INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

AVALIAÇÃO DE OPÇÕES: FUNDAMENTOS E ANÁLISE DO MODELO DE BLACK-SCHOLES

Susana Margarida Figueiredo de Sousa Borges Furtado

1994

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

AVALIAÇÃO DE OPÇÕES: FUNDAMENTOS E ANÁLISE DO MODELO DE BLACK-SCHOLES

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

Susana Margarida Figueiredo de Sousa Borges Furtado

1994

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho não quero deixar de agradecer a todos aqueles que de algum modo me ajudaram na sua elaboração.

Destaco, profundamente grata, a imprescindível contribuição do Professor Doutor Bento Murteira, orientador desta dissertação, que se manifestou quer directamente na leitura crítica das diversas versões do trabalho e nas diferentes sugestões apresentadas quer indirectamente no apoio e incentivo prestados.

Ao Engenheiro Pedro Regueiras manifesto o meu enorme reconhecimento pela disponibilidade demonstrada em todos os momentos em que lhe solicitei ajuda.

Ao Professor Doutor Nuno Cassola agradeço não só por me ter encorajado na escolha do tema da dissertação mas também por me ter facultado bibliografia que em muito contribuíu para o início da mesma.

Não posso deixar de agradecer ao Professor Doutor João Manuel Andrade e Silva o facto de me ter ajudado a ultrapassar certas questões pontuais de cuja resolução dependeu a progressão deste trabalho.

Ao Ricardo Pignateli devo o apoio prestado na escolha do tema do trabalho bem como o esclarecimento de diversos problemas do âmbito da Economia que foram surgindo durante a realização do mesmo.

À JNICT agradeço o facto de me ter tornado possível, em termos financeiros, a frequência do curso de mestrado.

Finalmente, uma palavra de reconhecimento a todos aqueles que, em momentos de desânimo, me demonstraram o seu apoio, em especial à minha família e aos meus amigos.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Uma das àreas da Economia e Finanças de maior importância a nível de investigação diz respeito à avaliação de opções. Uma opção é um produto financeiro cujo rendimento depende do rendimento de um outro produto subjacente (diz-se por isso um produto derivado). Concretamente, uma opção é um contrato efectuado entre dois investidores no qual o vendedor da opção proporciona ao comprador, em troca de uma contrapartida monetária, o direito de lhe comprar ou vender um activo, até uma determinada data, a um preço pré-fixado. O comprador da opção pode ou não exercer o seu direito conforme tal atitude lhe acarrete ganhos ou perdas. As opções assumem, no mercado de capitais, um papel relevante uma vez que, para além de possibilitarem a obtenção de elevados lucros, desempenham, tal como outros produtos derivados, um papel fundamental como forma de controlar o risco que determinados investimentos acarretam.

Apesar de em termos conceptuais as opções existirem já há alguns séculos, só na década de 70 do século XX é que surgiu em Chicago a primeira bolsa de opções do mundo. Só em 1978 é que surge na Europa a primeira bolsa de produtos derivados sobre activos financeiros. De entre as cerca de 80 bolsas deste tipo existentes actualmente no mundo só aproximadamente 20 pertencem à Europa. Destas, metade surgiram já na nossa década. Apesar de presentemente em Portugal não existir uma bolsa de opções, há já quem defenda a grande necessidade do seu aparecimento.

Entre a data em que é efectuado o contrato de opção e a data limite para este poder ser exercido a opção tem um valor de mercado. A teoria de avaliação de opções debruça-se precisamente na determinação desse valor. Em 1973 Fischer Black e Myron Scholes apresentaram um modelo que esteve na base da teoria de avaliação de opções. De facto, apesar de o modelo se mostrar bastante limitativo, a metodologia empregue na sua derivação pode ser adaptada de forma a permitir a obtenção de modelos mais gerais.

O objectivo do presente trabalho consiste precisamente na análise dos aspectos essenciais relacionados com a teoria de avaliação de opções, nomeadamente no que respeita ao modelo de Black-Scholes. Por se pretender ilustrar os aspectos básicos da análise vai, conforme efectuado por Black-Scholes, particularizar-se o estudo ao caso de opções de compra europeias sobre acções. A análise efectuada pode, no entanto, ser adaptada (por vezes não de forma fácil) a outro tipo de opções (opções americanas e/ou opções de venda e/ou opções sobre índices de acções, moeda estrangeira, ...).

Uma vez que subjacentes ao modelo de Black-Scholes estão determinados pressupostos que nem sempre são verificados na prática, este torna-se demasiado restrictivo. É neste contexto que diversos estudos têm prosseguido no sentido da determinação de modelos de avaliação mais gerais, isto é, que assentem num conjunto de hipóteses mais adaptado à realidade. No entanto, dada a complexidade de tais modelos, o modelo de Black-Sholes revela-se, na prática, de grande utilidade. Assim, para além da importante busca de modelos tratáveis alternativos ao modelo de Black-Scholes, é de extrema importância conhecer a forma como este modelo avalia as opções quando os pressupostos assumidos na sua derivação não são satisfeitos.

Neste trabalho vai considerar-se o caso de o processo assumido por Black-Scholes para descrever o comportamento do preço da acção não ser satisfeito. Vai, então, depois de proposto um outro processo para o preço da acção, tentar derivar-se um modelo de avaliação alternativo. Em seguida analisa-se a forma como, nestas condições, o modelo de Black-Scholes avalia as opções.

Um dos problemas que muito tem dificultado o tratamento das opções é a complexidade matemática requerida. Assim, nos primeiros dois capítulos deste trabalho, vão apresentar-se, de forma bastante abreviada, os principais conceitos e resultados envolvidos na teoria de avaliação de opções e que, de certa modo, não fazem parte do conhecimento geral.

No capítulo 1 é abordado o conceito de processo de difusão e são apresentados alguns exemplos destes processos, entre os quais, e de particular relevância, o movimento browniano. Como processos derivados do movimento browniano destacam-se, entre outros, o movimento browniano com tendência e o movimento browniano geométrico.

O capítulo 2 é dedicado à análise de equações diferenciais estocásticas de Ito. É exposta a noção de integral estocástico de Ito e apresentado o lema de Ito, de especial importância no desenvolvimento da teoria de avaliação de opções.

No capítulo 3 efectua-se uma introdução às características das opções, mencionando-se já algumas propriedades gerais satisfeitas pelo preço de uma opção de forma a evitar a ocorrência de oportunidades de arbitragem. Para ilustrar o papel das opções como forma de controlar o risco descreve-se uma estratégia bastante simples envolvendo acções e opções.

O capítulo 4 é dedicado à apresentação de um modelo para o preço da acção. Este modelo é considerado posteriormente na avaliação de opções efectuada por Black e Scholes como descrevendo correctamente o comportamento do preço da acção, pelo que se pretende dar particular destaque à sua derivação para que sejam bem entendidas as hipóteses em que assenta.

O capítulo 5 debruça-se finalmente sobre o problema da avaliação de opções. Os modelos de avaliação apresentados pressupõem certas restrições sobre o mercado em que as opções são transaccionadas. Numa primeira fase aborda-se um procedimento de avaliação relativamente simples, baseado no facto de o preço da acção seguir um modelo binomial multiplicativo (assume-se que o processo satisfeito pelo preço da acção é definido em tempo e espaço de estados discretos). Numa segunda fase introduz-se o modelo de avaliação de Black-Scholes. Este modelo de avaliação, conforme já foi referido, apresentado em 1973 por Fisher Black e Myron Scholes, deu um impulso fulcral ao desenvolvimento da teoria de avaliação de opções. O modelo, apesar de ser demasiado restrictivo dadas as hipóteses em que assenta, tem particular importância por um lado pelo facto de a metodologia empregue na sua derivação ser comum à derivação de modelos mais gerais e por outro lado por ser de fácil aplicação (ao contrário da maior parte dos modelos de avaliação).

No capítulo 6 dedica-se particular importância à estimação da volatilidade da acção já que o conhecimento deste parâmetro é fundamental na aplicação da fórmula de Black-Scholes.

No capítulo 7 é tratado o problema da avaliação de opções quando a hipótese assumida por Black-Scholes de a volatilidade do preço da acção ser constante ao longo do tempo é abandonada. Com efeito, presentemente, não restam dúvidas relativamente ao facto de a volatilidade da acção não só não ser constante ao longo do tempo como não ser uma função determinística do preço da acção. Assim, têm vindo a surgir um grande número de modelos alternativos como tentativa de resolução dos enviesamentos provocados pela aplicação da fórmula de Black-Scholes na avaliação de opções. É neste contexto que vai desenvolver-se um modelo de avaliação supondo a volatilidade estocástica e vai analisar-se o enviesamento nos preços obtidos pela aplicação da fórmula de Black-Scholes.

Finalmente, no capítulo 8 vai, através de um estudo de simulação, confirmar-se os resultados mencionados no capítulo anterior no que respeita aos enviesamentos obtidos por aplicação da fórmula de Black-Scholes quando a volatilidade da acção é estocástica.

1. PROCESSOS DE DIFUSÃO

No presente capítulo são introduzidos alguns conceitos e resultados relativos à classe dos processos de difusão. Da classe dos processos de difusão são analisados com maior detalhe o movimento browniano bem como alguns processos dele derivados.

Apesar do tema se encontrar largamente desenvolvido na literatura, faz-se a sua inclusão neste trabalho por ser indispensável no decorrer da análise desenvolvida nos capítulos seguintes. A exposição efectuada é, no entanto, bastante breve, sendo essencialmente abordados os aspectos adiante utilizados.

1.1 INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS DE DIFUSÃO

Os processos de difusão são particulares processos de Markov com trajectórias contínuas que são empregues nomeadamente como modelos de fenómenos económicos sujeitos a incertezas.

Seja $\{X(t,\omega):t\in[0,T]\}$ um processo estocástico em tempo contínuo e $(\Omega,\mathcal{A},P)$ o espaço de probabilidade associado. $X(t,\omega)$ é uma função real e finita definida em $[0,T]\times\Omega$ com valores no espaço de estados χ, contido em $\Re$, que, para cada $t\in[0,T]$, é uma função mensurável de $\omega\in\Omega$, isto é, uma variável aleatória. Para cada $\omega\in\Omega$, $X(t,\omega)$ é uma função real em t e representa uma trajectória do processo. Assim, a cada ω está associada uma única trajectória. Será usada indistintamente a notação $X(t,\omega)$ e $X(t)$, pretendendo-se com a primeira dar enfâse à dependência de X em relação a ω.

DEFINIÇÃO 1.1: O processo real $\{X(t,\omega):t\in[0,T]\}$ diz-se um processo de difusão se for um processo de Markov[1] com trajectórias contínuas com probabilidade 1 e se existirem funções $\mu(x,t)$ e $\sigma^2(x,t)$ de modo que, para todo o $t\in[0,T[$, todo o $x\in \mathrm{Int}(\chi)$ e todo o $\varepsilon>0$, se tenha:

[1] Um processo $\{X(t)\}$ contínuo no tempo, assumindo valores em $\Re$, diz-se um processo de Markov se $P(X(t_n)\leq x_n|X(t_1)=x_1,\ldots,X(t_{n-1})=x_{n-1})=P(X(t_n)\leq x_n|X(t_{n-1})=x_{n-1})$ para todos os $x_1,\ldots,x_n$ reais e todas as sequências de instantes $t_1<t_2<\ldots<t_n$.

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|\le\varepsilon}(y-x)p(t,x,t+h,y)dy=\mu(x,t);$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|\le\varepsilon}(y-x)^2p(t,x,t+h,y)dy=\sigma^2(x,t);$$

(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|>\varepsilon}p(t,x,t+h,y)dy=0,$$

onde p(t,x,t+h,y) representa a densidade de X(t+h) condicionada por X(t)=x, $X(t+h)|X(t)=x$.

Intuitivamente, as condições (1) e (2) significam que o deslocamento do processo do estado x, no instante t, para o estado y, no instante t+h, é dado por $\mu(x,t)h+\delta_x+o(h)$, onde δ_x é uma variável aleatória tal que $E(\delta_x)=0$ e $Var(\delta_x)=\sigma^2(x,t)h$ e $o(h)/h\to 0$ quando $h\to 0$. A variável aleatória δ_x representa a componente aleatória do deslocamento do processo no intervalo de tempo h.

A condição (3), que traduz de certa forma a propriedade da continuidade das trajectórias, estabelece que, em intervalos de tempo suficientemente pequenos, não é provável que ocorram mudanças de estado do processo em módulo superiores a ε.

As funções $\mu(x,t)$ e $\sigma^2(x,t)$ são os parâmetros infinitesimais do processo, designando-se o primeiro por tendência (média infinitesimal do deslocamento) e o segundo por parâmetro de difusão (variância infinitesimal do deslocamento). Em geral $\mu(x,t)$ e $\sigma^2(x,t)$ são funções contínuas de x e t para todo o $t\in[0,T[$ e x pertencente ao interior do espaço de estados. Uma propriedade fundamental dos processos de difusão é o facto de, sob certas condições de regularidade, a densidade de transição p(t,x,s,y) poder ser determinada unicamente a partir dos parâmetros infinitesimais do processo.

O teorema seguinte permite determinar os parâmetros infinitesimais de um dado processo construído em função de outro previamente conhecido.

TEOREMA 1.1: Seja $\{X(t),t\in[0,T]\}$ um processo de difusão cujo espaço de estados é um intervalo I de extremos a e b (pode, eventualmente, ser $a=-\infty$ ou $b=+\infty$) com parâmetros infinitesimais $\mu(x,t)$ e $\sigma^2(x,t)$. Seja g uma função estritamente monótona em I, com segunda derivada, $g''(x)$, contínua para $a<x<b$. Então, Y(t)=g(X(t)) define

um processo de difusão cujo espaço de estados é o intervalo de extremos g(a) e g(b) e $\{Y(t),t \in[0,T]\}$ tem parâmetros infinitesimais dados por,

$$(4) \qquad \mu_y(y,t) = \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)g''(x) + \mu(x,t)g'(x),$$

$$(5) \qquad \sigma_y^2(y,t) = \sigma^2(x,t)[g'(x)]^2,$$

onde y=g(x) e g´(x) designa a primeira derivada de g em ordem a x.

DEM.: Karlin II (1975), pagina 174.

1.2 ALGUNS PROCESSOS DE DIFUSÃO

1.2.1 MOVIMENTO BROWNIANO

Antes de encarar o movimento browniano como um processo de difusão vai apresentar-se a sua definição bem como algumas das suas propriedades mais relevantes.

O movimento browniano é um particular processo de Markov, definido em tempo e espaço de estados contínuos. Mais concretamente, o movimento browniano é um processo de difusão homogéneo[2] no tempo e no espaço.

Formalmente, tem-se a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.2.[3]**:** O processo estocástico {X(t),t∈[0,T]} diz-se um movimento browniano se forem satisfeitas as seguintes condições:

---

[2] Um processo estocástico X(t) diz-se homogéneo no tempo e no espaço se os incrementos X(t)-X(s), s≤t, forem estacionários no tempo e independentes de X(s).

[3] Uma definição mais geral é a de movimento browniano multidimensional. Sejam $\{X_1(t),t\geq 0\},\{X_2(t),t\geq 0\},\ldots,\{X_N(t),t\geq 0\}$ processos estocásticos satisfazendo as propriedades MB1), MB2) e MB3) da definição 1.2, estatisticamente independentes no sentido de os vectores,

(MB1) Os incrementos X(t+s)-X(s) têm distribuição normal de média 0 e variância $\sigma^2 t$, onde σ é um parâmetro fixo. Por outras palavras, os incrementos têm distribuição normal de média constante (0) e variância proporcional à amplitude do intervalo. Simbolicamente,

$$X(t+s)-X(s) \sim N(0,\sigma^2 t).$$

(MB2) Um número finito ou uma infinidade numerável de incrementos relativos a intervalos de tempo disjuntos são variáveis aleatórias independentes com distribuição referida em (MB1).

(MB3) X(0)=0 por convenção (quando conveniente vai supor-se $X(0)=x_0$, $x_0 \in \Re$) e, para cada elemento $\omega \in \Omega$, $X(t,\omega)$ é uma função contínua em t=0.

A constante σ^2 é designada por variância do processo. Se $\sigma^2 = 1$, X(t) diz-se um movimento browniano padrão. Dado um movimento browniano qualquer, X*(t), com variância σ^2 é possível construir o movimento browniano padrão $X^*(t)/\sigma$.

A condição (MB1) apresentada reflecte o facto de o comportamento futuro do processo depender apenas da posição presente e não da forma como o processo atingiu tal estado (propriedade markoviana). O facto de se supor que X(t)-X(s) tem média igual a zero garante que não há tendência no deslocamento do processo, isto é, o

---

$$\begin{aligned} X_1 &= (X_1(t_{11}),\ldots,X_1(t_{1n_1})), \\ X_2 &= (X_2(t_{21}),\ldots,X_2(t_{2n_2})), \\ &\vdots \\ X_N &= (X_N(t_{N1}),\ldots,X_N(t_{Nn_N})), \end{aligned}$$

serem independentes para todas as sequências de instantes,

$$\begin{aligned} &t_{11}, t_{12},\ldots,t_{1,n_1}, \\ &t_{21}, t_{22},\ldots,t_{2,n_2}, \\ &\vdots \\ &t_{N1}, t_{N2},\ldots,t_{N,n_N}. \end{aligned}$$

O processo multidimensional X(t) definido por,

$$X(t)=(X_1(t),\ldots,X_N(t)),\ t\in[0,T],$$

diz-se um movimento browniano N-dimensional. O espaço de estados associado é $\Re^N$.

deslocamento pode ocorrer, com igual probabilidade, para valores inferiores ao estado actual ou para valores superiores (já que, no caso da distribuição normal, a média e a mediana coincidem). O facto de se supor a variância crescente com a amplitude do intervalo de tempo significa que o processo tende a afastar-se da posição actual.

Facilmente se mostra que um processo estocástico gaussiano[4], X(t), com X(0)=0 e média nula, cuja função covariância satisfaz a equação

$$\text{(6)} \qquad Cov(X(s), X(t))=\sigma^2 \min\{s,t\}$$

é um movimento browniano com variância σ^2. Inversamente, a função covariância do movimento browniano com variância σ^2 satisfaz a equação anterior.

ESTACIONARIDADE: Da definição de movimento browniano apresentada decorre que tal processo não goza da propriedade de estacionaridade, dado X(t) ser uma variável aleatória tal que $cov(X(s),X(s+t)) = \sigma^2 \min\{s,s+t\} = \sigma^2 s$, $t > 0$, depende de s e não apenas de t. No entanto, os incrementos do processo em intervalos de tempo disjuntos são independentes e estacionários, no sentido de a distribuição de cada incremento depender apenas da amplitude do intervalo de tempo considerado, isto é, incrementos relativos ao mesmo intervalo de tempo têm a mesma distribuição (de facto, os incrementos são fortemente estacionários).

PROPRIEDADE MARKOVIANA: O movimento browniano é um processo de Markov em tempo contínuo e espaço de estados contínuo. Com efeito, a propriedade (MB1) da definição 1.2 estabelece que, conhecido X(s), a distribuição de $X(t+s)-X(s)$ não depende do conhecimento das realizações de $X(\tau)$ para $\tau < s$. Assim,

$$\text{(7)} \quad P[X(t)\leq x|X(t_0)=x_0, X(t_1)=x_1,\ldots,X(t_n)=x_n]=P[X(t)-X(t_n)\leq x-x_n]=P[X(t)\leq x|X(t_n)=x_n],$$

$t_0<t_1<\ldots<t_n<t$.

[4] Um processo estocástico X(t), real, contínuo no tempo, diz-se um processo gaussiano se cada vector de dimensão finita $(X(t_1),\ldots,X(t_n))$ tiver distribuição normal multivariada.

A propriedade (MB1) da definição 1.2 é, no entanto, mais restritiva do que a propriedade markoviana na medida em que para um processo de Markov geral a distribuição de $X(t_n)-X(t_{n-1})$ pode depender de $X(t_{n-1})$ e não apenas da amplitude do intervalo $[t_{n-1}, t_n]$.

O MOVIMENTO BROWNIANO COMO PROCESSO LIMITE

O movimento browniano pode ser encarado como o limite de um passeio aleatório unidimensional $\{X(n\tau), n=0,1,2,..\}$, $\tau>0$, onde se supõe $X(0)=0$ e $X(n\tau)=\sum_{i=1}^{n} S_i$, sendo S_i, $i=1,2,...$, uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que

$$P(S_i = k\delta) = \begin{cases} \frac{1}{6} & k=-1 \\ \frac{2}{3} & k=0 \\ \frac{1}{6} & k=1 \end{cases}$$

Com efeito, a variável aleatória S_i tem distribuição trinomial de média nula e variância $\frac{\delta^2}{3}$. $X(n\tau)$ tem, então, variância $\frac{n\delta^2}{3}$. Suponha-se que os saltos do passeio aleatório ocorrem em instantes τ, 2τ, 3τ,... onde $\tau>0$, o tempo entre saltos, é suposto ser pequeno. Deste modo, considerando um instante t, o número de saltos ocorridos, $n=\left[\frac{t}{\tau}\right]$, é grande. Considere-se o processo estocástico em tempo contínuo $\{Y(t): t\in[0,T]\}$, onde $Y(t)=X(n\tau)$. O teorema do limite central permite afirmar que $Y(t)-Y(0)$ tem aproximadamente distribuição normal de média nula e variância $\frac{\delta^2 t}{3\tau}$. Fazendo o intervalo de tempo entre saltos, τ, e a amplitude de cada salto, δ, tender para zero de forma a que $\frac{\delta^2}{\tau}$ permaneça constante (designe-se tal constante por σ^2), então no limite a distribuição de $Y(t)-Y(0)$ é normal de média nula e variância $\sigma^2 t$. Sendo este resultado válido para qualquer t, facilmente se mostra que, no limite, o incremento $Y(t)-Y(s)$ tem distribuição normal de média nula e variância $\sigma^2(t-s)$. Verificou-se, portanto, que em termos de limite $(\tau,\delta\to 0)$ a propriedade (MB1) da definição de movimento browniano é satisfeita. A satisfação, no limite, das propriedades (MB2) e (MB3) é imediata.

PROPRIEDADES ADICIONAIS DO MOVIMENTO BROWNIANO

- Dado $X(0)=0$, a variável aleatória $X(t)$ tem distribuição normal de média 0 e variância $\sigma^2 t$.

- Excepto para ω pertencente a um conjunto de probabilidade nula, as trajectórias do movimento browniano, $X(t,\omega)$, $t \in [0,T]$, são funções contínuas em relação a t.

- Excepto para ω pertencente a um conjunto de probabilidade nula, as trajectórias do movimento browniano, $X(t,\omega)$, $t \in [0,T]$, não são funções diferenciáveis em relação a t.

- A função densidade conjunta das variáveis aleatórias $X(t_1)$, $X(t_2)$,..., $X(t_n)$ com $t_1<t_2<...<t_n$ ($X(t)$ sendo um movimento browniano padrão), sujeita à restrição $X(0)=0$, é dada por

$$f(x_1,...,x_n)=p(x_1,t_1)p(x_2-x_1,t_2-t_1)...p(x_n-x_{n-1},t_n-t_{n-1}),$$

onde $p(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$ corresponde à densidade normal de média 0 e variância t. Esta propriedade resulta directamente das propriedades MB1) e MB2).

- A densidade do movimento browniano padrão $X(t)$, condicionada por $X(t_1)=x_1$ e $X(t_2)=x_2$, $t_1<t<t_2$, é uma densidade normal com média $x_1+\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}(t-t_1)$ e variância $\frac{(t_2-t)(t-t_1)}{t_2-t_1}$. Este resultado é obtido como consequência da propriedade anterior.

- PRINCÍPIO DA REFLEXÃO: Considere-se o movimento browniano $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, e seja $X(\tau)=a$, $0 \leq \tau \leq T$. Defina-se o processo estocástico $Y(t)$, $0 \leq t \leq T$, obtido de $X(t)$ a partir da reflexão deste ,.para $t>\tau$, na recta $x=a$, isto é,

$$Y(t)=\begin{cases} X(t) & \text{se } t \leq \tau \\ a-[X(t)-a] & \text{se } t>\tau. \end{cases}$$

Dado $X(\tau)=a$, as variáveis $X(t)$ e $Y(t)$ têm a mesma distribuição. Esta propriedade, válida para qualquer movimento browniano, é utilizada na demonstração de diversos resultados.

- Sendo $X(t)$ um movimento browniano padrão e T_a, $a>0$, o primeiro instante em que o valor a é atingido,

$$T_a=\inf\{t \in [0,T]: X(t)=a\},$$

tem-se [veja-se Karlin I (1975), pag. 347],

$$P(T_a \leq t | X(0)=0)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t u^{-3/2}\exp\left[-\frac{a^2}{2u}\right]du.$$

O movimento browniano é um particular processo de difusão com espaço de estados $(-\infty,+\infty)$ e com parâmetros infinitesimais $\mu(x,t)=0$ e $\sigma^2(x,t)=\sigma^2$ constantes para todo o x e para todo o t.

1.2.2 MOVIMENTO BROWNIANO COM TENDÊNCIA

DEFINIÇÃO 1.3: Seja $\{X(t): t \in [0,T]\}$ um movimento browniano com variância σ^2. Um movimento browniano com tendência é um processo estocástico com a distribuição de $Y(t)=X(t)+\mu t$, $t \in [0,T]$, onde μ é uma constante real, designada por tendência do processo.

DEFINIÇÃO 1.4: Uma definição alternativa de movimento browniano com tendência é dada com base nas seguintes propriedades:

- Os incrementos $Y(t+s)-Y(s)$ têm distribuição normal com média μt e variância $\sigma^2 t$, com μ e σ constantes fixas;
- As propriedades (MB2) e (MB3) da definição de movimento browniano.

À semelhança do movimento browniano, também o movimento browniano com tendência é um processo de Markov.

Em relação à distribuição do processo condicionado por $Y(t_0)=y_0$ tem-se

$$P\{Y(t) \le y | Y(t_0) = y_0\} =$$

$$= P\{Y(t) - Y(t_0) \le y - y_0\}$$

$$= \int_{-\infty}^{y-y_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(z-\mu(t-t_0))^2}{2(t-t_0)\sigma^2}\right\} dz.$$

Efectuando a mudança de variável $z=\mu(t-t_0)+\sigma z'$ e tendo em conta que $dz=\sigma dz'$ tem-se

$$\int_{-\infty}^{(y-y_0-\mu(t-t_0))/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{(z')^2}{2(t-t_0)}\right\} dz'$$

$$= \int_{-\infty}^{(y-y_0-\mu(t-t_0))/\sigma} p(z', t-t_0) dz' = P\left\{X^*(t-t_0) \le \frac{y-y_0-\mu(t-t_0)}{\sigma}\right\},$$

onde $p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$ e $X^*(t)$ representa um movimento browniano padrão.

Em suma, a distribuição de um movimento browniano com tendência μ e variância σ^2 pode ser expressa em termos da distribuição de um movimento browniano padrão através da seguinte relação,

$$P\{Y(t) \le y | Y(t_0) = y_0\} = P\left\{X^*(t-t_0) \le \frac{y-y_0-\mu(t-t_0)}{\sigma}\right\}.$$

O princípio da reflexão deixa de ser válido para o movimento browniano com tendência. Com efeito, $Y(t)|Y(0)=y_0$ tem distribuição normal de média $y_0+\mu t$ e variância $\sigma^2 t$ que não é simétrica relativamente a y_0 mas relativamente a $y_0+\mu t$.

O movimento browniano com tendência é um processo de difusão com parâmetros infinitesimais μ e σ^2, constantes, designados respectivamente por tendência e variância do processo.

1.2.3 MOVIMENTO BROWNIANO REFLECTIDO NA ORIGEM

DEFINIÇÃO 1.5: Seja $\{X(t);0\leq t\leq T\}$ um movimento browniano com variância σ^2. Um processo estocástico $\{Y(t);0\leq t\leq T\}$ com $Y(t)=|X(t)|$ diz-se um movimento browniano reflectido na origem.

O movimento browniano reflectido na origem é um processo de Markov. Com efeito,

$$P\{Y(t)\leq z|Y(t_0)=x_0,\ldots,Y(t_n)=x_n\}=$$

$$=P\{-z\leq X(t)\leq z|X(t_0)=\pm x_0,\ldots,X(t_n)=\pm x_n\}$$

$$=P\{-z\leq X(t)\leq z|X(t_n)=\pm x_n\}$$

$$=P\{Y(t)\leq z|Y(t_n)=x_n\},$$

onde $t_0<t_1<\ldots<t_n<t$.

A densidade de probabilidade de transição de Y(t) pode ser obtida tendo em conta que

$$P\{Y(t+s) \le z | Y(t) = x\}$$

$$= P\{-z \le X(t+s) \le z | X(t) = \pm x\}$$

$$= P\{-z \le X(t+s) \le z | X(t) = x\}$$

$$= \int_{-z}^{z} p(y-x, s)dy,$$

onde $p(x,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t\sigma^2}\right)$, $0 \le t < T$ e $s > 0$. Efectuando a mudança de variável v=y-x, tem-se dv=dy e, portanto,

$$P\{Y(t+s) \le z | Y(t) = x\} =$$

$$= \int_{-z-x}^{z-x} p(v, s)dv.$$

Assim, tendo em conta a simetria em relação à origem da densidade normal de média 0, a densidade de probabilidade de transição de Y(t), $t \in [0, T]$, dado Y(0)=x, é

$$p(t,x,y)=p(y-x,t)+p(y+x,t).$$

1.2.4 MOVIMENTO BROWNIANO ABSORVIDO NA ORIGEM

DEFINIÇÃO 1.6: Seja τ o primeiro instante em que o movimento browniano $\{X(t): t \in [0, T]\}$ atinge o valor 0 (suponha-se X(0)=x>0). O processo estocástico definido por

$$Y(t) = \begin{cases} X(t) & t \le \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

diz-se um movimento browniano absorvido na origem.

À semelhança dos processos anteriormente apresentados também o movimento browniano absorvido na origem é um processo de Markov em tempo contínuo.

Os movimentos brownianos absorvido e reflectido são processos de difusão definidos no espaço de estados $[0,\infty)$. Partindo no instante 0 de um estado x do interior de $[0,\infty)$ o comportamento do processo num intervalo de tempo infinitamente pequeno é o de um movimento browniano. Assim, os parâmetros infinitesimais são da mesma forma $\mu(x,t)=0$ e $\sigma^2(x,t)=\sigma^2$ para $0<x<\infty$. Os parâmetros infinitesimais determinam a evolução do processo apenas quando o processo está no interior do espaço de estados e por conseguinte não são por si só suficientes para definir o processo de difusão. Para definir unicamente o processo é necessário estabelecer o seu comportamento nas regiões fronteira.

1.2.5 MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

DEFINIÇÃO 1.7: Seja $\{X(t), t\in[0,T]\}$ um movimento browniano com tendência μ e parâmetro de difusão σ^2. O processo definido por

$$Y(t)=\exp(X(t))$$

diz-se um movimento browniano geométrico.

O espaço de estados associado a um movimento browniano geométrico é o intervalo $(0,\infty)$.

Note-se que, sendo Y(t) um movimento browniano geométrico e $t_0<t_1<...<t_n$ uma sequência de instantes, os rácios

$$\frac{Y(t_1)}{Y(t_0)}, \frac{Y(t_2)}{Y(t_1)}, \ldots, \frac{Y(t_n)}{Y(t_{n-1})}$$

são independentes, já que os incrementos $X(t_1)-X(t_0),\ldots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ também o são.

Tendo em conta que $Y(t)=Y(0)\exp(X(t)-X(0))$ tem-se

$$E[Y(t)|Y(0)=y]=yE[\exp(X(t)-X(0))].$$

Notando que X(t)-X(0) tem distribuição normal de média μt e variância $\sigma^2 t$ e que, por conseguinte, E[exp(X(t)-X(0))]=M(1), sendo M a função geradora de momentos de $X(t) - X(0)$, obtém-se

(8) $$E[Y(t)|Y(0)=y]=y\exp\{t(\mu+\sigma^2/2)\}.$$

Da mesma forma se obtém

$$E[Y(t)^2|Y(0)=y]=y^2E[\exp\{2(X(t)-X(0))\}]=y^2\exp[2t(\mu+\sigma^2)].$$

A variância de Y(t) é, então, dada por

(9) $$Var[Y(t)|Y(0)=y]=y^2\exp[2t(\mu+\sigma^2/2)][\exp(t\sigma^2)-1].$$

Aplicando o Teorema 1.1, imediatamente se constata que o movimento browniano geométrico é um processo de difusão com parâmetros infinitesimais dados por

(10) $$\mu_Y(y) = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu\right)y,$$
$$\sigma_Y^2(y) = \sigma^2 y^2.$$

Note-se que se Y(t) é um movimento browniano geométrico com parâmetros $\mu_Y(y)$ e $\sigma_Y^2(y)$, então lnY(t) é um movimento browniano com média infinitesimal e variância infinitesimal dadas respectivamente por

$$\frac{\mu_Y(y)}{y} - \frac{\sigma_Y^2(y)}{2y^2},$$

$$\frac{\sigma_Y^2(y)}{y^2}.$$

Este resultado pode também ser demonstrado por aplicação do teorema 1.1 fazendo g(y)=lny.

1.3 EQUAÇÕES PROGRESSIVAS E REGRESSIVAS

Seja $\{X(t), t\in[0,T]\}$ um processo de difusão com parâmetros infinitesimais $\mu(x,t)$ e $\sigma^2(x,t)$. Considere-se $t>s$ fixo. Seja $P(s,x,t,y)=P\{X(t)\leq y|X(s)=x\}$ a distribuição das transições de $X(t)$.

Sob certas condições $P(s,x,t,y)$ tem uma densidade contínua dada por

$$\frac{\partial P(s,x,t,y)}{\partial y}=p(s,x,t,y).$$

Mostra-se que a densidade $p(s,x,t,y)$ satisfaz a equação diferencial regressiva de Kolmogorov,

$$\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\mu(s,x)\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

onde $t\in]0,T[$ e x e y pertencem ao interior de χ.

Considere-se o caso particular do processo $X(t)$ ser homogéneo no tempo e, por conseguinte, os parâmetros infinitesimais serem independentes da variável tempo, isto é, $\sigma^2(x,t)=\sigma^2(x)$ e $\mu(x,t)=\mu(x)$. Nestas circunstâncias, é habitual representar a função de distribuição de transição $P(s,x,t,y)$ por $P(t-s,x,y)$ (note-se que as funções são distinguidas pelo número de argumentos), já que a transição do processo do estado x para o estado y depende apenas do intervalo de tempo t-s. Representando por $p(h,x,y)$ a densidade associada a $P(h,x,y)$, tem-se $\frac{\partial p(s,x,t,y)}{\partial s}=-\frac{\partial p(t-s,x,y)}{\partial h}$.

Nesta nova notação a equação diferencial regressiva é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial h}=\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\mu(x)\frac{\partial p}{\partial x}.$$

A função $p(s,x,t,y)$ satisfaz ainda a equação progressiva (a designação deriva do facto das variáveis pertinentes serem t e y)

$$\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(t,y)p(s,x,t,y)]+\frac{\partial}{\partial y}[\mu(t,y)p(s,x,t,y)]=0.$$

Em relação ao caso homogéneo esta equação adapta-se à nova notação substituindo respectivamente $p(s,x,t,y)$ por $p(h,x,y)$ e $\frac{\partial p(s,x,t,y)}{\partial t}$ por $\frac{\partial p(h,x,y)}{\partial h}$.

A solução destas equações diferenciais não é em geral única o que se deve ao facto de estas não se referirem ao comportamento do processo na fronteira do espaço de estados. Estas equações podem ser encontradas em Arnold (1974), pag. 41-44.

MOVIMENTO BROWNIANO

Sendo X(t) um movimento browniano, tem-se $\mu(x)=0$ e $\sigma^2(x)=\sigma^2$ para $-\infty < x < +\infty$. Representando por p(h,x,y) a densidade de probabilidade de transição para $X(t+h)|X(t)=x$, as equações regressivas e progressivas associadas ao processo são, respectivamente,

$$\frac{\partial p}{\partial h}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial h}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}.$$

A única densidade de probabilidade que, com a respectiva condição inicial, satisfaz estas equações é a densidade normal de média x e variância $\sigma^2 h$, dada por

$$\psi(\sigma^2 h,x,y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi h}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2h\sigma^2}\right\}.$$

MOVIMENTO BROWNIANO COM TENDÊNCIA

Sendo X(t) um movimento browniano com tendência $\mu\neq 0$ e variância $\sigma^2(x)=\sigma^2$ para $-\infty < x < +\infty$, as equações regressiva e progressiva associadas ao processo são respectivamente

$$\frac{\partial p}{\partial h}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p}{\partial h}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial p}{\partial y}.$$

A única densidade que, com a respectiva condição inicial, satisfaz estas equações é $p(h,x,y)=\psi(\sigma^2 h,x+\mu h,y)$.

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS DE ITO

Por desempenhar um papel fundamental na modelização de fenómenos económicos sujeitos a incertezas vai, neste capítulo, dedicar-se especial importância à teoria das equações diferenciais estocásticas de Ito. Vai, no entanto, começar por expor-se algumas noções fundamentais ao desenvolvimento da mesma.

2.1 CONCEITOS INTRODUTÓRIOS

Seja Ω o espaço fundamental. F diz-se uma σ-álgebra relativamente a Ω se

1. $\Omega \in F$;
2. $A \in F \Rightarrow A^c \in F$;
3. se A_1, A_2, ...$\in F$ em número finito ou infinidade numerável então $A_1 \cup A_2 \ldots \in F$.

Os elementos de F dizem-se conjuntos mensuráveis. O espaço (Ω,F,P), onde P é uma medida de probabilidade, diz-se espaço de probabilidade.

Seja G uma classe de subconjuntos de Ω. A intersecção de todas as σ-álgebras que contêm G diz-se a σ-álgebra gerada por G e designa-se por $\sigma(G)$.

Seja X uma variável aleatória de $(\Omega;F)$ em (χ,F'). X diz-se F-mensurável se as preimagens dos conjuntos mensuráveis de F′ são conjuntos mensuráveis de F. Intuitivamente, X é F-mensurável se para cada acontecimento com significado em χ a sua preimagem for um acontecimento com significado no espaço original.

Sendo X uma variável aleatória F-mensurável, o conjunto U(X) de preimagens de conjuntos mensuráveis de F′ é uma σ-álgebra em Ω e é a menor σ-álgebra com respeito à qual X é mensurável. Diz-se a σ-álgebra gerada por X em Ω.

Considere-se o caso particular $\chi=\Re$. Seja I a classe de intervalos abertos à esquerda e fechados à direita

$$(a,b]=\{x: a<x\leq b\}, \quad a<b,$$

e defina-se $B=\sigma(I)$ como a σ-álgebra mínima que contém I. A B chama-se corpo de Borel em $\Re$. Se nada for referido em contrário é esta a σ-álgebra de $\Re$ que é considerada.

Seja $X(\omega)$ uma função numérica real e finita com domínio em Ω e F uma σ--álgebra relativamente a Ω. Se $E \in B$ implica $X^{-1}(E) \in F$, então a função diz-se mensurável à Borel (isto é, se E é um conjunto com significado então $X^{-1}(E)$ também o é).

2.2 DERIVAÇÃO INTUITIVA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA DE ITO

Antes de introduzir o conceito de equação diferencial estocástica reveja-se o significado de uma equação diferencial determinística. Seja x(t) uma função de t definida em [0,T], com $x(0)=x_0$. Considere-se a equação,

$$x(t+\Delta t)-x(t)=f(t,x(t))\Delta t+o(\Delta t),$$

onde Δt representa um intervalo de tempo e $o(\Delta t)$ é tal que $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. Num período de tempo infinitamente pequeno, dt, o incremento de x(t) é certo e é dado por f(t,x(t))dt. Representando por dx o incremento de x(t) ocorrido durante o intervalo dt, obtém-se a equação diferencial determinística,

$$dx=f(t,x)dt.$$

Sejam f e σ funções reais definidas em $[0,T]\times\Re$. Considere-se agora o caso de o incremento infinitesimal de $X(t,\omega)$ no intervalo de tempo Δt ser aleatório (neste caso $X(t,\omega)$ representa uma variável aleatória) com componente determinística $f(t,X(t,\omega))\Delta t$ e componente aleatória $V(t+\Delta t,\omega)-V(t,\omega)$ tal que

$$V(t+\Delta t,\omega)-V(t,\omega)|X(t,\omega) \sim N[0,\Delta t\sigma^2(t,X(t,\omega))].$$

Tal componente aleatória pode, então, ser representada por

$$V(t+\Delta t,\omega)-V(t,\omega)=\sigma(t,X(t,\omega))[Z(t+\Delta t,\omega)-Z(t,\omega)],$$

onde $\{Z(t,\omega),t\in[0,T]\}$ é um movimento browniano padrão.

A variação de X(t) no intervalo de tempo Δt é, então, dada pela equação (para simplificar omite-se ω) ,

$$X(t+\Delta t)-X(t)=f(t,X(t))\Delta t+\sigma(t,X(t))[Z(t+\Delta t)-Z(t)]+o_p(\Delta t),$$

onde $o_p(\Delta t)$ representa agora um termo aleatório de média nula tal que $E[o_p(\Delta t)]^2/\Delta t\to 0$ quando $\Delta t\to 0$. $o_p(\Delta t)$ representa não só a componente determinística não explicada por $f(t,X(t))\Delta t$ como também a componente aleatória não explicada por V(t). No limite $o_p(\Delta t)$ corresponde à função nula.

Considerando a equação anterior em termos infinitesimais, obtém-se a equação diferencial estocástica de Ito que pode ser escrita na forma

(1) $$dX(t,\omega)=f(t,X(t,\omega))dt+\sigma(t,X(t,\omega))dZ(t,\omega),$$

sujeita à condição inicial $X(0,\omega)=x_0(\omega)=x_0$ (x_0 é uma variável aleatória que pode, eventualmente, degenerar numa constante). $dX(t,\omega)$ designa o incremento infinitesimal do processo $X(t,\omega)$ ocorrido durante o intervalo de tempo $[t,t+dt]$ e $dZ(t,\omega)$ designa o correspondente incremento de $Z(t,\omega)$. Simplificando a notação, a equação diferencial estocástica anterior pode ser representada por

(2) $$dX(t)=f(t,X(t))+\sigma(t,X(t))dZ(t).$$

A análise desta equação diferencial estocástica, ao contrário das equações diferenciais determinísticas, requer um tratamento especial já que o termo aleatório dZ não existe no sentido usual dado não existir

$$\lim\frac{Z(t+\Delta t)-Z(t)}{\Delta t},$$

uma vez que as realizações do movimento browniano não são funções diferenciáveis em relação a t. Torna-se, então, necessário a atribuição de um significado diferente a dZ.

De facto, Arnold (1974), introduzindo o conceito de processo estocástico generalizado e encarando o movimento browniano como tal, mostrou, com base na igualdade das funções covariâncias, que

(3) $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{Z(t+\Delta t)-Z(t)}{\Delta t} = \xi(t),$$

ou, inversamente,

(4) $$Z_t = \int_0^t \xi(s)ds,$$

onde $\xi(t)$ é um processo ruido branco e, por conseguinte, um processo sem existência real.

A equação diferencial estocástica de Ito, com a condição inicial $X(0)=x_0$, pode ser representada na forma

(5) $$X(t) = x_0 + \int_0^t f(s,X(s))ds + \int_0^t \sigma(s,X(s))dZ(s),$$

onde $\int_0^t f(s,X(s))ds$ designa o usual integral de Riemann definido por

(6) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_i f(t_i, X(t_i))(t_{i+1}-t_i) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_i f(t_{i+1}, X(t_{i+1}))(t_{i+1}-t_i),$$

com $\varepsilon=\max(t_{i+1}-t_i)$ e $0<t_0<t_1<\ldots<t_n=t$.

Em relação ao integral estocástico,

(7) $$\int_0^t \sigma(s,X(s))dZ(s),$$

dado dZ(s) não existir, vai tentar dar-se uma definição semelhante à interpretação do integral de Riemann, para o que será necessário estabelecer um critério de convergência. No entanto, definido o critério de convergência, os dois limites mencionados em (6) conduzem, em geral, a valores diferentes.

O integral estocástico vai ser definido tendo em conta o critério de convergência em probabilidade[1] bem como a utilização de um limite do primeiro tipo.

---

[1] A sucessão de variáveis aleatórias reais $\{X_n, n \in \aleph\}$ converge em probabilidade para a variável aleatória X se, qualquer que seja ε positivo, $P\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Com a definição apresentada o integral designa-se por integral estocástico de Ito. Outras definições possíveis são apresentadas na secção 2.6.

Na secção seguinte vai definir-se o integral estocástico de Ito para um tipo especial de funções, procedendo-se na secção 2.4 a uma generalização deste conceito.

2.3 INTEGRAL ESTOCÁSTICO DE ITO PARA *STEP FUNCTIONS*

Antes de definir o integral estocástico de Ito para um tipo particular de funções vão introduzir-se algumas definições.

DEFINIÇÃO 2.1: Seja $\{Z(t), t \in [0,T]\}$ um movimento browniano definido num espaço de probabilidade (Ω, F, P). Uma família de σ-álgebras $F(t)$ em F, $t \in [0,T]$, diz-se não antecipada com respeito a $Z(t)$ se:

1. $F(t_1) \subset F(t_2) \qquad 0 \le t_1 \le t_2 \le T$;

2. $F(t)$ contém a σ-álgebra gerada por $Z(s)$, $0 \le s \le t$;

3. $F(t)$ é independente da σ-álgebra gerada por $Z(u)-Z(v)$, $t \le v \le u \le T$.

A condição 3) significa que para $h>0$ os acontecimentos da σ-álgebra gerada por $Z(t+h)-Z(t)$ são independentes dos acontecimentos da σ-álgebra $F(t)$.

DEFINIÇÃO 2.2: Considere-se a função, $\sigma(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\Re$, que se supõe ser mensurável em (t,ω); $\sigma(t,\omega)$ diz-se não antecipada com respeito à família não antecipada de σ-álgebras $F(t)$, $t \in [0,T]$, se

1. $\sigma(t,.)$ é $F(t)$-mensurável para todo o t em $[0,T]$ (isto é, sendo E um elemento do corpo de Borel, $\sigma^{-1}(t,E) \in F(t)$);

2. $\int_0^T |\sigma(t,\omega)|^2\, dt$ é finito com probabilidade 1.

Uma classe particular de funções não antecipadas é a classe *nonanticipating step functions*.

DEFINIÇÃO 2.3: A função não antecipada $\sigma(t,\omega)$ diz-se uma *step function* se existe uma partição do intervalo $[0,T]$,

$$0=t_0<t_1<...<t_n=T,$$

tal que $\sigma(t,\omega)=\sigma(t_i,\omega)$ para $t\in[t_i,t_{i+1}[$, $i=0,1,...,n-1$.

Note-se que, entre os instantes t_i e t_{i+1}, independentes de ω, a função $\sigma(t,\omega)$ é constante e igual a $\sigma(t_i,\omega)$.

Vai, então, definir-se o integral estocástico de Ito para *step functions*.

DEFINIÇÃO 2.4: Seja (Ω,F,P) um espaço de probabilidade e $\sigma(t,\omega):[0,T]\times\Omega\rightarrow\Re$ uma *step function* não antecipada para uma partição do tipo $0=t_0<t_1<...<t_n=T$ e $Z(t,\omega):[0,T]\times\Omega\rightarrow\Re$ um movimento browniano. O integral estocástico de σ com respeito a Z no intervalo $[0,T]$, $\int_0^T\sigma(t,\omega)dZ(t,\omega)$, é uma variável aleatória designada por $I(\sigma,\omega)$, ou abreviadamente $I(\sigma)$, e definida por

$$\begin{aligned}I(\sigma)&=\sum_{i=1}^{n}\sigma(t_{i-1},\omega)\left[Z(t_i,\omega)-Z(t_{i-1},\omega)\right]\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\sigma(t_i,\omega)\left[Z(t_{i+1},\omega)-Z(t_i,\omega)\right].\end{aligned}\tag{8}$$

TEOREMA 2.1: Sejam g e h duas *step functions* não antecipadas. Então tem-se

1. $\int_0^T[g(t)+h(t)]dZ(t)=\int_0^T g(t)dZ(t)+\int_0^T h(t)dZ(t)$;

2. $\int_0^T cg(t)dZ(t)=c\int_0^T g(t)dZ(t)$ para toda a constante real c;

3. se g e h satisfazem $\int_0^T\left[E\left[g^2(t)\right]+E\left[h^2(t)\right]\right]dt<\infty$, então,

$$E\left[\int_0^T g(t)dZ(t)\right] = E\left[\int_0^T h(t)dZ(t)\right] = 0,$$

$$E\left[\int_0^T g(t)dZ(t)\int_0^T h(t)dZ(t)\right] = \int_0^T E[g(t)h(t)]dt.$$

DEM.:As propriedades 1) e 2) resultam directamente da definição.

Para demonstrar a primeira parte de 3) note-se que

$$E\left[\int_0^T g(t)dZ(t)\right] = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)[Z(t_{k+1}) - Z(t_k)]\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[g(t_k)[Z(t_{k+1}) - Z(t_k)]\right].$$

Mas como g(t) é não antecipada então $g(t_k)$ e $[Z(t_{k+1}) - Z(t_k)]$ são independentes e portanto

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left[g(t_k)[Z(t_{k+1}) - Z(t_k)]\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[g(t_k)\right]E\left[Z(t_{k+1}) - Z(t_k)\right])$$

$$= 0.$$

Esta última igualdade deve-se ao facto de $E[g(t_k)]$ ser finito (uma vez que por hipótese $\int_0^T \left[E\left[g^2(t)\right] + E\left[h^2(t)\right]\right]dt < \infty$) e $E\left[Z(t_{k+1}) - Z(t_k)\right] = 0$.

Para provar a 2ª parte de 3. veja-se Schuss (1980), pag 64.

Vai, na secção seguinte, definir-se o integral estocástico de Ito para uma qualquer função não antecipada.

2.4 INTEGRAL ESTOCÁSTICO DE ITO PARA FUNÇÕES NÃO ANTECIPADAS

Com base na definição de integral estocástico para uma *step function* vai, na presente secção, definir-se o integral estocástico de Ito para uma qualquer função não anticipada.

Considerem-se para o efeito os seguintes lemas.

LEMA 2.1: Seja $\sigma(t,\omega)$ uma função não antecipada qualquer. Então existe uma sequência $\{\sigma_n, n \in \aleph\}$ de *step functions* não antecipadas tal que quando $n \to \infty$ se tem

$$\int_0^T |\sigma_n(t,\omega) - \sigma(t,\omega)|^2 \, dt \to 0$$

com probabilidade 1.

DEM.: Bharucha-Reid (1972), pag 223.

O lema 2.1 implica que

$$P\left[\omega : \int_0^T |\sigma_n(t,\omega) - \sigma(t,\omega)|^2 \, dt > \varepsilon \right] \to 0$$

quando $n \to \infty$, isto é,

(9) $$\int_0^T |\sigma_n(t,\omega) - \sigma(t,\omega)|^2 \, dt \xrightarrow{P} 0.$$

Vai então mostrar-se que, nas condições do lema anterior, existe uma variável aleatória $\int_0^T \sigma(t,\omega) dZ(t,\omega)$ tal que, para todo o ε positivo,

$$P\left[\omega : \left| \int_0^T \sigma_n(t,\omega) dZ(t,\omega) - \int_0^T \sigma(t,\omega) dZ(t,\omega) \right| > \varepsilon \right] \to 0,$$

isto é,

$$\int_0^T \sigma_n dZ \xrightarrow{P} \int_0^T \sigma dZ.$$

Para o efeito, considere-se o seguinte resultado.

LEMA 2.2: Sendo g(t)=g(t,ω) uma *step function* não antecipada tem-se

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0:\ P\left[\omega: \left|\int_0^T g(t)dZ(t)\right| > \delta\right] \leq \frac{\varepsilon}{\delta^2} + P\left[\omega: \int_0^T |g(t)|^2\, dt > \varepsilon\right].$$

DEM.: Arnold (1974), pag 68-69.

Aplicando o resultado do lema 2.2 a $g=\sigma_n-\sigma_m$ (*step function* não antecipada) e tendo em conta que de (9) resulta que

$$\int_0^T |\sigma_n - \sigma_m|^2\, dt \xrightarrow{P} 0 \text{ quando } n,m\to\infty,$$

uma vez que

$$\int_0^T |\sigma_n - \sigma_m|^2\, dt \leq 2\int_0^T |\sigma_n - \sigma|^2\, dt + 2\int_0^T |\sigma_m - \sigma|^2\, dt,$$

tem-se

$$P\left[\omega: \left|\int_0^T \sigma_n(t)dZ(t) - \int_0^T \sigma_m(t)dZ(t)\right| > \delta\right] \longrightarrow 0 \text{ quando } n,m \to \infty.$$

Conclui-se então que a sucessão $\int_0^T \sigma_n(t)dZ(t)$ é uma sucessão estocástica de Cauchy no sentido da convergência em probabilidade, existindo portanto uma variável aleatória, única com probabilidade 1, para a qual a sucessão converge em probabilidade.

Tem-se, então, a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.5: Seja (Ω,F,P) um espaço de probabilidade, Z(t,ω) um movimento browniano e σ(t,ω) uma função não antecipada, ambos definidos em $[0,T]\times\Omega$. O integral estocástico de σ com respeito a Z, definido no intervalo [0,T], $I(\sigma) = \int_0^T \sigma(t,\omega)dZ(t,\omega)$, é uma variável aleatória definida como sendo o limite em probabilidade da sucessão estocástica de Cauchy $\int_0^T \sigma_n(t,\omega)dZ(t,\omega)$:

$$\int_0^T \sigma_n(t,\omega)dZ(t,\omega) \xrightarrow{P} \int_0^T \sigma(t,\omega)dZ(t,\omega) = I(\sigma).$$

$\{\sigma_n\}$ é uma sequência de *step functions* não antecipadas que aproximam σ no sentido de convergência em probabilidade, isto é,

$$\int_0^T |\sigma(t,\omega) - \sigma_n(t,\omega)|^2 \, dt \xrightarrow{P} 0.$$

Prova-se que $I(\sigma)$ é único com probabilidade 1 e independente da escolha da sequência $\{\sigma_n\}$.

A definição de integral estocástico podia ser apresentada considerando outros conceitos de convergência, nomeadamente convergência em média quadrática que englobaria como caso particular a definição dada, já que a convergência em média quadrática implica, como é bem sabido, a convergência em probabilidade.

2.5 PROPRIEDADES DO INTEGRAL ESTOCÁSTICO DE ITO

Algumas das propriedades do integral estocático de Ito são apresentadas no teorema que se segue.

TEOREMA 2.2: Seja (Ω,F,P) um espaço de probabilidade e $Z(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\Re$ um movimento browniano padrão. Têm-se os seguintes resultados:

- se $\sigma_1(t,\omega)$ e $\sigma_2(t,\omega)$ são funções reais não antecipadas definidas em $[0,T]\times\Omega$ e a_1, a_2 são constantes reais então,

$$\int_0^T (a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2)dZ = a_1\int_0^T \sigma_1 dZ + a_2\int_0^T \sigma_2 dZ;$$

- se $\sigma_1(t,\omega)$ e $\sigma_2(t,\omega)$ são como no ponto anterior e $a_1(\omega)$ e $a_2(\omega)$ são variáveis aleatórias reais tais que $a_1\sigma_1+a_2\sigma_2$ é uma função não antecipada em $[0,T]$ então,

$$\int_0^T (a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2)dZ = a_1\int_0^T \sigma_1 dZ + a_2\int_0^T \sigma_2 dZ;$$

- seja $[s,u]$ um subconjunto de $[0,T]$ e seja $I[s,u]$ a função caracteristica de $[s,u]$. Então,

$$\int_0^T I[s,u]dZ = Z(u) - Z(s);$$

- suponha-se que $\sigma(t,\omega)$ é uma função não antecipada em $[0,T]$ tal que $\int_0^T E[\sigma(s,\omega)]^2 ds < \infty$. Então,

$$E\left[\int_0^T \sigma(t)dZ(t)\right] = 0;$$

$$E\left[\int_0^T \sigma(t)dZ(t)\right]^2 = \int_0^T E[\sigma(t)]^2 dt.$$

DEM.: Gihman e Skorohod (1972), pag 11-13.

O teorema seguinte estabelece a convergência em probabilidade para uma qualquer sequência de funções reais não antecipadas e não apenas para *step functions* não antecipadas.

TEOREMA 2.3: Seja (Ω,F,P) um espaço de probabilidade e $Z(t,\omega):[0,T]\times\Omega \rightarrow \Re$ um movimento browniano. Seja $\{\sigma_n(t,\omega)\}$ uma sequência arbitrária de funções reais não antecipadas (não necessariamente *step functions*) definidas em $[0,T]\times\Omega$ e $\sigma(t,\omega):[0,T]\times\Omega \rightarrow \Re$ uma função não antecipada. Suponha-se que, quando $n\rightarrow\infty$,

$$\int_0^T |\sigma_n(s) - \sigma(s)|^2 ds \xrightarrow{P} 0.$$

Então,

$$\int_0^T \sigma_n dZ \xrightarrow{P} \int_0^T \sigma dZ.$$

DEM: Arnold (1974), pag. 74.

2.6 OUTRO TIPO DE INTEGRAIS ESTOCÁSTICOS

Foi vista a necessidade de introduzir uma definição para o integral estocástico

$$\int_0^T f(t,\omega)dZ(t,\omega),$$

onde Z(t) representa um processo movimento browniano padrão e f(t,ω) uma função não anticipada. De facto, uma vez que as trajectórias do movimento browniano não são funções diferenciáveis em relação a t, o incremento infinitesimal dZ(t) não pode ser interpretado da forma usual. Foi, então, apresentada a definição de integral estocástico de Ito que corresponde a um possível conceito deste integral. No entanto, outras interpretações podem ser dadas. A título de exemplo, considerem-se as duas seguintes formas de definição do integral estocástico, designadas respectivamente por integral de Stratonovich e integral regressivo,

$$\int_0^T f(t,Z(t))dZ(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(t_i,\frac{Z(t_i)+Z(t_{i+1})}{2}\right)[Z(t_{i+1})-Z(t_i)]$$

e

$$\int_0^T f(Z(t))dZ(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(Z(t_{i+1}))[Z(t_{i+1})-Z(t_i)],$$

onde $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$, $\varepsilon=\max(t_{i+1}-t_i)$, e f é uma função satisfazendo certas condições de regularidade.

Note-se que qualquer um destes integrais é definido para funções explícitas de Z(t). O integral de Stratonovich satisfaz todas as regras formais do cálculo clássico, nomeadamente a regra de integração por partes e a regra de mudança de variável.

Os integrais de Ito e Stratonovich estão relacionados da seguinte forma,

$$(S)\int_0^T f(t,Z(t))dZ(t) = (I)\int_0^T f(t,Z(t))dZ(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_x(t,Z(t))dt,$$

onde os prefixos (S) e (I) designam respectivamente integral de Stratonovich e integral de Ito e $f_x(t,x) = \dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$.

2.7 LEMA DE ITO

Nesta secção apresenta-se um resultado fundamental no cálculo integral estocástico de Ito que permite determinar a equação diferencial estocástica satisfeita por um processo definido à custa de um outro.

Considere-se o espaço de probabilidade (Ω,F,P), o processo estocástico $X(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\Re$ mensurável para cada $t\in[0,T]$ com respeito a F(t) e o movimento browniano $Z(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\Re$. Suponha-se que $\sigma(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\Re$ é uma função não antecipada em [0,T], que $f(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\Re$ é mensurável para cada $t\in[0,T]$ com respeito a F(t) e ainda que $\int_0^T|f(t,\omega)|dt<\infty$ com probabilidade 1. Então tem-se o seguinte resultado.

LEMA DE ITO: Seja $u(t,x):[0,T]\times\Re\to\Re$ uma função contínua não aleatória com derivadas parciais dadas por $u_t=\frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ contínuas. Sendo $X(t)=X(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\Re$ um processo que satisfaz a equação diferencial estocástica,

$$dX(t)=f(t)dt+\sigma(t)dZ(t),$$

então o processo $Y(t,\omega)=u(t,X(t,\omega))$ satisfaz em [0,T] a equação diferencial estocástica,

$$(10)\quad dY(t)=\left[u_t(t,X(t))+u_x(t,X(t))f(t)+\frac{1}{2}u_{xx}(t,X(t))\sigma^2(t)\right]dt+u_x(t,X(t))\sigma(t)dZ(t).$$

DEM.: a demonstração deste lema pode ser vista em qualquer livro da especialidade, por exemplo Arnold (1974).

Um caso particular deste lema é dado pelo seguinte corolário.

COROLÁRIO 2.1: Considere-se o caso $X(t)=Z(t)$ com $t\in[0,T]$. Por aplicação do lema de Ito obtém-se

$$du(t,Z(t))=\left[u_t(t,Z(t))+\frac{1}{2}u_{xx}(t,Z(t))\right]dt+u_x(t,Z(t))dZ(t).$$

No caso particular de u ser independente de t, isto é, $u=u(x)$, e duas vezes continuamente diferenciável com respeito a x tem-se

$$(11)\qquad du(Z(t))=\frac{1}{2}u_{xx}(Z(t))dt+u_x(Z(t))dZ(t),$$

ou,

$$u(Z(t)) = u(0) + \frac{1}{2}\int_0^t u_{xx}(Z(s))ds + \int_0^t u_x(Z(s))dZ(s),$$

resultado conhecido por teorema fundamental do cálculo integral estocástico de Ito [Arnold (1974), pag. 93].

O lema de Ito desempenha um papel fundamental no cálculo diferencial estocástico. O lema pode ser generalizado ao caso $u(t,x):[0,T]\times\Re^n \to \Re^k$, $f(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to \Re^n$, $X(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to \Re^n$, $\sigma(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to \Re^n \times \Re^m$ e $Z(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to \Re^m$, com k, n, m inteiros positivos.

Por vir a ser utilizada no capítulo 7, apresenta-se em seguida uma generalização do lema de Ito, obtida para k=m=1, envolvendo movimentos brownianos correlacionados [veja-se Hull (1993)].

LEMA DE ITO GENERALIZADO: Sejam $X_1(t),\ldots,X_n(t)$ processos estocásticos satisfazendo as equações diferenciais estocásticas

$$dX_i(t)=f_i(t,X_1(t),\ldots,X_n(t))dt+\sigma_i(t,X_1(t),\ldots,X_n(t))dZ_i(t,\omega),$$

i=1,...,n. Supõe-se que os processos estocáticos Z_i são movimentos brownianos padrão eventualmente correlacionados no sentido de ser possível representar os incrementos de Z_i e Z_j ocorridos durante o intervalo de tempo Δt, ΔZ_i e ΔZ_j respectivamente, na forma $\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$ e $\varepsilon_j\sqrt{\Delta t}$, com ε_i e ε_j variáveis aleatórias com distribuição normal standard e correlação ρ_{ij}. Então, sendo u uma função dependente de t e $X_i(t)$, i=1,...,n, $u=u(t,X_1(t),\ldots,X_n(t))$, tem-se,

$$du = \left(u_t + \sum_i u_{x_i} f_i + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j u_{x_i x_j}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \right)dt + \sum_i u_{x_i}\sigma_i dZ_i. \tag{12}$$

2.8 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA DE ITO

Considere-se de novo a equação diferencial estocástica de Ito,

(13) $$dX(t,\omega)=f(t,X(t,\omega))dt+\sigma(t,X(t,\omega))dZ(t,\omega),$$

com $t\in[0,T]$, ou, na forma integral,

(14) $$X(t)-X(0)=\int_0^t f(t,X(s))ds+\int_0^t \sigma(s,X(s))dZ(s),$$

sujeita à condição inicial

(15) $$X(0,\omega)=x_0(\omega)=x_0.$$

Conforme tem sido considerado, X(t) representa um processo estocástico real F(t)-mensurável e Z(t) um movimento browniano padrão. Supõe-se que F(t) é independente da σ-álgebra gerada por Z(u)-Z(t), $u\geq t$, $\forall t\in[0,T]$. Supõe-se ainda que f e σ são independentes de $\omega\in\Omega$, isto é, ω surge apenas indirectamente nas formas $f(t,X(t,\omega))$ e $\sigma(t,X(t,\omega))$.

Depois de definir solução de uma equação diferencial estocástica vai apresentar-se um teorema que estabelece condições que garantem a existência e unicidade de tais soluções.

2.8.1 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

DEFINIÇÃO 2.6: Um processo estocástico X(t) diz-se uma solução de (13) e (15) se satisfaz as seguintes propriedades:

- X(t) é F(t)-mensurável (isto é, não antecipada para $t\in[0,T]$);
- as funções f e σ são tais que, com probabilidade 1,

$$\int_0^T |f(t,X(t))| dt<\infty,$$

$$\int_0^T (\sigma(t,X(t)))^2 dt<\infty.$$

- a equação diferencial estocástica (14) é verificada para todo $t\in[0,T]$ com probabilidade 1.

Tendo em conta a definição de solução de uma equação diferencial estocástica apresentada, tem-se o seguinte teorema.

TEOREMA 2.4: Considere-se a equação diferencial estocástica (13) sujeita à condição inicial (15) e suponham-se válidas as seguintes condições:

1. as funções $f(t,x)$ e $\sigma(t,x)$ estão definidas para $t\in[0,T]$ e $x\in\Re$ e são mensuráveis com respeito a todos os seus argumentos;

2. existe uma constante $k>0$ tal que para todo $t\in[0,T]$ e $x, x' \in\Re$

(16) $$|f(t,x)-f(t,x')|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,x')|\le k|x-x'|;$$

(17) $$|f(t,x)|^2+|\sigma(t,x)|^2\le k^2(1+|x|^2);$$

3. a condição inicial $X(0,\omega)$ não depende de $Z(t,\omega)$ e $E(X(0,\omega)^2)<\infty$.

Então existe uma solução $X(t)$ de (13), definida em $[0,T]\times\Omega$, satisfazendo a condição inicial (15), única com probabilidade 1, com trajectórias contínuas com probabilidade 1 e tal que $\sup\limits_{t\in[0,T]} E(X(t)^2)<\infty$.

DEM.: Arnold (1974), pag 106-111.

O teorema anterior garante, em particular, que, sob as condições 1., 2. e 3., a equação diferencial estocástica tem uma e uma só solução. A unicidade da solução significa que, sendo $X(t)$ e $Y(t)$ duas soluções, então se tem

$$P\left[\sup_t|X(t)-Y(t)|=0\right]=1.$$

A condição (16), conhecida por condição de Lipschitz, estabelece que, aquando de uma variação em x, $f(t,x)$ e $\sigma(t,x)$ não sofrem uma variação superior a um múltiplo da própria variação em x. Esta condição implica em particular a continuidade de $f(t,.)$ e $\sigma(t,.)$ para todo o $t\in[0,T]$.

A condição (17), conhecida por condição restrictiva do crescimento (*restiction growth condition*), limita f e σ uniformemente com respeito a $t\in[0,T]$ e permite no máximo um crescimento linear destas funções com respeito a x.

Uma condição suficiente para que a condição de Lipschitz seja verificada é que as funções f(t,x) e σ(t,x) tenham ambas derivadas parciais de primeira ordem com respeito a x contínuas para todo $t \in [0,T]$, limitadas em $[0,T] \times \Re$.

O teorema da existência e unicidade de solução de uma equação diferencial estocástica de Ito continua válido se a condição de Lipschitz for substituída pela condição mais geral de que, para todo h>0, existe uma constante K_h tal que, para todo $t \in [0,T]$, $|x| \leq h$ e $|x'| \leq h$, se tem

$$|f(t,x) - f(t,x')| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,x')| \leq K_h |x - x'|$$

[veja-se Arnold (1974), pag. 112].

2.8.2 PROPRIEDADES DA SOLUÇÃO

A SOLUÇÃO COMO UM PROCESSO DE MARKOV

O teorema seguinte garante que, sob certas condições, a solução da equação diferencial estocástica (13) com a condição inicial (15) é um processo de Markov.

TEOREMA 2.5: Se forem satisfeitas as condições do Teorema 2.4 então a solução X(t) da equação (13) sujeita à condição inicial (15) é um processo de Markov no intervalo [0,T] cuja distribuição de probabilidade no instante t=0 é a distribuição de x_0 e cuja probabilidade de transição é dada por

$$P(s,x,t,y)=P(X(t)\leq y|X(s)=x).$$

DEM.: Arnold (1974), pag 146.

A SOLUÇÃO COMO UM PROCESSO DE DIFUSÃO

Os teoremas 2.4 e 2.5 estabelecem condições para que a solução da equação diferencial estocástica (13) sujeita à condição inicial (15) seja um processo de Markov com trajectórias contínuas. O teorema seguinte apresenta condições suficientes para que tal solução seja um processo de difusão.

TEOREMA 2.6: Considere-se a equação diferencial estocástica (13). Suponham-se verificadas as condições do Teorema 2.4 e ainda que f e σ são funções contínuas com respeito a t. Então X(t) é um processo de difusão com tendência f(t,x) e coeficiente de difusão $\sigma^2(t,x)$.

DEM.: Schuss (1980), pag 103.

Uma vez que a probabilidade de transição de um processo de difusão é especificada a partir dos coeficientes tendência e difusão (sob certas condições de regularidade) então esta pode ser determinada mesmo sem encontrar a solução explícita da equação diferencial.

Também se X(t) é um processo de difusão com tendência e parâmetro de difusão f(t,x) e $\sigma^2(t,x)$, respectivamente, satisfazendo certas condições de regularidade, e se a função probabilidade de transição de X(t) obedece a certas condições de continuidade, então X(t) é solução da equação diferencial estocástica

$$dX(t)=f(t,X(t))dt+\sigma(t,X(t))dZ(t),$$

onde Z(t) representa um movimento browniano padrão [veja-se Gihman e Skorohod (1972)].

3. INTRODUÇÃO ÀS CARACTERÍSTICAS GERAIS DAS OPÇÕES

As opções como investimento assumem no mercado financeiro um papel relevante. De facto, as opções, além de permitirem a obtenção de elevados lucros, desempenham uma função fundamental como instrumento de manutenção do risco na medida em que, pagando um prémio, o investidor numa opção limita o prejuízo a esse montante.

3.1 CONCEITO DE OPÇÃO

Uma opção é um contrato negociável, efectuado entre dois investidores, no qual o comprador paga uma determinada quantia em dinheiro e em troca o vendedor garante ao comprador o direito de comprar ou vender um determinado activo até uma determinada data, a um preço estabelecido no momento de execução do contrato. Conforme se tratar da compra ou da venda a opção designa-se respectivamente por opção de compra ou opção de venda. A quantia paga para obter o direito de opção é designada por prémio. O preço fixo especificado no contrato de opção diz-se preço de exercício. A data futura fixada, a partir da qual o contrato deixa de ter significado, diz-se data de vencimento ou data de expiração da opção.

Há dois tipos de opções: opções europeias e opções americanas. Uma opção europeia pode ser exercida apenas na data de vencimento; uma opção americana pode ser exercida em qualquer altura até essa data. Note-se que uma opção pode vencer sem chegar a ser exercida.

O comprador de uma opção perde no máximo o prémio e tem um ganho que em princípio pode ser infinito. Por exemplo, o comprador de uma opção de compra europeia beneficia se a diferença entre o preço do activo e o preço de exercício no momento do vencimento do contrato for superior ao valor capitalizado do prémio. O detentor do contrato de opção exerce o seu direito apenas se este lhe for vantajoso caso contrário a opção expira sem ser exercida e o seu prejuízo é limitado ao prémio pago quando da sua aquisição.

Na determinação do lucro obtido na data de exercício pelo detentor de uma opção é habitualmente desprezada a grandeza associada ao prémio inicial. Assim, diz-se que o lucro é nulo se a opção não for exercida e é a diferença entre o valor do activo e o preço de exercício se a opção for exercida.

Em cada instante do seu período de vida a opção tem um valor, designado por preço ou valor da opção. A análise que se vai desenvolver consiste precisamente na determinação desse valor.

No presente trabalho vão ser consideradas apenas opções de compra europeias sobre acções. A análise das opções americanas baseia-se na análise relativa às opções europeias sendo no entanto mais complexa uma vez que, como já foi dito, podem ser exercidas em qualquer instante entre a data de celebração do contrato e a data de vencimento. O valor de uma opção de venda pode ser determinado em função do valor da opção de compra associada.

3.2 FACTORES QUE DETERMINAM O VALOR DE UMA OPÇÃO

Em cada instante compreendido entre a data de realização do contrato de opção e a data de vencimento a opção tem um valor, ou preço, associado. Tal preço varia constantemente ao longo do tempo em função dos seguintes factores:

- instante presente (t);
- preço corrente do título subjacente à opção no instante t (S(t));
- preço de exercício (X);
- data de vencimento do contrato (T);
- risco associado ao título (σ-desvio padrão do crescimento relativo instantâneo do preço da acção, medido por unidade de tempo);
- taxa de juro instantânea, sem risco (r).

O preço de mercado da opção num instante t do seu período de vida, $C(t,S(t))$, pode, então, representar-se pela relação (note-se que X, σ, T e r são parâmatros fixos)

$$C(t,S(t))=f(t,S(t),X,\sigma,T,r),$$

onde f é uma função cuja determinação é o principal objectivo do estudo (para simplificar a notação vai, quando conveniente, designar-se $C(t,S(t))$ por $C(t,S)$).

A função f deve satisfazer determinadas condições intuitivas:

- Quanto maior for o preço da acção no instante presente maior é, em termos probabilísticos, o preço da acção na data de vencimento e por conseguinte maior é o valor da opção. À medida que a data de vencimento da opção se aproxima esta relação torna-se clara. Nessa data o valor da opção é nulo se o valor da acção for inferior ao preço de exercício e é a diferença entre o preço da acção e o preço de exercício no caso contrário, isto é, $C(T,S(T))=\max\{0,S(T)-X\}$.

- O valor da opção de compra decresce, claramente, à medida que o preço de exercício aumenta, isto é, f é uma função decrescente de X.

- Quanto mais volátil for uma acção, isto é, quanto maior for σ, mais elevada é a probabilidade de se produzir uma acentuada subida ou descida do preço do título. Se se produz uma subida, quanto mais elevada for maior o valor da opção na data de vencimento. Se se realiza uma descida, por mais significativa que seja, o prejuízo é limitado ao montante do prémio, uma vez que o valor de uma opção é no mínimo nulo. Assim, o valor de uma opção cresce com a volatilidade do título subjacente à opção.

- Quanto maior for o tempo até ao vencimento da opção maiores são as incertezas acerca do preço terminal da acção. Assim, da mesma forma que o preço da opção aumenta com a volatilidade, também o valor da opção aumenta com o tempo até à expiração. Por outro lado, o valor actualizado do preço de exercício é tanto mais baixo quanto mais distante for a data de vencimento e portanto, também por este motivo, o valor da opção aumenta quando aumenta a data de vencimento. De facto, o preço de exercício só é pago no momento em que efectivamente a opção é exercida, sendo este pagamento diferido tanto mais proveitoso quanto mais elevadas forem as taxas de juro e quanto maior for o prazo de vencimento.

- Quanto mais elevada for a taxa de juro, mantendo-se os outros factores constantes, mais elevado é o valor da opção dado o valor actualizado do preço de exercício ser menor.

Em suma, a função f deve ser uma função crescente de S, σ, T e r e decrescente de X. A função f deve, então, ser tal que

$$\frac{\partial f}{\partial S} > 0;\ \frac{\partial f}{\partial X} < 0;\ \frac{\partial f}{\partial \sigma} > 0;\ \frac{\partial f}{\partial T} > 0;\ \frac{\partial f}{\partial r} > 0.$$

Um resultado de grande importância é o facto de o valor de uma opção não depender do valor esperado do preço da acção na data de vencimento. Se todos os factores mencionados para explicar o preço de uma opção forem iguais, duas opções relativas a acções com valores esperados diferentes na data de vencimento têm o mesmo preço.

3.3 LIMITES PARA O VALOR DE UMA OPÇÃO

De forma a evitar a existência de oportunidades de arbitragem[1], é possível estabelecer certos limites para o valor de uma opção.

O preço duma opção, num dado instante, é sempre inferior ao preço da acção subjacente nesse mesmo instante (caso contrário a opção seria vendida e adquirida a acção que na data de vencimento tem sempre mais valor que a opção).

Quando o valor da acção é nulo (isto é, já não lhe é atribuído valor futuro) então o valor da opção é nulo.

Se, num dado instante, o preço da acção for suficientemente elevado, então a probabilidade de uma descida abaixo do preço de exercício torna-se pequena e portanto a probabilidade de a opção ser exercida torna-se elevada. Assim, quando o

[1] Diz-se que há oportunidades de arbitragem numa situação em que, sem um investimento inicial, é possível obter um ganho imediato e em termos futuros não ocorrem perdas, sob quaisquer circunstâncias.

preço da acção for suficientemente elevado, o valor da opção aproxima o valor da acção menos o preço de exercício.

O valor da opção num dado instante nunca é inferior ao valor da acção nesse instante menos o preço de exercício. Para provar este resultado considerem-se duas carteiras constituídas num dado instante t. A carteira A consiste numa opção de compra com valor C(t,S(t)) e num conjunto de títulos com rendimento dado pela taxa de juro sem risco do mercado cujo valor na data de vencimento da opção é X (preço de exercício da opção) e com valor actual representado por X′. A carteira B é formada simplesmente por uma acção com preço S(t). O quadro 3.1 diz respeito ao valor das duas carteiras no instante t e na data de vencimento da opção.

Quadro 3.1

carteira	valor da carteira no instante:		
	t	T	
		$S(T) \leq X$	$S(T) > X$
A	$C(t,S(t))+X'$	X	S(T)
B	S(t)	S(T)	S(T)

O valor da carteira A na data de vencimento da opção nunca é inferior ao valor da carteira B e, por conseguinte, no instante t esta relação deve ser mantida. Assim, tem-se,

$$C(t,S(t))+X' \geq S(t) \Leftrightarrow C(t,S(t)) \geq S(t)-X' \Rightarrow C(t,S(t)) \geq S(t)-X,$$

o que prova o resultado.

Quando se aproxima a data de vencimento, o valor da opção tende para o valor da acção menos o preço de exercício ou zero se este valor for negativo.

A figura 3.1 estabelece uma relação entre o valor de uma opção de compra e o valor do activo subjacente, num dado instante do período de vida da opção.

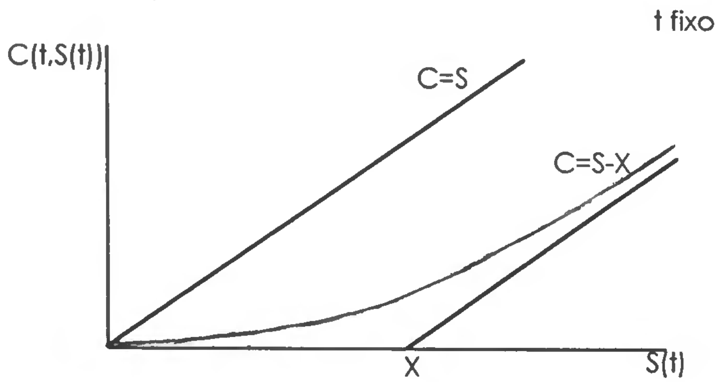

Figura 3.1

A área entre as duas rectas representa o conjunto de pontos do tipo (S(t),C(t,S(t)) que satisfazem as propriedades já mencionadas. A curva representada define tipicamente a evolução do valor da opção em função do preço da acção.

As considerações efectuadas nesta secção e na anterior são gerais na medida em que são válidas para qualquer opção sem suposições adicionais acerca do comportamento do preço da acção. Qualquer modelo de avaliação de opções terá de ser consistente com os argumentos apresentados.

3.4 ESTRATÉGIAS ENVOLVENDO ACÇÕES E OPÇÕES SOBRE AS MESMAS ACÇÕES

Para ilustrar a importância das opções como instrumento de manutenção do risco de uma carteira vai, na presente secção, apresentar-se uma das mais simples estratégias que envolvem acções e opções.

Considere-se uma carteira mantida num dado instante por aquisição de uma acção e venda de uma opção sobre a mesma acção (*long position* na acção e *short position* na opção).

Introduza-se temporariamente a seguinte notação:

- X-preço de exercício da opção;
- C-valor de venda da opção capitalizado à data de vencimento;
- S_c-valor de compra da acção capitalizado à data de vencimento;
- S_T-valor da acção na data de vencimento da opção.

Se, na data de vencimento da opção, o preço da acção for inferior ao preço de exercício, então o preço da opção é nulo e por conseguinte o ganho associado à venda da opção é dado pelo valor capitalizado desta venda (C). Se o preço da acção for superior ao preço de exercício, o ganho[2] associado à venda da opção corresponde à diferença entre o valor capitalizado da venda e o valor da opção na data de vencimento ($C-(S_T-X)$). O lucro associado à venda da opção é nulo quando o valor capitalizado desta venda igualar o valor da opção na data de vencimento, isto é, $S_T-X=C$.

Em relação à posição na acção, o ganho associado à sua aquisição, na data de vencimento, traduz-se exactamente pela diferença entre o valor da acção nesse momento e o valor capitalizado de compra da mesma (S_T-S_c).

O lucro associado a esta estratégia, obtido na data de vencimento da opção, é dado pela soma dos lucros associados à aquisição da acção e venda da opção. Assim, se o preço da acção na data de vencimento for inferior ao preço de exercício, o ganho global associado a esta estratégia é dado por $C+S_T-S_c$. Se, pelo contrário, o preço da acção for superior ao preço de exercício, o ganho é dado por $C+X-S_c$. Note-se que, neste último caso, o lucro associado à estratégia na data de vencimento da opção é independente do valor da acção nessa data. No entanto, a posição em questão não está coberta em relação ao risco uma vez que a variação do valor da carteira não é certa (se $S_T<X$ a variação do valor da carteira depende do preço da acção).

[2] Os termos "ganho" e "lucro" são usados indistintamente e podem eventualmente referir-se a quantidades negativas, significando neste caso perdas.

Quadro 3.2

lucro	$S_T<X$	$S_T \geq X$
posição na acção	S_T-S_c	S_T-S_c
posição na opção	C	C-(S_T-X)
posição global	C+S_T-S_c	C+X-S_c

O lucro associado a esta estratégia na data de vencimento da opção, sintetizado no quadro 3.2, é representado na figura abaixo pela linha "_____", em função do preço da acção nessa data. Representam-se também, individualmente, os lucros associados à aquisição da acção e à venda da opção.

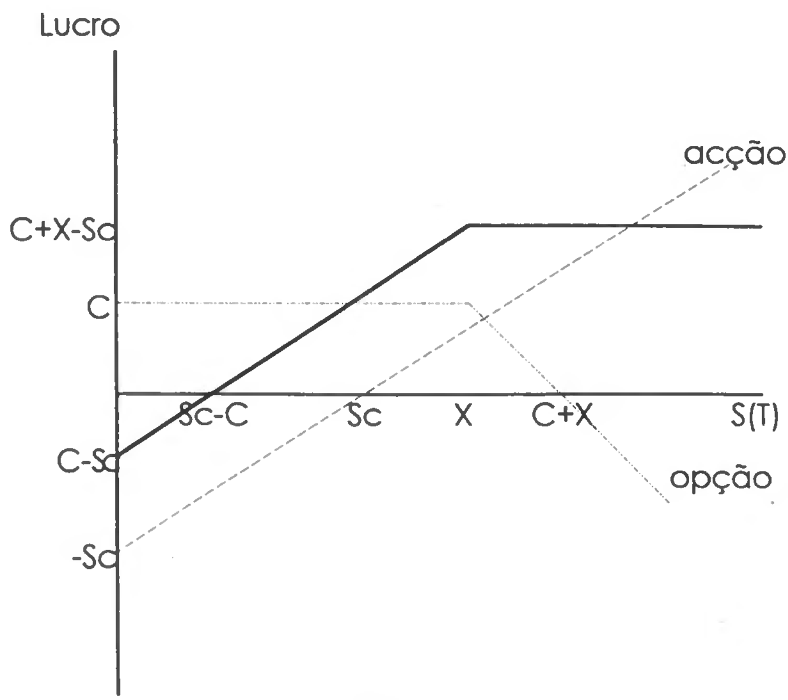

Figura 3.2

Note-se que a carteira assim constituída permite diminuir o prejuízo máximo obtido quer apenas com a acção quer apenas com a opção.

De forma geral, combinando acções com opções é possível obter diferentes relações entre o rendimento da carteira e o preço da acção na data de vencimento.

4. UM MODELO PARA O COMPORTAMENTO DO PREÇO DA ACÇÃO

O conhecimento relativo ao preço futuro duma dada acção é incerto e, por conseguinte, é expresso em termos de modelos probabilísticos. Nesta secção vai modelizar-se o preço da acção por um processo estocástico definido em tempo e espaço de estados contínuos. A aproximação efectuada revela-se, em geral, de boa qualidade.

4.1 DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA SATISFEITA PELO PREÇO DA ACÇÃO

Vai derivar-se, de forma intuitiva, uma equação diferencial estocástica que se supõe ser satisfeita pelo processo relativo ao preço da acção.

Na base desta derivação estão as seguintes hipóteses:

- O preço da acção segue um processo de Markov, isto é, conhecido o preço presente, os preços passados da acção são irrelevantes na previsão do seu preço num dado instante futuro. Esta hipótese traduz a realidade no sentido de a observação da evolução do preço de uma acção ao longo do tempo não permitir prever o seu preço futuro.

- Num período de tempo suficientemente pequeno o lucro relativo esperado pelos investidores numa dada acção, isto é, o crescimento esperado do valor da acção, expresso como proporção do preço corrente da acção, é fixo e portanto independente do instante presente e do preço da acção nesse instante. Suponhamos que os preços de uma dada acção nos instantes t_1 e t_2 são respectivamente S_1 e S_2. Sejam ΔS_1 e ΔS_2 as variações de S_1 e S_2 num período de tempo Δt suficientemente pequeno. Supõe-se então que

$$E\left[\frac{\Delta S_1}{S_1}\right] = E\left[\frac{\Delta S_2}{S_1}\right] = \mu \Delta t,$$

com μ constante. Se a variância do crescimento relativo do preço da acção fosse nula então, num intervalo de tempo dt infinitamente pequeno, tinha-se (S(t) representa, conforme tem sido suposto, o preço da acção no instante t)

$$dS(t)=\mu S(t)dt,$$

que corresponde a uma equação diferencial de variáveis separadas cuja solução se obtém facilmente,

$$\int \frac{1}{S(t)} dS(t) = \int \mu dt$$

$$\ln S(t) = \mu t + \ln S(0)$$

$$S(t) = S(0)e^{\mu t}.$$

- Na realidade o preço da acção exibe volatilidade, isto é, conhecido o preço presente, a previsão do preço num dado instante futuro não é certa. Uma suposição aceitável é que a variância do crescimento relativo num período de tempo Δt suficientemente pequeno seja a mesma, independentemente do preço da acção no início do período. Designe-se, então, por σ^2 a variância do crescimento relativo do preço da acção, por unidade de tempo. Num período de tempo Δt, a variância do crescimento relativo é dada por $\sigma^2 \Delta t$, isto é, representando por $\Delta S(t)$ a variação do preço S(t) no intervalo Δt, tem-se

$$\mathrm{var}\left(\frac{\Delta S(t)}{S(t)}\right) = \sigma^2 \Delta t$$

e, portanto,

$$\mathrm{var}(\Delta S(t)) = S(t)^2 \sigma^2 \Delta t.$$

O modelo usualmente proposto, que se adapta à argumentação exposta, é dado pela equação diferencial estocástica,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ,$$

ou, equivalentemente,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ,$$

onde Z é um movimento browniano padrão e, para simplificar a notação, a dependência de S e Z em relação a t foi omitida.

O termo $\mu S dt$ representa o valor esperado do crescimento dS. A variância do crescimento é dada por $\sigma^2 S^2 dt$. S é um processo com taxa de crescimento esperado instantâneo μ e taxa de variância instantânea σ^2. O parâmetro σ é designado por volatilidade do preço da acção.

4.2 MODELO PROPOSTO

O processo relativo ao preço das acção é suposto ser solução da seguinte equação diferencial estocástica

(1) $$dS = \mu S dt + \sigma S dZ.$$

A solução desta equação diferencial é, conforme o teorema 2.6, um processo de difusão com média infinitesimal μS e variância infinitesimal $\sigma^2 S^2$. De facto, este processo corresponde a um movimento browniano geométrico.

Como consequência do teorema 1.1 tem-se que o processo $\ln S(t)$ é um movimento browniano com tendência $\mu - \sigma^2/2$ e variância σ^2 e, por conseguinte, é possível, a partir deste resultado, realizar qualquer tipo de inferência estatística acerca do processo S. De facto, conhecido o preço da acção no instante t_0, $S(t_0)$, tem-se, para $t > t_0$,

(2) $$\ln S(t) \sim N\left[\ln S(t_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0),\ \sigma^2(t - t_0)\right].$$

Adaptando os parâmetros infinitesimais ao caso presente, resulta da equação (1.8) - o primeiro dígito indica o capítulo - que

$$E[S(t)|S(t_0)=x]=x\exp[\mu(t-t_0)].$$

O modelo apresentado está sujeito a diversas críticas, nomeadamente devidas ao facto de a média e variância do rendimento instantâneo serem independentes da variável tempo e do preço da acção. No capítulo 7 é analisado um processo alternativo para o preço da acção permitindo não só que a variância dependa de S e t como seja aleatória. Outro aspecto relevante é o facto de este modelo não permitir a ocorrência de "saltos" no preço da acção (note-se que as trajectórias do movimento browniano geométrico são funções contínuas com probabilidade 1). A análise deste problema não faz parte do âmbito deste trabalho não podendo, no entanto, deixar de ser referido a grande diversidade de estudos neste domínio.

4.3 PARÂMETROS

O processo apresentado para o preço da acção envolve dois parâmetros, μ e σ. O valor desses parâmetros depende da unidade de tempo considerada. Vai ser suposto o tempo medido em anos.

O valor de μ depende em geral do risco (risco não diversificado) no crescimento do preço da acção. Grandes crescimentos esperados induzem o investidor a assumir elevados riscos. μ depende também da taxa de juro. Quanto maior for a taxa de juro maior o crescimento esperado exigido a uma dada acção. A determinação do parâmetro μ não é de grande importância uma vez que o valor de um produto derivado de uma dada acção não depende em geral de μ.

O parâmetro σ, a volatilidade do preço da acção, é, pelo contrário, de extrema importância na determinação do valor da maior parte dos produtos derivados de uma acção. No capítulo 6 vão ser apresentadas duas formas distintas de estimação deste parâmetro.

5. MODELO DE BLACK-SCHOLES PARA O CÁLCULO DO VALOR DE UMA OPÇÃO

No capítulo 3 foram mencionadas algumas restrições gerais que devem ser satisfeitas pelo preço duma opção. No entanto, excepto na data de vencimento, não foi ainda definida uma relação exacta entre as diferentes variáveis que afectam o valor da opção. Foi nesta perspectiva que Fisher Black e Myron Scholes desenvolveram um modelo que permite calcular o valor de uma opção sobre uma acção num dado instante do seu período de vida. Na base da sua análise está o seguinte facto. Combinando acções e opções de compra relativas a essa acção é possível constituir uma carteira perfeitamente coberta em relação ao risco, isto é, tal que a variação do seu valor seja independente da evolução subsequente do preço da acção.

Para derivar a fórmula de avaliação de opções, Black-Scholes impuseram certas restrições no mercado financeiro e sobretudo na distribuição do rendimento da acção. Antes de se proceder à análise do desenvolvimeno efectuado por Black-Scholes considerando o preço da acção a assumir valores em tempo e espaço de estados contínuo vai começar por supor-se um comportamento aleatório para o preço da acção mais simples, definido em tempo e espaço de estados discretos. Este método permite desde já estabelecer um primeiro contacto com os aspectos básicos da metodologia de avaliação de opções.

5.1 AVALIAÇÃO DE UMA OPÇÃO COM BASE NUM MODELO BINOMIAL

Por servir de introdução à teoria desenvolvida por Black-Scholes, vai apresentar-se nesta secção um método de avaliação de opções com base num modelo binomial. A ideia subjacente ao desenvolvimento de Black-Scholes é comum a esta forma de valorização de opções. A opção deve ser avaliada de modo a que, quando combinada com a acção subjacente formando uma carteira coberta, o rendimento obtido seja dado pela taxa de juro sem risco do mercado. O modelo de Black-Scholes pode ser derivado como caso limite do modelo de avaliação binomial [veja-se Gibson (1988), pag. 92-96].

A metodologia de avaliação que vai ser desenvolvida baseia-se em determinados pressupostos relativos ao mercado financeiro: mercado perfeito, taxa de juro constante ao longo do tempo, a acção não dá direito ao pagamento de dividendos durante o período de vida da opção. Relativamente ao preço da acção, supõe-se que este segue um processo binomial multiplicativo (tempo e espaço de estados discretos), isto é, durante cada período de tempo existe uma probabilidade p de o preço da acção subir u*100% e uma probabilidade 1-p de descer v*100%.

Considere-se o intervalo de tempo até ao vencimento da opção dividido em n períodos. O processo de avaliação é recursivo: começando por avaliar a opção na data de vencimento, T, em função dos possíveis valores da acção nesse instante (determinados com base no modelo binomial multiplicativo), vai-se avaliando sucessivamente a opção nos instantes T-1, T-2, ..., até ser atingido o instante presente e por conseguinte ser determinado o preço da opção que se pretende encontrar. Vai ilustrar-se o processo de avaliação de uma opção a um e dois períodos da data de vencimento, neste último caso de forma bastante abreviada. No caso de vários períodos o processo é, conforme já foi dito, repetido sucessivamente.

Considere-se uma posição consistindo numa *long-position* em α acções (aquisição de α acções) e numa *short position* numa opção de compra relativa a essa acção (venda de uma opção), com preço de exercício X. Seja S o preço da acção no início do período e u e v as variações relativas possíveis de tal preço durante o período no sentido de, no final desse período de tempo, instante de vencimento da opção, o preço da acção ser S+uS com probabilidade p ou S-vS com probabilidade 1-p (está-se a supor que a data de vencimento é atingida no final de um período no qual o preço da acção pode sofrer apenas um de dois tipos de variações—a evolução do preço da acção nesse período segue uma lei binomial).

O valor da posição no início deste período é dado por αS-C onde C, o valor que se pretende encontrar, designa o preço da opção nesse instante.

Se o valor da acção sobe para S+uS no final do período de tempo, então o valor associado à posição (troca de α acções por uma opção) é dado por

$$C_u = \alpha(S + uS) - \max(0, S + uS - X).$$

O primeiro termo do segundo membro desta igualdade representa o valor das acções no final do período enquanto o segundo termo representa o valor da opção na mesma altura (data de vencimento da opção). Se o valor da acção desce para S-vS, o valor associado à estratégia é

$$C_v = \alpha(S - vS) - \max(0, S - vS - X).$$

Como a variação do preço da acção é aleatória também a variação do valor da carteira o será, a não ser que o valor obtido seja o mesmo quer o preço da acção suba quer desça. Para tal ter-se-à que ter,

$$C_u = C_v,$$

equação que permite determinar α,

$$\alpha = \frac{\max\{0, S + uS - X\} - \max\{0, S - vS - X\}}{S(u+v)}.$$

Para o valor de α encontrado a variação do valor da carteira é certa e é dada por $C_u - (\alpha S - C)$ $[= C_v - (\alpha S - C)]$. A carteira, mantida desta forma, não tem risco associado e, por conseguinte, o rendimento deve ser dado pela taxa de juro sem risco do mercado. Representando por r esta taxa (referida a um período) tem-se,

$$(1+r)(\alpha S - C) = C_u,$$

equação que permite encontrar o valor da opção, C, no instante inicial,

$$C = \frac{\alpha S(1+r) - C_u}{1+r}.$$

Em suma, através da aquisição de α acções e venda de 1 opção, é possível formar uma posição cujo valor no final do período seja certo. Para que tal seja possível há que determinar o número de acções, α, a adquirir da forma descrita. Com base neste resultado, e tendo em conta que a variação do valor da carteira deve ser dada pela taxa de juro sem risco do mercado, facilmente se determina o valor da opção no início do período.

α é designado por rácio de cobertura e representa o número de acções que devem ser adquiridas por opção vendida de forma a constituir uma posição sem risco.

O caso descrito, avaliação de uma opção a um período da data de vencimento, com duas possíveis variações do preço da acção nesse período, pode, conforme já foi referido, ser generalizado a uma opção com um número de períodos até à data de vencimento qualquer, havendo em cada período as duas variações mencionadas para o preço da acção. Vai-se, de forma bastante abreviada, ilustrar o método de avaliação para uma opção com dois períodos até ao vencimento.

Considere-se o esquema da figura 5.1 que representa os preços da opção no instante inicial, no final do primeiro período e na data de vencimento (a notação utilizada foi generalizada de forma óbvia). O valor da opção C_u é calculado pelo processo descrito para um período em função dos preços da opção na data de vencimento, C_{uu} e C_{uv}. De modo análogo se obtém o valor C_v. Finalmente o valor da opção no instante inicial, C, é determinado em função dos valores calculados C_u e C_v. Note-se que, sendo S o preço da acção no instante inicial, tem-se

$$C_{uu} = \max\{0, S(1+u)^2 - X\},$$

$$C_{uv} = C_{vu} = \max\{0, S(1+u)(1+v) - X\},$$

$$C_{vv} = \max\{0, S(1+v)^2 - X\}.$$

Este procedimento de avaliação exige a determinação dos rácios de cobertura no início de cada período.

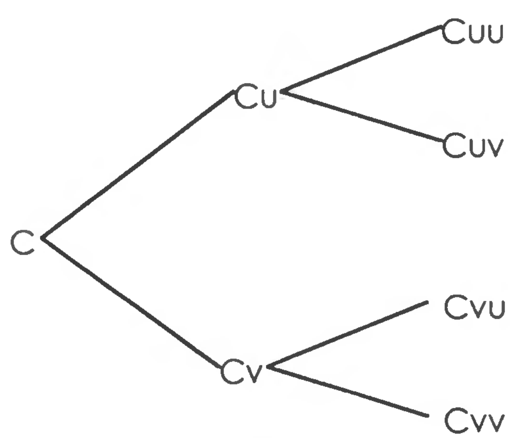

Figura 5.1

Fazendo o número de períodos até ao vencimento tender para infinito, e consequentemente a amplitude de cada período tender para zero, torna-se possível a obtenção de um preço final para a acção a variar num conjunto contínuo (situação bastante mais realista). O procedimento de avaliação descrito converge (fazendo o número de períodos tender para infinito) para o modelo de avaliação de Black-Scholes, derivado de outra forma na secção 5.3. Note-se que, no limite, a carteira deve ser ajustada continuamente.

O modelo binomial é útil não só por ser de fácil aplicação mas também por facilitar o entendimento dos princípios básicos subjacentes à metodologia de avaliação de opções.

5.2 PRESSUPOSTOS SUBJACENTES AO DESENVOLVIMENTO DE BLACK-SCHOLES

O tipo de avaliação precedente é limitado pela simplicidade do modelo de evolução do preço da acção. A descrição do comportamento do preço da acção através de um modelo binomial revela-se uma boa aproximação apenas num intervalo de tempo bastante curto. Em períodos maiores a distribuição do preço futuro da acção é bastante mais complexa.

Black-Scholes (1973) derivaram uma fórmula para calcular o valor de uma opção de compra europeia num dado instante do seu período de vida. A derivação da fórmula de Black-Scholes baseia-se no seguinte argumento. É possível constituir uma posição, através da aquisição de acções e venda de uma opção, cujo rendimento seja certo, isto é, independente da evolução do preço da acção, e dado pela taxa de juro sem risco do mercado.

Ao contrário da análise efectuada na secção anterior, supõe-se agora uma variação contínua do preço da acção e, por conseguinte, a carteira ajustada tem um lucro certo no final de um período de tempo infinitamente pequeno. Para que se possa supor uma variação certa do valor da carteira ao longo do tempo esta deve ser continuamente ajustada através da venda de uma opção e aquisição de um certo número de acções.

A fórmula de Black-Scholes, apesar de se mostrar que é robusta, é desenvolvida considerando um conjunto de hipóteses de algum modo restritivo (não são abrangidos os casos de pagamento de dividendos, volatilidade estocástica, custos de transacção). A metodologia empregue na sua dedução pode, no entanto, ser adaptada a casos em que algumas das restrições são abandonadas. No capítulo 7 analisa-se a situação em que a condição da volatilidade ser constante é abandonada.

As hipóteses consideradas na dedução da fórmula de Black-Scholes para o cálculo do valor de uma opção são as seguintes:

- a opção é do tipo europeu (isto é, só pode ser exercida na data de vencimento);
- num dado instante t, o preço da acção subjacente à opção segue o modelo (4.1). De facto, conhecido o preço da acção no instante t_0 ($t_0<t$), seja $S(t_0)$, supõe-se que

$$\ln S(t) \sim N\left[\ln S(t_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_0),\ \sigma^2(t-t_0)\right];$$

- não são distribuídos dividendos relativos à acção;
- a taxa de juro instantânea não tem risco associado e além disso é fixa e conhecida;
- não há custos associados às transacções das acções ou opções;
- é possível adquirir qualquer fracção de uma acção.

Sob tais premissas, o valor da opção depende apenas das variáveis tempo e preço da acção, $C(t,S(t))$.

5.3 DERIVAÇÃO DA FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES

Conforme já foi mencionado, na base da derivação do modelo de Black-Scholes está a constituição de uma carteira sem risco, formada unicamente por opções e acções subjacentes. A ideia é manter a variação do valor da carteira certa num período de tempo infinitamente pequeno para o que será necessário ajustar continuamente a carteira através da aquisição de acções e venda de uma opção. Na posição coberta os ganhos (perdas) nas acções são compensados pelas perdas (ganhos) nas opções. Uma vez que esta posição está isenta de risco, deve ganhar a taxa de juro sem risco do mercado de forma a evitar a ocorrência de oportunidades de arbitragem.

5.3.1 DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BLACK-SCHOLES

O número de acções que devem ser adquiridas num dado instante t para cobrir a variação instantânea do preço de uma opção vendida (equilibrar no sentido de eliminar a aleatoriedade da variação do valor da carteira) é dado por $C_S(t,S)$ - derivada parcial de primeira ordem de C em relação a S. A variação do valor da carteira ajustada continuamente desta forma não depende do preço da acção. De facto, ganhos ou perdas associados à posição na opção são anulados por perdas ou ganhos associados à posição na acção.

Considere-se um intervalo de tempo Δt suficientemente pequeno. Se nesse intervalo o preço da acção sofrer uma variação ΔS, então o preço da opção sofre uma variação ΔC, dada aproximadamente por $C_S(t,S)\Delta S$ (note-se que $C_S(t,S) = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta C/\Delta S$). O número de acções que globalmente sofrem uma variação equivalente à variação de uma opção é $\Delta C/\Delta S$, dado aproximadamente por $C_S(t,S)$. Assim, a variação no valor de uma opção é aproximadamente coberta pela variação no valor de $C_S(t,S)$ acções.

Se fizermos o intervalo de tempo tender para zero, ou seja, se a carteira for ajustada continuamente, então a aproximação mencionada torna-se exacta e a variação no valor da carteira deixa de depender da variação do preço da acção (depende apenas de outros factores certos). A carteira assim mantida não tem risco associado.

No instante t, o valor V(t) de uma carteira mantida pelo processo descrito, constituída por $C_S(t,S)$ acções e financiada pela venda de 1 opção de compra, é

(1) $$V(t)=\alpha S(t)-C(t,S(t)),$$

onde S(t) representa o valor da acção, C(t,S(t)) o valor da opção e $\alpha=C_S(t,S(t))$ — α é designado por rácio de cobertura.

Num pequeno intervalo de tempo dt a variação do valor da carteira é dada por (para tornar a notação mais simples omite-se a dependência de V e S em relação a t e de C em relação a t e S(t))

(2) $$dV=\alpha dS-dC.$$

Conforme já foi mencionado, C é função apenas do tempo e do preço S, C=C(t,S(t)). Como S é um processo de difusão solução da equação diferencial estocástica

$$dS=\mu Sdt+\sigma SdZ,$$

tem-se, aplicando o lema de Ito,

$$dC=\frac{\partial C}{\partial t}dt+\frac{\partial C}{\partial S}dS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2S^2dt. \tag{3}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} dC &= \left(\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial C}{\partial S}\mu S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2S^2\right)dt+\frac{\partial C}{\partial S}\sigma SdZ \\ &= \frac{\partial C}{\partial t}dt+\frac{\partial C}{\partial S}(\mu Sdt+\sigma SdZ)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2S^2dt \\ &= \frac{\partial C}{\partial t}dt+\frac{\partial C}{\partial S}dS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2S^2dt. \end{aligned}$$

Substituindo em (2) dC por esta última expressão e tendo em conta que $\alpha = C_S(t,S)$ vem

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial C}{\partial S}dS-\left(\frac{\partial C}{\partial t}dt+\frac{\partial C}{\partial S}dS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2S^2dt\right) \\ &= -\left(\frac{\partial C}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2S^2dt\right), \end{aligned} \tag{4}$$

e, portanto, a variação do valor da carteira, conhecido o preço da acção S(t), não depende de variáveis aleatórias, não tendo portanto risco associado.

Deste modo, a taxa de rendimento da carteira só pode ser a taxa de juro sem risco do mercado financeiro, r, tendo-se, então, a variação do valor da carteira dada por

$$dV=rVdt. \tag{5}$$

Igualando os segundos membros de (4) e (5) e tendo em conta (1), vem

$$r\left(\frac{\partial C}{\partial S}S - C\right)dt = -\left(\frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt\right),$$

isto é,

(6)
$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC - \frac{\partial C}{\partial S}rS - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2,$$

equação diferencial parcial não estocástica designada por equação diferencial de Black-Scholes.

A solução desta equação, derivada a partir da construção de uma carteira instantaneamente sem risco, não é única. A solução particular obtida depende da condição fronteira imposta. O valor da opção, C(t,S(t)), é a única solução desta equação diferencial sujeita à condição inicial

$$C(T,S(T)) = \begin{cases} S(T) - X & S(T) > X \\ 0 & S(T) \le X \end{cases}$$

onde X designa o preço de exercício e T a data de vencimento da opção.

5.3.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BLACK-SCHOLES

Com o objectivo de resolver esta equação diferencial, Black-Scholes efectuaram a seguinte substituição,

(7)
$$C(t,S(t)) = \exp[r(t-T]H[u, v],$$

com

$$\begin{cases} u = \dfrac{2}{\sigma^2}\left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right).\left[\ln\dfrac{S}{X} - \left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(t-T)\right] \\ v = -\dfrac{2(t-T)}{\sigma^2}\left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2 \end{cases}$$

obtendo a equação diferencial

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2},$$

com a condição fronteira

$$H(u,0)=\begin{cases}0 & \text{se } u<0\\ X\left[\exp\left(\dfrac{u\sigma^2}{2}\Big/\left(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)\right)-1\right] & \text{se } u\geq 0.\end{cases}$$

A solução desta equação diferencial, obtida por Churchill (1963), depois de substituída em (7), tem a forma,

$$C(t,S(t))=S(t)\Phi(d_1)-X\exp[r(t-T)]\Phi(d_2), \tag{8}$$

com

$$d_1=\frac{\ln\dfrac{S(t)}{X}+\left(r+\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

(9)

$$d_2=\frac{\ln\dfrac{S(t)}{X}+\left(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=d_1-\sigma\sqrt{T-t},$$

onde $\Phi(d)$ representa a função distribuição normal estandardizada $[N(0,1)]$.

Uma análise desta fórmula permite concluir que o valor da opção é função do preço corrente da acção, do preço de exercício, da taxa de juro sem risco, do tempo até ao vencimento e da volatilidade da acção. O valor da opção não depende do valor esperado do preço da acção na data de vencimento. Se para duas opções distintas todos os factores forem iguais excepto o valor esperado do preço da acção na data de vencimento, então as duas opções têm o mesmo valor.

5.3.3 FORMA ALTERNATIVA DE DERIVAÇÃO DA FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES

O desenvolvimento efectuado por Black-Scholes para determinação do preço da opção envolveu a construção de uma posição sem risco instantâneo com base nas acções e nas próprias opções (para que a carteira não tenha risco ao longo do tempo deve ser continuamente ajustada). Uma posição sem risco deve ganhar a taxa de juro sem risco do mercado financeiro. Este facto foi considerado na derivação da equação diferencial satisfeita pelo preço da opção.

A equação diferencial obtida não depende de variáveis aleatórias nem de variáveis afectadas pelas preferências do investidor em relação ao risco. Note-se que o parâmetro μ, que depende do factor risco (maior aversão ao risco induz maior crescimento relativo esperado), não surge na equação. Então o preço da opção deve ser o preço obtido num mundo com qualquer forma de risco e, portanto, em particular, num mundo sem risco. A suposição de que se está num mundo sem risco simplifica a análise uma vez que o rendimento esperado da opção é dado pela taxa de juro sem risco do mercado. Assim, o valor presente da opção deve ser o valor esperado da opção na data de vencimento descontado à taxa de juro sem risco do mercado. Mostra-se que o valor obtido desta forma coincide com o valor obtido por Black-Scholes e é dado por

$$C(t,S(t)) = \exp[r(t-T)]E[\max(0,S(T)-X)]$$

$$= \exp[r(t-T)]\int_X^{\infty}(S(T)-X)f(S(T))dS(T),$$

onde f representa a densidade de S(T) num mundo sem risco. Uma vez que, supondo indiferença em relação ao risco, o rendimento da acção deve ser dado pela taxa de juro sem risco do mercado, esta densidade é obtida tendo em conta que,

$$\ln S(T) \sim N\left[\ln S(t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\ \sigma^2(T-t)\right].$$

Note-se que esta distribuição já tinha sido apresentada com r, a taxa de juro sem risco de mercado, substituída por μ, a tendência infinitesimal do preço da acção por unidade de tempo.

5.4 PROPRIEDADES DO VALOR DE UMA OPÇÃO DETERMINADO PELA FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES

Nesta secção analisam-se algumas das propriedades do preço de uma opção obtido pela fórmula de Black-Scholes.

Os parâmetros relevantes para explicar o preço duma opção determinado pela fórmula de Black-Scholes são: o preço de exercício, o tempo até ao vencimento, a taxa de juro sem risco, o preço corrente da acção e a volatilidade da acção. Para melhor entendimento da fórmula de Black-Scholes, vai analisar-se o modo como cada um destes parâmetros afecta o valor da opção. Conforme é de esperar, os resultados obtidos satisfazem as propriedades mencionadas nas secções 3.2 e 3.3. Entre outros aspectos referidos, vai apresentar-se as diferentes derivadas parciais do preço da opção e fazer-se referência ao comportamento do valor da opção em termos de limite.

- O preço de Black-Scholes é uma função decrescente do preço de exercício. De facto, a derivada parcial do preço da opção em relação ao preço de exercício é dada por[1]

$$\frac{\partial C}{\partial X} = -\exp\big(r(t-T)\big)\Phi(d_2) < 0.$$

Assim, um incremento suficientemente pequeno em X, ΔX, provoca aproximadamente um incremento em C dado por $\Delta C = -\exp\big(r(t-T)\big)\Phi(d_2)\Delta X$.

A partir de (8) e (9) facilmente se verifica que, quando o preço de exercício tende para zero, o valor da opção tende para o valor corrente da acção[2]. Quando o preço de exercício tende para infinito, o valor da opção tende para zero.

- Quanto maior for o tempo até ao vencimento, maior é o valor da opção calculado pela fórmula de Black-Scholes. De facto, tem-se

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}\Phi'(d_1) + X\exp\big(r(t-T)\big)r\Phi(d_2) > 0$$

onde $\Phi'(d_1)$ representa a densidade normal avaliada em d_1.

---

[1] A título de exemplo, apresenta-se no apêndice 1 o cálculo desta derivada parcial.

[2] Represente-se por C(X) o preço de Black-Scholes encarado como função de X. Vai mostrar-se que

$$\lim_{X\to 0} C(X) = S(t).$$

De facto, como $\lim_{X\to 0} d_1 = \lim_{X\to 0} d_2 = +\infty$ e $\Phi(x)$ é uma função contínua de x, tem-se

$$\lim_{X\to 0} \Phi(d_1) = \lim_{X\to 0} \Phi(d_2) = \lim_{t\to +\infty} \Phi(t) = 1,$$

surgindo directamente o resultado.

Em termos de limite, o preço da opção tende para o valor corrente da acção quando o tempo até ao vencimento tende para infinito e para max(0,S(t)-X) quando o tempo até ao vencimento tende para zero.

- Quanto maior for a taxa de juro maior é o preço da opção. Tem-se

$$\frac{\partial C}{\partial r} = (T-t)X\exp\big(r(t-T)\big)\Phi(d_2) > 0.$$

Quando a taxa de juro tende para infinito o valor da opção tende para o valor corrente da acção.

- Derivando parcialmente em ordem a S a expressão obtida para C(t,S), vem

$$C_s(t,S) = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) > 0,$$

concluindo-se, portanto, que quanto maior for o preço corrente da acção maior é o preço da opção.

A elasticidade do preço da opção em relação ao preço da acção (medida da variação relativa do preço da opção em relação à variação relativa do preço da acção), $\frac{SC_S}{C}$, é sempre superior a um, $\frac{SC_S}{C} > 1$[3]. Por conseguinte, representando por ΔC e ΔS a variação do preço da opção e da acção num intervalo de tempo Δt suficientemente pequeno, tem-se

$$\frac{\Delta C}{\Delta S} \Big/ \frac{C}{S} > 1$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\Delta C}{C} > \frac{\Delta S}{S},$$

o que mostra que a variação relativa instantânea do preço da opção é superior à variação relativa instantânea do preço da acção.

Uma vez que num intervalo de tempo suficientemente pequeno se tem

---

[3] A demonstração deste resultado pode ser vista no apêndice 2.

$$\frac{\Delta C}{C} \cong \frac{SC_S}{C}\frac{\Delta S}{S},$$

uma medida do risco associado à opção pode ser dada por

$$\sigma_O = \frac{SC_S}{C}\sigma.$$

Note-se que $\sigma_O > \sigma$ e σ_O, ao contrário de σ, não é constante (depende de t e S(t)).

Em cada instante a derivada parcial C_S determina a razão entre o número de acções e opções da carteira coberta, isto é, o número de acções a adquirir para cobrir uma opção vendida e criar, portanto, uma posição sem risco. Como $0<\Phi(d_1)<1$, é necessário menos que uma acção por cada opção. Uma vez que

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}\Phi'(d_1) > 0,$$

C_S é uma função crescente de S e, portanto, a quantidade de acções a adquirir aumenta com o preço corrente da acção.

O preço da opção tende para zero quando o preço da acção tende para zero e tende para infinito quando o preço da acção tende para infinito.

- Derivando parcialmente a expressão obtida para C(t,S(t)) em ordem a σ vem

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}\,\Phi'(d_1) > 0,$$

concluindo-se que o preço da opção é uma função crescente de σ, isto é, quanto maior for o risco associado à acção mais valor tem a opção. De facto, a assimetria no rendimento da opção implica que seja apenas considerado o efeito positivo do aumento de σ.

Em relação ao comportamento do preço da opção no limite, encarado como função de σ, se $S < X\exp[r(t-T)]$ então C tende para zero com σ; se $S > X\exp[r(t-T)]$, C tende para $S - X\exp[r(t-T)]$ quando σ tende para zero. Quando σ tende para infinito o preço da opção tende para o preço corrente da acção.

Uma análise de (8) e (9) permite constatar que um aumento no tempo que resta até ao vencimento da opção, T-t, produz o mesmo efeito no valor da opção que o mesmo aumento percentual em r e σ^2.

Merton (1973) mostrou que o valor duma opção dado por (8) e (9) é sempre superior ao seu valor se fosse exercida no momento (isto é, max(0,S(t)-X)).

6. ESTIMAÇÃO DA VOLATILIDADE DA ACÇÃO

A fórmula de Black-Scholes pressupõe o conhecimento da volatilidade do preço da acção, σ, que é considerada fixa durante o período de vida da opção. Na prática o parâmetro σ é desconhecido e por conseguinte tem que ser estimado. Uma vez que a fórmula de Black-Scholes é extremamente sensível à volatilidade da acção a estimativa obtida deve ser bastante precisa. Apresentam-se, em seguida, duas formas distintas de estimação deste parâmetro. A primeira é baseada na "história" passada do preço da acção enquanto a segunda é baseada nos preços de mercado passados de opções relativas a essa acção.

6.1 ESTIMAÇÃO DA VOLATILIDADE A PARTIR DA "HISTÓRIA" DO PREÇO DA ACÇÃO

A volatilidade de uma acção pode ser estimada em função dos preços dessa acção observados num passado recente.

Conforme foi suposto, tem-se,

$$\ln S(t+\tau) \sim N\left[\ln S(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau,\ \sigma^2\tau\right],$$

ou,

$$\ln \frac{S(t+\tau)}{S(t)} \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau,\ \sigma^2\tau\right].$$

Sejam s_i, $i=0,1,\ldots,n$ as $n+1$, observações do preço da acção e τ o intervalo de tempo entre observações, medido em anos. Faça-se $u_i = \ln\left(\frac{s_i}{s_{i-1}}\right)$. Uma estimativa usual do desvio padrão de $\ln\frac{S(t+\tau)}{S(t)}$ é dada por,

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2}\,,$$

onde,

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i .$$

Então $\tilde{\sigma}$ pode ser encarada como uma estimativa de $\sigma\sqrt{\tau}$ e, por conseguinte, uma estimativa de σ será dada por

$$\hat{\sigma} = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{\tau}}.$$

A escolha do número de observações deve ser ponderada tendo em conta que, se por um lado quanto maior for o número de observações melhor é, em geral, a estimativa obtida, por outro lado dados muito antigos podem não ser relevantes na previsão do futuro. Aliás, estudos empíricos revelam que a volatilidade obtida a partir, por exemplo, dos últimos cinco anos é diferente da obtida a partir dos últimos seis meses que, por sua vez, é diferente da actual volatilidade implícita, o que põe mesmo em causa o facto de a volatilidade ser constante ao longo do tempo. O número de observações nunca deve, no entanto, ser inferior a 16.

Considere-se o caso particular das observações disponíveis serem semanais. Então $\tau = 1/52$ e portanto $\hat{\sigma} = \sqrt{52}\tilde{\sigma}$.

Alguns autores apresentam uma fórmula para estimar a volatilidade utilizando os preços mais alto e mais baixo diários, conseguindo deste modo obter uma estimativa a partir do mesmo número de observações mas com dados mais recentes.

6.2 VOLATILIDADE IMPLÍCITA

Uma forma alternativa de estimação da volatilidade de uma acção é através da observação do preço de mercado das opções.

Observado o valor de mercado de uma opção e conhecidos S, X, r e T-t é possível, a partir da fórmula de Black-Scholes, supondo que este modelo avalia correctamente as opções, determinar uma estimativa de σ. A esta estimativa atribui-se a designação de volatilidade implícita, uma vez que o valor de σ determinado por este processo seria aquele que, por aplicação da fórmula, permitiria obter o valor da opção de facto observado.

Uma vez que a equação relativa à fórmula de Black-Scholes não permite definir σ como função de S, X, r, T-t e C então a volatilidade implícita terá que ser calculada por um processo iterativo. Partindo de um valor inicial para σ e tendo em conta que C é uma função crescente de σ facilmente se encontra um valor aproximado da verdadeira solução da equação.

Através da observação do valor de mercado de várias opções relativas à mesma acção é possível a obtenção de volatilidades implícitas distintas. A estimativa da verdadeira volatilidade pode ser obtida como sendo uma média ponderada das diferentes volatilidades implícitas. A escolha da ponderação depende da sensibilidade dos diferentes preços das opções à volatilidade da acção. Alguns autores propõem o uso das elasticidades do preço da opção relativamente à volatilidade como factor de ponderação. Este método permite atribuir maior peso às opções cujos preços são mais sensíveis a uma mudança percentual da volatilidade. O estimador proposto é dado por,

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i ,$$

onde,

$$w_i = \frac{(\partial C_i / \partial \sigma_i)(\sigma_i / C_i)}{\sum_{i=1}^{n} (\partial C_i / \partial \sigma_i)(\sigma_i / C_i)} .$$

n representa o número total de opções sobre a mesma acção consideradas, C_i representa o preço da opção i e σ_i a volatilidade implícita obtida a partir da opção i.

Outro método de ponderação consiste simplesmente na utilização das derivadas parciais, isto é, considerando a notação anterior,

$$w_i = \frac{(\partial C_i / \partial \sigma_i)}{\sum_{i=1}^{n} (\partial C_i / \partial \sigma_i)} .$$

Alguns autores sugerem o cálculo da volatilidade implícita a partir unicamente da opção mais *at-the-money*[1], afirmando a melhor qualidade desta estimativa de σ relativamente a qualquer outra obtida por ponderação.

---

[1] Uma opção diz-se *at-the-money* quando S(t)=Xexp[-r(T-t)], isto é, quando o preço presente da acção é o valor actualizado do preço de exercício. No caso da igualdade ser substituida por > ou < a opção diz-se respectivamente *in-the-money* e *out-of-the-money*.

Os métodos de estimação apresentados nesta secção e na anterior podem ser usados conjuntamente. O primeiro permite tirar partido dos factores fundamentais que afectam a volatilidade e da tendência ao longo do tempo enquanto o segundo permite incorporar factores mais recentes e provavelmente conjunturais.

7. PREÇO DE UMA OPÇÃO COM A VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA

Na base da derivação da fórmula de Black-Scholes para o preço da opção estão determinados pressupostos que na prática nem sempre são satisfeitos. De facto, em geral a acção subjacente à opção está sujeita ao pagamento de dividendos, a taxa de juro não é fixa ao longo do tempo e mesmo o preço da acção não segue o processo descrito. O não cumprimento dos referidos pressupostos provoca um desvio no preço da opção calculado pela fórmula de Black-Scholes em relação ao verdadeiro preço. Para obter um melhor modelo de avaliação de opções torna-se necessário a adaptação do modelo de Black-Scholes a determinadas situações mais realistas. Note-se, no entanto, que, para obter um modelo tratável que capte os aspectos essenciais, a imposição de certas restrições é fundamental (de facto se todas as suposições fossem abandonadas o modelo obtido seria de tal forma complexo que não teria aplicação prática). Tendo este aspecto em consideração, justifica-se que o abandono das suposições efectuadas por Black-Scholes seja considerado individualmente.

Uma vez que o preço da acção é a única variável que incorpora toda a informação relevante na avaliação de uma opção, a correcta identificação do processo estocástico que descreve o seu comportamento é de extrema importância. Um dos aspectos que parece falhar no processo estocástico assumido por Black-Scholes é a volatilidade do preço da acção ser constante ao longo do tempo. De facto, testes efectuados mostraram que a volatilidade não só varia ao longo do tempo como tem um comportamento aleatório, sugerindo, portanto, a necessidade do uso de um modelo com variância estocástica. Vários autores estudaram o problema da determinação do preço duma opção considerando tipos especiais de processos estocásticos bem como conjuntos de hipóteses adequados ao desenvolvimento da análise.

Neste capítulo apresenta-se um modelo para o preço da acção com variância estocástica e analisam-se os desvios obtidos no cálculo do valor da opção pela fórmula de Black-Scholes quando se supõe válido esse modelo. A exposição segue a análise desenvolvida por Hull e White (1987). No entanto, dado o difícil tratamento de um modelo com variância estocástica, mencionam-se, na secção seguinte, alguns métodos alternativos de avaliação que permitem já a obtenção de resultados de qualidade superior à dos obtidos por Black-Scholes. Estes métodos podem ser úteis quando a utilização de modelos mais sofisticados se mostrar pouco eficiente.

7.1 FORMAS ALTERNATIVAS DE AVALIAÇÃO DE UMA OPÇÃO

Dada a complexidade de um modelo com variância estocástica alguns autores sugerem a utilização do modelo de Black-Scholes, propondo uma forma específica de estimação da volatilidade, mostrando que o o enviesamento obtido na avaliação de opções se torna bastante inferior. Vão apresentar-se algumas dessas formas de estimação.

Parkinson (1980) propõe o uso dos preços diários mais elevados e mais baixos durante os n dias anteriores. A fórmula proposta para estimação da volatilidade é dada por

$$\sigma = \frac{0,627}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{H_i}{L_i}\right),$$

onde H_i e L_i designam respectivamente os preços da acção mais alto e mais baixo do dia i. De facto, não sendo a volatilidade constante ao longo do tempo, a estimação de σ por este processo envolve duas observações diárias e portanto reduz o período em observação a um passado mais recente. Apesar de este estimador melhorar a qualidade dos resultados obtidos verifica-se, no entanto, que é um estimador enviesado de σ.

Outro estimador da volatilidade proposto consiste no valor de σ que minimiza

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{M(t_j,X_j)-C(t_j,X_j)}{C(t_j,X_j)}\right|,$$

onde $C(t_j,X_j)$ representa o valor de Black-Scholes da opção j com tempo até ao vencimento t_j e preço de exercício X_j e $M(t_j,X_j)$ o correspondente valor de mercado observado.

Fischer Black[1] propôs uma forma de estimação de σ envolvendo observações do preço da acção e volatilidades implícitas. As estimativas obtidas por esse processo variam ao longo do tempo. Esse método permite obter estimativas da volatilidade do preço da acção de boa qualidade.

[1] Black, F. (1976), Fischer Black on Options, 1, 8, in Cox (1985), obra citada.

Com o objectivo de reduzir os desvios obtidos no cálculo do valor da opção pela fórmula de Black-Scholes, Cox[2] propõe um modelo supondo a volatilidade não estacionária e assumindo uma relação negativa com o preço da acção. Este modelo pressupõe que a volatilidade é uma função determinística do preço da acção. Cox considera que o preço da acção satisfaz a equação diferencial estocástica,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \delta S^{\frac{\theta}{2}-1} dZ,$$

onde μ representa o valor esperado do rendimento instantâneo da acção, por unidade de tempo, $\delta S^{\frac{\theta}{2}-1}$ designa o desvio padrão do rendimento instantâneo, δ e θ são constantes e Z representa um movimento browniano. θ é suposto ser menor que 2 por haver evidências empíricas de que o relacionamento entre o preço da acção e a volatilidade é negativo. Este modelo é designado por modelo de avaliação de opções com elasticidade da variância constante. De facto, designando por $\sigma^2 = \delta^2 S^{\theta-2}$ a variância do rendimento da acção, obtém-se a sua elasticidade em relação a S,

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial S} . \frac{S}{\sigma^2} = \theta - 2,$$

constante. O valor da opção pode ser obtido fazendo apelo à neutralidade em relação ao risco. Assim, o valor da opção é simplesmente o seu valor esperado na data de vencimento actualizado à taxa de juro sem risco r,

$$C(t) = \exp[-r(T-t)]E[\max(0, S(T) - X)].$$

Uma expressão para C(t) é, neste caso, bastante mais difícil de obter uma vez que a densidade de S(T) é uma expressão mais complexa que a densidade log-normal. Há vários estudos empíricos que confirmam o facto de o modelo de Cox corrigir parte dos enviesamentos obtidos por aplicação da fórmula de Black-Scholes. Quando, no entanto, a relação entre o preço da acção e a volatilidade é positiva o modelo de Cox tende a acentuar tais desvios. Neste caso o modelo de Black-Scholes permite a obtenção de melhores resultados. Mostra-se que o processo não estacionário assumido por Cox para descrever a variância do preço da acção permite explicar apenas 20% da sua variação ao longo do tempo. Dada a complexidade do modelo de Cox este resultado desmotiva a sua aplicação.

---

[2] Cox, J. (1975), Notes on Option Pricing 1: Constant Elasticity of Variance Diffusions. Working Paper, Stanford University, California, in Gibson (1988), obra citada.

O facto de o processo de Cox explicar apenas parcialmente os movimentos da volatilidade sugeriu a utilização de um modelo com variância estocástica. É neste contexto que se vai apresentar o modelo proposto por Hull e White (1987). Estes autores, considerando a volatilidade estocástica, mostraram que, quando a volatilidade da acção é não correlacionada com o seu preço, o valor de uma opção de compra europeia é o valor de Black-Scholes integrado em relação à distribuição da variância média durante a restante vida da opção,

$$\int_0^{\infty} C(\overline{V})g(\overline{V})d\overline{V},$$

onde $\overline{V}$ é a variável aleatória que representa a variância média, C é o preço de Black-Scholes encarado como função da variância $\overline{V}$ e g representa a densidade de probabilidade de $\overline{V}$. Hull e White mostraram ainda que, neste caso, a fórmula de Black-Scholes sobrevaloriza opções *at-the-money* e subvaloriza opções acentuadamente *in-the-money* e *out-of-the-money*. Para analisar o caso de a volatilidade e o preço da acção serem correlacionados os autores recorreram à utilização de diversos procedimentos numéricos.

7.2 MODELO PARA O COMPORTAMENTO DO PREÇO DA ACÇÃO E DA VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA

Apesar da complexidade dos modelos com volatilidade estocástica, estudos empíricos e de simulação indicam que estes modelos são prometedores por permitirem a eliminação de enviesamentos obtidos a partir da fórmula de Black-Scholes. A implementação de um modelo deste tipo pressupõe a especificação do processo conjunto relativo ao preço da acção e à volatilidade. Variações no preço da opção são devidas a movimentos aleatórios do preço da acção e/ou da volatilidade.

Vai obter-se formalmente um modelo de avaliação de opções que incorpore o facto de a volatilidade ser estocástica.

Suponha-se, então, que o preço da acção S(t) e a variância $\sigma^2(t)$ satisfazem as seguintes equações diferenciais estocásticas

$$dS(t) = \mu(t,S(t),U(t))S(t)dt + \sqrt{U(t)}S(t)dZ(t) \tag{1}$$

$$dU(t) = \phi(t,U(t))U(t)dt + \xi(t,U(t))U(t)dW(t), \tag{2}$$

onde $U(t)=\sigma^2(t)$ e Z e W são movimentos brownianos com coeficiente de correlação ρ. Os parâmetros ϕ e ξ podem depender de t e $\sigma(t)$ mas não de S(t). O caso analisado por Black-Scholes corresponde a $\phi = \xi = 0$.

Na realidade o processo seguido pela variância estocástica é mais complicado. Em particular σ^2 não pode assumir valores negativos e, por conseguinte, à medida que σ^2 se aproximar de 0, o desvio padrão instantâneo de σ^2 deveria também aproximar-se desse valor.

7.3 DERIVAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA O PREÇO DA OPÇÃO

Uma vez que no modelo dado por (1) e (2) existem dois termos aleatórios, deixa de ser possível a constituição de uma posição coberta. De facto, a posição está apenas protegida de variações relativas ao preço da acção mas não está protegida de variações aleatórias da volatilidade (a variação da volatilidade não pode ser coberta por um título transaccionável).

Representando por $C(t,S(t),\sigma(t))$[3] o preço da opção no instante t (a função C é distinguida da do capítulo anterior pelo número de argumentos) obtém-se, a partir do lema de Ito generalizado, a seguinte equação diferencial estocástica para o preço da opção,

$$(3) \quad dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{\partial C}{\partial U}dU + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}US^2dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial U^2}\xi^2U^2dt + \frac{\partial^2 C}{\partial S\partial U}U^{3/2}\xi S\rho dt.$$

Considere-se uma posição formada por aquisição de $\partial C/\partial S$ acções e venda de uma opção. Então, a variação do valor da posição, dV, num intervalo de tempo dt, é dada por

[3] Por se pretender salientar a dependência do preço da opção da volatilidade da acção, optou-se por representar o preço da opção directamente como função de $\sigma(t)$ e não de U(t).

$$
(4) \qquad \begin{aligned} dV &= \frac{\partial C}{\partial S} dS - dC \\ &= -\eta dt - \frac{\partial C}{\partial U} \xi U dW, \end{aligned}
$$

com

$$
(5) \qquad \eta = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial U} \phi U + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 U + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial U^2} \xi^2 U^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial U} U^{3/2} \xi S \rho,
$$

para o que bastou substituir dC pela expressão encontrada em (3), considerando a equação diferencial estocástica (2).

Note-se a existência do termo aleatório dW na expressão encontrada para dV. Ao contrário do que sucedeu no caso de a volatilidade ser fixa, não é agora possível constituir uma posição sem risco, isto é, cuja variação seja certa num período de tempo infinitamente pequeno, constituída exclusivamente por opções e acções subjacentes. De facto, quando a volatilidade é aleatória, o valor de uma opção depende directamente da preferência dos investidores em relação ao risco. Diferentes autores alegam motivos distintos para eliminar o risco da carteira causado pelo risco associado à volatilidade e pela própria especificação da correlação entre o preço da acção e a volatilidade. Hull e White (1987) assumem que a volatilidade não está correlacionada com o consumo agregado e por conseguinte tem risco sistemático nulo. Johnson e Shanno (1987) supõem que o risco da carteira pode ser completamente diversificado. Wiggins (1987) considera que a correlação entre o mercado e a volatilidade da acção é igual ao produto da correlação entre o mercado e o preço da acção pela correlação entre o preço da acção e a sua volatilidade. Deste modo, os autores obtêm uma equação diferencial para o preço da opção independente das preferências dos investidores em relação ao risco. Não faz parte do âmbito do presente trabalho questionar as possíveis suposições efectuadas no sentido da obtenção de uma equação diferencial independente do risco.

Na exposição seguinte vai supor-se que as flutuações no valor da carteira devidas ao termo aleatório da variância (risco associado à carteira) são completamente diversificáveis e, por conseguinte, o rendimento esperado é dado pela taxa de juro instantânea sem risco do mercado. Assim, representando por r esta taxa, tem-se

$$
E\left(\frac{dV}{V}\right) = r dt,
$$

isto é,

$$-\frac{\eta dt}{\frac{\partial C}{\partial S}S-C}=rdt,$$

[note-se que $V=\frac{\partial C}{\partial S}S-C$ e E(dW)=0] o que implica

(6) $$\eta = rC-\frac{\partial C}{\partial S}rS.$$

De (5) e (6) obtém-se, então, a seguinte equação diferencial para o preço da opção:

(7) $$\frac{\partial C}{\partial t}=rC-\frac{\partial C}{\partial S}rS-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}US^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial U^2}\xi^2U^2-\frac{\partial C}{\partial U}\phi U-\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial U}\xi U^{3/2}S\rho.$$

A condição inicial associada é

$$C(T,S(T),\sigma(T))=\max(0,S(T)-X).$$

Exige-se ainda que C tenda para zero quando S(t) tender para zero e que, no caso particular da variação de S ser certa, o preço da opção seja o seu valor se fosse exercida no momento, considerando-se o valor actualizado do preço de exercício, isto é,

$$C=\max[0,S(t)-X\exp(r(t-T))].$$

A propriedade fundamental da equação diferencial obtida para o preço da opção bem como da condição fronteira associada é o facto de não dependerem das preferências do investidor em relação ao risco. Então a solução, C, pode ser obtida utilizando o procedimento de avaliação considerando neutralidade em relação ao risco.

Quando $\phi=\xi=0$ tem-se a equação diferencial de Black-Scholes que pode ser resolvida de modo a obter-se a expressão analítica já apresentada.

Outra forma de derivar uma equação diferencial para o preço da opção seria supondo a existência de um activo com o mesmo termo aleatório que a volatilidade da acção, isto é, um activo com preço P satisfazendo

$$dP=\mu_P P dt+\sigma_P P dW.$$

Neste caso seria possível formar uma carteira com variação certa num período infinitamente pequeno, constituída por aquisição de uma acção, venda de $\left(\partial C/\partial S\right)^{-1}$ opções e compra de m activos, com $m = \left(\partial C/\partial S\right)^{-1} \frac{\xi\sigma}{\sigma_P P} \frac{\partial C}{\partial \sigma}$. A existência de um activo nestas condições não é, no entanto, verificada na prática.

7.4 O VERDADEIRO PREÇO EM FUNÇÃO DO PREÇO DE BLACK-SCHOLES

Considere-se de novo a equação (7) e suponha-se, enquanto nada for dito em contrário, que o preço da acção está instantâneamente não correlacionado com a volatilidade, isto é, $\rho = 0$. Como nem a equação nem as condições fronteira impostas dependem das preferências do investidor em relação ao risco então $C(t,S,\sigma)$ deve ser o valor actual do valor esperado de C na data de vencimento da opção, descontado à taxa de juro sem risco. O preço da opção é então dado por

$$C(t,S(t),\sigma(t)) = \exp(r(t-T))\int_0^\infty C(T,S(T),\sigma(T))p(S(T)|S(t),\sigma^2(t))dS(T),$$

onde $C(T,S(T),\sigma(T))=\max(0,S(T)-X)$ representa o valor da opção na data de vencimento e $p(S(T)|S(t),\sigma^2(t))$ representa a densidade de S(T) condicionada por S(t) e $\sigma^2(t)$.

Defina-se a variância média durante a restante vida da opção por

(8) $$\overline{V} = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(\tau)d\tau.$$

A densidade de S(T) pode ser representada na forma

$$p(S(T)|\sigma^2(t)) = \int_0^\infty g(S(T)|\overline{V})h(\overline{V}|\sigma^2(t))d\overline{V},$$

onde, para simplificar, a dependência de S(t) foi eliminada e g e h são as densidades condicionadas claramente identificadas pela notação utilizada. Então, tem-se

$$C(t,S(t),\sigma(t)) = \int_0^\infty \left[\exp(r(t-T)\int_0^\infty C(T,S(T),\sigma(T))g(S(T)|\overline{V})dS(T)\right]h(\overline{V}|\sigma^2(t))d\overline{V}$$

Como se supõe $\rho=0$, o termo entre parentesis recto é o preço obtido pela fórmula de Black-Scholes para uma opção numa acção com variância $\overline{V}$[4]. Designe-se este preço por $C(\overline{V})$. O valor da opção no instante t é, então, dado por

(9) $$C(t,S(t),\sigma(t)) = \int_0^{\infty} C(\overline{V})h(\overline{V}|\sigma^2(t))d\overline{V} = E\left[C(\overline{V})\right].$$

A equação (9) estabelece que o valor da opção é o preço de Black-Scholes integrado em relação à distribuição da variância média da acção durante a restante vida da opção. Hull e White referem-se à impossibilidade de obtenção de uma expressão analítica para a distribuição de $\overline{V}$ considerando um conjunto de suposições aceitável. É, no entanto, possível calcular os momentos de $\overline{V}$ quando ϕ e ξ são constantes. Neste caso Hull e White, começando por desenvolver $C(\overline{V})$ em série de Taylor em torno do seu valor esperado, apresentaram o preço da opção na forma de série. Os autores referem-se ao facto de, para valores de $\xi^2(T-t)$ suficientemente pequenos, esta série convergir rapidamente para o valor da opção.

7.5 PROPRIEDADES DO VALOR DE UMA OPÇÃO

Vai, em seguida, analisar-se a forma como variações de S(t), X, r, ϕ, T-t, μ e ξ afectam o preço da opção.

A densidade $h(\overline{V}|\sigma^2(t))$ é independente de X e r. Além disso, por se estar a supor ϕ e ξ independentes de S(t), esta densidade é também independente de S(t). Tendo ainda em conta que h é sempre não negativa e que o preço de Black-Scholes, C(t,S(t)), é uma função monótona dos parâmetros S(t), X e r (monótona crescente em relação a S(t) e r e monótona descrescente em relação a X) então $C(t,S(t),\sigma(t)) = E\left[C(\overline{V})\right]$ obedece à mesma monotonia, tendo-se, portanto,

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial E\left[C(\overline{V})\right]}{\partial S} = E\left[\frac{\partial C(\overline{V})}{\partial S}\right] > 0;$$

$$\frac{\partial C}{\partial X} = \frac{\partial E\left[C(\overline{V})\right]}{\partial X} = E\left[\frac{\partial C(\overline{V})}{\partial X}\right] < 0;$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial E\left[C(\overline{V})\right]}{\partial r} = E\left[\frac{\partial C(\overline{V})}{\partial r}\right] > 0.$$

---

[4] A justificação deste resultado pode ser vista em Hull e White (1987)

Em relação aos parâmetros T-t, ϕ e $\sigma^2(t)$ tem-se

$$\frac{\partial C}{\partial \phi} = \frac{\partial E\left[C(\overline{V})\right]}{\partial \phi} > 0;$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial E\left[C(\overline{V})\right]}{\partial \sigma^2} > 0;$$

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial E\left[C(\overline{V})\right]}{\partial T} > 0,$$

isto é, o preço da opção cresce com T-t, ϕ e $\sigma^2(t)$.

Em relação a ξ, $\frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{\partial E\left[C(\overline{V})\right]}{\partial \xi}$ tanto pode assumir valores positivos como negativos.

Em suma, o preço da opção com volatilidade estocástica é uma função crescente do preço corrente da acção, da taxa de juro, da volatilidade da acção, da tendência infinitesimal da volatilidade e do tempo até ao vencimento do contrato. Em relação ao preço de exercício, à medida que este aumenta o valor da opção decresce.

7.6 RELAÇÃO ENTRE O PREÇO DE BLACK-SCHOLES E O VERDADEIRO PREÇO

Vai, em seguida, analisar-se a relação entre o preço da opção calculado pela fórmula de Black-Scholes com base no valor esperado da variância média do preço da acção durante a restante vida da opção, $E(\overline{V})$, e o verdadeiro preço considerando-se a volatilidade estocástica. A fórmula básica para a análise é

$$C(t, S(t), \sigma(t)) = \int C(\overline{V}) h(\overline{V} | \sigma^2(t)) d\overline{V}$$

$$= E\left[C(\overline{V})\right].$$

No caso que se está a considerar o preço de Black-Scholes tende a sobrevalorizar opções *at-the-money* e a subvalorizar opções suficientemente *in-the-money* e *out-of-the-money*.

Com efeito, considere-se a segunda derivada de C em ordem a σ^2, avaliada em $\overline{V}$[5],

(10) $$C''(\overline{V}) = \frac{S\sqrt{T-t}}{4\overline{V}^{3/2}}\phi'(d_1)(d_1 d_2 - 1),$$

com d_1 e d_2 definidos em (5.9). A curvatura de C é determinada pelo sinal de C'' que por sua vez depende apenas do sinal de $d_1 d_2$-1. O ponto de inflecção de $C(\overline{V})$ é obtido quando $d_1 d_2$=1, isto é, quando

(11) $$\overline{V} = \frac{2}{T-t}\left(\sqrt{1+\left[\log\left(S/X\right)+r(T-t)\right]^2}-1\right)$$

(note-se que $d_2 = d_1 - \sqrt{\overline{V}(T-t)}$). Designe-se este valor por I. Quando $\overline{V}$>I, C''<0 e, portanto, C é uma função concava de $\overline{V}$. Para $\overline{V}$<I tem-se C''>0 e, portanto, C é uma função convexa de $\overline{V}$.

No caso de uma opção *at-the-money* $(S = X\exp(r(t-T)))$ tem-se I=0. Como $\overline{V}$ assume valores positivos tem-se sempre $\overline{V}$>I, sendo C uma função concava de $\overline{V}$ e, portanto, independentemente da distribuição de $\overline{V}$, o preço actual da opção, $E\left[C(\overline{V})\right]$, é sempre inferior ao preço de Black-Scholes[6], $C\left[E(\overline{V})\right]$. Em suma, a fórmula de Black-Scholes sobrevaloriza opções *at-the-money*.

Considere-se agora o caso de $\log\left(S/X\right) \to \pm\infty$, isto é, S>>X (opção suficientemente *in-the-money*) ou S<<X (opção suficientemente *out-of-the-money*). Neste caso I torna-se arbitrariamente grande e portanto tem-se $\overline{V}$<I, sendo então C uma função convexa de $\overline{V}$ e consequentemente $E[C(\overline{V})] > C(E[\overline{V}])$. Por conseguinte o preço da opção é sempre superior ao preço de Black-Scholes obtido considerando a variância $E[\overline{V}]$. Em suma, a fórmula de Black-Scholes subvaloriza opções suficientemente *in-the-money* e *out-of-the-money*. Note-se mais uma vez que, quando se refere o preço de Black-Scholes, a variância fixa que se considera é $E[\overline{V}]$.

Concluindo, viu-se que, no caso da volatilidade estocástica ser não correlacionada com o preço da acção, o preço correcto da opção é o preço esperado

---

[5] O cálculo desta derivada é apresentado no apêndice 3.

[6] Se C(.) é uma função concava (isto é, $C''(.) < 0$) então E[C(.)]<C(E[.]). Pelo contrário, se C(.) é uma função convexa (isto é, $C''(.) > 0$) então E[C(.)]>C(E[.]).

de Black-Scholes onde o valor esperado é calculado em relação à distribuição da variância média da acção durante a restante vida da opção. Viu-se ainda que este valor é inferior ao valor de Black-Scholes, considerando a volatilidade $E[\overline{V}]$, para opções *at-the-money* e superior para opções suficientemente *in-the-money* e *out-of-the-money*.

7.7 O PREÇO DA OPÇÃO QUANDO A VOLATILIDADE E O PREÇO DA ACÇÃO ESTÃO CORRELACIONADOS

Foi anteriormente analisado o caso de a variância estocástica e o preço da acção serem não correlacionados. Foi visto que a função de Black-Scholes sobrevaloriza opções *at-the-money* e subvaloriza opções suficientemente *in-the-money* e *out-of-the-money*.

Hull e White (1987), utilizando procedimentos numéricos, estudaram o caso de a volatilidade ser correlacionada com o preço da acção. No caso de tal correlação ser positiva, $\rho > 0$, verificaram que o preço de opções *in-the-money* é inferior ao obtido pela fórmula de Black-Scholes considerando a volatilidade fixa. Este desvio tende a diminuir à medida que o preço da acção aumenta. Em relação a opções *out-of-the-money*, verificaram que estas são avaliadas acima do preço de Black-Scholes. No caso de a correlação entre a volatilidade e o preço da acção ser negativa, $\rho < 0$, Hull e White constataram que opções *out-of-the-money* são sobrevalorizadas pela fórmula de Black-Scholes enquanto que opções *in-the-money* são subvalorizadas. Note-se no entanto que qualquer que seja ρ o enviesamento percentual tende para zero quando $S/X \to \infty$ (este efeito é bem ilustrado no capítulo 8).

7.7.1 VOLATILIDADE E PREÇO DA ACÇÃO POSITIVAMENTE CORRELACIONADOS

A determinação do valor de uma opção depende da distribuição do preço da acção na data de vencimento. De facto, quando a volatilidade e o preço da acção são positivamente correlacionados, $\rho>0$, a um crescimento do preço da acção está associado um crescimento da volatilidade e, por conseguinte, um aumento da probabilidade de ocorrência de grandes variações positivas do preço da acção. Isto significa que, na distribuição de $S(T)$, preços da acção muito elevados são mais prováveis que quando a volatilidade é fixa, isto é, que quando o preço da acção segue um movimento browniano geométrico. Por outro lado, preços da acção baixos estão associados a volatilidades baixas. Baixando o preço da acção torna-se cada vez menos provável que ocorram grandes variações positivas. Assim, preços da acção baixos podem ser encarados como estados absorventes tornando-se, portanto, mais prováveis que quando a volatilidade é fixa. O gráfico seguinte representa tipicamente a verdadeira distribuição de S(T) quando a correlação entre o preço da acção e a volatilidade é positiva. Para que possa ser estabelecida uma comparação é também representada a distribuição lognormal de S(T) assumida na derivação de Black-Scholes, isto é,

$$\ln S(T) \sim N\left(\ln S(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right).$$

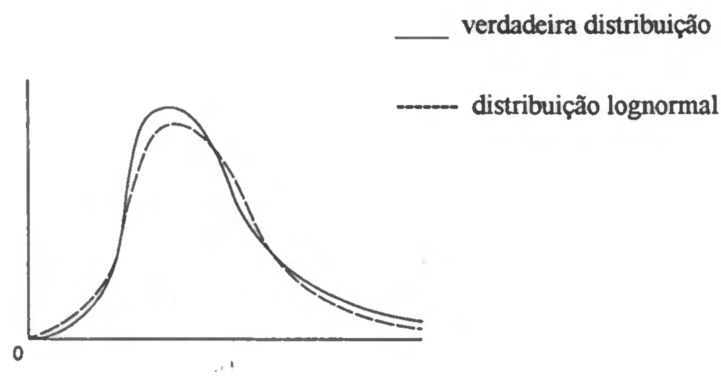

Figura 7.1

Considere-se, então, uma opção *out-of-the-money*. Uma vez que neste caso o valor presente da acção é baixo em relação ao preço de exercício e, por outro lado, o valor da opção é tanto maior quanto maior for a probabilidade do preço terminal da acção ser elevado então a fórmula de Black-Scholes atribui à opção um valor inferior ao seu verdadeiro valor uma vez que, considerando o preço terminal da acção com distribuição lognormal, tal probabilidade é menor (comparem-se os ramos direitos das duas densidades). Assim, quando $\rho > 0$ a fórmula de Black-Scholes subvaloriza opções *out-of-the-money*.

Considere-se agora o caso de uma opção *in-the-money*. Uma vez que nesta situação o valor presente da acção é suficientemente elevado para que a opção tenha valor, há que assegurar que a probabilidade de preços terminais baixos seja pequena (de facto para que a opção tenha valor na data de vencimento basta que não haja grandes descidas no preço da acção). Uma análise da figura 7.1 permite concluir que a fórmula de Black-Scholes atribui à opção um valor superior ao seu verdadeiro valor uma vez que, considerando o preço terminal da acção com distribuição lognormal, a probabilidade de preços baixos é inferior (comparem-se os ramos esquerdos). Assim, opções *in-the-money* são sobrevalorizadas pela fórmula de Black-Scholes.

7.7.2 VOLATILIDADE E PREÇO DA ACÇÃO NEGATIVAMENTE CORRELACIONADOS

Diversos estudos empíricos sugerem que a correlação entre a volatilidade e o preço da acção é negativa. Neste caso o efeito obtido é precisamente contrário ao obtido quando $\rho>0$. De facto, quando a volatilidade é negativamente correlacionada com o preço da acção, a um aumento do preço corresponde uma redução da volatilidade e portanto torna-se menos provável a ocorrência de preços terminais tão elevados. Uma redução do preço provoca um aumento da volatilidade aumentando a hipótese de variações positivas dos preços. Assim, preços terminais muito baixos tornam-se menos prováveis. A figura seguinte representa a verdadeira distribuição de S(T) quando $\rho<0$ e a distribuição lognormal.

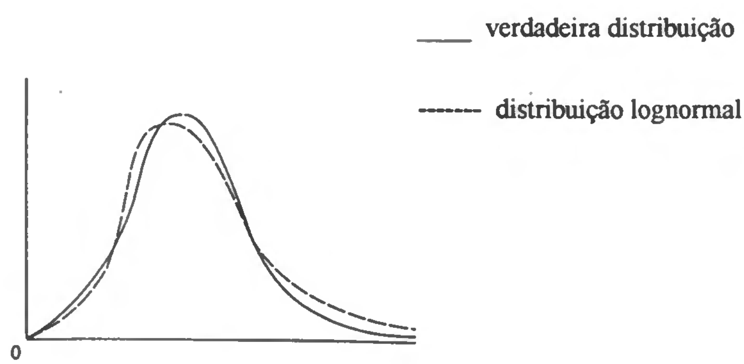

Figura 7.2

Uma opção *out-of-the-money* tem maior valor quanto maior for a probabilidade do preço terminal da acção ser elevado e portanto, de acordo com o gráfico 7.2, a função de Black-Scholes atribui à opção um valor superior ao seu verdadeiro valor uma vez que, considerando o preço terminal da acção com distribuição lognormal, tal probabilidade é maior (veja-se o ramo direito).

Em relação a uma opção *in-the-money*, dado que preços terminais da acção baixos são mais prováveis considerando a distribuição lognormal, então este tipo de opções são subvalorizadas pela fórmula de Black-Scholes.

Em suma, no caso de a correlação entre o preço da acção e a respectiva volatilidade ser positiva a fórmula de Black-Scholes subvaloriza opções *out-of-the-money* e sobrevaloriza opções *in-the-money*. No caso de a correlação entre o preço da acção e a respectiva volatilidade ser negativa verifica-se o efeito contrário.

A análise intuitiva efectuada nesta secção vai ser confirmada no capítulo seguinte através de um estudo de simulação.

8. ANÁLISE DOS ENVIESAMENTOS A PARTIR DE UM ESTUDO DE SIMULAÇÃO

No capítulo anterior considerou-se o modelo definido em (7.1) e (7.2) como descrevendo correctamente o processo relativo ao comportamento conjunto do preço da acção e da respectiva variância, suposta estocástica. Foi encontrada uma equação diferencial satisfeita pelo preço de uma opção sobre essa acção tendo, no entanto, sido mencionada a impossibilidade de obtenção de uma fórmula explícita para determinação do valor da opção num determinado instante do seu período de vida. Referiu-se também o facto de, sob certas condições, a sucessão das somas parciais da série relativa ao preço da opção convergir rapidamente. Mencionou-se ainda a existência de desvios obtidos no cálculo do preço da opção a partir da fórmula de Black-Scholes, quando se supõe a variância fixa num determinado valor.

Neste capítulo, através de um estudo de simulação, pretende confirmar-se o facto de a fórmula de Black-Scholes não valorizar correctamente as opções quando a volatilidade do preço da acção é estocástica. Pretende ainda analisar-se o tipo de desvio existente em função das variáveis que determinam o preço da opção. Vai adoptar-se a metodologia desenvolvida por Hull e White (1987), efectuando-se uma análise comparativa dos resultados obtidos.

O estudo vai ser estruturado em duas etapas distintas. Numa primeira fase vai considerar-se o caso de o preço da acção e da respectiva volatilidade não serem correlacionados, enquanto que numa segunda fase vai supor-se que tal correlação é não nula. Em cada fase vai ser desenvolvido um programa cuja execução permite a obtenção dos resultados objecto de análise.

8.1 METODOLOGIA ADOPTADA

Considere-se, numa primeira fase, que o preço da acção e a volatilidade estocástica seguem o processo definido em (7.1) e (7.2), com $\rho=0$. No capítulo anterior referiu-se o facto de, no caso de ϕ e ξ serem constantes e $\xi^2(T-t)$ ser suficientemente pequeno, a sucessão das somas parciais da série relativa ao preço da opção convergir rapidamente. Podia, então, nessas condições, proceder-se à avaliação da opção com base neste resultado. No entanto, porque por um lado o número necessário de termos a considerar para se obter bons resultados não foi analisado e por outro lado se pretende também avaliar opções noutras condições (ξ pode eventualmente assumir valores demasiado elevados) vai optar-se por um procedimento de avaliação mais genérico, baseado num estudo de simulação.

Viu-se que o preço da opção é o valor esperado do preço de Black-Scholes integrado em relação à variância média do preço da acção durante a restante vida da opção. Vai, então, determinar-se uma estimativa do preço da opção, dividindo o tempo até ao vencimento em n períodos iguais (vai considerar-se n=100) e simulando-se a variância da acção no final de cada período (considerando-se conhecida a variância no instante inicial, u_0), tendo em conta que[1]

(1) $$\ln\frac{U(t+\tau)}{U(t)} \sim N\left(\left(\phi-\frac{\xi^2}{2}\right)\tau, \xi^2\tau\right).$$

Assim, designando por u_i uma estimativa da variância do preço da acção no final do i-ésimo período, vai calcular-se u_{i+1} da seguinte forma,

$$u_{i+1} = u_i \exp\left(\left(\phi-\frac{\xi^2}{2}\right)dt + \xi\sqrt{dt}a_i\right),$$

onde a_i é uma observação da lei normal standard e dt representa a amplitude de cada período. Note-se que, no programa efectuado, obtém-se a_i por transformação de observações da distribuição uniforme entre 0 e 1[2]. Considerando a variância do preço da acção como sendo a média dos u_i's, i=0,...,n, determina-se o preço de Black-Scholes da opção[3]. Conforme sugerido por Hull e White, repete-se este passo a partir

---

[1] Mantém-se a notação utilizada no capítulo 7.

[2] Considera-se o seguinte resultado:
Teorema: Sejam U_1 e U_2 duas variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo (0,1). Então, as variáveis N_1 e N_2 definidas por

$$N_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2),$$
$$N_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\operatorname{sen}(2\pi U_2),$$

são independentes com distribuição normal standard.

[3] Para calcular y=P(X≤x), onde X é uma variável aleatória com distribuição normal standard, isto é,

$$P(X \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-u^2/2)du,$$

das observações $-a_i$, $i=1,...,n$, obtendo-se um novo preço de Black-Scholes. Este procedimento é repetido um determinado número de vezes (definido no programa pela variável "sim", que se considera igual a 1500). Designando por C_{1j} e C_{2j} os respectivos preços obtidos no j-ésimo passo, $j=1,...,sim$, e fazendo

$$C_j = \frac{C_{1j} + C_{2j}}{2}$$

obtém-se a média aritmética dos diferentes C_j como uma boa estimativa do verdadeiro preço da opção,

$$C = \frac{\sum_{j=1}^{sim} C_j}{sim}.$$

Determina-se ainda o erro padrão do estimador do preço da opção, dado por[4]:

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{sim} (C_j - C)^2}{Sim(Sim-1)}}. \tag{2}$$

Calculam-se também, em dois casos, os preços obtidos por aplicação da fórmula de Black-Scholes quando se supõe a variância do preço da acção fixa: a) no seu valor inicial; b) no valor esperado da variância média (considerando o processo 7.2) durante a restante vida da opção (este valor é estimado pela média aritmética das médias dos u_i's, $i=0,1,...,n$, calculadas nos diferentes passos, $j=1,...,sim$). O erro padrão do estimador do enviesamento obtido por aplicação da fórmula de Black-Scholes é

---

utilizou-se a seguinte aproximação [veja-se: C. Hastings, Approximations for Digital Computers, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1955; M. Abramowitz e I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., N.Y.]:

$$P(X \leq x) = 1 - f(x)\sum_{i=1}^{5} b_i w^i, \quad x \geq 0,$$

onde: $w=1/(1+px)$, $p=0.2316419$, $b_1=0.3193815$, $b_2=-0.3565638$, $b_3=1.781478$, $b_4=-1.821256$, $b_5=1.330274$ e $f(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$. O erro máximo cometido é 0.0000007.

[4] Para simplificar o cálculo numérico, considerou-se no programa a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}\sum (C_j - C)^2 &= \sum C_j^2 - 2C\sum C_j + SimC^2 \\ &= \sum C_j^2 - \frac{2}{Sim}\left(\sum C_j\right)^2 + \frac{1}{Sim}\left(\sum C_j\right)^2 \\ &= \sum C_j^2 - \frac{1}{Sim}\left(\sum C_j\right)^2.\end{aligned}$$

também dado por (2).

Numa segunda fase vai considerar-se que o preço da acção e a respectiva variância, seguindo o processo (7.1)-(7.2), são correlacionados, isto é, $\rho \neq 0$. Vai, então, estimar-se o preço da opção tendo em conta que

(3) $$\ln\frac{S(t+\tau)}{S(t)} \sim N\left(\left(\mu - \frac{U(t)}{2}\right)\tau, U(t)\tau\right),$$

(4) $$\ln\frac{U(t+\tau)}{U(t)} \sim N\left(\left(\phi - \frac{\xi^2}{2}\right)\tau, \xi^2\tau\right),$$

e que a correlação entre $\ln\frac{U(t+\tau)}{U(t)}$ e $\ln\frac{S(t+\tau)}{S(t)}$ é dada por ρ,

(5) $$\operatorname{corr}\left(\ln\frac{S(t+\tau)}{S(t)}, \ln\frac{U(t+\tau)}{U(t)}\right) = \rho.$$

Faça-se então

$$\ln\frac{S(t+\tau)}{S(t)} = \left(\mu - \frac{U(t)}{2}\right)\tau + A\sqrt{\tau U(t)},$$

$$\ln\frac{U(t+\tau)}{U(t)} = \left(\phi - \frac{\xi^2}{2}\right)\tau + A\rho\xi\sqrt{\tau} + B\xi\sqrt{(1-\rho^2)\tau},$$

onde A e B são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal standard. As variáveis assim definidas satisfazem (3), (4) e (5). Então, sendo a_i e b_i observações de duas leis normais independentes, obtidas a partir de observações da distribuição uniforme entre 0 e 1 por transformações já indicadas, obtêm-se estimativas do preço da acção e da sua variância no final do i-ésimo período, s_i e u_i respectivamente, dadas por:

$$s_i = s_{i-1}\exp\left((\mu - u_{i-1}/2)dt + a_i\sqrt{u_{i-1}dt}\right)$$

$$u_i = u_{i-1}\exp\left((\phi - \xi^2/2)dt + a_i\rho\xi\sqrt{dt} + b_i\xi\sqrt{(1-\rho^2)dt}\right).$$

O valor da opção no instante presente (supõe-se t=0) é, então, estimado por

$$\exp(-rT)\max(0, s_n - X),$$

isto é, o valor presente do seu valor estimado na data de vencimento. T representa, neste caso, o tempo até ao vencimento e r a taxa de juro instantânea sem risco. Este procedimento é repetido um determinado número de vezes (designado no programa pela variável "sim") sendo a média aritmética dos diferentes preços obtidos uma estimativa do verdadeiro preço da opção (valor actual do preço médio da opção na data de vencimento)[5]. O erro padrão do estimador considerado é calculado da mesma forma que quando $\rho=0$. Calcula-se ainda o preço da opção obtido por aplicação da fórmula de Black-Scholes quando se considera a variância do preço da acção fixa no seu valor no instante inicial.

Os programas efectuados foram desenvolvidos em Qbasic, numa versão compilada, e executados num PC. A listagem dos programas é apresentada nos apêndices 4 e 5. Para facilitar a compreensão, tentou manter-se, tanto quanto possível, a notação utilizada no texto. Durante a execução dos programas são criados ficheiros relativos à estimativa do verdadeiro valor da opção, ao erro padrão associado ao estimador e aos preços obtidos pela fórmula de Black-Scholes quando se supõe a variância fixa. Estes ficheiros, tratados na folha de cálculo Excel, permitem a obtenção dos gráficos e tabelas apresentados na secção 8.3. Ainda em relação aos programas, há que mencionar os elevados custos computacionais requeridos na sua execução. Note-se que a execução do programa relativo a $\rho\neq0$ é naturalmente mais dispendiosa em termos de tempo que a do programa desenvolvido para $\rho=0$, sendo ainda de salientar a menor precisão nos resultados obtidos.

8.2 DADOS INICIAIS

O estudo efectuado pressupõe o conhecimento dos seguintes parâmetros: μ, $U(0)$, ϕ, ξ, t, T, $S(t)$, X, r e ρ.

Sem perda de generalidade, vai considerar-se o instante inicial 0, $t=0$, representando, então, T o tempo até ao vencimento da opção, medido em anos. O parâmetro ϕ, que podia depender de t e $U(t)$, vai ser considerado constante. Vai supor-

---

[5] Hull e White (1987) propõem um algoritmo para melhorar a qualidade dos resultados obtidos que, devido aos elevados custos computacionais requeridos, não foi utilizado neste trabalho.

se $\phi=0$. A taxa de juro, r, e o parâmetro μ vão ser fixos, em certa medida de forma arbitrária, no valor 0.04.

Fixos os restantes parâmetros, vai fazer-se variar a relação entre o preço da acção e o preço de exercício para que possa analisar-se os enviesamentos obtidos por aplicação da fórmula de Black-Scholes quando a opção está *in-the-money*, *at-the-money* e *out-of-the-money*. Os valores iniciais para o preço da acção (S) e preço de exercício (X) são escolhidos de forma a que $S/X=0.7$ (opção *out-of-money*). No decorrer do programa, mantendo-se X fixo, S vai ser alterado de modo a que S/X varie. Este quociente vai ser incrementado gradualmente até $S/X=1.3$ (opção *in-the-money*).

Para o caso de o preço da acção e da respectiva variância não serem correlacionados ($\rho=0$), vai estudar-se o efeito provocado por um aumento da variância do preço da acção no instante inicial no desvio obtido pelo cálculo do preço da opção a partir da fórmula de Black-Scholes. Vai também analisar-se a forma como tal desvio depende do valor do parâmetro ξ e do tempo até ao vencimento da opção. Assim, para U(0), ξ e T vão ser considerados diferentes valores (o parâmetro ξ, que podia depender de t e U(t), vai também ser considerado constante).

No caso de o preço da acção e a respectiva variância serem correlacionados vai efectuar-se um estudo dos enviesamentos obtidos em função do parâmetro ρ. Assim, vão considerar-se diferentes valores para ρ, positivos e negativos, apesar de haver evidências empíricas destes últimos serem mais frequentes. Vai também analisar-se o efeito de uma variação da variância do preço da acção no instante inicial, do valor do parâmetro ξ e do tempo até ao vencimento da opção no desvio obtido pela utilização da fórmula de Black-Scholes.

8.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

8.3.1 VOLATILIDADE E PREÇO DA ACÇÃO NÃO CORRELACIONADOS

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos através do processo de simulação descrito, quando se considera que o preço da acção e a respectiva variância, seguindo o processo (7.1) e (7.2), são não correlacionados. Note-se a conformidade existente entre os quadros e gráficos seguintes e os apresentados por Hull e White.

No quadro 8.1 encontram-se, para diferentes valores de S/X, os valores obtidos para o preço da opção a partir do processo de simulação descrito bem como os valores de Black-Scholes obtidos quando se consideram as variâncias fixas na variância do preço da acção no instante inicial e ainda numa estimativa da variância média esperada durante a restante vida da opção (tendo em conta o processo (7.2)). Em relação a estes dois casos apresentam-se os enviesamentos obtidos (diferença entre o verdadeiro valor da opção e o valor de Black-Scholes) em termos absolutos e em termos relativos (enviesamento expresso como percentagem do preço de Black-Scholes). Apresenta-se ainda o erro padrão do estimador do preço da opção (ou do enviesamento).

Quadro 8.1 resultados do estudo de simulação

dados: $r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $T=0.5$; $U(0)=0.15$; $X=100$

	preço verdadeiro		Black-Scholes					
			variância $U(0)$			variância $E(\overline{V})$		
S/X	estim.	erro pad.	preço	env.	env. perc.	preço	env.	env.perc
0.7	1.21133	0.007804	1.1903	0.02103	1.76669	1.17607	0.03526	2.99846
0.71	1.35492	0.008838	1.33343	0.02148	1.6111	1.32722	0.0277	2.087
0.72	1.50118	0.008651	1.4885	0.01268	0.85193	1.48155	0.01963	1.32503
0.73	1.67326	0.00945	1.65597	0.0173	1.04453	1.66295	0.01031	0.61998
0.74	1.83675	0.009749	1.83627	0.00048	0.0263	1.83719	-0.0004	-0.0238
0.75	2.0348	0.01004	2.02983	0.00497	0.245	2.04679	-0.012	-0.5861
0.76	2.22888	0.010638	2.23702	-0.0081	-0.3639	2.25371	-0.0248	-1.1016
0.77	2.42558	0.009843	2.45822	-0.0326	-1.3277	2.45927	-0.0337	-1.3698
0.78	2.64872	0.010052	2.69376	-0.045	-1.672	2.69467	-0.046	-1.7052
0.79	2.87329	0.009382	2.94394	-0.0707	-2.4	2.92717	-0.0539	-1.8406
0.8	3.13091	0.01008	3.20904	-0.0781	-2.4347	3.19967	-0.0688	-2.1492
0.81	3.41091	0.010405	3.48931	-0.0784	-2.2466	3.49528	-0.0844	-2.4137
0.82	3.6865	0.010898	3.78494	-0.0984	-2.6008	3.7818	-0.0953	-2.5199
0.83	3.99183	0.010816	4.09614	-0.1043	-2.5466	4.10184	-0.11	-2.682
0.84	4.30078	0.010216	4.42304	-0.1223	-2.7642	4.41935	-0.1186	-2.683
0.85	4.64045	0.011502	4.76579	-0.1253	-2.63	4.77685	-0.1364	-2.8556
0.86	4.98415	0.010672	5.12444	-0.1403	-2.7376	5.12827	-0.1441	-2.8103
0.87	5.34975	0.010461	5.49908	-0.1493	-2.7154	5.50445	-0.1547	-2.8105
0.88	5.7237	0.01036	5.88973	-0.166	-2.8189	5.88346	-0.1598	-2.7154
0.89	6.09536	0.009521	6.29638	-0.201	-3.1925	6.25167	-0.1563	-2.5002
0.9	6.5372	0.010479	6.71904	-0.1818	-2.7063	6.71578	-0.1786	-2.659
0.91	6.95751	0.010571	7.15762	-0.2001	-2.7957	7.14236	-0.1849	-2.5881
0.92	7.43917	0.012097	7.61208	-0.1729	-2.2715	7.65431	-0.2151	-2.8108
0.93	7.87532	0.011224	8.08228	-0.207	-2.5607	8.07806	-0.2027	-2.5098
0.94	8.37372	0.011065	8.56814	-0.1944	-2.2691	8.58703	-0.2133	-2.4841
0.95	8.85973	0.010906	9.06953	-0.2098	-2.3133	9.07313	-0.2134	-2.352

Quadro 8.1 continuação

	preço verdadeiro		Black-Scholes					
			variância $U(0)$			variância $E(\overline{V})$		
S/X	estim.	erro pad.	preço	env.	env. perc.	preço	env.	env. perc.
0.96	9.37483	0.011398	9.58621	-0.2114	-2.2051	9.59675	-0.2219	-2.3124
0.97	9.90876	0.01188	10.118	-0.2093	-2.0684	10.1376	-0.2288	-2.257
0.98	10.4245	0.009775	10.6648	-0.2403	-2.2537	10.6269	-0.2024	-1.9051
0.99	11.004	0.011447	11.2263	-0.2223	-1.9804	11.2216	-0.2176	-1.9392
1	11.5868	0.011171	11.8023	-0.2155	-1.8259	11.811	-0.2242	-1.8986
1.01	12.1634	0.010975	12.3925	-0.2291	-1.8484	12.3731	-0.2097	-1.6946
1.02	12.7853	0.011624	12.9967	-0.2114	-1.6266	13.0076	-0.2223	-1.7092
1.03	13.3955	0.010628	13.6146	-0.2191	-1.6095	13.6049	-0.2094	-1.5393
1.04	14.0377	0.012405	14.246	-0.2083	-1.4622	14.2554	-0.2177	-1.5272
1.05	14.6754	0.010905	14.8906	-0.2151	-1.4447	14.8764	-0.2009	-1.3505
1.06	15.3451	0.012183	15.548	-0.2029	-1.3052	15.5453	-0.2002	-1.2879
1.07	16.0082	0.01161	16.218	-0.2098	-1.2935	16.1993	-0.1911	-1.1798
1.08	16.7015	0.012196	16.9002	-0.1987	-1.1757	16.8865	-0.185	-1.0953
1.09	17.4104	0.012385	17.5945	-0.1841	-1.0464	17.5955	-0.1852	-1.0524
1.1	18.1313	0.012737	18.3003	-0.1691	-0.9238	18.3133	-0.182	-0.994
1.11	18.8539	0.01197	19.0175	-0.1636	-0.86	19.0237	-0.1697	-0.8923
1.12	19.6014	0.012969	19.7457	-0.1443	-0.7306	19.7704	-0.169	-0.8547
1.13	20.3362	0.012425	20.4846	-0.1485	-0.7248	20.4908	-0.1547	-0.7548
1.14	21.0755	0.011544	21.2339	-0.1584	-0.7462	21.2116	-0.1361	-0.6416
1.15	21.8499	0.012909	21.9933	-0.1434	-0.652	21.9839	-0.134	-0.6095
1.16	22.6485	0.012916	22.7625	-0.114	-0.5008	22.7773	-0.1289	-0.5657
1.17	23.4366	0.013224	23.5411	-0.1046	-0.4442	23.5562	-0.1196	-0.5077
1.18	24.2283	0.013197	24.3289	-0.1006	-0.4137	24.3381	-0.1099	-0.4514
1.19	25.0178	0.012118	25.1256	-0.1078	-0.429	25.111	-0.0932	-0.3712
1.2	25.8492	0.01292	25.9308	-0.0816	-0.3146	25.9399	-0.0907	-0.3497
1.21	26.6766	0.01312	26.7443	-0.0676	-0.2529	26.7573	-0.0807	-0.3016
1.22	27.4824	0.012471	27.5657	-0.0834	-0.3025	27.5476	-0.0652	-0.2368
1.23	28.3581	0.014667	28.3949	-0.0369	-0.1298	28.4261	-0.068	-0.2393
1.24	29.1736	0.012062	29.2315	-0.058	-0.1983	29.2215	-0.0479	-0.164
1.25	30.0219	0.011882	30.0753	-0.0534	-0.1776	30.0602	-0.0383	-0.1273
1.26	30.9022	0.013002	30.926	-0.0238	-0.077	30.9356	-0.0335	-0.1082
1.27	31.7586	0.012604	31.7833	-0.0247	-0.0777	31.7819	-0.0234	-0.0735
1.28	32.6365	0.013011	32.647	-0.0104	-0.032	32.6525	-0.016	-0.0489
1.29	33.5213	0.012306	33.5168	0.00451	0.01346	33.5276	-0.0063	-0.0187

As curvas apresentadas no gráfico 8.1 referem-se aos enviesamentos percentuais obtidos no cálculo do valor da opção pela fórmula de Black-Scholes quando se consideram as variâncias fixas e iguais à variância média esperada do preço da acção durante a restante vida da opção e à variância do preço da acção no instante inicial.

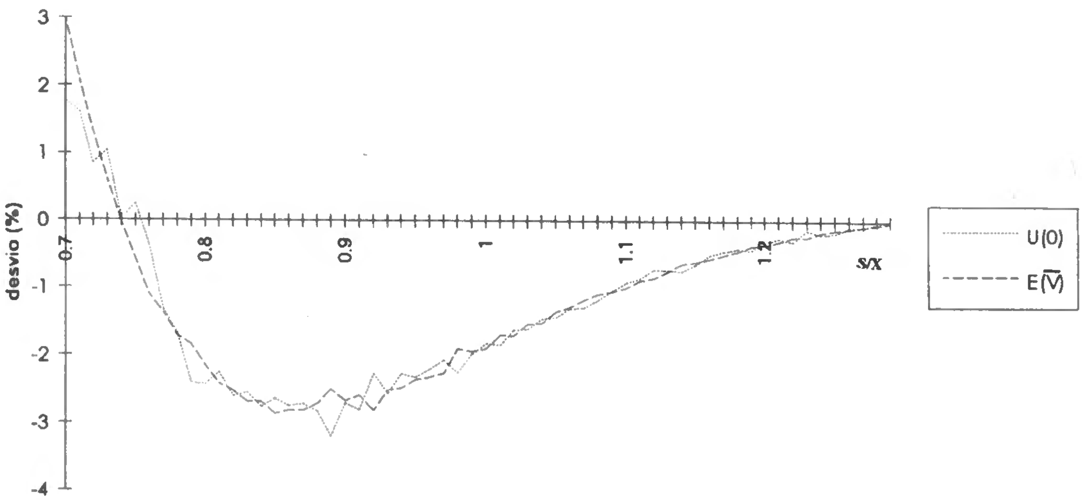

Gráfico 8.1 desvio percentual no cálculo do preço da opção pela fórmula de Black-Scholes dados:$r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $T=0.5$; $U(0)=015$; $X=100$

Uma análise quer do quadro 8.1 quer do gráfico 8.1 permite constatar que a fórmula de Black-Scholes não valoriza correctamente as opções quando a volatilidade do preço da acção é estocástica. De facto, de acordo com o que já foi argumentado na secção 7.6, há evidências de que a fórmula de Black-Scholes subvaloriza opções suficientemente *out-of-the-money* e *in-the-money* (para estas últimas as diferenças tendem, no entanto, a ser pouco significativas) e sobrevaloriza opções *at-the-money* (sendo para estas que ocorrem os maiores desvios).

O gráfico 8.2 ilustra os desvios percentuais ocorridos para diferentes valores da variância do preço da acção no instante inicial (o valor de Black-Scholes é calculado com base na variância média esperada do preço da acção durante a restante vida da opção).

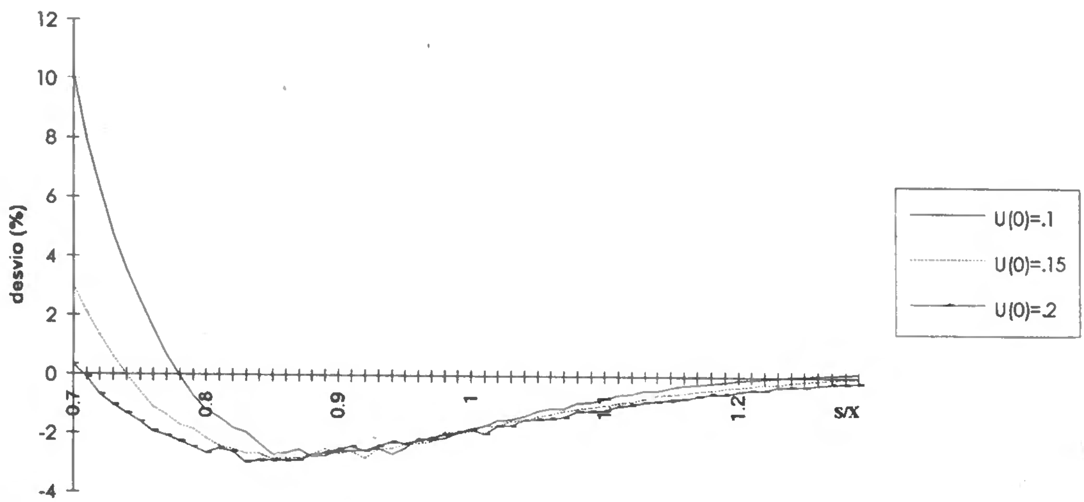

Gráfico 8.2 efeito da variação da variância do preço da acção no instante inicial

dados:$r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $T=0.5$; $X=100$

Quanto maior for a variância do preço da acção no instante inicial mais negativo é o enviesamento percentual para opções *out-of-the-money* e *in-the-money*, apesar de, neste último caso, tal enviesamento aproximar zero. De facto, conforme ilustrado pelo gráfico 8.2, o aumento da variância tem efeito essencialmente em opções *out-of-the-money*.

Em relação a ξ, quanto maior for o valor deste parâmetro mais negativo é o desvio percentual para opções aproximadamente *at-the-money*. Para opções *out-of-the-money* este efeito torna-se menos significativo. Para opções suficientemente *out-of-the-money* tal efeito é mesmo invertido. Note-se que Hull e White se referem a este resultado apesar de o gráfico por eles apresentado não ilustrar tal facto. Em relação a opções *in-the-money*, conforme ilustrado pelo gráfico 8.3, o efeito de uma variação de ξ não é muito significativo.

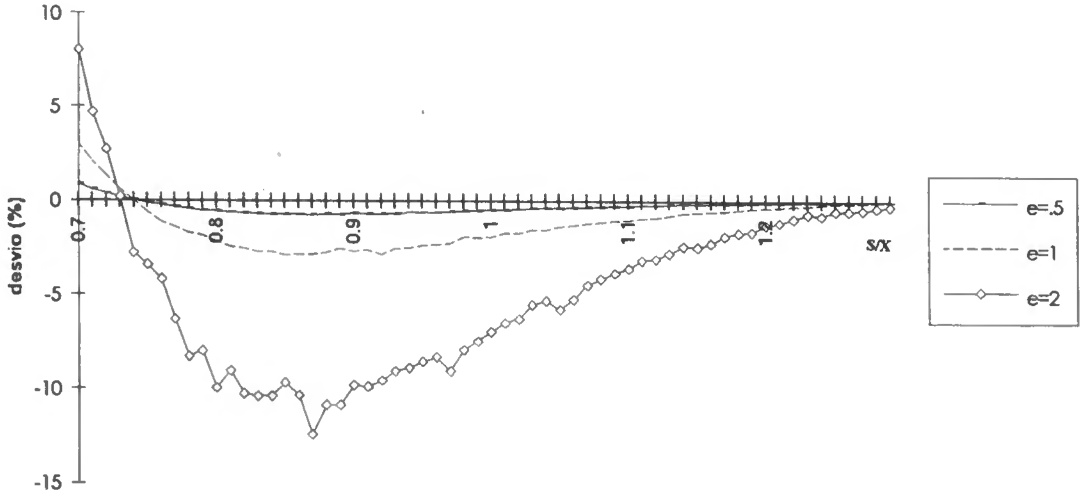

Gráfico 8.3 efeito da variação de ξ

dados:$r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $T=0.5$; $U(0)=0.15$; $X=100$

Conforme ilustrado no gráfico 8.4, para opções *out-of-the-money* e mesmo *at-the-money*, quanto maior for o tempo até ao vencimento da opção, mais negativo é o desvio percentual obtido no cálculo do valor da opção pela fórmula de Black-Scholes. O efeito obtido para opções *in-the-money* não é significativo.

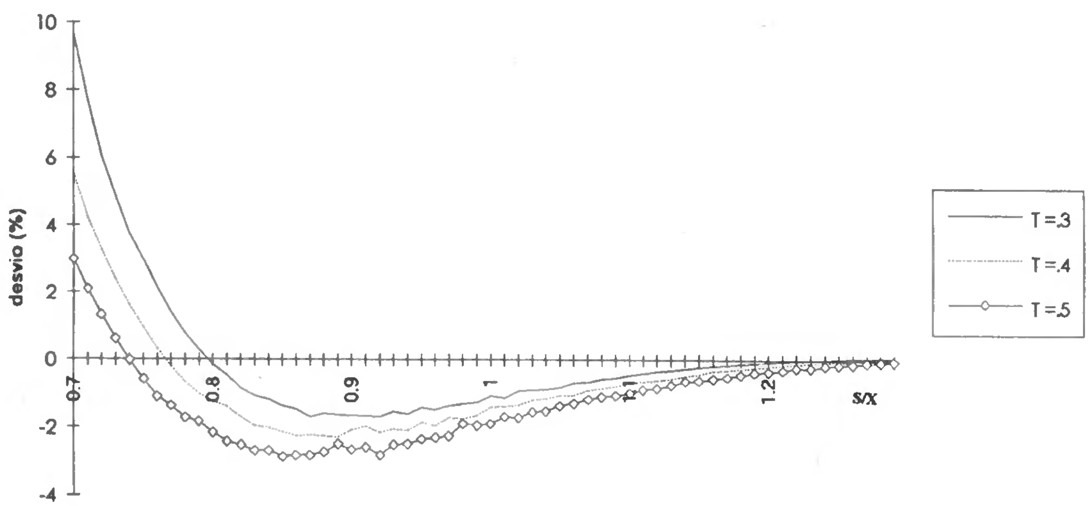

Gráfico 8.4 efeito da variação do tempo até ao vencimento da opção

dados:$r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $U(0)=0.15$; $X=100$

Em suma, quando a volatilidade do preço da acção é estocástica, a fórmula de Black-Scholes não valoriza correctamente as opções. Os desvios obtidos, apesar de pouco significativos para opções *in-the-money*, são relevantes para opções *at-the-money* e *out-of-the-money*. Tais desvios dependem, além de outros factores, da variância do preço da acção no instante inicial, do valor do parâmetro ξ e do tempo até ao vencimento da opção.

8.3.2 VOLATILIDADE E PREÇO DA ACÇÃO CORRELACIONADOS

Depois de analisados os resultados obtidos no caso de o preço da acção e a respectiva variância serem não correlacionados vai tratar-se o caso de tal correlação ser não nula. No capítulo 7 apresentou-se uma justificação intuitiva para os desvios ocorridos no cálculo do valor da opção pela fórmula de Black-Scholes quando a volatilidade do preço da acção é estocástica. Nesta secção vai confirmar-se tais resultados.

Apesar dos resultados obtidos não serem neste caso muito precisos (este efeito nota-se por exemplo nos "picos" existentes nos gráficos apresentados), já permitem ilustrar claramente os comportamentos mencionados no capítulo anterior.

Os quadros 8.2 e 8.3 apresentam, para diferentes valores de S/X, a estimativa do preço da opção, o erro padrão do estimador associado, o preço de Black-Scholes calculado com base na variância do preço da acção no instante inicial e ainda os respectivos enviesamentos em termos absolutos e percentuais, nos casos do preço da acção e a respectiva variância serem positiva e negativamente correlacionados. Os gráficos 8.5 e 8.6 ilustram os desvios percentuais existentes em ambos os casos. Conforme seria de esperar, nota-se claramente que a fórmula de Black-Scholes subvaloriza opções *out-of-the-money* quando a referida correlação é positiva e sobrevaloriza tais opções no caso contrário. Já para opções *in-the-money*, quer a correlação seja positiva quer seja negativa, o desvio existente aproxima zero, no primeiro caso por valores negativos e no segundo por valores positivos. A fórmula de Black-Scholes avalia correctamente opções aproximadamente *at-the-money* quando a correlação é positiva e opções ligeiramente *in-the-money* quando tal correlação é negativa.

Quadro 8.2 resultados do estudo de simulação

dados: $r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $T=0.25$; $U(0)=0.2$; $X=100$; $\rho=1$

	preço verdadeiro		Black-Scholes		
S/X	estim.	erro pad.	preço	env.	env. perc.
0.7	0.908568	0.137299	0.483671	0.424897	87.84843
0.71	1.267143	0.16528	0.563451	0.703692	124.8897
0.72	1.048972	0.142495	0.652993	0.395979	60.64069
0.73	1.281423	0.184631	0.753005	0.528418	70.17464
0.74	1.686187	0.230312	0.864192	0.821996	95.11729
0.75	1.655611	0.217636	0.987257	0.668354	67.69811
0.76	1.608601	0.202914	1.122881	0.48572	43.25659
0.77	1.973364	0.22613	1.271735	0.701629	55.17101
0.78	2.193911	0.229986	1.43447	0.759441	52.94227
0.79	2.200645	0.233581	1.611698	0.588947	36.54202
0.8	2.382439	0.241512	1.804026	0.578413	32.06234
0.81	2.591548	0.252935	2.012003	0.579545	28.80438
0.82	2.483523	0.224264	2.236154	0.247369	11.06225
0.83	3.124982	0.279322	2.476953	0.648029	26.16235
0.84	3.21582	0.275673	2.734849	0.480971	17.58675
0.85	3.435012	0.291246	3.010231	0.424781	14.11124
0.86	3.475645	0.272627	3.303449	0.172196	5.212613
0.87	3.940689	0.297593	3.614807	0.325882	9.015198
0.88	4.459972	0.317442	3.944549	0.515423	13.06672
0.89	4.465412	0.299602	4.292888	0.172524	4.018833
0.9	5.47906	0.379636	4.659979	0.819081	17.57692
0.91	4.83814	0.310826	5.045934	-0.20779	-4.11805
0.92	5.81319	0.37855	5.450806	0.362384	6.648264
0.93	6.592758	0.389871	5.874619	0.718139	12.22444
0.94	6.780696	0.398347	6.317344	0.463352	7.334601
0.95	6.88138	0.415964	6.778904	0.102476	1.51169
0.96	7.296785	0.430794	7.259212	0.037573	0.517591
0.97	8.412827	0.466232	7.758127	0.6547	8.438893
0.98	7.809594	0.437411	8.2754	-0.46581	-5.6288
0.99	8.839334	0.440106	8.810823	0.028511	0.323591
1	9.796459	0.502482	9.364141	0.432318	4.61674
1.01	10.23164	0.503358	9.935096	0.296544	2.984813
1.02	10.86119	0.499152	10.52331	0.33788	3.210777
1.03	10.77134	0.498915	11.12853	-0.35719	-3.20968
1.04	11.21106	0.491472	11.75039	-0.53933	-4.58989
1.05	11.19362	0.504695	12.38847	-1.19485	-9.64486
1.06	13.35317	0.574345	13.0424	0.31077	2.382767
1.07	13.5576	0.585464	13.71175	-0.15415	-1.12422
1.08	15.20112	0.604414	14.3961	0.80502	5.591931
1.09	14.36241	0.559399	15.09502	-0.73261	-4.85332

Quadro 8.2 continuação

	preço verdadeiro		Black-Scholes		
S/X	estim.	erro pad.	preço	env.	env. perc.
1.1	14.94872	0.563109	15.80809	-0.85937	-5.43627
1.11	15.98857	0.628766	16.53483	-0.54626	-3.30369
1.12	16.08546	0.576703	17.2748	-1.18934	-6.88483
1.13	17.42434	0.641151	18.02757	-0.60323	-3.34615
1.14	17.55533	0.622803	18.79265	-1.23732	-6.58406
1.15	19.55378	0.654772	19.56963	-0.01585	-0.08099
1.16	18.76879	0.607856	20.35803	-1.58924	-7.80645
1.17	19.68644	0.639466	21.15742	-1.47098	-6.95255
1.18	20.70542	0.677766	21.96735	-1.26193	-5.74457
1.19	22.25767	0.691236	22.78741	-0.52974	-2.3247
1.2	22.41056	0.710524	23.61715	-1.20659	-5.10896
1.21	23.01565	0.723825	24.45616	-1.44051	-5.89017
1.22	25.33909	0.758892	25.30404	0.03505	0.138515
1.23	25.23014	0.719615	26.16038	-0.93024	-3.55591
1.24	25.82612	0.703862	27.0248	-1.19868	-4.43548
1.25	27.59341	0.762027	27.89692	-0.30351	-1.08797
1.26	28.37203	0.73605	28.77637	-0.40434	-1.40511
1.27	28.83333	0.810222	29.66279	-0.82946	-2.7963
1.28	28.00248	0.71714	30.55585	-2.55337	-8.3564
1.29	30.23382	0.855338	31.4552	-1.22138	-3.88292

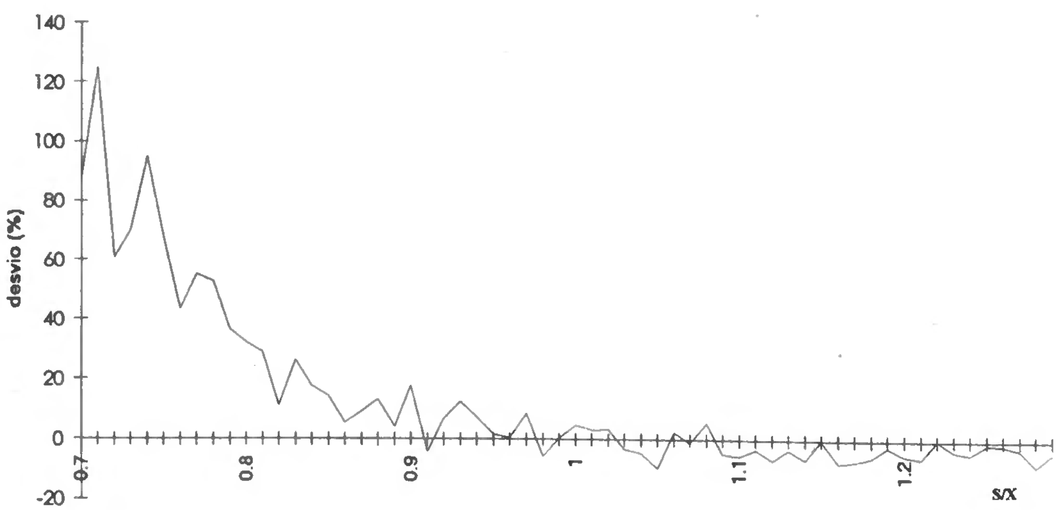

Gráfico 8.5 desvio percentual no cálculo do valor da opção pela fórmula de Black-Scholes

dados: $r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $T=0.25$; $U(0)=0.2$; $X=100$; $\rho=1$

Quadro 8.3 resultados do estudo de simulação

dados: $r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $T=0.25$; $U(0)=.2$; $\rho= -1$

	preço verdadeiro		Black-Scholes		
S/X	estim.	erro pad.	preço	env.	env. perc.
0.7	0.128168	0.024878	0.483671	-0.3555	-73.5009
0.71	0.235216	0.038518	0.563451	-0.32824	-58.2545
0.72	0.181573	0.031532	0.652993	-0.47142	-72.1937
0.73	0.258363	0.04146	0.753005	-0.49464	-65.689
0.74	0.343316	0.047202	0.864192	-0.52088	-60.2731
0.75	0.421304	0.059299	0.987257	-0.56595	-57.3258
0.76	0.465764	0.055463	1.122881	-0.65712	-58.5206
0.77	0.721286	0.078072	1.271735	-0.55045	-43.2833
0.78	0.870822	0.082198	1.43447	-0.56365	-39.2931
0.79	1.006583	0.088307	1.611698	-0.60512	-37.5452
0.8	1.072956	0.095928	1.804026	-0.73107	-40.5244
0.81	1.328781	0.110104	2.012003	-0.68322	-33.9573
0.82	1.503253	0.113448	2.236154	-0.7329	-32.7751
0.83	1.653606	0.119808	2.476953	-0.82335	-33.2403
0.84	2.175511	0.144239	2.734849	-0.55934	-20.4522
0.85	2.499189	0.153807	3.010231	-0.51104	-16.9768
0.86	2.416008	0.149724	3.303449	-0.88744	-26.8641
0.87	2.827934	0.171273	3.614807	-0.78687	-21.7681
0.88	3.055698	0.178683	3.944549	-0.88885	-22.5337
0.89	3.280452	0.178121	4.292888	-1.01244	-23.584
0.9	4.017583	0.204381	4.659979	-0.6424	-13.7854
0.91	4.438868	0.223222	5.045934	-0.60707	-12.0308
0.92	4.985446	0.226719	5.450806	-0.46536	-8.53745
0.93	4.972753	0.232226	5.874619	-0.90187	-15.3519
0.94	5.174516	0.241409	6.317344	-1.14283	-18.0903
0.95	6.493093	0.263287	6.778904	-0.28581	-4.21618
0.96	6.759707	0.269564	7.259212	-0.49951	-6.88098
0.97	7.194107	0.293968	7.758127	-0.56402	-7.27005
0.98	7.835173	0.307931	8.2754	-0.44023	-5.31971
0.99	8.743938	0.313832	8.810823	-0.06688	-0.75912
1	9.208251	0.327608	9.364141	-0.15589	-1.66475
1.01	9.321194	0.331307	9.935096	-0.6139	-6.17912
1.02	10.79863	0.354421	10.52331	0.27532	2.616287
1.03	11.13292	0.372559	11.12853	0.00439	0.039448
1.04	11.51676	0.377516	11.75039	-0.23363	-1.98827
1.05	11.76875	0.382978	12.38847	-0.61972	-5.00239
1.06	12.64106	0.389817	13.0424	-0.40134	-3.07719
1.07	14.18048	0.418369	13.71175	0.46873	3.418455
1.08	14.79424	0.424072	14.3961	0.39814	2.76561
1.09	15.72727	0.42552	15.09502	0.63225	4.188467

Quadro 8.3 continuação

	preço verdadeiro		Black-Scholes		
S/X	estim.	erro pad.	preço	env.	env. perc.
1.1	16.09397	0.453171	15.80809	0.28588	1.808441
1.11	17.29692	0.456002	16.53483	0.76209	4.608998
1.12	17.16567	0.479348	17.2748	-0.10913	-0.63173
1.13	17.44675	0.461256	18.02757	-0.58082	-3.22184
1.14	18.73202	0.490219	18.79265	-0.06063	-0.32263
1.15	20.69422	0.506964	19.56963	1.12459	5.746608
1.16	20.57382	0.497492	20.35803	0.21579	1.059975
1.17	21.65936	0.502196	21.15742	0.50194	2.372406
1.18	23.38475	0.539521	21.96735	1.4174	6.452303
1.19	23.12675	0.515772	22.78741	0.33934	1.489156
1.2	23.47123	0.547688	23.61715	-0.14592	-0.61786
1.21	24.82099	0.539705	24.45616	0.36483	1.491771
1.22	27.23233	0.570715	25.30404	1.92829	7.620483
1.23	25.90314	0.556423	26.16038	-0.25724	-0.98332
1.24	27.35417	0.582651	27.0248	0.32937	1.218769
1.25	29.20994	0.595562	27.89692	1.31302	4.706684
1.26	30.14126	0.596122	28.77637	1.36489	4.743093
1.27	30.06125	0.616622	29.66279	0.39846	1.343299
1.28	30.73594	0.595914	30.55585	0.18009	0.58938
1.29	32.999	0.627848	31.4552	1.5438	4.907933

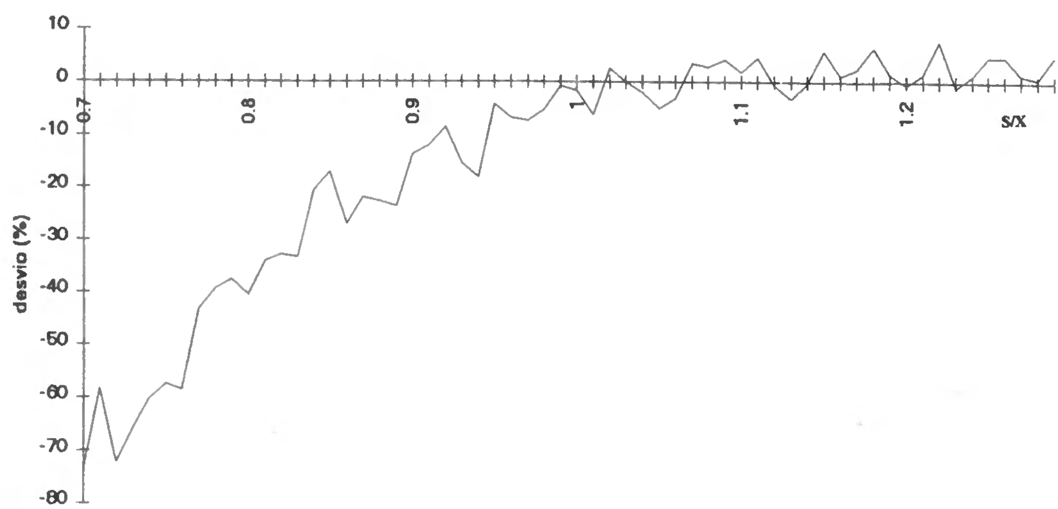

Gráfico 8.6 desvio percentual no cálculo do valor da opção pela fórmula de Black-Scholes

dados: $r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $T=0.25$; $U(0)=0.2$; $X=100$; $\rho=-1$

Nesta fase duas observações são pertinentes. Em primeiro lugar note-se que, em relação ao caso de a correlação entre o preço da acção e a respectiva variância ser nula, os desvios percentuais existentes para opções *out-of-the-money* apresentam-se agora bastante superiores. Em segundo lugar repare-se que, qualquer que seja a correlação existente entre o preço da acção e a respectiva variância, isto é, positiva, negativa ou nula, o desvio obtido no cálculo do preço duma opção *in-the-money* pela fórmula de Black-Scholes tende para zero quando S/X tende para infinito.

Os gráficos 8.7 e 8.8 permitem, para $\rho=1$ e $\rho=-1$, analisar a influência da variância do preço da acção no instante inicial nos desvios ocorridos por aplicação da fórmula de Black-Scholes.

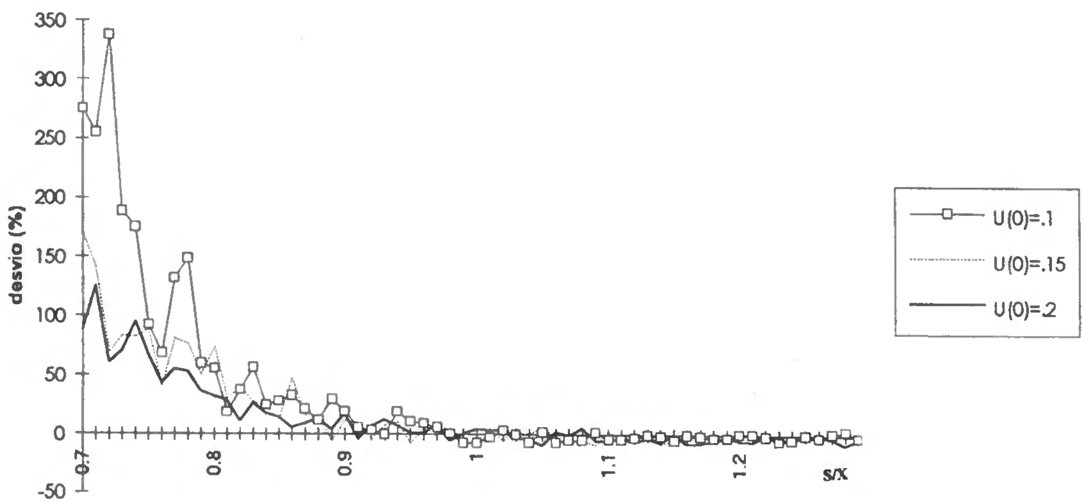

Gráfico 8.7 efeito da variação da variância do preço da acção no instante inicial

dados: $r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $T=0.25$; $X=100$; $\rho=1$

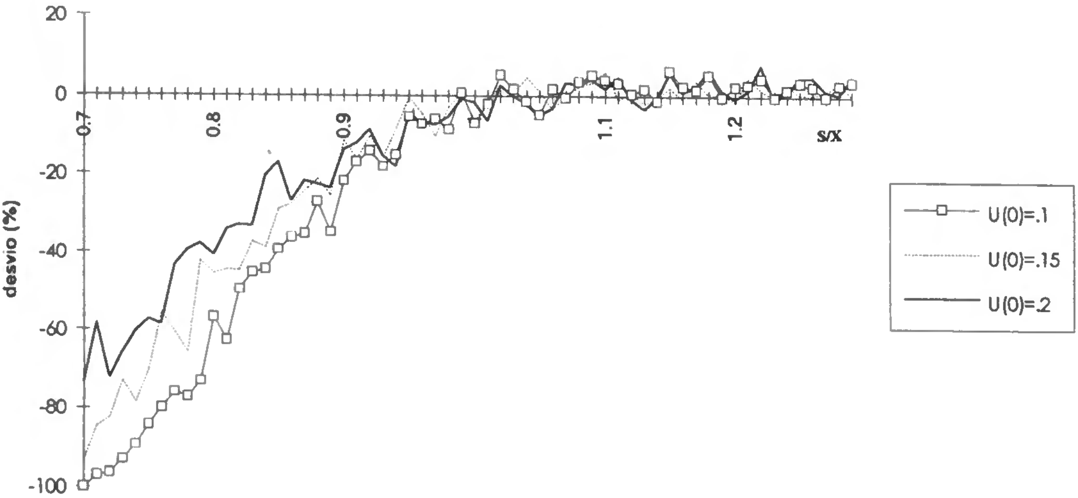

Gráfico 8.8 efeito da variação da variância do preço da acção no instante inicial

dados: r=μ=0.04; ϕ=0; ξ=1; T=0.25; X=100; ρ= -1

Enquanto que, para ρ=1, quanto maior for a variância do preço da acção no instante inicial menor é o enviesamento no cálculo do valor de uma opção *out-of-the-money* pela fórmula de Black-Scholes, já para ρ=-1 tal desvio é cada vez menos negativo. Em termos absolutos, quanto maior for a variância do preço da acção no instante inicial, menor é o desvio obtido no cálculo do preço duma opção *out-of-the-money*.

Para ρ=1 o gráfico 8.9 (na legenda "ξ" é representado por "e") mostra que quanto maior for o valor do parâmetro ξ maior é o desvio para opções *out-of-the-money*. Para ρ=-1 tal desvio é cada vez mais negativo (veja-se gráfico 8.10). Em termos absolutos, quanto maior for o valor do parâmetro ξ, maior é o desvio obtido no cálculo do preço duma opção *out-of-the-money* pela fórmula de Black-Scholes.

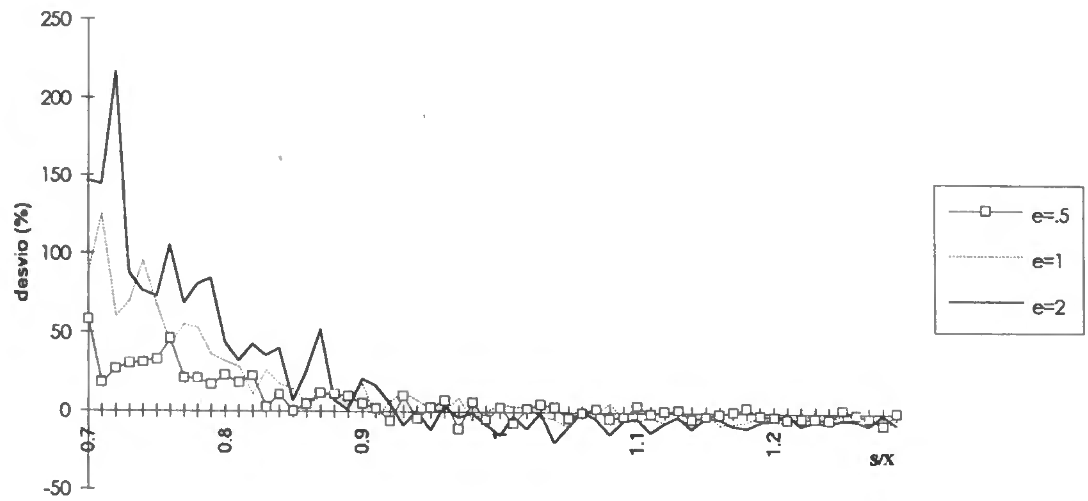

Gráfico 8.9 efeito da variação de ξ

dados: $r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $T=0.25$; $U(0)=0.2$; $X=100$; $\rho=1$

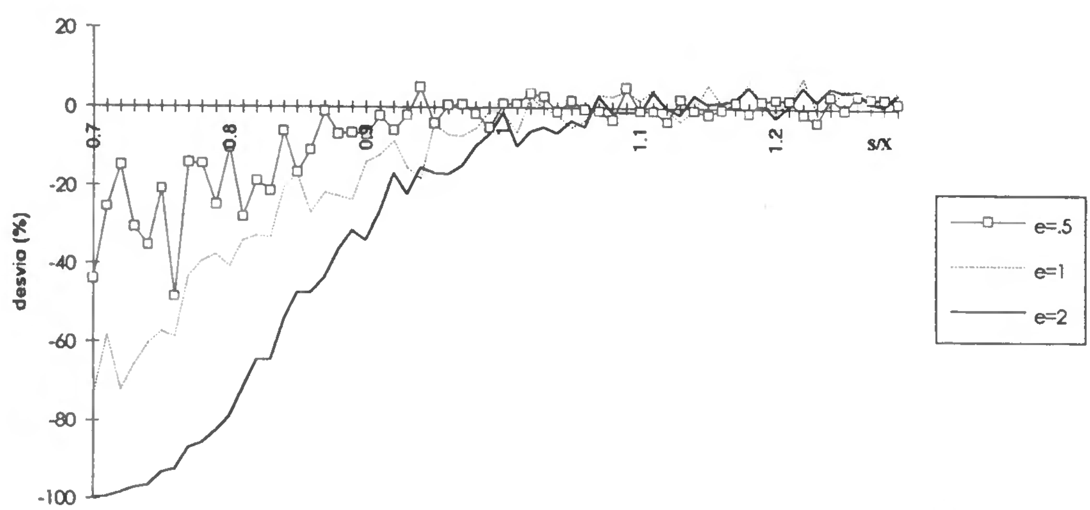

Gráfico 8.10 efeito da variação de ξ

dados: $r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $T=0.25$; $U(0)=0.2$; $X=100$; $\rho=-1$

Com base nos gráficos 8.11 e 8.12 não parece ser possível estabelecer uma relação sistemática entre uma variação do tempo até ao vencimento e os desvios percentuais obtidos no cálculo do valor da opção pela fórmula de Black-Scholes. No entanto, conforme Hull e White referem, o efeito de um aumento do tempo até ao vencimento no preço da opção é o mesmo que o de um aumento simultâneo da variância do preço da acção no instante inicial e do valor do parâmetro ξ. Então, uma vez que se detectou que, para opções *out-of-the-money*, aumentos de U(0) e ξ provocam efeitos contrários nos desvios percentuais, não parece que os resultados obtidos sejam de estranhar. Como os gráficos apresentados dizem respeito aos desvios percentuais e o valor de Black-Scholes também varia com o tempo até ao vencimento, não há uma relação directa entre a variação do preço da opção e os respectivos desvios. Assim, também não parece haver contradição com os argumentos mencionados por Hull e White, uma vez que as conclusões por eles obtidas dizem respeito directamente ao preço da opção e às volatilidades implícitas (cujas variações em função de T-t também não estão directamente relacionadas com variações do preço da opção).

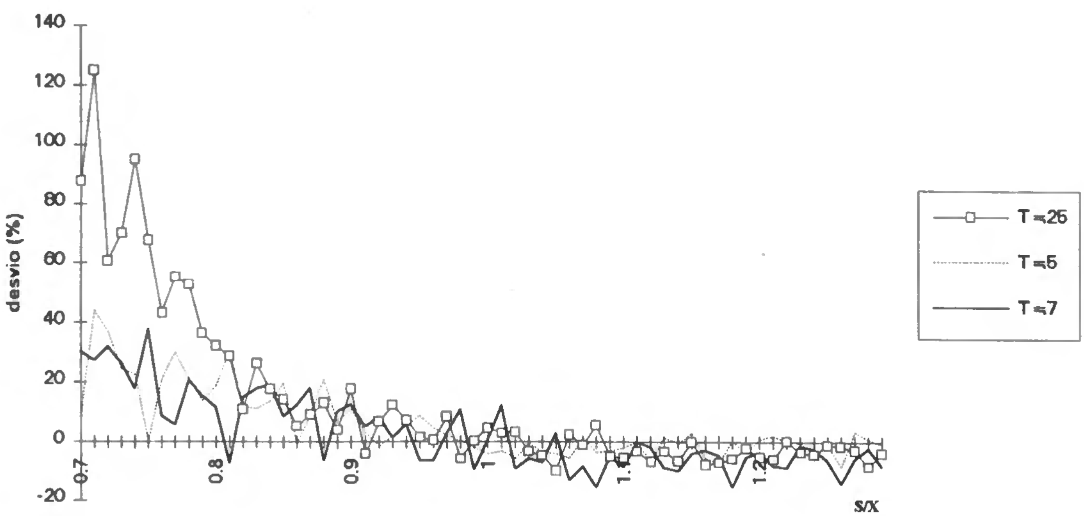

Gráfico 8.11 efeito da variação do tempo até ao vencimento da opção

dados: $r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $U(0)=0.2$; $X=100$; $\rho=1$

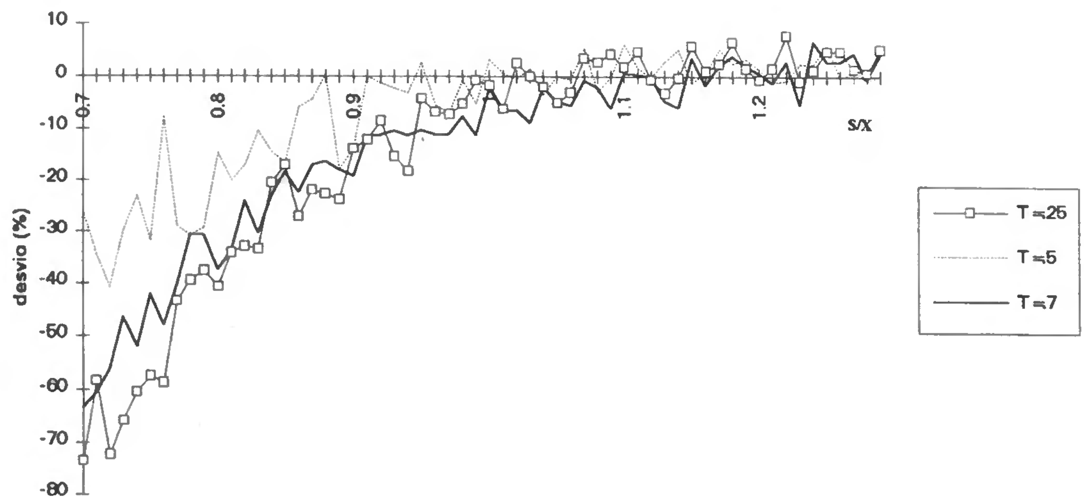

Gráfico 8.12 efeito da variação do tempo até ao vencimento da opção

dados: $r=\mu=0.04$; $\phi=0$; $\xi=1$; $U(0)=0.2$; $X=100$; $\rho=-1$

Em suma, também no caso de o preço da acção e a respectiva volatilidade serem correlacionados a fórmula de Black-Scholes não valoriza correctamente as opções. Mais ainda, os desvios percentuais encontrados para opções *out-of-the-money* são bastante superiores aos obtidos no caso de a correlação ser nula. O tipo de desvios encontrados depende, obviamente, do facto de a correlação ser positiva ou negativa. No primeiro caso viu-se que opções *out-of-the-money* são subvalorizadas pela fórmula de Black-Scholes enquanto que opções *in-the-money* são sobrevalorizadas (o desvio existente é, no entanto, pouco significativo). No segundo caso verificou-se o efeito contrário. Os desvios existentes dependem ainda de todos os outros parâmetros que explicam o preço da opção. Assim, analisou-se o efeito de uma variação da variância do preço da acção no instante inicial, do valor do parâmetro ξ e ainda do tempo até ao vencimento da opção.

Concluindo esta análise, não pode deixar de referir-se o facto de os resultados apresentados, válidos supondo o preço da acção e a respectiva volatilidade estocástica a seguirem o processo (7.1) e (7.2) e considerando neutralidade em relação ao risco, terem sido obtidos em determinadas condições particulares. Apesar de já serem indicativos de comportamentos gerais, não deve deixar de prosseguir-se a análise. Por exemplo, deve ser considerado o caso em que ξ e ϕ dependem de t e U(t). Devem ser considerados outros valores para ρ. Devem ser obtidos os desvios percentuais em relação a preços de Black-Scholes determinados com base numa variância diferente das consideradas.

CONCLUSÃO

Com este trabalho pretendeu proceder-se a uma análise do modelo de avaliação de opções de Black-Scholes. De facto, este modelo, dados os pressupostos que estão na base da sua derivação, revela-se bastante limitativo. No entanto, a sua importância no domínio da teoria de avaliação de opções deve-se a dois aspectos fundamentais. Por um lado, a metodologia empregue na sua derivação pode ser adaptada de forma a permitir a obtenção de modelos alternativos mais gerais. Por outro lado, uma vez que tais modelos alternativos são normalmente bastante complexos, o modelo de Black-Scholes, por ser de fácil aplicação, apresenta-se frequentemente em condições de utilização vantajosas.

Dado que, conforme já foi mencionado, nem sempre os pressupostos em que assenta o modelo de Black-Scholes são verificados na prática, é, então, de grande importância conhecer o tipo de desvios que o modelo origina. Neste trabalho, por haver indícios de que processo assumido por Black-Scholes para descrever o comportamento do preço da acção não é satisfeito e por o modelo de Black-Scholes ser bastante sensível a este problema, procedeu-se à avaliação de uma opção supondo o preço da acção a seguir um modelo com variância estocástica. Estabeleceu-se ainda, para este caso, uma relação entre o verdadeiro preço da opção e o preço obtido por aplicação da fórmula de Black-Scholes. Para confirmar o facto de, no caso da volatilidade do preço da acção ser estocástica, a fórmula de Black-Scholes não avaliar correctamente as opções, procedeu-se a um estudo de simulação. Os resultados obtidos permitiram concluir que, no caso de o preço da acção e a respectiva volatilidade não serem correlacionados, a fórmula de Black-Scholes sobrevaloriza opções *at-the-money* e subvaloriza opções suficientemente *out-of-the-money* e *in-the-money*. No caso de o preço da acção e da volatilidade serem correlacionados detectou-se que, se tal correlação é positiva, a fórmula de Black-Scholes subvaloriza opções *out-of-the-money* e sobrevaloriza opções *in-the-money*, se é negativa, verifica-se o efeito contrário. Qualquer que seja o tipo de correlação existente, os desvios encontrados para opções *in-the-money* não são, no entanto, significativos. Analisou-se ainda a influência nos desvios obtidos de um aumento da variância do preço da acção no instante inicial, do tempo até ao vencimento da opção e ainda da variância infinitesimal da variância do preço da acção. Mais uma vez se constatou que o tipo de desvio existente depende do tipo de correlação entre o preço da acção e a volatilidade e ainda da relação entre o preço corrente da acção e o preço de exercício da opção.

Nesta fase final do trabalho não pode deixar de ser mencionada a investigação que tem vindo a ser desenvolvida no sentido da resolução de outros problemas inerentes ao modelo de Black-Scholes, nomeadamente o pressuposto de que a acção não dá direito ao pagamento de dividendos, o pressuposto de que a taxa de juro é constante ao longo do tempo e o pressuposto da continuidade do preço da acção ao longo do tempo, isto é, de não serem permitidos em determinados instantes saltos bruscos do seu preço.

Dada a dificuldade matemática no tratamento de modelos obtidos por extensão do modelo de Black-Scholes na tentativa de se aplicarem mais directamente ao mundo prático e, por conseguinte, permitirem a obtenção de preços para as opções mais ajustados aos preços de mercado, cada tipo de pressuposto efectuado por Black-Scholes tem vindo a ser abandonado individualmente. Obviamente, na prática, ocorre a não satisfação simultânea de determinadas restrições subjacentes ao modelo e, portanto, na escolha de um modelo alternativo a aplicar há que ponderar as diversas limitações. Na ponderação deve ser tida em conta, entre outros factores, a importância de cada pressuposto, a complexidade do modelo, o número de parâmetros a estimar e os custos computacionais necessários à aplicação do mesmo. Dada a grande dispersão de modelos alternativos ao modelo de avaliação de Black-Scholes, espera-se que a investigação teórica e prática prossiga no sentido de uniformizar tais modelos de modo a que possa haver uma resolução conjunta e não individual dos diferentes problemas inerentes ao modelo de Black-Scholes.

Em virtude da complexidade matemática exigida na análise dos diferentes modelos alternativos ao modelo de Black-Scholes, não pode deixar de salientar-se a extrema importância dos estudos empíricos e de simulação na área da avaliação de opções.

BIBLIOGRAFIA

ARNOLD, L. (1974)
Stochastic Differential Equations: Theory and Applications
John Wiley & Sons, New York.

ASSOCIÉS EN FINANCE (1987)
Les Options sur Actions
Presses Universitaires de France.

BHARUCHA-REID, A. (1972)
Random Integral Equations
Academic Press.

BLACK, F.; **SCHOLES**, M. (1973)
"The Princing of Options and Corporate Liabilities"
Journal of Political Economy. 81 (Maio), 637-654.

BOYLE, P. (1977)
"Options:A Monte Carlo Approach"
Journal of Financial Economics. 4, 323-328.

BREALEY, R.; **MYERS**, S. (1992)
Princípios de Finanças Empresariais
McGraw-Hill.

COX, J.; **ROSS**, S. (1976)
"The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes"
Journal of Financial Economics. 3, 145-166.

COX, J.; **ROSS**, S. (1976)
"A Survey of Some New Results in Financial Option Pricing Theory"
The Journal of Finance. 31, 2, 383-402.

COX, J.; **ROSS**, S.; **RUBINSTEIN**, M. (1979)
"Option Pricing: A Simplified Approach"
Journal of Financial Economics. 7, 229-263.

COX, J.; **RUBINSTEIN**, M. (1985)
Options Markets
Prentice-Hall, Inc.

CHRISTIE, A. (1982)
"The Stochastic Behavior of Common Stock Variances"
Journal of Financial Economics. 10, 407-432.

FABOZZI, F.; **FRANCO**, M. (1992)
Capital Markets: Institutions and Instruments
Prentice-Hall, Inc.

GARMAN, M; **KOHLHAGEN**, S. (1983)
"Foreign Currency Option Values"
Journal of International Money and Finance. 2, 231-237.

GIBSON, R. (1988)
Option Valuation
Georg Éditeur S.A-Genève.

GIHMAN, I.; **SKOROHOD**, A. (1972)
Stochastic Differential Equations
Springer-Verlag, Inc.,New York.

GIHMAN, I.; **SKOROHOD**, A. (1974)
The Theory of Stochastic Processes
Springer-Verlag, Inc.,New York.

GRABBE, J. (1983)
"The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange"
Journal of International Money and Finance. 2, 239-253.

GRIMMETT, G.; **STIRZAKER**, D. (1990)
Probability and Random Processes
Clarendon Press. Oxford.

HAUGEN, R. (1993)
Modern Investment Theory
Prentice-Hall, Inc.

HOEL, P.; **PORT**, S.; **STONE**, C. (1972)
Introduction to Stochastic Processes
Houghton Mifflin Company.

HORNE, J. (1992)
Financial Management and Policy
Prentice-Hall International Editions.

HULL, J. (1993)
Options, Futures and Other Derivative Securities
Prentice-Hall International, Inc.

HULL, J.; **WHITE**, A. (1987)
"The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities"
The Journal of Finance. 42, 2, 281-299.

JOHNSON, H.; **SHANNO**, D. (1987)
"Option Pricing when the Variance is Changing"
Journal of Financial and Quantitative Analysis. 22, 2, 143-151.

KARATZAS, I; **SHREVE**, S. (1991)
Brownian Motion and Stochastic Calculus
Springer-Verlag.

KARLIN, S.; **TAYLOR**, H. (1975)
A First Course in Stochastic Processes
Academic Press.

KARLIN, S.; **TAYLOR**, H. (1975)
A Second Course in Stochastic Processes
Academic Press.

MACBETH, J.; **MERVILLE**, L. (1979)
"An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model"
The Journal of Finance. 34, 5, 1173-1186.

MALLIARIS, A. (1981)
Stochastic Methods in Economics and Finance
North-Holland.

MERTON, R. (1973)
"An Intertemporal Capital Asset Pricing Model"
Econometrica. 41, 5, 867-887.

MERTON, R. (1976)
"Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous"
Journal of Financial Economics. 3, 125-144.

MERVILLE, L; **PIEPTEA**, D. (1989)
"Stock-Price Volatility, Mean-Reverting Diffusion, and Noise"
Journal of Financial Economics. 24, 193-214.

MURTEIRA, B. J. F. (1979)
Probabilidades e Estatística
Vol 1, Editora McGraw-Hill de Portugal Lda.

MURTEIRA, B. J. F. (1980)
Probabilidades e Estatística
Vol 2, Editora McGraw-Hill de Portugal Lda.

PARKINSON, M. (1980)
"The Random Walk Problem: Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Displacement"
Journal of Business.53,61-65.

PARZEN, E. (1962)
Stochastic Processes
Holden-Day.

SCHUSS, Z. (1980)
Theory and Applications of Stochastic Differential Equations
John Wiley & Sons.

SMITH, C. (1976)
"Option Pricing: a Review"
Journal of Financial Economics.3, 3-51.

WIGGINS, J. (1987)
"Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates"
Journal of Financial Economics. 19, 351-372.

WILLIAMS, D. (1979)
Diffusions, Markov Processes and Martingales
John Wiley & Sons.

APÊNDICE

APÊNDICE 1

Pretende-se mostrar que

$$\frac{\partial C}{\partial X} = -\exp(r(t-T))\Phi(d_2).$$

De (5.8) resulta que

$$\frac{\partial C}{\partial X} = S\Phi'(d_1)d_1' - \exp(r(t-T))\Phi(d_2) - X\exp(r(t-T))\Phi'(d_2)d_2',$$

onde

$$d_1' = \frac{\partial d_1}{\partial X} = -\frac{1}{X\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\partial d_2}{\partial X} = d_2'$$

e $\Phi'(d)$ representa a densidade normal standard avaliada em d. Então,

$$\frac{\partial C}{\partial X} = -\frac{S}{X\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\exp(-d_1^2/2) - \exp(r(t-T))\Phi(d_2) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}\exp(r(t-T))\exp(-d_2^2/2)$$

Basta, portanto, ver que

$$\frac{S}{X}\exp(-d_1^2/2) = \exp(r(t-T))\exp(-d_2^2/2),$$

ou, mais simplesmente,

$$(1) \qquad \frac{S}{X} = \exp(r(t-T))\exp\left(d_1\sigma\sqrt{T-t} - \sigma^2(T-t)/2\right),$$

uma vez que

$$\exp(-d_2^2/2) = \exp\left(-d_1^2/2 + d_1\sigma\sqrt{T-t} - \sigma^2(T-t)/2\right).$$

De facto, o segundo membro de (1) é dado por

$$\frac{S}{X}\exp\left[(r+\sigma^2/2)(t-T)\right].\exp\left[(r+\sigma^2/2)(T-t)\right],$$

o que, finalmente, permite provar o resultado.

APÊNDICE 2

Vai-se começar por mostrar que

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1).$$

De (5.8) resulta que

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S\Phi'(d_1)d_1' - X\exp\left(r(t-T)\right)\Phi'(d_2)d_2'.$$

Como

$$d_1' = \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = d_2',$$

basta ver que

(1) $$S\Phi'(d_1) - X\exp\left(r(t-T)\right)\Phi'(d_2) = 0.$$

Como $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, então

$$\Phi'(d_2) = \exp\left(-d_1^2/2 + d_1\sigma\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right).$$

Assim, (1) reduz-se a

$$S - X\exp[r(t-T)]\exp\left[d_1\sigma\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right] = 0,$$

que é de verificação imediata.

Para mostrar que $\frac{C}{SC_S} > 1$, basta ter em conta que

$$\frac{C}{SC_S} = \frac{S\Phi(d_1) - X\exp[r(t-T)]\Phi(d_2)}{S\Phi(d_1)}$$

$$= 1 - \frac{X}{S}\exp[r(t-T)]\frac{\Phi(d_2)}{\Phi(d_1)} < 1$$

APÊNDICE 3

Faça-se $U=\sigma^2$. Pretende-se mostrar que

$$\frac{\partial^2 C}{\partial U^2} = \frac{S\sqrt{T-t}}{4U^{3/2}}\Phi'(d_1)(d_1 d_2 - 1).$$

Tendo em conta que

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}\,\Phi'(d_1),$$

e que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial U} = \frac{1}{2\sqrt{U}},$$

vem

$$\frac{\partial C}{\partial U} = \frac{\partial C}{\partial \sigma}.\frac{\partial \sigma}{\partial U} = \frac{S\sqrt{T-t}}{2\sqrt{U}}\Phi'(d_1)..$$

Então,

$$\frac{\partial^2 C}{\partial U^2} = -\frac{S\sqrt{T-t}}{2\sqrt{U}} d_1' d_1 \Phi'(d_1) - \frac{S\sqrt{T-t}}{4U^{3/2}}\Phi'(d_1)$$

$$= \frac{S\sqrt{T-t}}{2\sqrt{U}}\Phi'(d_1)\left(-d_1' d_1 - \frac{1}{2U}\right).$$

Considerou-se que $\Phi''(x) = -x\Phi'(x)$. Mas,

$$d_1' = \frac{\partial d_1}{\partial U} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma}.\frac{1}{2\sqrt{U}}$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{T-t} - d_1}{2U}.$$

Então,

$$-d_1 d_1' - \frac{1}{2U} = \frac{-\sigma d_1 \sqrt{T-t} + d_1^2 - 1}{2U}$$

$$= \frac{d_1 d_2 - 1}{2U},$$

o que prova o resultado.

APÊNDICE 4

```
REM Simulação para ro=0
CONST s = 70
CONST x = 100
CONST r = .04
CONST t = .5
CONST u = .04
CONST e = 1
CONST var0 = .15
CONST o = 0
CONST n1 = 100
CONST sim = 1500
CONST passo = .01
CONST pi = 3.1415926536#
OPEN "preço.ro0" FOR OUTPUT AS #1
OPEN "prebs.ro0" FOR OUTPUT AS #2
OPEN "desvpd.ro0" FOR OUTPUT AS #3
OPEN "prebsv0.ro0" FOR OUTPUT AS #4
RANDOMIZE TIMER
saux = s
inc = 0
n = n1 + n1 MOD 2
dt = t / n
pi2 = 2 * pi
sqr2pi = SQR(pi2)
exppar1 = (o - e * e / 2) * dt
exppar2 = e * SQR(dt)
exprt = EXP(-r * t)
DO
  inc = inc + 1
  daux = LOG(saux / x) + r * t
  cver = 0
  dpaux = 0
  varesp = 0
  FOR i = 1 TO sim
       var1 = var0
       var01 = var0
       varm = var0
       varm0 = var0
       FOR j = 1 TO n STEP 2
               GOSUB gera
               var2 = var1 * EXP(exppar1 + nor1 * exppar2)
               var3 = var2 * EXP(exppar1 + nor2 * exppar2)
               varm = varm + var2 + var3
               var1 = var3
               var02 = var01 * EXP(exppar1 - nor1 * exppar2)
               var03 = var02 * EXP(exppar1 - nor2 * exppar2)
               varm0 = varm0 + var02 + var03
               var01 = var03
       NEXT j
       varm = varm / (n + 1)
       varm0 = varm0 / (n + 1)
       varesp = varesp + varm + varm0
       varbs = varm
       GOSUB blackscholes
       caux = cbsaux
       varbs = varm0
       GOSUB blackscholes
       caux0 = cbsaux
       ccaux = caux + caux0
       cver = cver + ccaux
       dpaux = dpaux + ccaux * ccaux
  NEXT i
  varesp = varesp / (2 * sim)
  varbs = varesp
```

```
  GOSUB blackscholes
  cbs = cbsaux
  cverdp = SQR((dpaux - cver * cver / sim) / (4 * (sim - 1) * sim))
  cver = cver / (2 * sim)
  varbs = var0
  GOSUB blackscholes
  REM desvio padräo do enviesamento: cverdp
  REM preço verdadeiro: cver
  REM preço de Black-Sholes supondo a variância E(v): cbs
  REM preço de Black-Sholes supondo a variância inicial: cbsaux
  WRITE #1, cver
  WRITE #2, cbs
  WRITE #3, cverdp
  WRITE #4, cbsaux
  saux = saux + x * passo
LOOP UNTIL saux / x > 1.3
CLOSE #1
CLOSE #2
CLOSE #3
END


gera:
uni1 = RND
uni2 = RND
nor1 = SQR(-2 * LOG(uni1)) * COS(pi2 * uni2)
nor2 = SQR(-2 * LOG(uni1)) * SIN(pi2 * uni2)
REM PRINT "nor1"; nor1; "nor2"; nor2
RETURN


blackscholes:
raizq = SQR(varbs * t)
d = (daux + varbs * t / 2) / raizq
GOSUB normal
nd1 = np
d = d - raizq
GOSUB normal
nd2 = np
cbsaux = saux * nd1 - x * exprt * nd2
RETURN


normal:
dd = ABS(d)
w = 1 / (1 + .2316419# * dd)
dens = EXP(-dd * dd / 2) / sqr2pi
np = dens * w * ((((1.330274 * w - 1.821256) * w + 1.781478) * w - .3565638#
IF d >= 0 THEN
  np = 1 - np
END IF
RETURN
```

Na rotina "normal" em vez de

np=dens*w*((((1.330274*w-1.821256)*w+1.781478)*w-.3565638#

deve ler-se

np=dens*w*((((1.330274*w-1.821256)*w+1.781478)*w-.3565638#)*w+.3193815#)

APÊNDICE 5

```
REM Simulação para ro diferente de zero
CONST s = 70
CONST x = 100
CONST r = .04
CONST t = .25
CONST u = .04
CONST e = 1
CONST var0 = .2
CONST o = 0
CONST ro = 1
CONST n = 100
CONST sim = 1500
CONST passo = .01
CONST pi = 3.1415926536#
OPEN "preçoro.cro" FOR OUTPUT AS #1
OPEN "prebsro.cro" FOR OUTPUT AS #2
OPEN "desvpdro.cro" FOR OUTPUT AS #3
RANDOMIZE TIMER
saux = s
inc = 0
dt = t / n
exppar1 = (o - e * e / 2) * dt
exppar2 = ro * e * SQR(dt)
exppar3 = SQR(1 - ro * ro) * e * SQR(dt)
pi2 = 2 * pi
sqr2pi = SQR(pi2)
exprt = EXP(-r * t)
DO
  inc = inc + 1
  daux = LOG(saux / x) + r * t
  varbs = var0
  GOSUB blackscholes
  cbs = cbsaux
  cver = 0
  dpaux = 0
  FOR i = 1 TO sim
       s1 = saux
       var1 = var0
       FOR j = 1 TO n
               GOSUB gera
               s1 = s1 * EXP((u - var1 / 2) * dt + nor1 * SQR(var1 * dt))
               var1 = var1 * EXP(exppar1 + exppar2 * nor1 + exppar3 * nor2)
       NEXT j
       IF s1 - x > 0 THEN
         caux = (s1 - x) * exprt
       ELSE
         caux = 0
       END IF
       cver = cver + caux
       dpaux = dpaux + caux * caux
  NEXT i
  cverdp = SQR((dpaux - cver * cver / sim) / (sim - 1) * sim)
  cver = cver / sim
  REM preço verdadeiro: cver
  REM valor de Black-Scholes supondo a variância inicial: cbs
  REM desvio padrão do enviesamento: cverdp
  WRITE #1, cver
  WRITE #2, cbs
  WRITE #3, cverdp
  saux = saux + x * passo
LOOP UNTIL saux / x > 1.3
CLOSE #1
CLOSE #2
CLOSE #3
```

```
END

gera:
uni1 = RND
uni2 = RND
nor1 = SQR(-2 * LOG(uni1)) * COS(pi2 * uni2)
nor2 = SQR(-2 * LOG(uni1)) * SIN(pi2 * uni2)
REM PRINT "nor1"; nor(1); "nor2"; nor(2)
RETURN

blackscholes:
raizq = SQR(varbs * t)
d = (daux + varbs * t / 2) / raizq
GOSUB normal
nd1 = np
d = d - raizq
GOSUB normal
nd2 = np
cbsaux = saux * nd1 - x * exprt * nd2
RETURN


normal:
dd = ABS(d)
w = 1 / (1 + .2316419# * dd)
dens = EXP(-dd * dd / 2) / sqr2pi
np = dens * w * ((((1.330274 * w - 1.821256) * w + 1.781478) * w - .3565638#
IF d >= 0 THEN
  np = 1 - np
END IF
RETURN
```


Na rotina "normal" em vez de

np=dens*w*((((1.330274*w-1.821256)*w+1.781478)*w-.3565638#

deve ler-se

np=dens*w*((((1.330274*w-1.821256)*w+1.781478)*w-.3565638#)*w+.3193815#)