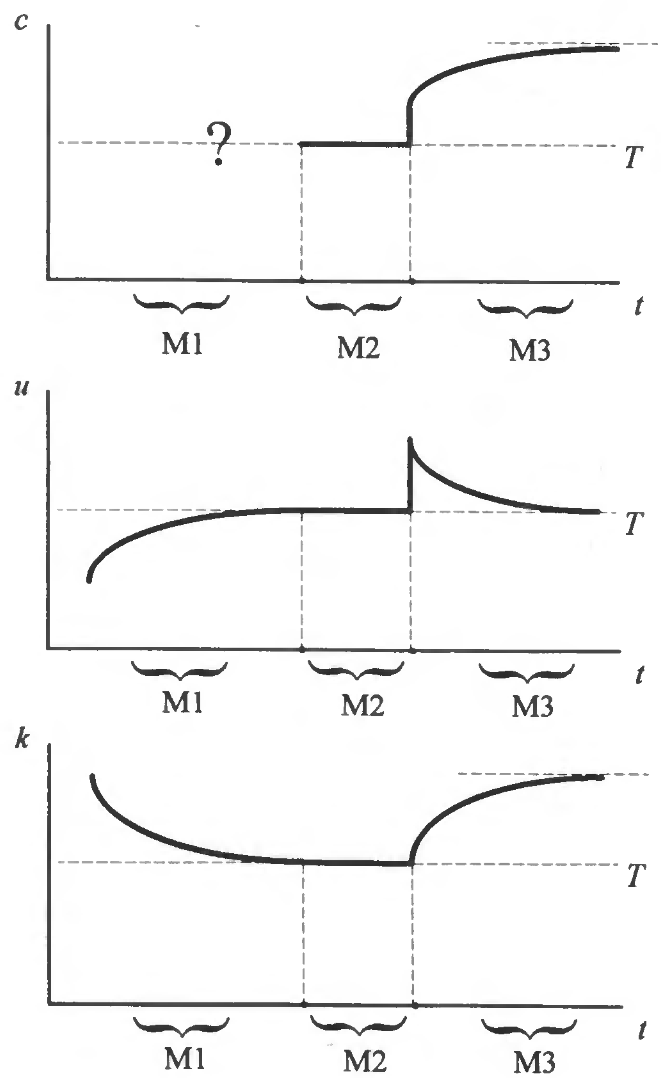
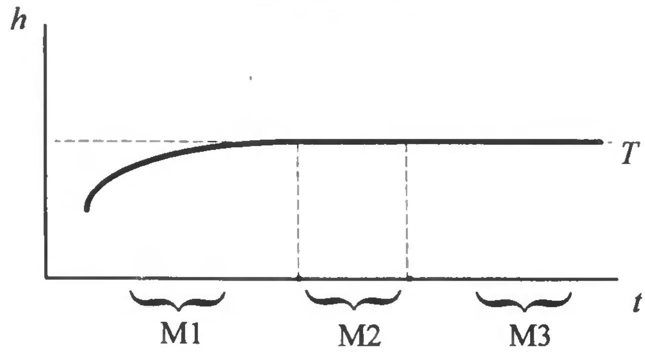


FIGURA 8 (cont.)



Como se verifica, a tendência de evolução no equilíbrio, representada pela inclinação da recta a tracejado, T, é nula para todas as variáveis neo-clássicas, em claro contraste com a tendência de crescimento existente na outra classe de modelos. Saliente-se também os diferentes efeitos que um choque tecnológico provoca nos dois diferentes casos, nomeadamente ao ter presente que agora a variável relativa ao capital físico não está sujeita a salto inicial após perturbação; no longo prazo, o choque tecnológico faz crescer a quantidade de capital físico utilizada na produção e é este efeito que possibilita falar em crescimento exógeno de longo prazo na teoria de crescimento neo-clássica.

10. CONCLUSÕES

Com o objectivo de comparar equilíbrios de longo prazo de crescimento nulo / crescimento positivo, foi construído um modelo de optimização inter-temporal do consumo para um agente representativo que enfrenta duas restrições de recursos, as quais descrevem o processo de produção em cada um dos dois sectores que se supõe existirem na economia. Tendo sempre subjacente um ambiente de concorrência perfeita, o modelo apresentado assume um carácter mais geral que a generalidade dos modelos de dois sectores desenvolvidos na literatura, dado que estes centram a sua análise no paradigma de crescimento endógeno; em contrapartida, o modelo aqui explorado permite separar três casos, dois referentes a situações de crescimento endógeno e um outro que define um equilíbrio de crescimento nulo que pode ser identificado com a teoria de crescimento neo-clássica.

Do modo como o modelo Uzawa-Lucas é formalizado na secção 3 e do modo como é modificado na secção 4 de forma a possibilitar as alternativas de rendimentos decrescentes em cada um dos sectores, torna-se importante reconhecer que, neste contexto, as situações de crescimento endógeno são, em muito maior grau, compatíveis com a evidência empírica do que o é a situação neo-clássica. De facto, as duas situações de crescimento endógeno admitem que o factor trabalho simples (L) não existe, sendo incorporado no factor capital humano, o qual é utilizado como factor produtivo nos dois sectores da economia ou, em alternativa, se o factor L é, efectivamente, dissociável do factor capital humano, ele será utilizado apenas na produção de bens e não no sector educativo; a situação inversa, que define um modelo de cariz neo-clássico, impõe que o capital humano seja utilizado na produção de ambos os sectores enquanto que o trabalho não qualificado se destina exclusivamente ao sector educativo - obviamente, esta hipótese é muito menos credível que as que estão na base dos modelos de crescimento endógeno, no sentido em que se há um sector que utiliza predominantemente mão-de-obra não qualificada é o sector produtivo e não, seguramente, o sector educativo, o qual faz depender a sua actividade essencialmente de trabalho qualificado; por esta razão, os dois casos de crescimento endógeno aparentam assentar num suporte teórico mais válido que o caso de crescimento neo-clássico. De qualquer forma, em termos da análise realizada, as três possibilidades são encaradas ao mesmo nível e sujeitas a um estudo idêntico.

O estudo de dinâmica comparativa esboçado toma três momentos como essenciais: o ajustamento das variáveis endógenas para o equilíbrio (secção 8), a caracterização do estado de equilíbrio para as variáveis endógenas (secções 5, 6 e 8), e a possibilidade de perturbações exógenas sobre o equilíbrio (secção 9). Existem diferenças importantes nestes três momentos entre as duas classes de modelos - as diferenças evidenciadas no processo de ajustamento e nos choques exógenos resultam essencialmente da diferente dimensão da trajectória estável. A distinção fundamental é, no entanto, a que é reflectida pelo próprio estado de equilíbrio, ou seja, a hipótese de crescimento no equilíbrio: ao modelo neo-clássico corresponde um estado de equilíbrio sem crescimento sustentável (a única possibilidade de crescimento consiste na ocorrência de choques exógenos - o crescimento neo-clássico de longo prazo é exclusivamente um crescimento exógeno, que resulta de causas exteriores ao sistema económico), enquanto que aos modelos de crescimento endógeno é concebível que se associe crescimento sustentável (crescimento gerado endogenamente na economia), a uma taxa constante.

No que respeita à metodologia utilizada no estudo do modelo, é importante notar que a análise efectuada peca pelo pouco grau de generalidade nas conclusões retiradas ao nível do processo de convergência para o equilíbrio e ao nível da ocorrência de perturbações exógenas, uma vez que os resultados são obtidos através de simulação numérica; em consequência, os referidos resultados devem ser interpretados como válidos para a economia concreta (próxima da evidência empírica) que se considerou, de modo que a extrapolação para resultados mais genéricos deve ser feita com algum cuidado. É também conveniente referir que o estudo de dinâmica comparativa local apresentado não tem a pretensão de ser um estudo absoluto; fica por determinar, por exemplo, o sentido de evolução conjunto das duas variáveis de estado, no caso neo-clássico, o qual poderia ser encontrado através de um estudo de dinâmica mais exaustivo - este estudo, porém, vai além dos objectivos aqui propostos, que consistem na utilização da matriz dos vectores próprios para encontrar relações de evolução conjunta de cada par de variáveis do modelo para o equilíbrio. Saliente-se ainda que o estudo de dinâmica comparativa realizado baseia-se, fundamentalmente, em Brito (1993*a*), (1993*b*) e (1995). Um outro aspecto respeita à normalização do modelo de modo a tornar possível a análise de dinâmica local - a teoria do crescimento endógeno teve, a princípio, alguma dificuldade em impôr-se como alternativa à teoria neo-clássica por não permitir de forma igualmente directa e clara entender o processo de ajustamento das variáveis endógenas para o estado de equilíbrio; a possibilidade de normalizar o modelo de crescimento endógeno, eliminando a tendência de equilíbrio crescente de longo prazo, coloca esta segunda classe de modelos a um mesmo nível de análise do modelo neo-clássico, tornando-se praticável confrontar directamente os dois tipos de modelos.

O debate crescimento neo-clássico / crescimento endógeno aparenta hoje ser substancialmente favorável à teoria do crescimento endógeno - a forma como esta justifica taxas de crescimento do produto não decrescentes com base exclusivamente no funcionamento do sistema económico traduz-se numa consideravelmente superior adequação às experiências reais de crescimento e por esta razão tende a sobrepôr-se de forma decisiva à teoria neo-clássica. Esta ideia não é, contudo, indiscutível; o próprio Robert Solow faz a defesa da sua teoria face ao crescimento endógeno - Solow (1994) admite que a teoria neo-clássica deixa por explicar o mais importante factor de crescimento - o progresso tecnológico - mas esta falha é deliberada uma vez que, no seu entender, o agregado tecnologia não é explicável exclusivamente por factores económicos; assim, apesar de parte do processo de inovação tecnológica ser endógeno à economia, este processo não pode de forma alguma ser parte integrante de um modelo agregado de crescimento. Solow reconhece mérito à teoria do crescimento endógeno quando esta procura modelizar a componente endógena do progresso tecnológico, embora saliente as dificuldades desta análise, dada a componente exógena que a produção de tecnologia e de conhecimento sem dúvida envolve. A teoria do crescimento endógeno seria, assim, uma teoria complementar da modelização neo-clássica, pois destinar-se-ia a procurar justificações para aquilo que Solow não conseguiu incluir numa explicação endógena do crescimento; apesar de tudo, esta teoria deveria ser entendida como uma teoria de inovação ou progresso tecnológico e não como uma verdadeira teoria de crescimento económico.

No que concerne à questão do capital enquanto conceito amplo e ao problema da forma dos rendimentos marginais do capital (vertente explorada na dissertação), Solow é extremamente crítico, argumentando que as hipóteses desenvolvidas pela teoria do crescimento endógeno nada acrescentam ao seu paradigma. Concretamente, Solow desmistifica a necessidade de admitir um ambiente de concorrência imperfeita (este só seria necessário para justificar a existência de rendimentos do capital constantes ou crescentes, os quais não fazem sentido na teoria neo-clássica), considera desnecessária a adopção de um cenário de agente representativo que optimiza inter-temporalmente num horizonte infinito (dado que deste cenário só advêm complicações adicionais que dificultam a percepção da questão verdadeiramente importante que é a da acumulação de capital) e, finalmente, insurge-se contra a possibilidade dos rendimentos marginais do capital serem constantes; esta hipótese seria demasiado restritiva, pois não existe nenhum mecanismo na economia que garanta que tais rendimentos tenham de ser exactamente constantes - na realidade, a suposição de que o parâmetro de produtividade associado ao factor capital é precisamente igual à unidade é tão válida como a imposição de qualquer outro valor a este parâmetro, tratando-se pois de uma alternativa entre múltiplas outras, de modo que o facto de ela se verificar é algo de meramente acidental, não podendo servir de fundamento a uma teoria que tem pretensões de explicar o processo de crescimento económico. Solow conclui que a teoria de crescimento endógeno, nomeadamente no que respeita a esta segunda vertente, é muito pouco robusta e deve ser entendida como descrevendo um caso limite do crescimento de tipo neo-clássico.

Nestas circunstâncias, a evolução natural da teoria do crescimento não passa, de forma linear, pelo abandono da teoria neo-clássica em favor da teoria do crescimento endógeno; o debate entre as duas teorias continua em aberto, uma vez que ambas fornecem, apesar das críticas a que estão sujeitas, explicações credíveis para o modo como os principais agregados da economia evoluem no tempo.

- APÊNDICES -

APÊNDICE 1 - NORMALIZAÇÃO DAS RESTRIÇÕES DE RECURSOS

A restrição de recursos relativa ao capital fisico é:

$$\dot{k} = A.k^{\alpha}.(u.h)^{\beta} - c - (n + \delta_k).k \qquad \text{(A1.1)}$$

Dadas as relações entre k, h e c, por um lado, e k_n, h_n e c_n por outro, evidenciadas pelas expressões (5.35) a (5.37), a restrição (A1.1) será equivalente a:

$$\dot{\left(k_n.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t}\right)} = A.\left(k_n.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t}\right)^{\alpha}.\left(u.h_n.e^{v.t}\right)^{\beta} - c_n.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t} - (n+\delta_k).k_n.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t} \quad \text{(A1.2)}$$

O primeiro membro da equação diferencial (A1.2) poderá ser desenvolvido do seguinte modo:

$$\dot{\left(k_n.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t}\right)} = \dot{k}_n.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t} + k_n.\frac{\beta}{1-\alpha}.v.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t} = \left(\dot{k}_n + k_n.\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t} \quad \text{(A1.3)}$$

Quanto à primeira parcela do segundo membro, constata-se através de simples substituições algébricas que:

$$A.\left(k_n.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t}\right)^{\alpha}.\left(u.h_n.e^{v.t}\right)^{\beta} = A.k_n^{\alpha}.(u.h_n)^{\beta}.e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t} \quad \text{(A1.4)}$$

e portanto, substituíndo os resultados de (A1.3) e (A1.4) em (A1.2) e eliminando o elemento comum a todos os termos, $e^{\frac{\beta}{1-\alpha}.v.t}$, obtém-se:

$$\dot{k}_n + k_n.\frac{\beta}{1-\alpha}.v = A.k_n^{\alpha}.(u.h_n)^{\beta} - c_n - (n+\delta_k).k_n \quad \text{(A1.5)}$$

donde surge directamente a nova restrição de recursos referente ao factor capital físico:

$$\dot{k}_n = A.k_n^{\alpha}.(u.h_n)^{\beta} - c_n - \left(n+\delta_k+\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).k_n \quad \text{(5.41)}$$

Relativamente à segunda restrição de recursos, respeitante ao capital humano, esta assume a forma:

$$\dot{h} = B.\left[(1-u).h\right]^{\eta} - \delta_h.h \quad \text{(A1.6)}$$

ou, de acordo com (5.35):

$$\dot{\left(h_n.e^{v.t}\right)} = B.\left[(1-u).h_n.e^{v.t}\right]^{\eta} - \delta_h.h_n.e^{v.t} \quad \text{(A1.7)}$$

A diferenciação implícita no primeiro membro de (A1.7) significa que:

$$\dot{\left(h_n.e^{v.t}\right)} = \dot{h}_n.e^{v.t} + h_n.v.e^{v.t} \quad \text{(A1.8)}$$

Procedendo à substituição do resultado encontrado em (A1.8) na restrição (A1.7) e dividindo ambos os membros desta equação pelo termo $e^{v.t}$:

$$\dot{h}_n + h_n.v = B.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta}.\frac{e^{\eta.v.t}}{e^{v.t}} - \delta_h.h_n \tag{A1.9}$$

que, reordenando, equivale a:

$$\dot{h}_n = B.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta}.e^{(\eta-1).v.t} - (\delta_h + v).h_n \tag{A1.10}$$

Como, de acordo com as hipóteses subjacentes ao modelo, verificar-se-á sempre uma das condições η=1 ou v=0, então o termo $e^{(\eta-1).v.t}$ é, em quaisquer circunstâncias, igual à unidade, e portanto a nova restrição do capital humano, em variáveis normalizadas, será dada por:

$$\dot{h}_n = B.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta} - (\delta_h + v).h_n \tag{5.42}$$

APÊNDICE 2- DETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS RELATIVAS AO COMPORTAMENTO DAS VARIÁVEIS DE CONTROLE

Para obter um sistema de quatro equações diferenciais, duas respeitantes às variáveis de estado e outras duas às variáveis de controle, as equações (6.4) e (6.5) têm de ser alteradas:

- Diferenciando (6.1) em ordem ao tempo:

$$-\theta.c_n^{-\theta-1}.\dot{c}_n = \dot{p}_k \tag{A2.1}$$

Através da substituição de (6.1) e (A2.1) em (6.3), determina-se a equação diferencial correspondente à variável de controle c_n:

$$\dot{c}_n = \frac{1}{\theta}.c_n.\left[A.\alpha.k_n^{\alpha-1}.(u.h_n)^{\beta} - \left(\rho + \delta_k + \theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right)\right] \tag{6.8}$$

- A equação diferencial relativa à variável de controle u é encontrada da mesma forma, mas envolve cálculos mais volumosos; começa-se por diferenciar (6.2) em ordem ao tempo:

$$\dot{p}_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} + p_k.A.\alpha.k_n^{\alpha-1}.\dot{k}_n.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} + p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.(\beta-1).u^{\beta-2}.\dot{u}.h_n^{\beta} +$$

$$+p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.\beta.h_n^{\beta-1}.\dot{h}_n - \dot{p}_h.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.h_n^{\eta} - p_h.B.\eta.(\eta-1).(1-u)^{\eta-2}.(-\dot{u}).h_n^{\eta} -$$

$$-p_h.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.\eta.h_n^{\eta-1}.\dot{h}_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{u}.\left[p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.(\beta-1).u^{\beta-2}.h_n^{\beta} +\right.$$

$$+p_h.B.\eta.(\eta-1).(1-u)^{\eta-2}.h_n^{\eta}\Big] = -\Big[\dot{p}_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} + p_k.A.\alpha.k_n^{\alpha-1}.\dot{k}_n.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} +$$

$$+p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.\beta.h_n^{\beta-1}.\dot{h}_n\Big] + \Big[\dot{p}_h.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.h_n^{\eta} + p_h.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.\eta.h_n^{\eta-1}.\dot{h}_n\Big]$$

Defina-se as seguintes expressões:

$$\chi_1 \equiv p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.(\beta-1).u^{\beta-2}.h_n^{\beta} + p_h.B.\eta.(\eta-1).(1-u)^{\eta-2}.h_n^{\eta}$$

$$\chi_2 \equiv \dot{p}_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} + p_k.A.\alpha.k_n^{\alpha-1}.\dot{k}_n.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} + p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.\beta.h_n^{\beta-1}.\dot{h}_n$$

$$\chi_3 \equiv \dot{p}_h.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.h_n^{\eta} + p_h.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.\eta.h_n^{\eta-1}.\dot{h}_n$$

O objectivo será o de simplificar cada um destes elementos, os quais compôem a equação (6.2) diferenciada: $\dot{u}.\chi_1 = -\chi_2 + \chi_3$.

O elemento χ_1 simplifica-se da seguinte forma; de (6.3) resulta:

$$p_h = p_k.\frac{A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta}}{B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.h_n^{\eta}} \qquad \text{(A2.2)}$$

Substituíndo (A2.2) em χ_1:

$$\chi_1 = p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.(\beta-1).u^{\beta-2}.h_n^{\beta} + p_k.\frac{\eta-1}{1-u}.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} =$$

$$= p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta}.\left(\frac{\beta-1}{u} + \frac{\eta-1}{1-u}\right)$$

Em χ_2 é necessário substituir $\dot{p}_k$, $\dot{k}$ e $\dot{h}$ por (6.4), (6.6) e (6.7) respectivamente:

$$\chi_2 = \left(\rho+\delta_k+\theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} - A.\alpha.k_n^{\alpha-1}.(u.h_n)^{\beta}.$$

$$.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} + p_k.A.\alpha.k_n^{\alpha-1}.A.k_n^{\alpha}.(u.h_n)^{\beta}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} -$$

$$-p_k.A.\alpha.k_n^{\alpha-1}.c_n.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} - p_k.A.\alpha.k_n^{\alpha-1}.\left(n+\delta_k+\theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right).k_n.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta} +$$

$$+p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.\beta.h_n^{\beta-1}.B.[(1-u).h_n]^{\eta} - p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.\beta.h_n^{\beta-1}.(\delta_h+v).h_n =$$

$$= p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta}.\left[\rho+\delta_k+\theta.\frac{\beta}{1-\alpha}.v - \alpha.\frac{c_n}{k_n} - \alpha.\left(n+\delta_k+\frac{\beta}{1-\alpha}.v\right) +\right.$$

$$\left.+\beta.B.(1-u)^{\eta}.h_n^{\eta-1} - \beta.(\delta_h+v)\right] = p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta}.\left[\rho-\alpha.n+(1-\alpha).\delta_k -\right.$$

$$\left.-(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.v - \beta.\delta_h - \alpha.\frac{c_n}{k_n} + \beta.(1-u).B.[(1-u).h_n]^{\eta-1}\right]$$

Por fim, para χ_3:

Substituíndo (6.3) em (6.5),

$$\dot{p}_h = \left\{\rho - n + \delta_h - \left[(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha} - 1\right].v - B.\eta.(1-u)^{\eta}.h_n^{\eta-1}\right\}.p_h - B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.$$

$$.h_n^{\eta-1}.u.p_h = \left\{\rho - n + \delta_h - \left[(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha} - 1\right].v - B.\eta.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta-1}\right\}.p_h \qquad \text{(A2.3)}$$

Então, tendo presente (A2.3) e (6.7):

$$\chi_3 = \left\{\rho - n + \delta_h - \left[(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha} - 1\right].v\right\}.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.h_n^{\eta}.p_h - B.\eta.$$

$$.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta-1}.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.h_n^{\eta}.p_h + p_h.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.\eta.h_n^{\eta-1}.B.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta} -$$

$$-p_h.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.\eta.h_n^{\eta-1}.(\delta_h + v).h_n = p_h.B.\eta.(1-u)^{\eta-1}.h_n^{\eta}.$$

$$.\left\{\rho - n + (1-\eta).\delta_h - \left[(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha} - 1\right].v - B.\eta.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta-1}.u\right\}$$

Usando (A2.2) para substituir p_h por p_k:

$$\chi_3 = p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta}.$$

$$.\left\{\rho - n + (1-\eta).\delta_h - \left[(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha} - 1\right].v - B.\eta.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta-1}.u\right\}$$

Reagrupando as três parcelas:

$$\dot{u}.\chi_1 = -\chi_2 + \chi_3 \Leftrightarrow \dot{u}.p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta}.\left(\frac{\beta-1}{u} + \frac{\eta-1}{1-u}\right) =$$

$$= -p_k.A.k_n^{\alpha}.\beta.u^{\beta-1}.h_n^{\beta}.\left\{\rho - \alpha.n + (1-\alpha).\delta_k - (1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.v - \right.$$

$$\left. -\beta.\delta_h - \alpha.\frac{c_n}{k_n} + \beta.(1-u).B.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta-1}\right\} +$$

$$+\left\{\rho - n + (1-\eta).\delta_h - \left[(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha} - 1\right].v - B.\eta.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta-1}.u\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{u} = \frac{u.(1-u)}{\beta - 1 + u.(\eta-\beta)}\left\{(1+\beta-\eta).\delta_h - (1-\alpha).(n+\delta_k) + (1-\eta).v + \right.$$

$$\left. +\alpha.\frac{c_n}{k_n} - \left[\beta + u.(\eta-\beta)\right].B.\left[(1-u).h_n\right]^{\eta-1}\right\}$$

Voltando a recordar que $(1-\eta).v=0$, ter-se-á, por fim, a equação diferencial

$$\dot{u} = \frac{u.(1-u)}{\beta - 1 + u.(\eta - \beta)} \left\{ (1+\beta-\eta).\delta_h - (1-\alpha).(n+\delta_k) + \right.$$

$$\left. +\alpha.\frac{c_n}{k_n} - [\beta + u.(\eta-\beta)].B.[(1-u).h_n]^{\eta-1} \right\} \quad (6.9)$$

APÊNDICE 3- DETERMINAÇÃO DE $\bar{u}$ PARA AS SITUAÇÕES DE CRESCIMENTO NEO-CLÁSSICO E DE CRESCIMENTO ENDÓGENO

a) Modelo neo-clássico:

A igualdade (6.14) pode ser reescrita de modo a que $\bar{h}_n$ surja como função de $\bar{u}$:

$$\bar{h}_n = \left(\frac{B}{\delta_h + v}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} .(1-\bar{u})^{\frac{\eta}{1-\eta}} \quad (A3.1)$$

Fazendo corresponder a definição de $\bar{h}_n$ em (A3.1) com a definição desta mesma variável em (6.16) resulta que:

$$\left(\frac{B}{\delta_h + v}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} .(1-\bar{u})^{\frac{\eta}{1-\eta}} = \left\{ \frac{[\beta + \bar{u}.(\eta-\beta)].B}{\rho + (1+\beta-\eta).\delta_h - n + (\theta-\alpha).\frac{\beta}{1-\alpha}.v} \right\}^{\frac{1}{1-\eta}} .\frac{1}{1-\bar{u}} \quad (A3.2)$$

Para o caso neo-clássico, $v=0$, donde se procede à respectiva eliminação, em (A3.2), dos termos referentes à taxa de crescimento da variável capital humano:

$$\left(\frac{B}{\delta_h}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} .(1-\bar{u})^{\frac{\eta}{1-\eta}} = \left\{ \frac{[\beta + \bar{u}.(\eta-\beta)].B}{\rho + (1+\beta-\eta).\delta_h - n} \right\}^{\frac{1}{1-\eta}} .\frac{1}{1-\bar{u}} \quad (A3.3)$$

A partir de (A3.3), a obtenção de $\bar{u}$ é apenas uma questão algébrica; começando por multiplicar ambos os membros da igualdade por $1-\bar{u}$:

$$\left(\frac{B}{\delta_h}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} .(1-\bar{u})^{\frac{1}{1-\eta}} = \left\{ \frac{[\beta + \bar{u}.(\eta-\beta)].B}{\rho + (1+\beta-\eta).\delta_h - n} \right\}^{\frac{1}{1-\eta}} \Leftrightarrow \frac{B}{\delta_h}.(1-\bar{u}) =$$

$$= \frac{[\beta + \bar{u}.(\eta-\beta)].B}{\rho + (1+\beta-\eta).\delta_h - n} \Leftrightarrow [\rho + (1+\beta-\eta).\delta_h - n].(1-\bar{u}) =$$

$$[\beta+\bar{u}.(\eta-\beta)].\delta_h \Leftrightarrow [\ (\eta-\beta).\delta_h+\rho+(1+\beta-\eta).\delta_h-n].\bar{u}=$$
$$=\rho+(1+\beta-\eta).\delta_h-n-\beta.\delta_h$$

e, finalmente:

$$\bar{u}=\frac{\rho+(1-\eta).\delta_h-n}{\rho+\delta_h-n} \tag{6.18}$$

b) Modelo de crescimento endógeno:

No modelo de crescimento endógeno, a igualdade (6.14) traduz-se na seguinte definição para a taxa de crescimento de equilíbrio do capital humano: $v=B.(1-\bar{u})-\delta_h$; a substituição de v por esta sua definição em (6.17) resulta na determinação imediata de $\bar{u}$ como função exclusivamente de parâmetros exógenos:

$$\frac{[\beta+\bar{u}.(\eta-\beta)].B}{\rho+(1+\beta-\eta).\delta_h-n+(\theta-\alpha).\frac{\beta}{1-\alpha}.[B.(1-\bar{u})-\delta_h]}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[1-(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}\right].B.\bar{u}=\rho-n-(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.(B-\delta_h)$$

e, por fim:

$$\bar{u}=\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)-(1-\theta).\beta}.\left[\frac{\rho-n}{B}-(1-\theta).\frac{\beta}{1-\alpha}.\left(1-\frac{\delta_h}{B}\right)\right] \tag{6.19}$$

APÊNDICE 4- FORMA DE CÁLCULO DOS MULTIPLICADORES DE CURTO E LONGO PRAZO

Num modelo como o apresentado, em que existe um equilíbrio ponto sela, qualquer perturbação em dada variável exógena tem dois efeitos sobre o equilíbrio das variáveis endógenas: um efeito de curto prazo que provoca de imediato uma modificação das condições de equilíbrio, e um efeito de longo prazo que corresponde ao efeito final que acaba por prevalecer. Para choques permanentes e não antecipados nas duas variáveis tecnológicas, *A* e *B*, os referidos efeitos são obtidos analiticamente do seguinte modo:

- Para o longo prazo,

$$\begin{bmatrix} \Delta\tilde{c}_n(\infty) \\ \Delta\tilde{u}(\infty) \\ \hdashline \Delta\tilde{k}_n(\infty) \\ \Delta\tilde{h}_n(\infty) \end{bmatrix} = -J^{-1}.\Phi_{AB}.\begin{bmatrix} dA \\ dB \end{bmatrix} \tag{A4.1}$$

em que Φ_{AB} é a sub-matriz de Φ respeitante às colunas relativas às variáveis A e B. Esta forma de cálculo só é válida para o caso de crescimento neo-clássico, uma vez que não é possível utilizar a fórmula (A4.1) para as situações de crescimento endógeno porque a matriz J não tem inversa ($|J|=0$); em alternativa, para esta segunda classe de modelos, determina-se uma matriz inversa generalizada de J que é dada por $P.\Lambda^{-1}.P^{-1}$, sendo Λ a matriz de Jordan e a sua inversa também uma inversa generalizada:

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\lambda_4 \end{bmatrix}$$

Assim, para as situações de crescimento endógeno:

$$\begin{bmatrix} \Delta\tilde{c}_n(\infty) \\ \Delta\tilde{u}(\infty) \\ \hdashline \Delta\tilde{k}_n(\infty) \\ \Delta\tilde{h}_n(\infty) \end{bmatrix} = -P.\Lambda^{-1}.P^{-1}.\Phi_{AB}.\begin{bmatrix} dA \\ dB \end{bmatrix} \tag{A4.2}$$

- Para o curto prazo, será necessário ter presente as perturbações de longo prazo e as inclinações das trajectórias estáveis determinadas na secção 8; dado que estas são de naturezas diferentes consoante a classe de modelos, a forma de cálculo será também diferente - admitindo que às variáveis pré-determinadas está subjacente um efeito nulo de curto prazo (não estão sujeitas a um salto inicial) resulta que:

• Modelo neo-clássico:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{c}_n(0) \\ \Delta\tilde{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{c}_n(\infty) \\ \Delta\tilde{u}(\infty) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_{kc} & i_{hc} \\ i_{ku} & i_{hu} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta\tilde{k}_n(\infty) \\ \Delta\tilde{h}_n(\infty) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta\tilde{k}_n(0) \\ \Delta\tilde{h}_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{A4.3}$$

• Modelos de crescimento endógeno:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{c}_n(0) \\ \Delta\tilde{u}(0) \\ \Delta\tilde{k}_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{c}_n(\infty) \\ \Delta\tilde{u}(\infty) \\ \Delta\tilde{k}_n(\infty) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_{hc} \\ i_{hu} \\ i_{hk} \end{bmatrix} . \Delta\tilde{h}_n(\infty) \\ \Delta\tilde{h}_n(0) = 0 \end{cases} \tag{A4.4}$$

Com base nos multiplicadores calculados é possível, adicionalmente, estudar de que modo as perturbações exógenas afectam o nosso segundo grupo de variáveis: o produto de cada sector, o rácio de preços e o produto global; para executar este estudo é suficiente diferenciar cada uma das equações que define os referidos agregados, como se faz, por exemplo, para encontrar a expressão (8.4); adaptando esta expressão à situação das perturbações exógenas sobre o equilíbrio é correcto escrever que:

$$\Delta\tilde{y}_n(\infty) = \overline{y}_n . \left\{ \alpha . \frac{\Delta\tilde{k}_n(\infty)}{\overline{k}_n} + \beta . \left[\frac{\Delta\tilde{u}(\infty)}{\overline{u}} + \frac{\Delta\tilde{h}_n(\infty)}{\overline{h}_n} \right] \right\} \tag{A4.5}$$

Uma expressão idêntica poderia ser apresentada para a situação de curto prazo. Da mesma forma que (A4.5), para as restantes variáveis:

$$\Delta\tilde{y}_{hn}(\infty) = \overline{y}_{hn} . \eta . \left[\frac{\Delta\tilde{h}_n(\infty)}{\overline{h}_n} - \frac{\Delta\tilde{u}(\infty)}{1-\overline{u}} \right] \tag{A4.6}$$

$$\Delta\tilde{p}_n(\infty) = \overline{p}_n . \left[\alpha . \frac{\Delta\tilde{k}_n(\infty)}{\overline{k}_n} + (\beta - \eta) . \frac{\Delta\tilde{h}_n(\infty)}{\overline{h}_n} - (1-\beta) . \frac{\Delta\tilde{u}(\infty)}{\overline{u}} - (1-\eta) . \frac{\Delta\tilde{u}(\infty)}{1-\overline{u}} \right] \tag{A4.7}$$

$$\Delta\tilde{q}_n(\infty) = \Delta\tilde{y}_n(\infty) + \overline{p}_n . \Delta\tilde{y}_{hn}(\infty) + \Delta\tilde{p}_n(\infty) . \overline{y}_{hn} \tag{A4.8}$$

$$\Delta\tilde{q}_{hn}(\infty) = \Delta\tilde{y}_{hn}(\infty) + \frac{\overline{p}_n . \Delta\tilde{y}_n(\infty) - \Delta\tilde{p}_n(\infty) . \overline{y}_n}{\overline{p}_n^2} \tag{A4.9}$$

Deste modo, para calcular os efeitos de perturbações exógenas sobre os valores de equilíbrio destas variáveis, é apenas necessário conhecer os respectivos efeitos sobre as variáveis endógenas; de acordo com (A4.1) a (A4.9) calculam-se os valores apresentados nos quadros 1 e 2 da secção 9.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arrow, Kenneth J. [1962]. "The Economic Implications of Learning-by-Doing", Review of Economic Studies, 29 (June), pp. 155-173.
- Barro, Robert J. e Gary S. Becker [1989]. "Fertility Choice in a Model of Economic Growth", Econométrica, 57, 2 (March), pp. 481-501.
- Barro, Robert J. [1991]. "Economic Growth in a Cross Section of Countries", Quarterly Journal of Economics, 106, 2 (May), pp. 407-443.
- Barro, Robert J. e Jong-Wha Lee [1993]. "International Comparisons of Educational Attainment", Journal of Monetary Economics, 32, 3 (December), pp. 363-394.
- Barro, Robert J. e Xavier Sala-i-Martin [1995]. "Economic Growth", McGraw-Hill.
- Becker, Gary S.; Kevin M. Murphy e Robert Tamura [1990]. "Human Capital, Fertility and Economic Growth", Journal of Political Economy, 98, 5 (October), part II, pp. S12-S37.
- Bond, Eric; Ping Wang e Chong Yip [1996]. "A General Two-Sector Model of Endogenous Growth with Human and Physical Capital: Balanced Growth and Transitional Dynamics", Journal of Economic Theory, 68, 1 (January), pp. 149-173.
- Brito, Paulo [1993*a*]. "Dinâmica da Taxa de Câmbio num Regime de Câmbios Flexíveis: a Família de Modelos do Tipo Dornbusch", versão 3, documento não publicado. Instituto Superior de Economia e Gestão.
- Brito, Paulo [1993*b*]. "Dinâmica Comparativa Local para Problemas de Controle Óptimo Determinístico", documento não publicado. Instituto Superior de Economia e Gestão.

• Brito, Paulo [1995]. "Local Dynamics for Planar Optimal Control Problems: a Complete Characterization", documento não publicado. Instituto Superior de Economia e Gestão.

• Caballé, Jordi e Manuel S. Santos [1993]. "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital", Journal of Political Economy, 101, 6 (December), pp. 1042-1067.

• Grossman, Gene M. e Elhanan Helpman [1994]. "Endogenous Innovation in the Theory of Growth", Journal of Economic Perspectives, 8, 1 (Winter), pp. 23-44.

• Lucas, Robert E., Jr. [1988]. "On the Mechanics of Economic Development", Journal of Monetary Economics, 22, 1 (July), pp. 3-42.

• Lucas, Robert E., Jr. [1990]. "Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries ?", American Economic Review, 80, 2 (May), pp. 92-96.

• Lucas, Robert E., Jr. [1993]. "Making a Miracle", Econométrica, 61, 2 (March), pp. 251-272.

• Mankiw, N. Gregory; David Romer; e David N. Weil. [1992]. "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", Quarterly Journal of Economics, 107, 2 (May), pp. 407-437.

• Mulligan, Casey B. e Xavier Sala-i-Martin [1993]. "Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth", Quarterly Journal of Economics, 108, 3 (August), pp. 737-773.

• Nelson, Richard R. e Edmund S. Phelps [1966]. "Investment in Humans, Technological Diffusion and Economic Growth", American Economic Review, 56, 2 (May), pp. 69-75.

• Pack, Howard [1994]. "Endogenous Growth Theory: Intellectual Appeal and Empirical Shortcomings", Journal of Economic Perspectives, 8, 1 (Winter), pp. 55-72.

• Rebelo, Sérgio [1991]. "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", Journal of Political Economy, 99, 3 (June), pp. 500-521.

• Romer, Paul M. [1986]. "Increasing Returns and Long-Run Growth", Journal of Political Economy, 94 ,5 (October), pp. 1002-1037.

• Romer, Paul M. [1987]. "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization", American Economic Review, 77, 2 (May), pp. 56-62.

- Romer, Paul M. [1990]. "Endogenous Technological Change", Journal of Political Economy, 98, 5 (October), part II, pp. S71-S102.
- Romer, Paul M. [1993]. "Idea Gaps and Object Gaps in Economic Development", Journal of Monetary Economics, 32, 3 (December), pp. 543-573.
- Romer, Paul M. [1994]. "The Origins of Endogenous Growth", Journal of Economic Perspectives, 8, 1 (Winter), pp. 3-22.
- Solow, Robert M. [1956]. "A Contribution to the Theory of Economic Growth", Quarterly Journal of Economics, 70, 1 (February), pp. 65-94.
- Solow, Robert M. [1994]. "Perspectives on Growth Theory", Journal of Economic Perspectives, 8, 1 (Winter), pp. 45-54.
- Uzawa, Hirofumi [1964]. "Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Acumullation", Review of Economic Studies, 31 (January), pp. 1-24.