



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MÉXICO**



---

---

**FACULTAD DE ECONOMÍA**

**“MODELACIÓN DE LOS MONTOS MÁXIMOS DE SINIESTROS EN EL SEGURO DE  
AUTOMÓVILES EN MÉXICO (2008-2017)”**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**LICENCIADO EN ACTUARÍA**

**PRESENTAN:**

**KARINA PÉREZ HERNÁNDEZ**

**MARÍA DE LOURDES TARANGO BECERRIL**

**ASESOR:**

**DRA. EN C. ANNEL HURTADO JARAMILLO**

**TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO**

**JUNIO 2019**

## **AGRADECIMIENTOS**

No es fácil el concluir un ciclo sin el apoyo de las personas que te apoyan durante todo el proceso, es primordial sentir que alguien está a tu lado, aquellas personas que te quieren y que tú quieres, que te dan consejos para que puedas alcanzar tu meta.

Les quiero dar las gracias a las personas que me brindaron su apoyo para realizar esta investigación.

A mi padre y hermanos

Les agradezco profundamente por estar ahí cuando los necesitaba, por sus consejos y su apoyo durante todo este proceso.

A mi madre

Quien es la persona que más quiero, sé que no es fácil el sacar adelante a dos jóvenes universitarios al mismo tiempo, pero ella nunca dijo no puedo, al contrario era un orgullo, muchas gracias por todo tu amor, tu cariño, tus consejos y por tu comprensión.

A mi asesora de tesis

Gracias por el tiempo y la dedicación para que esta investigación se pudiera realizar.

**Karina**

## **AGRADECIMIENTOS**

La presente tesis fue el esfuerzo de varias personas que estuvieron brindándome ánimo y apoyo para concluir este trabajo.

A dios, por darme la fuerza y paciencia de haber superado obstáculos presentados en el camino y continuar en la obtención de uno de los anhelos más deseados.

A mi abuelo Oscar, que a lo largo de su existencia me brindó sus consejos y su apoyo incondicional y a pesar de que ya no se encuentra a mi lado siguió dándome muestras de fortaleza en aquellos momentos de desesperación, de dificultad y de debilidad.

A mi abuela Lulú, por sus palabras de motivación y su dedicación, de estar al pendiente de las necesidades que se me presentaban durante el proceso.

A mi mamá por darme la vida, por ser un pilar fundamental en mi vida y por su exigencia, que gracias a ello me ha servido para poder lograr mis metas.

A mi hermano por estar siempre presente en los momentos difíciles.

A mi asesora Annel Hurtado Jaramillo por el tiempo dedicado en la dirección de este trabajo.

A todos muchas gracias

**María de Lourdes**

## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE GRÁFICAS Y DIAGRAMA .....	6
ÍNDICE DE TABLAS .....	8
INTRODUCCIÓN .....	10
CAPÍTULO I. El seguro y la teoría clásica del riesgo .....	14
1.1 Definiciones generales .....	17
1.2 Tipos de seguros.....	19
1.2.1 Seguro de automóvil .....	21
1.3 Modelo de riesgo individual y colectivo .....	23
CAPÍTULO II. Distribuciones para los montos de siniestros.....	27
2.1 Distribución Gamma.....	29
2.2 Distribución exponencial .....	30
2.3 Distribución Pareto.....	32
2.4 Distribución log-normal .....	33
CAPÍTULO III. Teoría del valor extremo.....	35
3.1 Distribución generalizada de valores extremos.....	37
3.2 Distribución de Pareto generalizada .....	42
CAPÍTULO IV. Métodos para la estimación de parámetros .....	48
4.1 Propiedades de los estimadores puntuales .....	49
4.2 Método de momentos .....	50
4.3 Método de Máxima Verosimilitud .....	55

CAPÍTULO V. Pruebas de bondad de ajuste .....	61
5.1 Anderson Darling .....	61
5.2 Cramér Von Mises .....	63
5.3 Kolmogorov Smirnov.....	64
5.4 gp.test .....	65
CAPÍTULO VI. Modelo estadístico .....	68
6.1 Análisis descriptivo de los datos.....	68
6.2 Modelo estadístico para el conjunto total de los montos de siniestros .....	74
6.3 Modelo estadístico para los montos de siniestros que exceden un umbral.....	78
6.3.1 Métodos para la elección del umbral .....	79
6.3.2 Estimación de parámetros de la distribución de Pareto generalizada....	86
6.3.3 Verificación del modelo.....	92
6.3.4 Cálculo de probabilidades.....	99
CONCLUSIONES.....	102
BIBLIOGRAFÍA .....	105

## ÍNDICE DE GRÁFICAS Y DIAGRAMA

Diagrama 1.1 Tipos de seguros-----	20
Gráfica 1.1 Composición de la cartera septiembre 2018-----	22
Gráfica 1.2 Clasificación de los riesgos-----	24
Gráfica 2.1 Distribución Gamma-----	30
Gráfica 2.2 Distribución exponencial-----	31
Gráfica 2.3 Distribución Pareto-----	33
Gráfica 2.4 Distribución Log-normal-----	34
Gráfica 3.1 Distribución de Fréchet-----	39
Gráfica 3.2 Distribución Gumbel-----	41
Gráfica 3.3 Distribución Weibull-----	42
Gráfica 3.4 Distribución de Pareto Generalizada-----	44
Gráfica 6.1 Montos de siniestros del seguro de automóviles en México-----	68
Gráfica 6.2 Cuantiles teóricos de los montos de siniestros del seguro de automóviles en México-----	71
Gráfica 6.3 Cuantiles teóricos exponencial de los montos de siniestros del seguro de automóviles en México-----	73
Gráfica 6.4 Histograma de montos de siniestros del seguro de automóviles en México-----	78
Gráfica 6.5 Función de excesos medios para diferentes distribuciones -----	80

Gráfica 6.6 Función de excesos medios de los montos de siniestros del seguro de automóviles en México .....	82
Gráfica 6.7 Histograma de los excesos después del umbral $u$ .....	95
Gráfica 6.8 Histograma de los excesos después del cuantil 90%.....	95
Gráfica 6.9 Histograma de los excesos después del cuantil 95%.....	96
Gráfica 6.10 Histograma de los excesos después del cuantil 99%.....	96
Gráfica 6.11 Distribución teórica y empírica para los diferentes umbrales .....	98

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1 Estimadores por el método de momentos -----	55
Tabla 4.2 Estimadores por el método de máxima verosimilitud -----	58
Tabla 6.1 Estadísticas descriptivas del conjunto de datos-----	69
Tabla 6.2 Estimación de parámetros por el método de máxima verosimilitud-----	75
Tabla 6.3 Aplicación de las pruebas de bondad de ajuste a los montos de siniestros del seguro de automóvil -----	77
Tabla 6.4 Función de excesos medios para diferentes distribuciones-----	80
Tabla 6.5 Percentiles de siniestros del seguro de automóviles en México-----	84
Tabla 6.6 Estadísticas descriptivas de los excesos después del umbral obtenido en excesos medios -----	85
Tabla 6.7 Estadísticas descriptivas de los excesos después del umbral 90%-----	85
Tabla 6.8 Estadísticas descriptivas de excesos después del umbral 95%-----	85
Tabla 6.9 Estadísticas descriptivas de excesos después del umbral 99%-----	86
Tabla 6.10 Estimación de parámetros por el método de momentos para el umbral obtenido en el método de excesos medios-----	87
Tabla 6.11 Estimación de parámetros por el método de momentos para los umbrales obtenidos en el método de los cuantiles-----	87
Tabla 6.12 Estimación de parámetros por el método de máxima verosimilitud para el umbral obtenido en el método de excesos medios-----	91
Tabla 6.13 Estimación de parámetros por el método de máxima verosimilitud para los umbrales obtenidos en el método de los cuantiles-----	91



Tabla 6.14 Aplicación de la prueba Anderson Darling-----	92-93
Tabla 6.15 Aplicación de la prueba Cramér Von Mises-----	93
Tabla 6.16 Aplicación de la prueba Kolmogorov-Smirnov-----	94
Tabla 6.17 Aplicación de la prueba gp.test-----	97
Tabla 6.18 Probabilidades para los excesos después del cuantil 90%-----	100
Tabla 6.19 Probabilidades acumuladas para el umbral de la gráfica de excesos medios-----	101

## INTRODUCCIÓN

Los seguros se pueden definir como un medio para cubrir algún tipo de riesgo que pueda causar pérdidas principalmente económicas, éstos actúan cuando se produce un evento fortuito que tiene como consecuencia una pérdida monetaria. Los seguros indemnizan totalmente o parcialmente dicha pérdida al asegurado, que es la persona que contrata este seguro para la protección ya sea hacia su persona o hacia algún bien material; para que el asegurado pueda recibir esta indemnización tiene como obligación realizar el pago de una prima a la compañía aseguradora.

Según la Ley de Instituciones de Seguros y de Fianzas los seguros en México se pueden clasificar en tres tipos: Vida, Accidentes y Enfermedades y Daños. Dentro del seguro de daños se encuentra el ramo de automóviles, el cual es uno de los ramos con mayor representatividad en cuanto a pólizas registradas ya que tiene diferentes tipos de coberturas, en esta investigación nos centraremos en la cobertura de responsabilidad civil por bienes. Este tipo de cobertura ampara la responsabilidad civil en que incurra el asegurado cuando éste cause algún daño con su automóvil, dicho automóvil debe ser el descrito en la póliza de seguro, para que la aseguradora pueda resarcir el daño que éste haya ocasionado.

La aseguradora tiene por objetivo, además de fijar el nivel de las primas, garantizar su rentabilidad financiera, por lo que es importante analizar aquellos siniestros que tienen un costo elevado para la aseguradora ya que de lo contrario ésta podría sufrir consecuencias en su solvencia si no se analizan este tipo de datos. Por lo que, en este documento es de interés conocer el comportamiento que tienen los montos de siniestros para el seguro de automóvil en México, para lo cual se analizan los datos proporcionados por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) para el período de 2008-2017, estos datos no corresponden a alguna aseguradora en específico, pero el estudio de éstos podría servir como base para el análisis en particular de una entidad aseguradora.

Es importante mencionar que en México no existe literatura acerca de la modelación de los montos de siniestros en el seguro de automóvil, pues la mayoría de los textos son extranjeros y con situaciones aplicables a su país de origen, por ello resulta necesario contribuir al acervo de la literatura actuarial en el país y el presente proyecto pretende ser parte de la contribución.

El objetivo general del presente trabajo de investigación es modelar el monto de siniestros del seguro de automóviles en México mediante la teoría de valores extremos, considerando aquellos datos que excedan un umbral determinado. Así mismo, se tienen como objetivos específicos modelar los montos de siniestros en conjunto para tener una idea del comportamiento que éstos siguen, además determinar el umbral para el conjunto de datos y analizar los excedentes que se tengan a partir de este umbral para posteriormente realizar el cálculo de probabilidades.

La idea de modelar los montos de siniestros en el seguro de automóviles radica, principalmente, en que a diferencia de los seguros de vida donde el monto de reclamación es conocido o puede ser determinado usando tablas de vida, en este tipo de seguros el costo de las reclamaciones es una combinación de la frecuencia de los siniestros y el monto de cada uno de ellos. Este trabajo de investigación se enfocará en la modelación del monto de siniestros ya que ésta puede ser un primer paso para la evaluación de riesgos de cualquier compañía de seguros en relación con su solvencia.

La estructura de la investigación consta de seis capítulos, en el primer capítulo se dan a conocer definiciones referentes a la variable de estudio, enfocándose en el ramo de seguro de automóviles, además se mencionan los modelos en los que se basa la teoría del riesgo.

En el segundo capítulo se hace mención de las distribuciones que modelan los montos de siniestros como lo son la distribución Gamma, exponencial, log-normal, Pareto y Weibull, debido a que estos modelos de probabilidad son los que se emplean con mayor frecuencia para explicar este tipo de variables, se menciona en primer lugar una serie de estudios que utilizan este tipo de distribuciones en el sector asegurador, posteriormente se definen cada una de las distribuciones con sus características más sobresalientes.

El capítulo tres se centra en la teoría del valor extremo, la cual consiste en la observación de aquellos valores con costos máximos y que son de baja probabilidad de ocurrencia, se mencionan algunos campos de aplicación de esta teoría y se describen las distribuciones que modelan a este tipo de datos.

Posteriormente, en el capítulo cuatro, se mencionan los métodos para la estimación de los parámetros de las funciones de distribución, centrándonos principalmente en la estimación por el método de momentos y el método de máxima verosimilitud.

En el capítulo cinco se describen las pruebas de bondad de ajuste utilizadas para saber si los datos pueden ser modelados con la distribución establecida en la hipótesis nula, las pruebas mencionadas son Anderson Darling, Cramér Von Mises y Kolmogorov Smirnov, estas pruebas están basadas en la diferencia entre la función de distribución empírica y la distribución teórica. También se menciona la prueba  $g_p$ .test la cual se emplea, específicamente, cuando la distribución establecida en la hipótesis nula corresponde a una distribución de Pareto generalizada.

En el capítulo seis se presenta el análisis de los datos de montos de siniestros para el seguro de automóviles en México, se hace un análisis descriptivo del conjunto de datos y se busca una distribución que modele estas observaciones, posteriormente se realiza un análisis más profundo enfocando a aquellos siniestros de costos máximos.

Por último se presentan las conclusiones donde se comentan los principales resultados de modelar los montos de siniestros en el seguro de automóviles en México durante el periodo 2008-2017.

## **CAPÍTULO I. El seguro y la teoría clásica del riesgo**

El seguro como actividad ha ido evolucionando históricamente, debido a que el ser humano es objeto del seguro y se acompaña del desarrollo mismo de las personas.

Según la Cámara Dominicana de Aseguradores y Reaseguradores (CADOAR, 2019) probablemente las formas más antiguas de seguros fueron iniciadas por los babilonios y los hindúes. Quienes manejaban ciertos contratos conocidos bajo el nombre de “Préstamos a la Gruesa” estos se efectuaban, esencialmente, entre los banqueros y los propietarios de los barcos. Con frecuencia, el dueño de un barco tomaría prestados los fondos necesarios para comprar, cargar y financiar un viaje. El contrato de “Préstamos a la Gruesa” especificaba que si el barco o carga se perdía durante el viaje, el préstamo se entendería como cancelado. Naturalmente, el costo de este contrato era muy elevado; sin embargo, si el banquero financiaba a propietarios cuyas pérdidas resultaban mayores que las esperadas, éste podía perder dinero.

La primera actividad en la que se desarrolló el seguro fue en el sector marítimo, el documento histórico que puede considerarse como la primera póliza de seguro marítimo es en Italia, teniendo como fecha el 23 de octubre de 1347 (Minzoni, 2005).

Para el caso de México, los antecedentes se encuentran entre la cultura maya y chichimeca, cuando en ciertas situaciones se hablan de indemnizaciones y del pago de deudas. En el año de 1789, en nuestro país, se constituyó la primera compañía de seguros en el puerto de Veracruz, la cual se denominó “Compañía de Seguros Marítimos de Nueva España”, con el propósito de cubrir los riesgos de los que se denominaba en España como “La Carrera de Las Indias”. La primer Ley del Seguro en México se promulgo el 16 de diciembre de 1892, ésta contenía la reglamentación por medio de la cual se empiezan a dar lineamientos legales

(reglas para su observancia) a las instituciones de seguros locales y extranjeras que operaban en el país, lineamientos y reglas que permitieron un principio de sano desarrollo del seguro (Minzoni, 2005).

De acuerdo con Gutiérrez (2010), la actividad aseguradora inició su desarrollo en el país, fundamentalmente a través de capital extranjero. No fue hasta 1910 y posteriormente en 1926 que la legislación de seguros tuvo una orientación más proteccionista para el inversionista nacional, buscando que los capitales tuvieran un mayor sentido de arraigo para el desarrollo y crecimiento del sector asegurador.

En 1995 eran 61 compañías de seguros que estaban autorizadas para operar en la república mexicana, de las cuales 14 eran mexicanas, 8 alemanas, 27 británicas, 2 canadienses, 1 española, 3 francesas, 1 holandesa, 1 italiana, 3 norteamericanas y 1 suiza, las compañías de seguros mexicanas representaban un 23% de la participación en el mercado de seguros (Gutiérrez, 2010).

Con la firma del tratado de libre comercio con Canadá y Estados Unidos de Norteamérica, el sector asegurador, inicio una transformación en términos de diversificación del capital, transitando de una estructura mixta (nacional, gubernamental y extranjera) a una estructura conformada en su mayoría por inversión extranjera y en menor escala inversión privada nacional.

En la época actual la institución aseguradora tiene que ir adaptándose a las nuevas exigencias de la vida económica, favoreciendo a las personas y a sus objetos de seguro, contando con este tipo de contrato como garantía. En consecuencia, la institución que rige la actividad aseguradora en México es la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF), la cual es un órgano desconcentrado de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, encargada de supervisar que la operación de los sectores asegurador y afianzador se apege al marco normativo, preservando la solvencia y estabilidad financiera de las

instituciones de seguros y fianzas, para garantizar los intereses del público usuario, así como promover el sano desarrollo de estos sectores con el propósito de extender la cobertura de sus servicios a la mayor parte posible de la población.

De acuerdo a la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (2018), al 30 de septiembre de 2018 el mercado de seguros y fianzas estaba conformado por 111 instituciones, siendo 97 instituciones de seguros y 14 instituciones de fianzas. Del total de instituciones 57 presentaban capital mayoritariamente extranjero con autorización para operar como filiales de instituciones financieras del exterior, de las cuales 8 estaban incorporadas a algún grupo financiero. Asimismo, de las 54 instituciones de capital mayoritariamente nacional, 10 pertenecían a algún grupo financiero. Al finalizar el tercer trimestre de 2018, 15 compañías tenían autorización para operar de forma exclusiva la operación de vida, 59 contaban con autorización para operar seguros de no-vida y 37 podían operar de forma combinada seguros de vida y no vida.

El mercado de seguros y fianzas es un mercado realmente competitivo por lo que la concentración de este mercado puede ser medido, con base a la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (2018) al finalizar el trimestre de 2018 la concentración del mercado conforme al índice CR5 (suma de las cinco participaciones de mercado más grandes, en términos de prima directa) se ubicó en 42.7%, dicho índice se conformó por la participación de las siguientes instituciones: Metlife México S.A. con 12.1%, Grupo Nacional Provincial S.A.B. tiene 10.8%, Seguros BBVA Bancomer S.A. de C.V. y Grupo Financiero BBVA Bancomer con 7.2%, AXA Seguros S.A. de C.V. cuenta con 6.7% y Quálitas Compañía de Seguros S.A. de C.V. con el 5.9%.

Ahora bien, en este trabajo de investigación es de interés modelar los montos de siniestros en el seguro de automóviles, por lo que, en particular las aseguradoras de automóviles más populares para el 2019 en México, según Quinto (2019) estas



aseguradoras son: Grupo Nacional Provincial (GNP Seguros), AXA Seguros, Seguros BBVA Bancomer, Seguros Banamex y Mapfre.

### **1.1 Definiciones generales**

La actividad aseguradora forma parte de la actividad económica de los países y consiste básicamente en la cobertura de riesgos que afectan a las personas o a su patrimonio, mediante el cobro de un precio. La institución del seguro funciona entonces bajo un principio de solidaridad, puesto que a cambio de las primas pagadas por las personas expuestas al riesgo, las que efectivamente lo padecen ven reparado el daño producido por el siniestro.

En los párrafos anteriores intervienen conceptos que son propios de la actividad aseguradora: el riesgo, el seguro, la prima, el siniestro y el monto o cuantía. A continuación se presenta el significado de cada uno.

#### **El riesgo**

En la terminología aseguradora, el riesgo es la posibilidad de que ocurra un suceso futuro, incierto, ajeno a la voluntad de las partes, con consecuencias económicamente desfavorables (Pérez J. , 1986).

#### **El seguro**

Según Joseph Hémard, puede considerarse como “una operación por la cual una parte, el asegurado, se hace prometer mediante una remuneración, la prima, para él o para un tercero, en caso de realización de un riesgo, una prestación, por otra parte el asegurador, que tomando a su cargo un conjunto de riesgos, los compensa conforme a las leyes de la estadística” (Penagos, 2005).

Mientras que para Tortella (2011), el seguro es un sistema, no para reducir el riesgo, sino para redistribuir su incidencia, para amortiguar sus efectos sobre los individuos aislados y extenderlo en una capa de estrecha densidad sobre la sociedad en su conjunto (cuando se trata de seguridad social) o, si no en su conjunto, sí entre un número grande de personas que están dispuestos a

compartir riesgos ajenos a cambio de una cierta compensación (cuando se trata de seguro privado).

El seguro visto como un contrato de acuerdo con la Ley sobre el contrato del seguro (2013), es aquel por el que la empresa aseguradora se obliga, mediante una prima, a resarcir un daño o a pagar una suma de dinero al verificarse la eventualidad prevista en el contrato.

Es importante destacar que el seguro no disminuye directamente la probabilidad de pérdida. Es decir, la existencia de un seguro contra huracanes no altera la probabilidad de una tormenta destructiva. El seguro es un mecanismo para reducir el efecto adverso de los eventos aleatorios que impiden el cumplimiento de expectativas razonables y está diseñado para cubrir tanto valores de propiedad como de vidas humanas.

### **La prima**

Para Lozano (1990), la prima, es la aportación económica que ha de satisfacer el contratante o asegurado a la entidad aseguradora en concepto de contraprestación por la cobertura de riesgo que ésta le ofrece.

### **El siniestro**

Es el acontecimiento que, por causar unos daños concretos previstos en la póliza, motiva la aparición del principio indemnizatorio, obligando a la entidad aseguradora a satisfacer, total o parcialmente, al asegurado o a sus beneficiarios, el capital garantizado en el contrato (Asociados, 2007).

### **El monto o cuantía**

Cantidad monetaria o expresión numérica que determina el valor de un siniestro que es susceptible de sufrir aumento o disminución, es considerada una variable de carácter continuo.

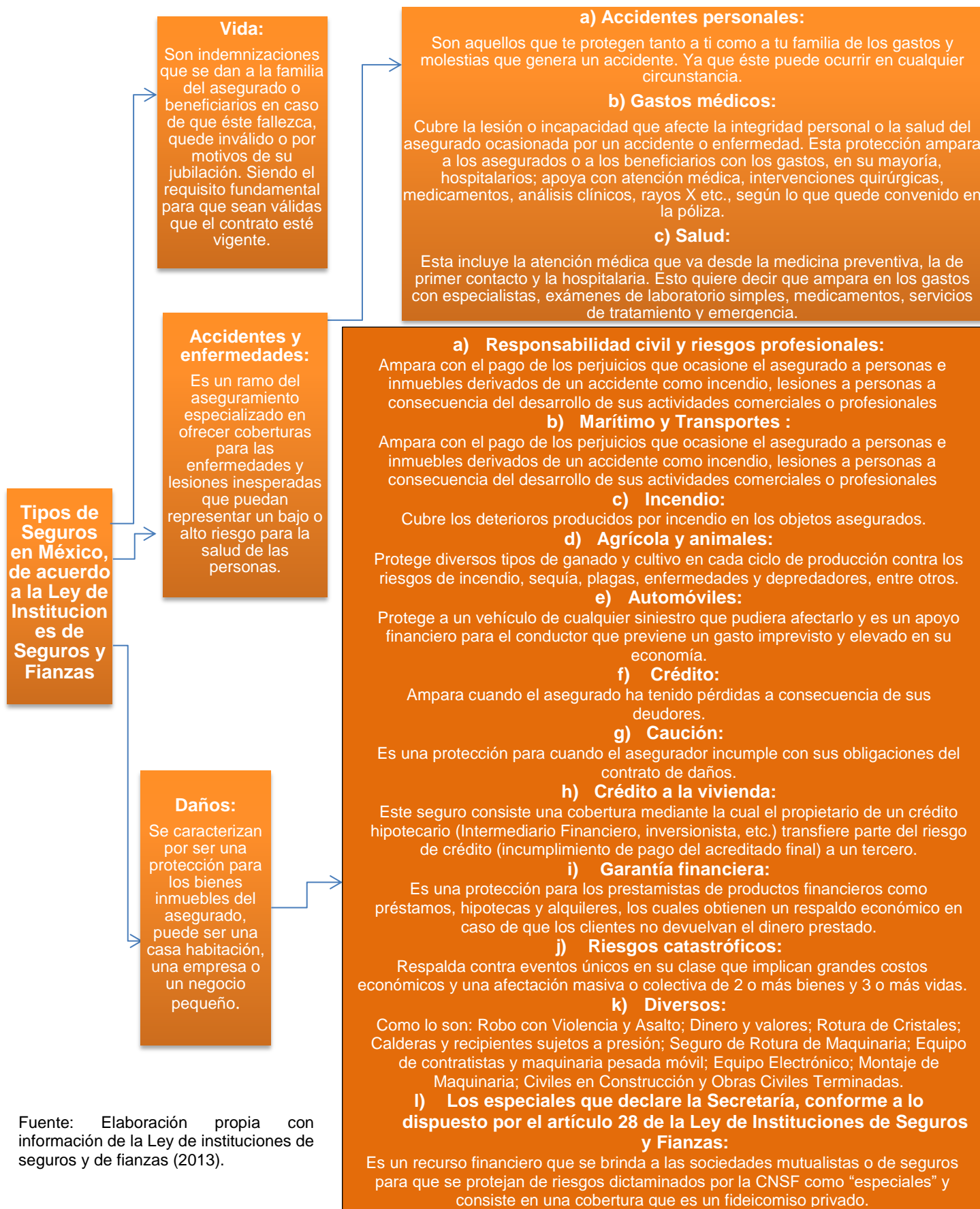
## **1.2 Tipos de seguros**

Las compañías aseguradoras ofrecen seguros tan distintos de acuerdo con los riesgos que cubren, es decir, de acuerdo con su objeto o como lo indique la legislación en México. Según la Ley de instituciones de seguros y de fianzas (2013), existen tres tipos de seguros los cuales son de Vida, Accidentes y enfermedades y Daños.

En el diagrama 1.1 se expone brevemente la clasificación de los tipos de seguros.

Para que un seguro actúe eficazmente es necesario que los asegurados entiendan su funcionamiento, debido a que no todas las cosas son asegurables, con la clasificación de los seguros nos dan a conocer un panorama de lo qué se puede asegurar. En este trabajo de investigación nos enfocaremos en el seguro de automóvil, el cual, según el diagrama 1.1, se encuentra dentro del ramo de daños.

**Diagrama 1.1 Tipos de seguros**



Fuente: Elaboración propia con información de la Ley de instituciones de seguros y de fianzas (2013).

## **1.2.1 Seguro de automóvil**

### **Antecedentes del seguro de automóvil**

A través de la historia, el seguro de automóvil se ha ido forjando debido al incremento de automóviles en circulación pero sobre todo para cubrir accidentes y daños de los que se han ido presentando hasta la actualidad.

El seguro de automóvil tiene inicio en Europa del siglo XIX. En 1821, al Prefecto de París se le ocurrió crear un fondo común con aportaciones de los cocheros, para hacer frente a hipotéticos daños a terceros y a las multas que se imponían a estos conductores de coches de caballos. En 1886, Karl Benz registró, en la Oficina de Patentes de Berlín, el automóvil, el alemán no sabía que había inventado el medio que mayor volumen de seguros generaría en el futuro, poco a poco, las pólizas se fueron adaptando al nuevo sistema de transporte. En 1908, en España se redactó la primera normativa de seguros privados, pero fue hasta 1912 cuando entró en vigor (Seguros, 2013).

Para México, de acuerdo a Minzoni (2005) el seguro de automóvil tiene sus inicios el 25 de mayo de 1926 con la reforma a la Ley General de Sociedades de Seguros, la cual buscaba abarcar toda la actividad aseguradora. En la Ley se establece el alcance de los distintos ramos de seguros, definen en forma precisa, las operaciones de vida, accidentes y enfermedades, incendios, riesgos marítimos y transportes y la obligación de una empresa (aseguradora en esos casos; pero para una gran masa de otros riesgos como automóviles, cristales, calderas, responsabilidad civil, etcétera).

De acuerdo con Vanegas & Varela (2011), la cobertura principal del ramo de seguro de automóviles fue y sigue siendo, en la mayor parte de los países industrializados, la cobertura de responsabilidad civil, en Francia en el año de 1825 se formó una entidad aseguradora para otorgar el seguro de responsabilidad civil para los conductores de vehículos y coches. Sin embargo, la primera póliza

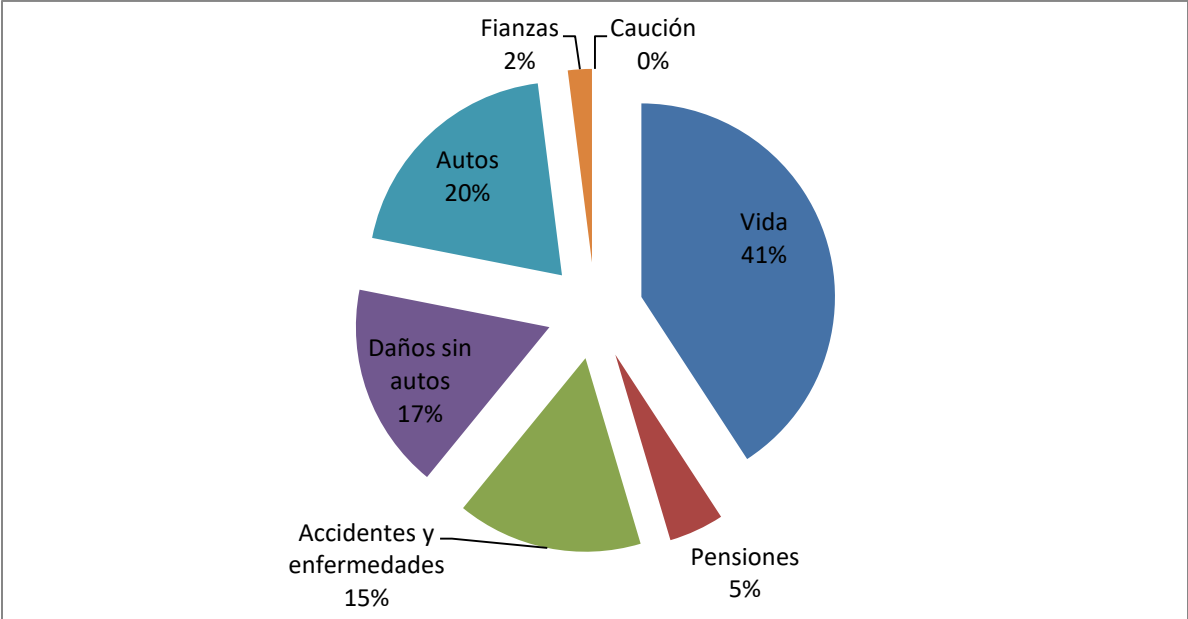
de seguros de automóviles fue expedida el 2 de junio de 1902 por la Boston Insurance Company de los Estados Unidos.

**Definición del seguro de automóvil**

“Un Seguro de Automóviles es un contrato voluntario mediante el cual el propietario de un vehículo traslada a una compañía de seguros los riesgos asociados a la conducción de un automotor, como los daños por accidentes de tránsito, el hurto del carro, los daños ocasionados a bienes de terceros y la muerte o lesiones ocasionados a terceros como consecuencia de un accidente de tránsito en donde el asegurado resulte responsable” (Pérez J. L., 2016).

Para México, con base a la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (2018) la composición de cartera del mercado de seguros y fianzas con cifras al cierre de septiembre del 2018 es la siguiente: vida con 40.8%, automóviles tiene 19.9%, daños sin automóviles es de 17.2%, accidentes y enfermedades cuenta con 15.5% y pensiones es de 4.6%. De esta forma, los seguros de automóviles ocupan el segundo lugar en la composición de la cartera (ver gráfica 1.1).

**Gráfica 1.1 Composición de la cartera septiembre 2018**



Fuente: Elaboración propia con base a Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (2018).

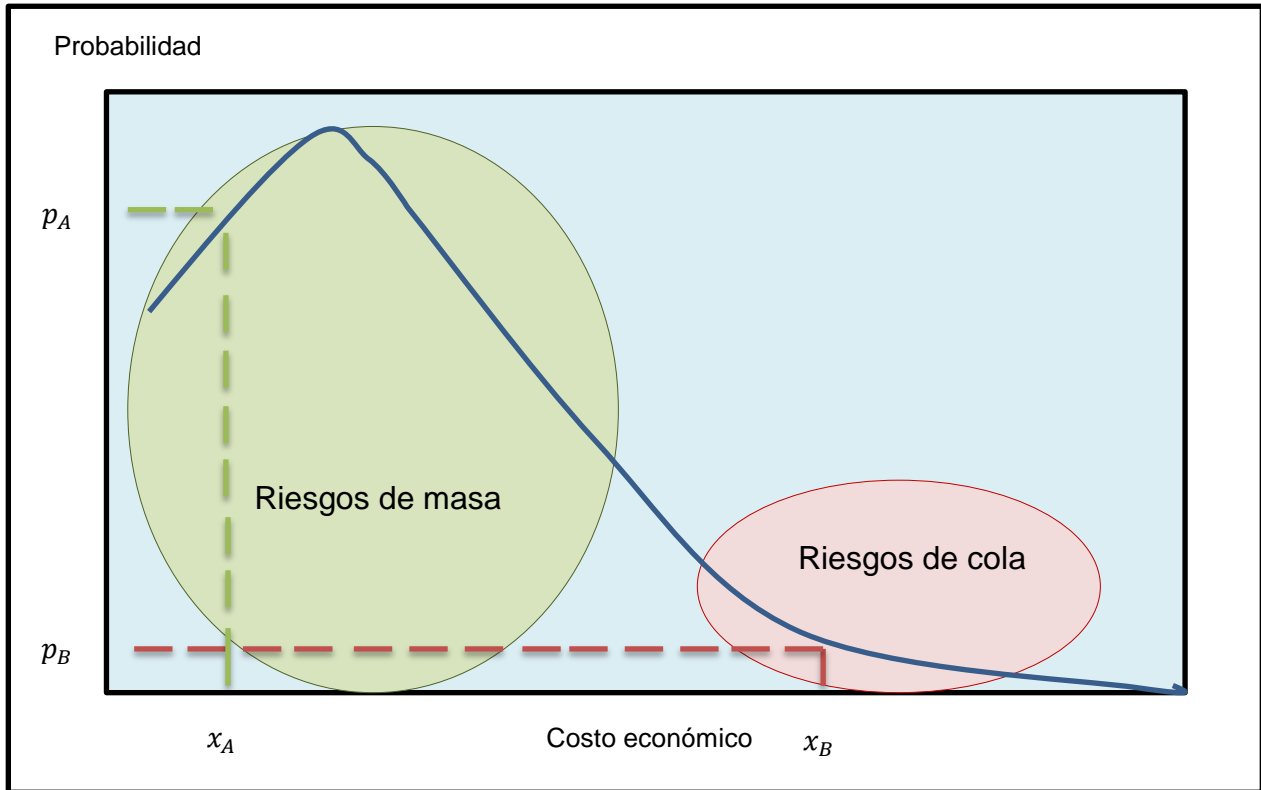
El ramo de automóviles es uno de los seguros más importantes a analizar ya que este tipo de seguro es primordial debido al papel que desempeña en la sociedad.

La CNSF define que, para este ramo, las coberturas que maneja son daños materiales, robo total, responsabilidad civil bienes, responsabilidad civil LUC, responsabilidad civil personas, gastos médicos ocupantes, equipo especial, adaptaciones y conversiones (daños materiales), adaptaciones y conversiones (robo total), entre otras coberturas.

### **1.3 Modelo de riesgo individual y colectivo**

En el seguro de automóviles, así como en cualquier otro tipo de seguro, es importante el análisis del riesgo ya que de producirse éste se puede tener como consecuencia un gran daño económico, cuando se presentan estos casos el asegurador tendrá como objetivo cubrir la pérdida económica derivada de cualquier tipo de riesgo. Para llevar a cabo esto es necesario que el sector asegurador contemple la probabilidad de que ocurra dicho riesgo y que éste pueda ser cubierto. Según García (2007), en el sector asegurador los riesgos pueden clasificarse en dos tipos: los riesgos de masa y los riesgos de cola. Los primeros se caracterizan por tener consecuencias económicas bajas pero de alta probabilidad de ocurrencia y los segundos, son aquellos cuya probabilidad de ocurrencia es baja pero en donde las consecuencias económicas son altas, de tal manera que éstas podrían llevar a problemas financieros para la aseguradora. Los riesgos graves se encuentran en la cola de la distribución y el resto se concentra en la masa de probabilidad (ver gráfica 1.2).

Gráfica 1.2 Clasificación de los riesgos



Fuente: Elaboración propia con información de García (2007).

Los riesgos de masa se basan en la ley de los grandes números la cual garantiza que una muestra grande es representativa de la población de donde se han extraído.

Como consecuencia a lo antes mencionado, a los riesgos de cola no es conveniente analizarlos bajo la ley de los grandes números debido a que como son casos raros en muchas ocasiones se tienen muestras pequeñas.

Las compañías aseguradoras para poder enfrentar los riesgos de cola utilizaban y siguen utilizando las técnicas como son los reaseguros y el coaseguro para poder hacer frente a dichos riesgos, una metodología estadística que puede ser utilizada para modelar este tipo de eventos es la teoría del valor extremo, la cual estudia precisamente esos casos raros.



El análisis de los riesgos dentro del sector asegurador tiene sus fundamentos en la teoría del riesgo, por ello Gerber (1979) la define como el conjunto de ideas para diseñar, dirigir y regular una empresa de riesgos. Dentro de la teoría del riesgo encontramos en la literatura actuarial dos tipos: la teoría del riesgo individual y la teoría del riesgo colectivo.

La teoría individual se utiliza básicamente solo en los seguros de vida, en análisis uniperiódicos y considera a la cartera como una suma de riesgos, de forma que la siniestralidad total viene calculada como la suma de la siniestralidad de cada una de las pólizas, la cual se define de la siguiente forma (Castañer, 2006):

$$S = \sum_{i=1}^n X_i$$

donde:

$S$ : siniestralidad total

$n$ : número de pólizas de la cartera

$X_i$ : siniestralidad total de la póliza  $i$ -ésima

En este trabajo, se utilizará la teoría del riesgo colectivo, ya que ésta es empleada para los seguros de no vida y permite hacer un análisis tanto uniperiódico como a largo plazo. Se considera a la cartera de riesgos como una serie de siniestros cuyo volumen depende del número de siniestros y de su cuantía. En la teoría del riesgo colectivo la siniestralidad total será el resultado de sumar el importe de todos los siniestros ocurridos. Tendremos que la siniestralidad agregada en un período para una cartera será:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

siendo:

$S$ : siniestralidad total

$N$ : número estocástico de siniestros

$X_i$ : cuantía del siniestro  $i$ -ésimo,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Considerando el caso cuando  $N = 0$  y  $S = 0$ .

Como se puede observar en la fórmula anterior de la siniestralidad, se debe de conocer la distribución del número de siniestros y las distribuciones para los montos de reclamación. La distribución Poisson se usa regularmente para modelar el número de siniestros a los que se enfrentan las entidades aseguradoras y para modelar los montos de siniestralidad se pueden usar diferentes distribuciones continuas.

En este documento es de interés modelar los montos de siniestros en general y también aquellos que excedan un umbral establecido. Como es de utilidad modelar todos los montos de siniestros, existen diversas distribuciones que se utilizan para modelarlos, éstas se expondrán en el capítulo II.

## **CAPÍTULO II. Distribuciones para los montos de siniestros**

Uno de los objetivos de la presente investigación es modelar los montos de siniestros totales, este proceso se hace tomando el conjunto total de los datos y ajustando una distribución a éstos, las distribuciones más usadas para modelar en general los montos de siniestros son Gamma, exponencial, Pareto, log-normal y Weibull.

Entre las aplicaciones de las distribuciones antes mencionadas en el sector asegurador se pueden encontrar a Nava & Sinha (1999), quienes en su documento utilizan la distribución Gamma para el análisis patrimonial dinámico como herramienta de gestión de riesgo y la aplicación a la distribución del costo de siniestros. Por otra parte la distribución log-normal fue empleada por Marín (1988), quien aplicó esta distribución al costo de siniestros para la modalidad de responsabilidad civil ilimitada en España.

Otra investigación fue elaborada por Winmore & Chiduzza (2013), la cual se centra en la modelación de reclamaciones utilizando distribuciones teóricas con referencia a reclamaciones de seguros de automóviles. Para el modelado de dichas reclamaciones los autores utilizan cuatro distribuciones, Pareto, exponencial, gamma y log-normal. Con dicha investigación se dio como resultado que la distribución log-normal es muy buena para estimar las probabilidades de reclamos más bajos mientras que la distribución de Pareto es buena para estimar los reclamos más grandes.

Ahora bien, Packová & Brebera (2015) por su parte, realizan un estudio para la distribución de pérdidas únicas relacionadas con reclamaciones contra varios tipos de pólizas de seguro. Las distribuciones que se mencionan en el artículo son la distribución Gamma, log-normal y Weibull. Los resultados del análisis exploratorio dan a conocer que estas distribuciones darían un modelo adecuado para la distribución de reclamaciones, la distribución seleccionada fue la log-normal

debido a que esta distribución proporciona el mejor modelo para los datos en comparación con las otras dos distribuciones mencionadas.

Otro estudio realizado por Burneckia, Kuklaa & Weronb (2000), fue para los servicios de reclamo de propiedad (PCS) provocados por pérdidas catastróficas, los autores describen y aplican las distribuciones log-normal, Pareto, Burr y gamma, en dicho estudio mencionan que la gamma es una de las distribuciones más importantes para el modelado (no solo las reclamaciones de seguros) debido a que ésta tiene propiedades matemáticas muy manejables, también hacen mención que la distribución log-normal es muy útil en el modelado de costos de reclamaciones debido a que tiene una cola derecha pesada y que la distribución de Pareto es adecuada para modelar el tamaño de la reclamación, particularmente cuando se trata de reclamaciones excepcionalmente grandes. Una vez mencionada la gran utilidad que estas distribuciones tienen prosiguen con el cálculo de la estimación de los parámetros para cada una de las distribuciones antes mencionadas empleando el método de momentos y el método de máxima verosimilitud. Posteriormente emplean las pruebas de bondad de ajuste Kolmogorov Smirnov, Cramér Von Mises, Anderson Darling y la  $\chi^2$ . Realizando este análisis los autores concluyen que de las cuatro pruebas estudiadas en su investigación, solo una no es adecuada para modelar las reclamaciones de propiedad (PCS), siendo la distribución log-normal la que no pasa las pruebas de bondad de ajuste.

Otro estudio fue realizado por Ondieki, Shalyne & Wairimu (2018), quienes toman en cuenta los datos de 67,856 pólizas de seguro de vehículos de motor de un año emitidas en 2004 y 2005, debido a que los resultados empíricos indicaron que los datos de severidad de la reclamación se pueden modelar mejor usando colas pesadas y distribuciones sesgadas, proponen cinco distribuciones de probabilidad continuas para modelar la severidad de la reclamación, estas distribuciones son la exponencial, gamma, Weibull, Pareto y log-normal. Para estimar los parámetros de las distribuciones proponen el método máxima verosimilitud y el método de los

momentos, una vez estimados los parámetros realizan las pruebas de bondad de ajuste. Con dicho estudio seleccionan a la distribución log-normal como la mejor distribución para modelar a sus datos debido a consideran que es la mejor distribución para modelar el monto de la reclamación.

Como se mencionó en los párrafos anteriores, existen distribuciones que sirven para modelar los montos de siniestros en los seguros, a continuación se dará una breve descripción de estas distribuciones.

## 2.1 Distribución Gamma

Se trata de una familia de distribuciones que provee un modelo adecuado para histogramas que presentan cierto tipo de asimetría. Es una distribución de probabilidad continua adecuada para modelar el comportamiento de variables aleatorias con asimetría positiva y/o los experimentos en donde está involucrado el tiempo (Arroyo, Bravo, Llinás, & Muñoz, 2014).

Su función de densidad está definida como:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad \text{para } x > 0; \quad \alpha, \beta > 0$$

0, *de otra manera*

Su valor esperado y su varianza están definidas como:

$$E(X) = \alpha\beta$$

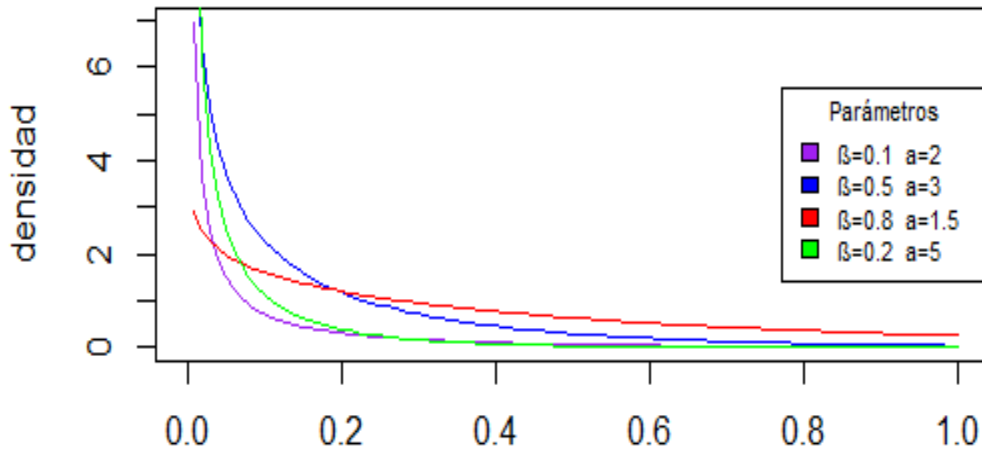
$$Var(X) = \alpha\beta^2$$

### Propiedades

Es una distribución de cola ligera adecuada para modelar variables que presentan una mayor densidad de sucesos a la izquierda de la media que a la derecha.

En su expresión se encuentran dos parámetros ( $\alpha, \beta$ ), siempre positivos y de los que depende su forma y alcance por la derecha, además incluye a la función gamma  $\Gamma(\alpha)$ , responsable de la convergencia y del nombre de la distribución.

**Gráfica 2.1 Distribución Gamma**



Fuente: Elaboración propia.

X

La gráfica 2.1 muestra diversas formas de la función de densidad para diferentes valores de los parámetros de forma y escala que se pueden presentar en la distribución Gamma.

## 2.2 Distribución exponencial

Es una distribución de cola ligera y es el caso particular de la función gamma en la que  $\alpha = 1$ , por lo que se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad \text{si } x > 0$$

0, *de otra manera*

siendo  $\beta > 0$ .

Su valor esperado y su varianza están definidas como:

$$E(X) = \beta$$

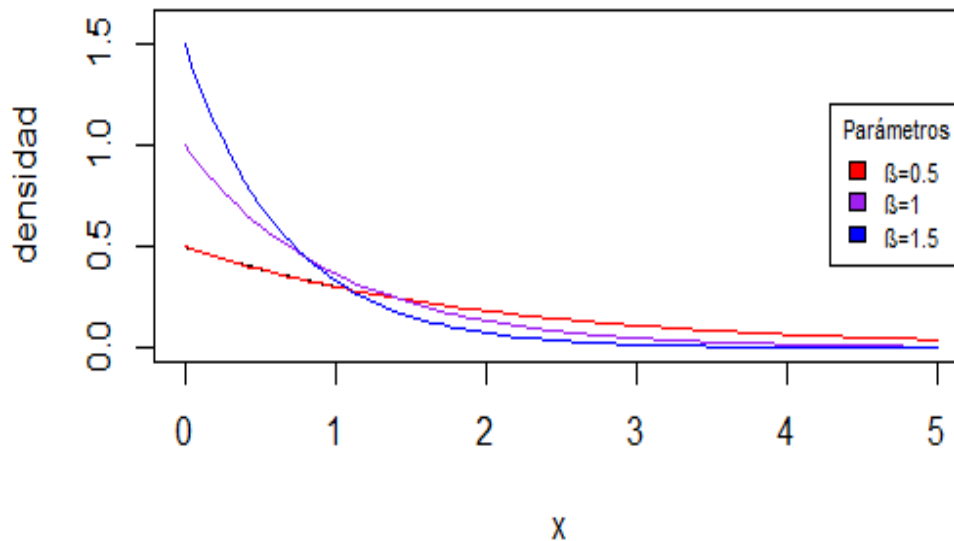
$$Var(X) = \beta^2$$

Esta distribución tiene la propiedad de falta de memoria, es decir, si  $X \sim Exp(\beta)$ , y  $s$  y  $t$  son números reales positivos cualesquiera entonces,

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

La distribución exponencial presenta diferentes formas de comportamiento dependiendo el valor del parámetro que se le asigne a la función de densidad (ver gráfica 2.2).

**Gráfica 2.2 Distribución exponencial**



Fuente: Elaboración propia.

### 2.3 Distribución Pareto

Es una distribución de cola pesada por lo que se usa para modelar cuantías elevadas en el área de seguros, y a menudo se utiliza para estimar las primas de riesgo. La distribución Pareto surge al considerar que la probabilidad de que una variable aleatoria  $X$  tome un valor superior a un  $x$  determinado, tiene la siguiente forma funcional:

$$P(X > x) = \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha$$

Su función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \frac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

$$\text{si } x > k, \quad \alpha, k \geq 0$$

donde:

$\alpha$ : es el parámetro de forma.

$k$ : es el parámetro de escala.

Su valor esperado y su varianza están definidas como:

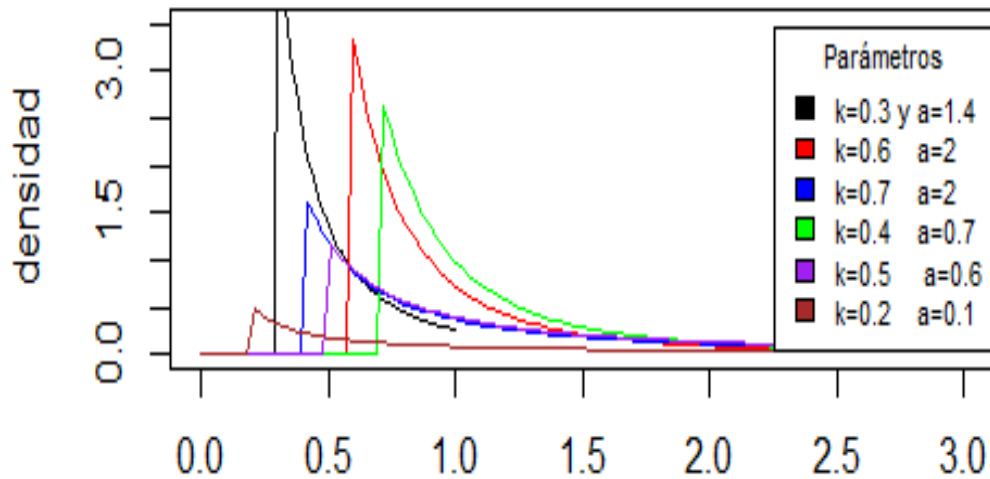
$$E(X) = \frac{k}{\alpha - 1}$$

$$Var(X) = k^2 \left( \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} \right)$$

La gráfica 2.3 muestra el comportamiento de la distribución de densidad de Pareto teniendo diferentes valores en sus parámetros.



Gráfica 2.3 Distribución Pareto



Fuente: Elaboración propia.

X

## 2.4 Distribución log-normal

También es conocida como distribución logarítmico-normal, al igual que la distribución Pareto en estadística es considerada como una distribución de cola pesada, es decir, hay probabilidad alta de que la variable tome valores alejados de la media. Sirve para modelar siniestros con grandes costos o cuantías por reclamación.

Su función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$x \geq 0, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < \infty,$$

donde:

$\mu$ : es el parámetro de escala.

$\sigma$ : es el parámetro de forma.

Su valor esperado y su varianza están definidas como:

$$E(X) = \exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

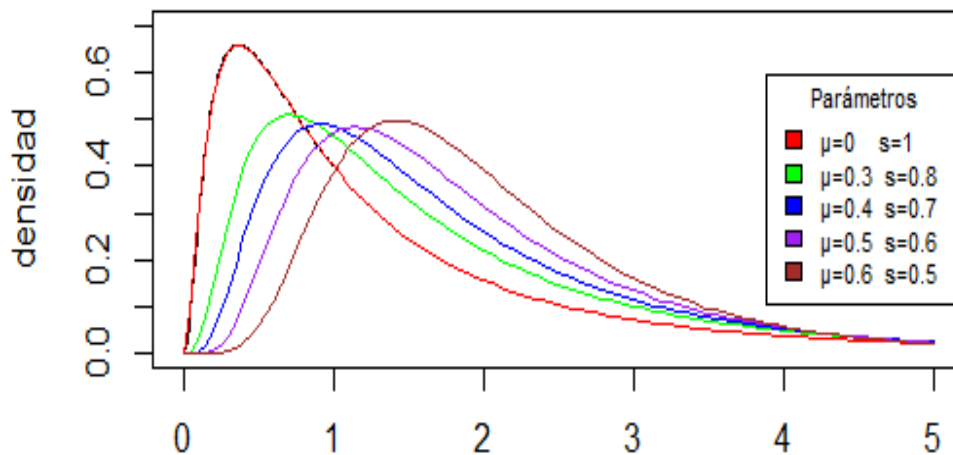
$$Var(X) = (\exp(\sigma^2) - 1)\exp(2\mu + \sigma^2)$$

### Propiedades

Una distribución log-normal es extremadamente asimétrica, a diferencia de la distribución normal. En particular, el valor medio, el valor mediano y el valor más probable (a menudo denominado moda) no son idénticos.

Teniendo varios valores para los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , se pueden observar diferentes formas en las que se presenta la distribución log-normal (ver gráfica 2.4).

**Gráfica 2.4 Distribución Log-normal**



Fuente: Elaboración propia.

X

### **CAPÍTULO III. Teoría del valor extremo**

Como se mencionó al final del capítulo I el análisis de un conjunto total de datos es importante, pero puede ser de mayor interés para una aseguradora el estudio de aquellos datos que son considerados como casos extremos, en este trabajo de investigación se presenta un ejemplo de esto, para el cual se cuenta con una base de datos de los montos de siniestros para el seguro de automóviles en México y solo se toman en cuenta los montos máximos, al considerarse que éstos son los de mayor relevancia, ya que si estos valores son omitidos se podría afectar la estabilidad y solvencia financiera de las aseguradoras.

Según Coles (2001) la teoría de valores extremos es una disciplina que desarrolla técnicas y modelos para describir los sucesos menos comunes, lo que hace que sea una disciplina “única”. El objetivo de la teoría de valores extremos es analizar valores extremos observados y predecir valores extremos en el futuro de aquí que esta teoría constituya una disciplina de gran interés para diversos campos de aplicación.

De acuerdo a Pérez & García (2004), la Teoría del Valor Extremo puede ayudar, no a eliminar los sucesos que causan consecuencias extremas gravosas, como las catástrofes, sino a predecirlos y por tanto a ajustar mejor las primas, los recargos o a dotar mayores provisiones.

Algunos de los campos de aplicación de la teoría del valor extremo de acuerdo a Reiss & Thomas (2007), son el estudio de la longevidad de la vida humana, la gestión de tráfico (en telecomunicaciones), la resistencia de materiales, la concentración de ozono y geología o meteorología (lluvias, vientos, etc). Esta teoría también tiene diversas aplicaciones en el sector asegurador y financiero (Embrechts, Kluppelberg, & Mikosch, 1996). Algunas de las aplicaciones las podemos encontrar en Arias (2010) que mide el riesgo operativo, en la cual llega a la conclusión de que mientras menor sea el parámetro de escala menor es la

carga del capital que se debe de reservar, además sugiere de que se calcule y estandarice el parámetro de forma para diferentes empresas según sus objetivos y tamaño, ya que este parámetro es el más sensible para la obtención del capital económico mínimo requerido que las instituciones financieras utilizan internamente para manejar su propio riesgo. Otra aplicación es de Herrera (2013) quien hace una estimación del riesgo financiero, al estudiar la caracterización de las colas pesadas de la distribución en el contexto de la teoría de valores extremos, llega a la conclusión de inferir medidas de riesgo adecuadas para caracterizar los retornos de activos en los mercados tradicionales y más precisamente en mercados de las economías emergentes o en vías de desarrollo.

Una aplicación más la desarrolla Duarte (2009), quien usa la teoría del valor extremo como una herramienta para poder estimar con mejor aproximación los siniestros que en dado caso puedan tener ocurrencia en un portafolio específico. Al igual que el Valor en Riesgo (VaR) esta disciplina sirve para observar pérdidas en casos extremos, la diferencia básicamente radica en que en el VaR se puede calcular el capital suficiente a cubrir en la mayoría de los casos, así como las pérdidas de un portafolio sobre un periodo determinado y en cambio en la teoría del valor extremo se observan los datos extremos directamente desde otro punto de vista (no se basa en el supuesto de normalidad).

Otra de las aplicaciones de la teoría de valores extremos la llevó a cabo Olmo (2005), con el propósito de obtener el Valor en Riesgo (VaR), para así saber la cantidad de dinero necesaria para hacer frente a las pérdidas que puedan ocurrir con una probabilidad  $p$  sobre un cierto periodo, Olmo trabajó con cinco series financieras de índices bursátiles de los mayores mercados financieros mundiales durante el periodo 1994 al 2001, siguió la metodología de Pickands (1975) la cual define y estima los extremos de la muestra, Olmo realizó el estudio mediante la selección de una secuencia de umbral y de un contraste de bondad de ajuste.

Por su parte Uribe & Ulloa (2012), hacen una aplicación de la teoría de valores extremos en los índices de los mercados accionarios a nivel mundial, los índices utilizados fueron: IGBC (Colombia), IPC (México), IBOVESPA (Brasil), Merval (Argentina), S&P500 (Estados Unidos), FTSE (Inglaterra), SSMI (Suiza), NIKKEI 225 (Japón), HSI (Hong Kong), BSESN (India), el objetivo de dicho estudio era estimar medidas de pérdida esperada en las colas, con el fin de generar un ranking de riesgo entre varios mercados accionarios del mundo, es decir, brindar la idea para la correcta administración de riesgo, utilizaron la metodología de picos sobre el umbral, considerando umbrales fijos del 5 y 90% para definir los valores extremos.

Otra aplicación la llevan a cabo Calderón & Rodríguez (2014), quienes utilizan observaciones diarias de los índices y retornos del mercado de valores de Perú desde el 3 de enero de 1990 hasta el 31 de mayo de 2013, los autores emplean la distribución de Pareto generalizada para lograr una mejor medición del Valor en Riesgo; para la identificación del umbral hacen uso del estimador de Hill.

Algunos de los estudios donde se aplica la teoría del valor extremo a los seguros de automóviles, han sido los que se mencionan en Duarte (2009), García (2004) y Pérez & García (2010), estos estudios han sido publicados en países como Colombia y España, sin embargo, para el caso de México hasta el momento no se cuenta con ningún estudio que contemple modelar los montos de siniestros en este ramo del sector asegurador, es por ello que este trabajo pretende ser una contribución a la literatura que contemple la modelación de los montos máximos de siniestros en el seguro de automóviles en México, para esto a continuación se describirán las principales distribuciones que se pueden emplear en estos casos.

### **3.1 Distribución generalizada de valores extremos**

La distribución generalizada de valores extremos es el método que se basa en el ajuste de la distribución y análisis de los valores máximos y mínimos, esta

distribución se ha puesto en práctica en diversos campos como lo es el sector financiero, por lo que se han aplicado estudios por algunos autores como Almonacid (2017) con el índice de precios selectivos de acciones de la bolsa de valores en Chile y Urbina, Núñez & Saavedra (2017) con el análisis del riesgo.

La función de la distribución generalizada de valores extremos se conoce de la siguiente manera.

Sean  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

El máximo  $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  converge a la siguiente distribución

$$GEV(x; \mu, \sigma, \varepsilon) = \exp - \left\{ - \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right\}$$

donde:

$$1 + \varepsilon \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0$$

El parámetro  $\mu$  es el de localización siendo  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma$  es de escala siendo  $\sigma > 0$  y  $\varepsilon$  es de forma o índice de cola (indica el tamaño de la cola de la distribución) siendo  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .

La distribución generalizada de valores extremos considera tres tipos de distribuciones.

**Caso 1)** Cuando  $\varepsilon > 0$  se tiene una **distribución Fréchet**.

El nombre de la distribución viene del matemático francés Maurice Fréchet y su principal uso es en el campo de la hidrología.

Cuando se tienen tres parámetros, su función de distribución viene dada por:

$$F(x) = e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{-\alpha}}, \text{ si } x > \lambda$$

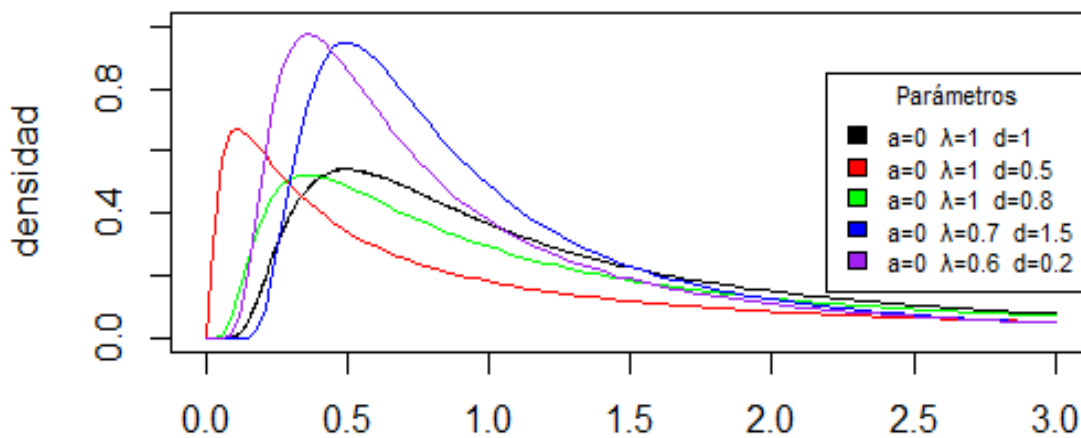
Y la función de densidad es:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\delta} \left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{-1-\alpha} e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{-\alpha}}, \text{ si } x > \lambda$$

donde  $\alpha \in (0, \infty)$  es el parámetro de forma,  $\delta \in (0, \infty)$  el de escala y  $\lambda \in (-\infty, \infty)$  el de localización.

Teniendo diferentes valores para los parámetros  $\alpha$ ,  $\lambda$  y  $\delta$ , se puede observar las diferentes formas en las que se presenta la distribución Fréchet (ver gráfica 3.1).

**Gráfica 3.1 Distribución de Fréchet**



Fuente: Elaboración propia.

x

**Caso 2)** Cuando  $\varepsilon = 0$  se tiene una **distribución Gumbel**.

Fue descubierta por Emil Julius Gumbel a finales del siglo XIX, también es conocida como la distribución log-Weibull o como la distribución exponencial doble.

La función de distribución de la distribución de Gumbel es:

$$F(x) = e^{-e^{\frac{(\mu-x)}{\beta}}}$$

donde:

$\mu$ : parámetro de localización

$\beta$ : parámetro de escala

$$\mu \in \mathbb{R}$$

$$\beta > 0.$$

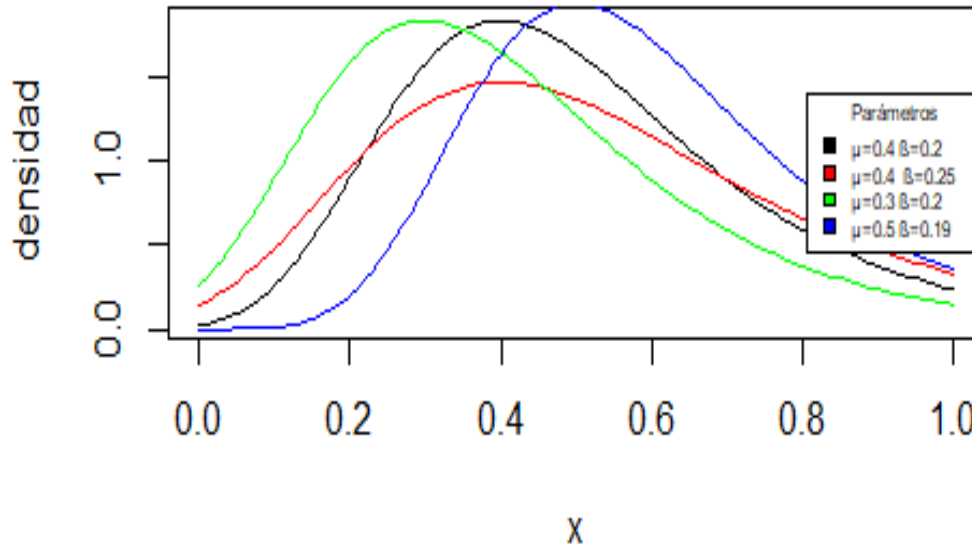
Mientras la función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{(\mu-x)}{\beta}} - e^{\frac{(\mu-x)}{\beta}}}{\beta}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Teniendo diferentes valores para los parámetros de localización y escala ( $\mu, \beta$ ), se puede observar las diferentes formas en las que se presenta la distribución Gumbel (ver gráfica 3.2).



Gráfica 3.2 Distribución Gumbel



Fuente: Elaboración propia.

**Caso 3)** Cuando  $\varepsilon < 0$  se tiene una **distribución Weibull**.

Recibe su nombre del matemático sueco Waloddi Weibull, que la describió detalladamente en 1951, aunque fue descubierta inicialmente por Fréchet en 1927 y aplicada por primera vez por Rosin y Rammler para describir la distribución de los tamaños en determinadas partículas.

La función de densidad de una variable con esta distribución es la siguiente:

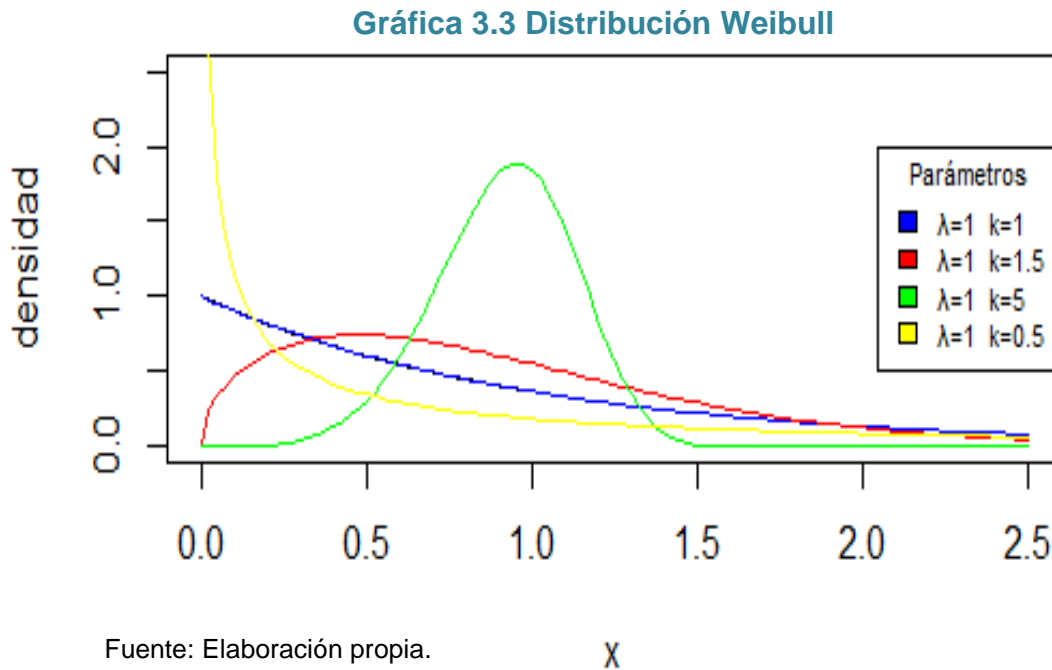
$$f(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \quad \text{si } x \geq 0$$

donde  $k$  es el parámetro de forma y  $\lambda > 0$  es el parámetro de escala de la distribución.

Su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \quad \text{si } x \geq 0$$

Considerando diferentes valores para los parámetros de la distribución Weibull, se observa su comportamiento en la gráfica 3.3.



### 3.2 Distribución de Pareto generalizada

La distribución de Pareto generalizada (Pickands , 1975) en particular tiene una gran importancia en los modelos de umbrales y en general en la teoría de valores extremos, ya que es la distribución límite de las excedencias de umbrales.

Esta distribución surge a partir del método conocido como P.O.T. (Peaks over threshold method), que consiste en la modelación de los extremos que exceden un determinado umbral o prioridad, bien sea de las cuantías totales  $X_i$  o bien de los excesos registrados  $Y_i = X_i - \mu$  sobre el umbral  $u$ .

Un factor importante en la aplicación de esta distribución es determinar el nivel del umbral  $u$ , cuya elección está sujeta al problema de la varianza y el sesgo, ya que cuanto menor sea el umbral mayor es el número de observaciones lo que puede disminuir la varianza del ajuste pero puede incrementar el sesgo si se intenta

modelar observaciones que no pertenecen a la cola de la distribución. Por otro lado, si se reduce el número de observaciones (con un umbral más elevado), se reduce el sesgo pero hace que la estimación del parámetro de forma sea más volátil al realizarse con un menor número de observaciones.

Retomando la función de la distribución generalizada de valores extremos

$$GEV(x; \mu, \sigma, \varepsilon) = \exp - \left\{ - \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right\} \quad (2.1)$$

para  $\mu, \sigma > 0$  y  $\varepsilon \in R$ . Entonces, para un umbral  $u$  suficientemente grande, la función de distribución de  $(X - u)$ , condicionada a  $X > u$ , tendrá la forma:

$$F_u(x) = F_u(y + u) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}$$

$$\text{para } 0 \leq x \leq x_0, \quad 0 \leq y \leq x_0 - u.$$

Ahora bien, para la función de supervivencia, complementaria a la función de distribución es:

$$\begin{aligned} 1 - F_u(x) &= 1 - F_u(y + u) = P(X > y + u | X > u) \\ &= P(X - u > y | X > u) = \frac{1 - F(x)}{1 - F(u)} = \frac{1 - F(y + u)}{1 - F(u)} \end{aligned}$$

$$\text{para } 0 \leq x \leq x_0.$$

Bajo este hecho la función de densidad de la distribución de Pareto generalizada es:

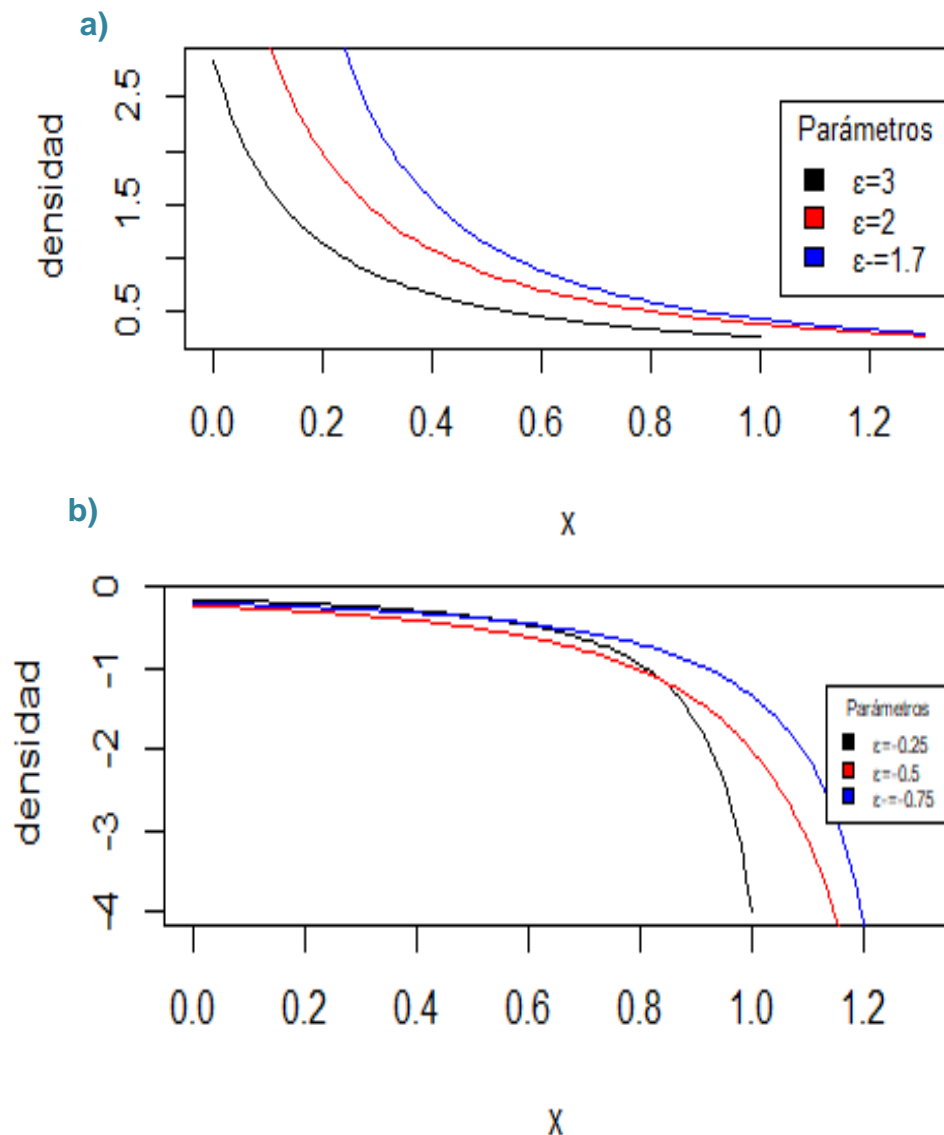
$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \frac{\varepsilon(x-\mu)}{\sigma} \right)^{\left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)} \quad (2.2)$$

Para  $x \geq \mu$ , cuando  $\varepsilon \geq 0$  y  $x \leq \mu - \frac{\sigma}{\varepsilon}$  cuando  $\varepsilon < 0$ , los parámetros de la distribución son  $\mu > 0$  (parámetro de localización),  $\sigma > 0$  (parámetro de escala) y  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  (parámetro de forma), mientras que la función de distribución está dada por la siguiente expresión.

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{\varepsilon(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{si } \varepsilon \neq 0 \quad (2.3)$$

Para este trabajo de investigación consideramos un parámetro de localidad de 0, ( $\mu = 0$ ).

**Gráfica 3.4 Distribución de Pareto Generalizada**



En la gráfica 3.4 se aprecian dos formas a) y b) en la que se puede comportar la función de densidad de la distribución de Pareto generalizada, dependiendo del valor del parámetro de forma, la gráfica en a) muestra la forma de la distribución cuando  $\varepsilon$  tiene valores positivos, mientras que en b) se tienen valores negativos. El valor de  $\sigma$  para la elaboración de las gráficas fue igual a 1.

### **Características de la distribución de Pareto generalizada**

La distribución de Pareto generalizada con parámetros  $(\sigma, \varepsilon)$  tiene los siguientes casos particulares:

- Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  la distribución de Pareto generalizada, es una distribución exponencial con media  $\sigma$ .
- Cuando  $\varepsilon = 1$  la distribución de Pareto generalizada, es una distribución uniforme en el intervalo  $(0, \sigma)$ .

Además Medialdea (2016) mencionan otras características como lo son:

- Para  $\varepsilon < 0$  la distribución de los excesos tiene un límite superior  $\mu - \frac{\sigma}{\varepsilon}$ .
- Para  $\varepsilon \geq 0$  la distribución no tiene límite superior. En concreto, para el caso  $\varepsilon > 0$  se tiene la distribución de Pareto tipo II.

### **Media y Varianza de la distribución de Pareto generalizada**

La media y varianza de esta distribución viene dada por:

Media

$$E(x) = \frac{\sigma}{1-\varepsilon} \quad (2.4)$$

siempre y cuando  $\varepsilon < 1$

Varianza

$$\text{Var}(x) = \frac{\sigma^2}{(1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)^2} \quad (2.5)$$

siempre y cuando  $\varepsilon < \frac{1}{2}$

Un ejemplo de cómo se puede obtener la media de una variable aleatoria con distribución de Pareto generalizada de parámetros  $\sigma$  y  $\varepsilon$  se muestra a continuación.

$$E(x) = \int_0^{\infty} f(x) x dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)} x dx = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)} x dx$$

$$u = x \quad dv = \left(1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)}$$

$$du = dx \quad v = \int \left(1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)} dx$$

$$z = 1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma} \quad dz = \frac{\varepsilon}{\sigma} dx \quad dz \frac{\sigma}{\varepsilon} = dx$$

$$v = \int z^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) dz = \frac{\sigma}{\varepsilon} \int z^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)} dz$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon} \left( \frac{z^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}-1+1\right)}}{-\frac{1}{\varepsilon}-1+1} \right) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \left( \frac{z^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \left( -\varepsilon z^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right)$$

$$= -\sigma z^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = -\sigma \left(1 + \frac{\varepsilon(x)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \left[ x \left( -\sigma \left(1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\sigma \left(1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} dx$$

$$\begin{aligned}
 z &= 1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma} \\
 dz &= \frac{\varepsilon}{\sigma} dx \\
 dz \frac{\sigma}{\varepsilon} &= dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \int_0^{\infty} \sigma \left(1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} dx$$

$$= \int_0^{\infty} z^{-\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) dz = \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_0^{\infty} z^{-\frac{1}{\varepsilon}} dz$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon} \left[ \frac{z^{-\frac{1}{\varepsilon}+1}}{-\frac{1}{\varepsilon}+1} \right]_0^{\infty} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \left[ \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}+1}}{-\frac{1}{\varepsilon}+1} \right]_0^{\infty} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \left[ \frac{(\varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}+1}}{-1 + \varepsilon} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{-1 + \varepsilon} \right) \left[ \left(1 + \frac{\varepsilon(\infty)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}+1} - \left(1 + \frac{\varepsilon(0)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}+1} \right]$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon} \left\{ \left( \frac{\varepsilon}{-1 + \varepsilon} \right) \left[ 0 - (1)^{-\frac{1}{\varepsilon}+1} \right] \right\}$$

$$= \frac{-\sigma}{-1 + \varepsilon} = (-1) \left( \frac{-\sigma}{-1 + \varepsilon} \right) = \frac{\sigma}{1 - \varepsilon} \quad \therefore \text{ queda demostrada la media}$$

Un proceso similar se hace para la demostración de la varianza.

## **CAPÍTULO IV. Métodos para la estimación de parámetros**

En toda distribución que posee parámetros es importante tener la estimación de éstos para poder hacer el cálculo de probabilidades.

En la inferencia estadística, existen dos métodos de estimación de parámetros: el método de estimación puntual y el método de estimación por intervalos. El primer método se basa en buscar un estimador  $\hat{\theta}$  que, con base en los datos muestrales, dé origen a una estimación univaluada del valor del parámetro; entre los métodos de estimación puntual podemos mencionar el método de momentos, el método de máxima verosimilitud, el método de momentos ponderados, y el método de mínimos cuadrados. El segundo procedimiento de estimación suele recibir el nombre de intervalos de confianza, este estimador es una regla que especifica el método para usar las mediciones muestrales en el cálculo de dos números que forman los puntos extremos del intervalo. El intervalo resultante tiene dos propiedades: la primera establece que éste contiene el parámetro objetivo  $\theta$ , mientras que la segunda contempla que la amplitud del intervalo será relativamente pequeña. Uno o ambos puntos extremos del intervalo, siendo funciones de las mediciones muestrales, variarán aleatoriamente de una muestra a otra (Wackerly, Mendenhall, & Scheaffet, 2010).

Para el presente trabajo de investigación el método de estimación que se utilizará es la estimación puntual, debido a las propiedades matemáticas que estos estimadores tienen las cuales se mencionan a continuación.



## 4.1 Propiedades de los estimadores puntuales

### Eficiencia relativa

Un estimador insesgado es aquel cuya esperanza matemática coincide con el valor del parámetro que se desea estimar. En caso de no coincidir se dice que el estimador tiene sesgo.

Por lo que un estimador insesgado, se define de la siguiente forma:

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

De este modo, dados dos estimadores insesgados  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$  de un parámetro  $\theta$ , con varianzas  $V(\hat{\theta}_1)$  y  $V(\hat{\theta}_2)$ , respectivamente, entonces la **eficiencia** de  $\hat{\theta}_1$  con respecto a  $\hat{\theta}_2$ , denotada como  $eff(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ , se define como la razón:

$$eff(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)}$$

La  $eff(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  es mayor que 1 solo si  $V(\hat{\theta}_2) > V(\hat{\theta}_1)$ , en este caso  $\hat{\theta}_1$  es un mejor estimador eficiente que  $\hat{\theta}_2$ .

### Consistencia

Se dice que el estimador  $\hat{\theta}_n$  es un estimador consistente de  $\theta$  si, para cualquier número positivo  $\varepsilon$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1$$

O bien, de otra forma equivalente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

Un estimador insesgado  $\hat{\theta}_n$  para  $\theta$  es un estimador consistente de  $\theta$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 1$$

Esta característica se refiere a la baja probabilidad de un gran error si el rango de la muestra aumenta lo suficiente. Lo que se espera en este caso es que, al aumentar el tamaño de la muestra, la estimación sea más cercana al valor real del parámetro.

### **Suficiencia**

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución de probabilidad con parámetro desconocido  $\theta$ . Entonces se dice que el estadístico  $U = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  es suficiente para  $\theta$  si la distribución condicional de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , dada  $U$ , no depende de  $\theta$ .

Los estadísticos suficientes desempeñan un importante papel para determinar buenos estimadores para parámetros.

En esta investigación se usarán el método de momentos y el método de máxima verosimilitud para la obtención de los estimadores de las distribuciones propuestas, cada uno de estos métodos se definen en las siguientes secciones.

### **4.2 Método de momentos**

Este método fue propuesto por Pearson (1894) y consiste en igualar un determinado número de momentos teóricos de la distribución de la población con los correspondientes momentos muestrales, para obtener una o varias ecuaciones que, al resolverlas permitan estimar los parámetros desconocidos de la distribución poblacional.

De acuerdo a Sánchez (2018), este método se basa en la ley de los grandes números la cual es un teorema fundamental de la teoría de la probabilidad que indica que si repetimos muchas veces (tendiendo al infinito) un mismo experimento, la frecuencia de que suceda un cierto evento tiende a ser una constante.

Una definición formal de la ley de los grandes números se establece en el siguiente teorema.

**Teorema:** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que tienen una distribución común que posee una media  $\mu_X$ . Luego, las medias muestrales convergen a la media de la distribución a medida que aumenta el número de observaciones.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu_X, \quad n \rightarrow \infty$$

De este teorema tenemos que sí, el  $k$ -ésimo momento teórico de una variable aleatoria, tomado alrededor del origen, está dado por:

$$\mu'_k = E(X^k) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Y el correspondiente  $k$ -ésimo momento muestral es el promedio:

$$m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

Entonces el método de momentos consiste en igualar  $\mu'_k$  a  $m'_k$ . La idea del método de los momentos para estimar el parámetro consiste en encontrar las raíces de la ecuación planteada.

El método de los momentos se utiliza en los casos en que otros procedimientos de estimación solo son numéricamente difíciles de manejar. Sin embargo, este método puede producir estimaciones de baja eficiencia. Además, no es posible utilizar este método para distribuciones sin momentos definidos. A veces, las estimaciones obtenidas por el método de los momentos se pueden tratar como una aproximación inicial para resolver las ecuaciones de verosimilitud si es necesario resolverlas por iteración (Spaková, 2013).

En la tabla 4.1 se presentan los estimadores de momentos para las distribuciones mencionadas en el capítulo II. A manera de ejemplo de cómo funciona este método de estimación, se presenta en seguida la estimación de los parámetros de forma ( $\varepsilon$ ) y escala ( $\sigma$ ) para la distribución de Pareto generalizada.

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de  $n$  observaciones seleccionada de una población en la que  $X_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , posee una función de densidad de Pareto generalizada de parámetros  $\sigma$  y  $\varepsilon$ , por el método de momentos y usando las ecuaciones (2.4) y (2.5) tenemos que:

$$\mu'_1 = E(X) = \frac{\sigma}{1 - \varepsilon}$$

$$\mu'_2 = E(X^2)$$

Mientras que:

$$m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

Calculamos el segundo momento teórico

$$E(X^2) = var(x) - [E(x)]^2$$

$$E(X^2) = \frac{\sigma^2}{(1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon)^2} + \left(\frac{\sigma}{1 - \varepsilon}\right)^2$$

$$E(X^2) = \frac{\sigma^2}{(1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon)^2} + \frac{\sigma^2}{(1 - \varepsilon)^2}$$

$$E(X^2) = \frac{2\sigma^2 - 2\varepsilon\sigma^2}{(1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon)^2}$$

$$E(X^2) = \frac{2\sigma^2}{(1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon)}$$

Igualando los momentos muestrales con los momentos poblacionales se tiene:

$$\frac{\sigma}{1 - \varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \dots \dots \dots (a)$$

$$\frac{2\sigma^2}{(1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \dots \dots \dots (b)$$

Despejar a  $\sigma$  en (a)

$$\sigma = (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \quad \dots \dots \dots (c)$$

Sustituir  $\sigma$  en (b)

$$\frac{2 \left( (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \right)^2}{(1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{2(1 - \varepsilon)}{(1 - 2\varepsilon)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
2(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 &= (1-2\varepsilon)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \\
2\varepsilon\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \\
\varepsilon &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right)} \\
\hat{\varepsilon} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\bar{x}^2}{s^2}\right) \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Sustituir  $\varepsilon$  en (c)

$$\sigma = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\bar{x}^2}{s^2}\right)\right]$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\bar{x}^2}{s^2}\right)\right) \\
\hat{\sigma} &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\bar{x}^2}{s^2}\right)\right] \\
\hat{\sigma} &= \frac{\bar{x}}{2}\left(1 + \frac{\bar{x}^2}{s^2}\right) \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Donde  $\bar{x}$  y  $s^2$  son la media y la varianza muestral, respectivamente.

**Tabla 4.1 Estimadores por el método de momentos**

Distribución	Método de momentos
<b>Gamma</b>	$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}^2}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$ $\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$
<b>Exponencial</b>	$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$
<b>Log-normal</b>	$\hat{\mu} = 2 \ln \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)$ $\hat{\sigma}^2 = \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - 2 \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$
<b>Pareto</b>	$\hat{\alpha} = 1 + \sqrt{\frac{1 + \bar{x}^2}{s^2}}$ $\hat{k} = \frac{\bar{x}(\alpha - 1)}{\alpha}$

Fuente: Elaboración propia.

### 4.3 Método de Máxima Verosimilitud

El método de Máxima Verosimilitud, tiene la propiedad de seleccionar como estimación, el valor del parámetro que maximiza el valor de la probabilidad de la muestra aleatoria observada. Según Casella & Berger (2002), este método de estimación es la técnica más conocida y más utilizada para derivar estimadores.

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria que tiene función de densidad conjunta  $f(X_1, X_2, \dots, X_n; \underline{\theta})$ , donde  $\underline{\theta}' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$  es un vector de  $p$  parámetros no

conocidos, para cada valor observado de la muestra  $\{x_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , la función de verosimilitud de  $\underline{\theta}$  es definida como:

$$L(\underline{\theta}; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \underline{\theta})$$

El estimador de Máxima Verosimilitud  $\hat{\underline{\theta}}$  del parámetro  $\underline{\theta}$  debe satisfacer la ecuación:

$$L(\hat{\underline{\theta}}; x_1, x_2, \dots, x_n) = \max L(\underline{\theta}; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Dado que el logaritmo natural de la función de verosimilitud es una función monótona no decreciente de  $X$ , maximizar  $L(\underline{\theta}; x_1, x_2, \dots, x_n)$  es equivalente a maximizar  $\ln(L(\underline{\theta}; x_1, x_2, \dots, x_n))$ . Así, el logaritmo de la función de verosimilitud denotada como  $l(\underline{\theta})$  es definido como:

$$l(\underline{\theta}) = \ln(L(\underline{\theta}; x_1, x_2, \dots, x_n)) = \ln \prod_{i=1}^n f(x_i; \underline{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i; \underline{\theta}))$$

Si la función de log verosimilitud es diferenciable (en  $\theta_i$ ), los candidatos posibles para estimadores de máxima verosimilitud son los valores  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  que resuelven

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(x_i; \underline{\theta})}{\partial \theta} = 0$$

Note que las soluciones a la ecuación anterior son solo los posibles candidatos para estimadores, nuestro objetivo es hallar que éstos sean los máximos.

Los estimadores de máxima verosimilitud son denotados como  $\hat{\theta}_n(X)$ .



La popularidad de los estimadores de máxima verosimilitud se basa principalmente en las propiedades que éstos tienen cuando se trabaja con muestras grandes, ya que bajo este hecho los estimadores de máxima verosimilitud son consistentes, asintóticamente normales y asintóticamente eficientes.

La definición de un estimador consistente se dio en los párrafos anteriores, a continuación se muestra el concepto de un estimador asintóticamente normal y un estimador asintóticamente eficiente.

#### Normalidad asintótica

La estimación de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  es asintóticamente normal cuando:

$$\hat{\theta}_n \rightarrow N(0, V)$$

donde  $n \rightarrow \infty$  y  $V$  es una matriz definida positiva.

#### Eficiencia asintótica

La estimación de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  es asintóticamente eficiente cuando:

$$\sqrt{N} (\hat{\theta}_n - \hat{\theta}) \rightarrow^d N(0, V)$$

donde  $V$  es una matriz definida positiva y  $\rightarrow^d$  representa la convergencia en una distribución.

En lo que respecta al cálculo por máxima verosimilitud, se debe tener en cuenta que no siempre es fácil encontrar las ecuaciones cuya solución proporcionen los estimadores de máxima verosimilitud. Tales ecuaciones pueden no tener

soluciones explícitas y, por lo tanto, se necesitan métodos iterativos para resolverlas.

En la tabla 4.2 se muestran los estimadores de máxima verosimilitud, o la función de log-verosimilitud que deberá ser maximizada para las funciones presentadas en los capítulos II y la distribución Weibull presentada en el capítulo III.

**Tabla 4.2 Estimadores por el método de máxima verosimilitud**

Distribución	Método de máxima verosimilitud
<b>Gamma</b>	$l(\lambda, \beta) = n \log(\beta) + n \log(\Gamma(\alpha)) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - \sum_{i=1}^n \beta x_i$
<b>Exponencial</b>	$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$
<b>Log-normal</b>	$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}{n}$ $\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\mu})^2}{n}$
<b>Weibull</b>	$l(\lambda, \theta) = n \log(\theta) + \beta n \log(\lambda) + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - \sum_{i=1}^n \lambda x_i$
<b>Pareto</b>	$n \log(\alpha) + \alpha(n) \log(k) - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i)$

Fuente: Elaboración propia.

A manera de ejemplo se presenta la metodología para la obtención de la estimación de los parámetros de la distribución de Pareto generalizada por el método de máxima verosimilitud.

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de la función de densidad  $f(x_i)$ , donde  $f(x_i)$  esta proporcionada por la ecuación (2.2) con  $\mu = 0$ , de esta manera al obtener la función de verosimilitud se tiene que:

$$L(\varepsilon, \sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \frac{\varepsilon(x_i)}{\sigma} \right)^{\left( -\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)} \right]$$

$$L(\varepsilon, \sigma) = \frac{1}{\sigma^{2n}} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\sigma + \varepsilon(x_i)}{\sigma} \right)^{\left( -\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)}$$

Aplicando Logaritmo natural

$$l(\varepsilon, \sigma) = \text{Ln}(L(\varepsilon, \sigma)) = \text{Ln} \left[ \sigma^{-n} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\sigma + \varepsilon(x_i)}{\sigma} \right)^{\left( -\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)} \right]$$

$$l(\varepsilon, \sigma) = -n \text{Ln}(\sigma) - \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \left[ \sum_{i=1}^n \text{Ln}(\sigma + \varepsilon(x_i)) - n \text{Ln}(\sigma) \right]$$

$$l(\varepsilon, \sigma) = \cancel{-n \text{Ln}(\sigma)} + \frac{n \text{Ln}(\sigma)}{\varepsilon} + \cancel{n \text{Ln}(\sigma)} - \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \left( \sum_{i=1}^n \text{Ln}(\sigma + \varepsilon(x_i)) \right)$$

$$l(\varepsilon, \sigma) = \frac{n}{\varepsilon} \text{Ln}(\sigma) - \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \left( \sum_{i=1}^n \text{Ln}(\sigma + \varepsilon(x_i)) \right)$$

Una vez que se obtiene la función de log-verosimilitud es necesario hallar los valores de  $\hat{\sigma}$  y  $\hat{\varepsilon}$  que hacen que  $l(\varepsilon, \sigma)$  sea máxima, lo cual se puede realizar mediante el cálculo para esto se obtienen las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial l}{\partial \varepsilon} = -\frac{n}{\varepsilon^2} \ln(\sigma) - \left\{ \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\sigma + \varepsilon(x_i)} \right) \right] + \left( \frac{1}{\varepsilon^2} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \ln(\sigma + \varepsilon(x_i)) \right\} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = \frac{n}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\sigma} \right) - \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \varepsilon(x_i)) \quad (2.9)$$

Una vez obtenidas las derivadas parciales es necesario igualarlas a cero, y así obtener los posibles candidatos para estimadores y después verificar si éstos representan los valores máximos, en este caso esto no puede ser realizado de forma analítica por lo que es necesario emplear métodos numéricos que nos ayuden a encontrar una solución a este problema, para esto emplearemos una función del programa estadístico R-studio (versión 3.5.1).

## **CAPÍTULO V. Pruebas de bondad de ajuste**

Las pruebas de bondad de ajuste representan métodos estadísticos para verificar si un conjunto de información o datos sigue una distribución de probabilidad en particular. Dichas pruebas se basan, esencialmente, en dos elementos de la distribución: la función de distribución acumulada (f.d.a) y la función de densidad de probabilidad (f.d.p). Las pruebas de bondad de ajuste que emplearemos en este trabajo son: Anderson Darling, Cramér Von Mises, Kolmogorov Smirnov y gp.test.

Las pruebas Anderson Darling, Cramér Von Mises y Kolmogorov Smirnov sólo se aplican a variables aleatorias continuas, éstas permiten comparar la gráfica de la distribución empírica acumulada con la correspondiente gráfica de la función de distribución acumulada de la distribución teórica propuesta. Por otra parte, la prueba gp.test es una prueba específica para la distribución de Pareto generalizada. Todas las pruebas de bondad de ajuste se aplicaran en el software estadístico R-studio (versión 3.5.1).

Las pruebas de bondad de ajuste se basan en un juego de hipótesis el cual se menciona a continuación:

$H_0$ : Los datos siguen una distribución específica.

$H_1$ : Los datos no siguen una distribución específica.

Las pruebas de bondad de ajuste son aplicadas para evaluar el ajuste a cualquier distribución de probabilidad.

### **5.1 Anderson Darling**

Esta prueba se basa en la comparación de la función de distribución empírica (FDE) y una función de distribución dada.

La FDE, denotada por  $F_n(x)$  se calcula de la siguiente manera:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{|X_i \leq x|},$$

donde  $I_A$  es la función indicadora del evento  $A$ , es decir,

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las estadísticas FDE son medidas de discrepancia entre la FDE y una función de distribución dada estas se definen como una muestra aleatoria de tamaño  $n$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  y sean,  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  las estadísticas de orden, y suponga que la distribución  $X$  es  $F(x)$ , entonces la FDE se denota como  $F_n(x)$  es tal que:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n} & X_{(i)} \leq x \leq X_{(i+1)} \\ 1 & x \geq X_{(n)} \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, (n-1) \\ \end{matrix}$$

Anderson y Darling (1954) definieron el estadístico de prueba como:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F^*(x)]^2 \psi(F^*(x)) dF^*(x)$$

donde:

$$\psi \text{ es una función no negativa que puede ser calculada por } \psi = \{[F(x)][1 - F(x)]\}^{-1}$$

La definición de este estadístico parece difícil de manejar, pero existen fórmulas computacionales sencillas como por ejemplo:

$$A = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [2i - 1] [\ln(p_{(i)}) + \ln(1 - p_{(n-i+1)})]$$

$$p_{(i)} = I \left[ \frac{x_{(i)} - \bar{x}}{s} \right]$$

donde:

I: Función de distribución acumulada de una normal estándar.

$\bar{x}$  : Media muestral

s: Desviación estándar

n: Tamaño de muestra

## 5.2 Cramér Von Mises

En esta prueba pondera las diferencias entre la función de distribución empírica y teórica. La forma del estadístico de prueba es:

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 \varphi(F(x)) dF(x) \quad \varphi(x) \geq 0$$

donde:

n: es el número de observaciones.

$F(x)$ : es la distribución teórica bajo la hipótesis nula.

$F_n(x)$ : es la función de distribución empírica (FDE).

Para  $\varphi(x) = 1$  el estadístico de prueba es:

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 dF(x)$$

La expresión puede ser aproximada de la siguiente forma

$$W^2 = \sum_{i=1}^n \left[ F(x) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 + \frac{1}{12n}$$

Para valores grandes  $W^2$  es significativa.

### 5.3 Kolmogorov Smirnov

Es una prueba no paramétrica que tiene como objetivo encontrar el tipo de distribución de una serie de datos, es fácil de utilizar puesto que no requiere que los datos se agrupen de determinada manera.

Estadístico de prueba:

$$D_c = \sup_{1 \leq i \leq n} |\hat{F}_n(x_i) - F_0(x_i)|$$

donde:

$x_i$ : es el  $i$ -ésimo valor observado en la muestra (cuyos valores se han ordenado previamente de menor a mayor).

$\hat{F}_n(x_i)$ : es un estimador de la probabilidad de observar valores menores o iguales que  $x_i$ .

$F_0(x_i)$ : es la probabilidad de observar valores menores o iguales que  $x_i$  cuando  $H_0$  es cierta.

Este valor se compara con el valor crítico que se encuentra en la tabla Kolmogorov Smirnov. Se rechaza la  $H_0$  si  $D_c$  es mayor que el valor de tabla para el nivel de confianza y el tamaño de muestra que se estén considerando.



Además de las tres pruebas antes mencionadas, existe una prueba especial para comprobar la bondad de ajuste de la distribución de Pareto generalizada a un conjunto de datos, esta prueba fue desarrollada por José Villaseñor Alva y Elizabeth González Estrada en el 2009 y lleva por nombre gp.test.

#### 5.4 gp.test

Es una prueba diseñada en el programa R-studio (versión 3.5.1) específicamente para comprobar si un conjunto de datos siguen una distribución de Pareto generalizada con parámetros desconocidos.

Esta prueba se basa en la hipótesis nula  $H_0$ : una muestra aleatoria tiene una distribución de Pareto generalizada.

Es una prueba de intersección para las hipótesis  $H_0^-$ : una muestra aleatoria tiene una distribución de Pareto generalizada con  $\varepsilon < 0$  y  $H_0^+$ : una muestra aleatoria tiene una distribución de Pareto generalizada con  $\varepsilon \geq 0$ .

Por lo tanto, la distribución de Pareto generalizada de cola pesada y no pesada se incluye en la hipótesis nula. El bootstrap paramétrico se realiza en  $\varepsilon$  para cada una de las dos hipótesis.

Bajo  $H_0$  se tiene una relación lineal de las variables  $Y = (\bar{F}(X; \sigma, \varepsilon))^{-\varepsilon}$  y  $X$  con función de distribución  $F(X; \sigma, \varepsilon)$ , además por  $\log((\bar{F}_n(X; \sigma, \varepsilon))^{-\varepsilon} - 1) = \log\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \log(X)$  existe una relación lineal entre las variables  $Y^* = \log((\bar{F}_n(X; \sigma, \varepsilon))^{-\varepsilon} - 1)$ , y  $X^* = \log(X)$ .

Sea  $Y = (\bar{F}_n(X_i))^{-\hat{\varepsilon}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  donde  $F_n$  es la función de distribución empírica de la muestra aleatoria y  $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_k$  es la estimación. Para  $0 \leq \hat{\varepsilon} < 0.5$ , el segundo

momento de  $X$  es finito, por lo tanto, el coeficiente de correlación de  $X_i$  y  $Y_i$  esta denotado por  $R_1$ , es un estimador de la correlación lineal de  $X$  y  $Y$ , cuando  $0 \leq \hat{\varepsilon} < 0.5$ .

$$R_1 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})}{n\sqrt{S_X^2 S_Y^2}}$$

donde  $\bar{X}, S_X^2$  y  $\bar{Y}, S_Y^2$  son la media muestral y la varianza.

Ahora, sea  $X_i^* = \log(X_i)$  y  $Y_i^* = \log(\bar{F}_n(X_i)^{-\varepsilon} - 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  para  $\varepsilon \geq 0.5$  el segundo momento de  $X^*$  es finito, por lo tanto, el coeficiente de correlación muestral de  $Y_i^*$  y  $X_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  denotado por  $R_2$ , es un estimador de la correlación lineal de  $Y_i^*$  y  $X_i^*$ , para  $\hat{\varepsilon} \geq 0.5$ .

Para  $H_0^+$  se propone el estadístico de prueba:

$$R^+ = \begin{cases} R_1 & \text{si } 0 \leq \hat{\varepsilon} < 0.5 \\ R_2 & \text{si } \hat{\varepsilon} \geq 0 \end{cases}$$

Para  $H_0^-$

Se propone utilizar el coeficiente de correlación de  $X_i$  y  $Z_i = \bar{F}_n(X_i)^{-\hat{\varepsilon}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  donde  $\hat{\varepsilon} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - X_{(n)}}$ .

Sea  $|R^-|$  denota el valor absoluto del coeficiente de correlación de  $X_i$  y  $Z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Bajo  $H_0^-$ , se espera que el valor de  $|R^-|$  sea cercano a 1. Por lo tanto se rechaza  $H_0^-$  si  $|R^-| < c_{\alpha}^-$  donde el valor crítico  $c_{\alpha}^-$  es el cuantil 100 $\alpha$ % de la distribución de  $|R^-|$  bajo  $H_0^-$ . Para obtener a  $c_{\alpha}^-$  se usa bootstrap.

Se usa el bootstrap paramétrico para obtener el valor crítico de la siguiente manera.

Calcular  $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_k$  y generar muestras de bootstrap  $J$  para una distribución de Pareto generalizada con parámetros  $(\varepsilon, \sigma) = (\hat{\varepsilon}, 1)$ .

En todas las pruebas de bondad de ajuste mencionadas anteriormente un valor  $p$  pequeño conduce a un rechazo de la hipótesis nula.

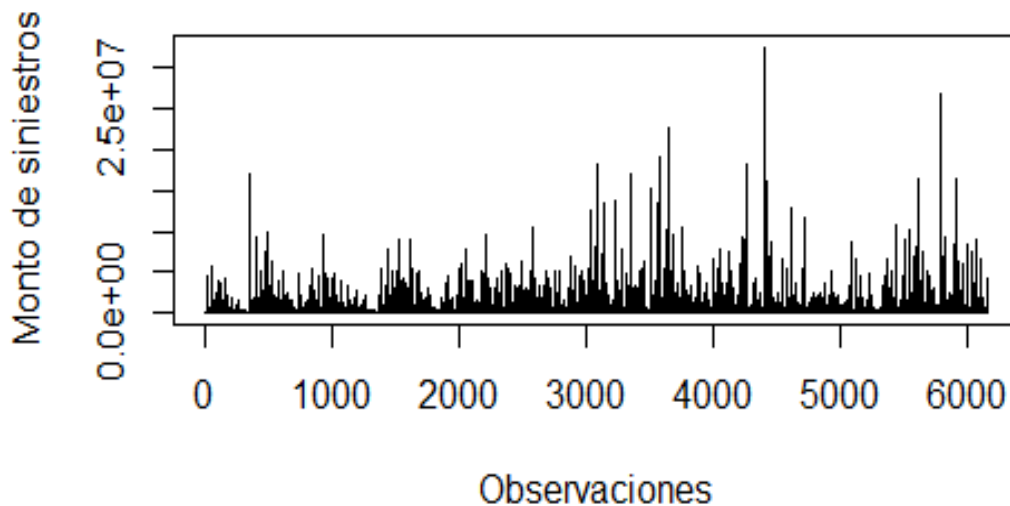
## CAPÍTULO VI. Modelo estadístico

El modelo estadístico incorpora un conjunto de supuestos estadísticos sobre la generación de la serie de datos que tenemos, es decir, mostrará el análisis de los datos, en este capítulo se presentan las estadísticas descriptivas de los datos así como diversas gráficas que muestran su comportamiento. Además, se establecerá el modelo que siguen el conjunto total de datos y el modelo que mejor ajusta a los montos máximos de siniestros en el seguro de automóviles en México.

### 6.1 Análisis descriptivo de los datos

Los datos utilizados para la realización del trabajo hacen referencia a los montos de siniestros para el seguro de automóviles en México desde el año 2008 hasta el año 2017, la serie fue obtenida de la base de datos en línea de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas<sup>1</sup>, la información estadística corresponde a las cifras de los ramos de automóviles de póliza individual, cobertura de responsabilidad civil por bienes y no aplica ningún tipo de pérdida, las cifras que se manejan son netas y en moneda nacional. Para la modelación de los datos se utiliza el programa R-studio (versión 3.5.1). En la gráfica 6.1 se presenta el conjunto de los datos y las características esenciales de la muestra que se desprenden del mismo se presentan en la tabla 6.1.

**Gráfica 6.1 Montos de siniestros del seguro de automóviles en México**



Fuente: Elaboración propia.

<sup>1</sup><https://www.cnsf.gob.mx/EntidadesSupervisadas/InstitucionesSociedadesMutualistas/Paginas/Automoviles.aspx>

**Tabla 6.1 Estadísticas descriptivas del conjunto de datos**

<b>Tamaño de la muestra: 6156 datos</b>	<b>Media: 500403.219</b>
<b>Mínimo: 1.5</b>	<b>Desviación estándar: 1457382.64</b>
<b>Máximo: 32612950</b>	<b>Coefficiente de asimetría: 8.028</b>
<b>Curtosis: 101.542</b>	

Fuente: Elaboración propia.

El total de los datos analizados es de 6,156, el valor mínimo de la muestra es de 1.5 pesos y el valor máximo es de 32,612,950 pesos, teniendo una media muestral de 500,403.219, la desviación estándar es de 1,457,382.64 lo que nos indica que los datos cuentan con una gran dispersión sobre la media, la curtosis es de 101.542 lo que muestra que se tiene un menor grado de concentración debido a la mayor dispersión de sus valores en torno a su valor central y el coeficiente de asimetría es de 8.028 como es un valor positivo significa que para esta serie de datos la cola de la distribución se alarga para valores superiores a la media.

Ahora bien, como primer paso se realizará la comprobación de que los montos de siniestros no son datos normales, mediante las pruebas de normalidad empleadas, las cuales son el método gráfico, la prueba Jarque- Bera y el método gráfico exponencial.

### **Prueba de normalidad del conjunto de datos**

#### **➤ Método gráfico (Gráfico de cuantiles teóricos (Gráficos QQ))**

Un tipo de gráfica que puede ser especialmente útil para revelar la naturaleza de un conjunto de datos es la gráfica de cuantiles, en esta grafica el objetivo del analista es hacer distinciones y se pueden utilizar las ideas básicas para comparar muestras de datos. El propósito de las gráficas de cuantiles consiste en describir, en forma de muestra, la función de distribución acumulada. Un cuantil de una muestra,  $q(f)$  es un valor para el que una fracción específica  $f$  de

los valores de los datos es menor que o igual a  $q(f)$ . Evidentemente, un cuantil representa una estimación de una característica de una población o, más bien, la distribución teórica (Myers, Myers S, Walpole, & Ye, 2012).

Las gráficas cuantil-cuantil son una herramienta de exploración utilizada para evaluar las similitudes entre la distribución de una variable numérica y una distribución normal, o entre las distribuciones de dos variables numéricas. Existen dos tipos de gráficas cuantil-cuantil: las gráficas cuantil-cuantil normales y las gráficas cuantil-cuantil generales. Los primeros se construyen trazando los cuantiles de una variable numérica respecto de los cuantiles de una distribución normal y los segundos trazan los cuantiles de una variable numérica respecto de los cuantiles de una segunda variable numérica.

Para el presente trabajo de investigación se utilizarán la gráfica de cuantil-cuantil normales para la corroboración de que los datos no provienen de una distribución normal.

En una gráfica de cuantiles cuanto más se aproximen los datos a una normal más alineados están los puntos entorno a la recta y en esta gráfica simplemente se grafican los valores de los datos en el eje vertical contra una evaluación empírica de la fracción de observaciones excedidas por los valores de los datos. Para propósitos teóricos esta fracción se calcula con:

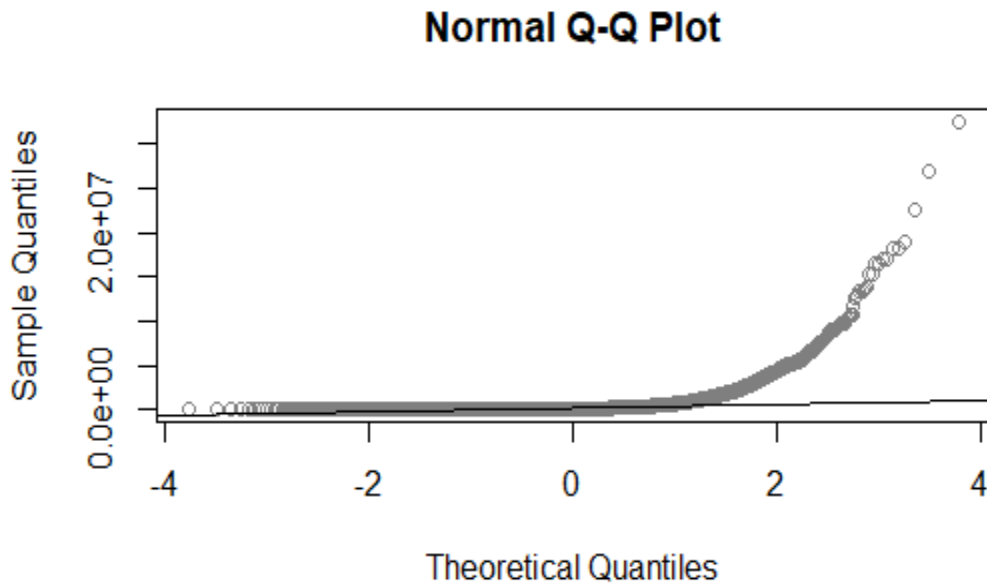
$$f_i = \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}},$$

donde  $i$ , es el orden de las observaciones cuando se ordenan de la menor a la mayor. En otras palabras, si denotamos las observaciones ordenadas como:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq x_{(3)} \leq \dots \leq x_{(n-1)} \leq x_{(n)},$$

entonces la gráfica de cuantiles describe una gráfica de  $x_i$  contra  $f_i$ .

Gráfica 6.2 Cuantiles teóricos de los montos de siniestros del seguro de automóviles en México



Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica 6.2 se muestra que la distribución no se aproxima a una normal, debido a que las observaciones se encuentran dispersas, por lo que la mayoría no se alinean entorno a la recta y lo cual se asumiría que los valores se están ajustando a otro tipo de distribución.

Además del método gráfico QQ plot existen pruebas estadísticas para determinar si los datos siguen una distribución normal, una de estas pruebas es la prueba Jarque –Bera.

#### ➤ Prueba Jarque-Bera

La prueba de Jarque-Bera pretende determinar si una determinada distribución de probabilidad se asemeja a una normal, y lo hace mediante el estudio de la asimetría y la curtosis.

La asimetría de  $X$  se define como:

$$S = \frac{(E(X - \mu)^3)^2}{(E(X - \mu)^2)^3}$$

La curtosis se define como:

$$K = \frac{E(X - \mu)^4}{(E(X - \mu)^2)^2}$$

Puesto que, para una distribución normal, el valor de la asimetría es 0 y el valor de la curtosis es 3,  $(K - 3)$  representa la curtosis excedente.

El estadístico de prueba se define como:

$$JB = n \left[ \frac{S}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right]$$

Para considerar que la distribución de los errores sigue una normal, el valor  $p$  de la prueba debería ser mayor 0.05. Para este caso, teniendo el siguiente juego de hipótesis:

$H_0$ : Los datos proceden de una distribución normal.

$H_1$ : Los datos no proceden de una distribución normal.

Realizando la prueba en R-studio (versión 3.5.1), se obtiene: el estadístico  $JB = 2706500$  y el valor  $p < 0.000000000000000022$ .

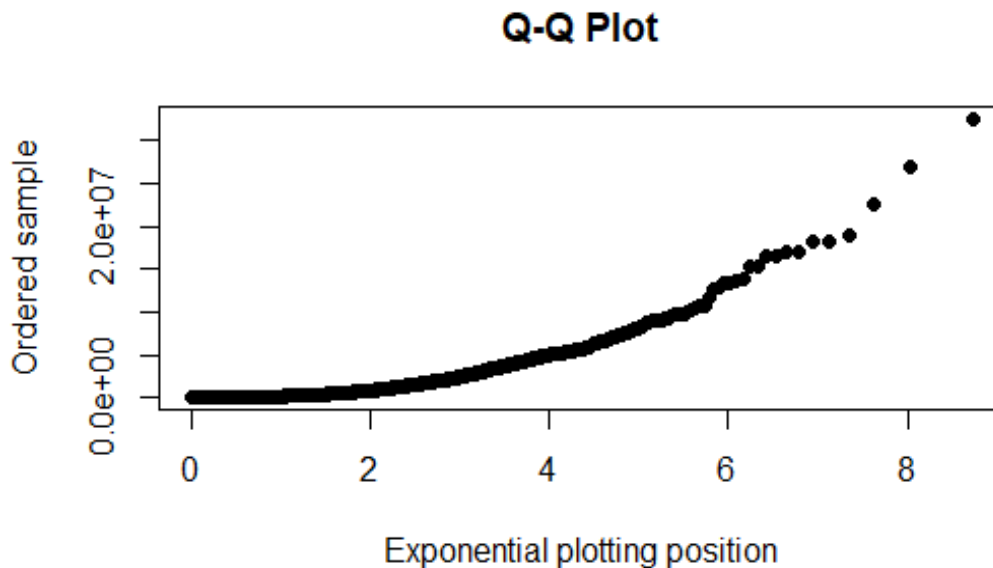
Por lo tanto se rechaza la  $H_0$  de que los datos siguen una distribución normal y se concluye que es otro tipo de distribución. Con ello podremos continuar con el



análisis de las observaciones para verificar si éstas pueden ser modeladas con algunas de las distribuciones mencionadas en los capítulos II y III.

- **Método gráfico exponencial (Gráfico de cuantiles teóricos (Gráfico QQ exponencial))**

**Gráfica 6.3 Cuantiles teóricos exponencial de los montos de siniestros del seguro de automóviles en México**



Fuente: Elaboración propia.

Una distribución exponencial es aquella que posee una cola ligera, por lo que para verificar si el conjunto de datos que se está analizando sigue una distribución exponencial, se hará uso del método gráfico QQ exponencial. Este método consiste en trazar los cuantiles de una variable numérica respecto de los cuantiles de una distribución exponencial, además de comparar valores variables ordenados con cuantiles de una distribución teórica de la exponencial.

En este caso, la gráfica 6.3 muestra que los datos siguen una distribución de cola pesada porque los valores se encuentran en una posición semejante a una curva, en consecuencia los datos pueden ser modelados con una distribución diferente a la exponencial.

## 6.2 Modelo estadístico para el conjunto total de los montos de siniestros

En diversas ocasiones las compañías de seguros deben poseer modelos informativos que les permitan tomar decisiones sobre, entre otras cosas, el valor de las primas, las ganancias esperadas, las reservas necesarias para garantizar la rentabilidad y el impacto de los deducibles. Las distribuciones utilizadas para modelar los montos de siniestros son distribuciones que a menudo están sesgadas a la derecha y que tienen probabilidades bajas en las colas de la distribución. Como ya se mencionó en el capítulo II las distribuciones más usadas para modelar este tipo de datos son la Gamma, exponencial, log-normal, Weibull y Pareto, como primer paso para hallar la distribución que mejor ajusta a los datos proporcionados por la CNSF se estimarán los parámetros de estas distribuciones, dichas estimaciones se presentan en la tabla 6.2. Las estimaciones de parámetros se hacen para todas las distribuciones, pero teniendo como base la revisión de literatura (debido a que en la mayoría de los documentos revisados la distribución log-normal era la que mejor ajustaba a los montos de siniestros en el sector asegurador), se tiene como juego de hipótesis principal:

$H_0$ : Los datos proceden de una distribución log-normal.

$H_1$ : Los datos no proceden de una distribución log-normal.

Un ejemplo de cómo se evalúan la estimación de los parámetros por el método de máxima verosimilitud, siguiendo las formulas presentadas en la tabla 4.2, donde las  $x_i$  representan cada uno de los montos de siniestros proporcionados por la CNSF, se tiene que,

$$\hat{\mu} = \frac{\sum \ln(x_i)}{n} = \frac{69145.685}{6156}$$

$$\hat{\mu} = 11.232$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (\ln x_i - \mu)^2}{n} = \frac{26777.068}{6156}$$

$$\hat{\sigma}^2 = 4.349$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{4.349} = 2.085$$

Entonces, para la distribución log-normal, las estimaciones de  $\sigma$  y  $\mu$  son 11.232 y 2.085.

**Tabla 6.2 Estimación de parámetros por el método de máxima verosimilitud**

Distribución	Estimaciones por máxima verosimilitud
<b>Log-normal</b>	$\hat{\mu} = 11.232$ $\hat{\sigma} = 2.085$
<b>Gamma</b>	$\hat{\alpha} = 0.752$ $\hat{\beta} = 0.00003329$
<b>Pareto</b>	$\hat{\alpha} = 0.394$ $\hat{\kappa} = 11954$
<b>Weibull</b>	$\hat{\kappa} = 0.725$ $\hat{\lambda} = .00003329$
<b>Exponencial</b>	$\hat{\beta} = 0.0000016263$

Fuente: Elaboración propia.

Una vez obtenidas las estimaciones de los parámetros para las distribuciones log-normal, Gamma, Pareto, Weibull y exponencial se hará uso de las pruebas de bondad de ajuste para verificar cuál de estas distribuciones es la que mejor se ajusta al conjunto de datos.

La tabla 6.3 muestra el valor del estadístico y el valor  $p$  de las pruebas de bondad de ajuste aplicadas a las distribuciones propuestas, se puede observar que, cuando la prueba Cramér Von Mises se aplica a las distribuciones Gamma, Pareto y exponencial se presenta un valor  $p > 0.05$  y un valor estadístico de prueba alto,

sin embargo, cuando la prueba se basa en  $H_0$ : los datos siguen una distribución log-normal, el valor  $p$  es mayor a 0.05 pero el valor del estadístico de prueba no es tan grande como con las otras distribuciones. Por otra parte, cuando se aplican las pruebas Anderson Darling y Kolmogorov Smirnov para verificar si las distribuciones Gamma, Pareto, Weibull y exponencial son distribuciones que modelan correctamente el monto total de siniestros se obtiene que el valor  $p$  es demasiado bajo por lo que estas distribuciones no pasan la prueba de bondad de ajuste.

Debido a que en las pruebas de bondad de ajuste la hipótesis nula de que los datos se distribuyen log-normal, no fue rechazada entonces se concluye que el conjunto de datos sigue esta distribución, lo cual concuerda con los estudios revisados (Winmore & Chiduzza (2013), Pacákova & Brebera (2015), Ondieki, Shalyne & Wairimu (2018) y Burneckia, Kuklaa & Weronb (2000)).

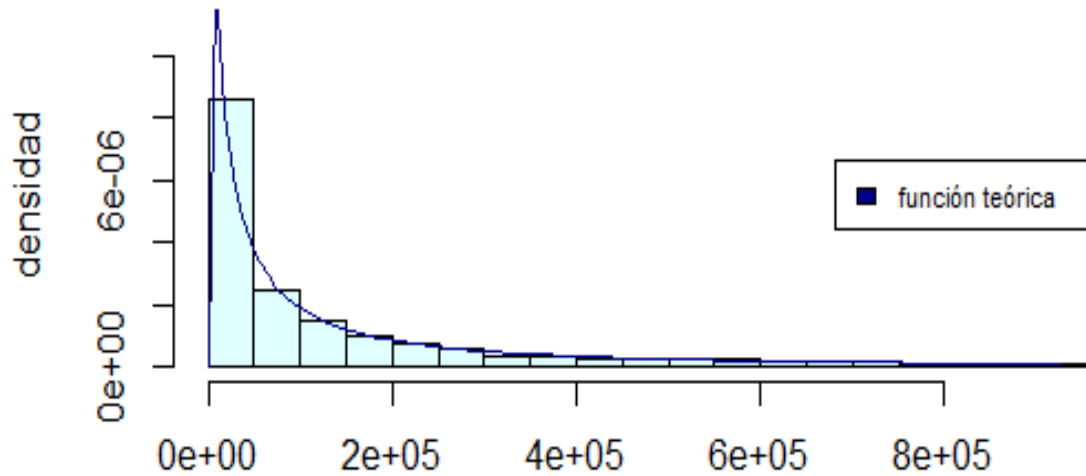
**Tabla 6.3 Aplicación de las pruebas de bondad de ajuste a los montos de siniestros del seguro de automóvil.**

Distribución	Prueba	Estimador
Log-normal	Anderson Darling	1.7775 (0.122)
	Cramér Von Mises	0.22823 (0.2188)
	Kolmogorov Smirnov	0.013563 (0.2075)
Gamma	Anderson Darling	Inf (<0.001)
	Cramér Von Mises	576.14 (0.1377)
	Kolmogorov Smirnov	0.45403 (<0.001)
Pareto	Anderson Darling	Inf (<0.001)
	Cramér Von Mises	2052 (0.3095)
	Kolmogorov Smirnov	0.99984 (<0.001)
Weibull	Anderson Darling	Inf (<0.001)
	Cramér Von Mises	2052 (<0.001)
	Kolmogorov Smirnov	1 (<0.001)
Exponencial	Anderson Darling	Inf (<0.001)
	Cramér Von Mises	468.68 (0.1131)
	Kolmogorov Smirnov	0.41235 (<0.001)

Fuente: Elaboración propia, los datos entre paréntesis corresponden al valor  $p$ .

Una prueba visual del ajuste de la distribución log-normal al conjunto de datos proporcionado por la CNSF se muestra en la gráfica 6.4, donde se encuentra el histograma del conjunto de datos y la función teórica de la distribución log-normal bajo las estimaciones de los parámetros por máxima verosimilitud, se puede observar que esta distribución se ajusta adecuadamente a los datos.

**Gráfica 6.4 Histograma de montos de siniestros del seguro de automóviles en México**



Fuente: Elaboración propia.

### **6.3 Modelo estadístico para los montos de siniestros que exceden un umbral**

Este apartado se enfocará en el análisis de aquellos valores que pueden ser modelados con una distribución de Pareto generalizada, para esto se mostrarán los métodos empleados para la elección de un umbral, se obtendrá la estimación de los parámetros, se aplicaran las pruebas de bondad de ajuste, y por último se hará el cálculo de probabilidades de los montos máximos de siniestros.

El análisis de los montos máximos de siniestros es importante, debido a que son los datos mayores después de cierto valor establecido, que aunque estos datos son de baja probabilidad de ocurrencia, al momento de suceder puede implicar un impacto en la estabilidad financiera de la entidad aseguradora.

Pickands (1975), establece que para un umbral suficientemente alto, los excedentes pueden ser modelados a través de una distribución de Pareto generalizada, la cual fue mencionada en el capítulo III. Para poder hacer uso de

esta distribución es necesario obtener la estimación de sus parámetros, para ello existen diversos métodos pero para este trabajo de investigación utilizaremos los mencionados en el capítulo IV, los cuales son el método de momentos y el método de máxima verosimilitud.

Para poder obtener la estimación de estos parámetros lo primero que debe realizarse es fijar el umbral.

### **6.3.1 Métodos para la elección del umbral**

Los datos que se comportan conforme una distribución de Pareto generalizada deben ser analizados para un umbral, para que a partir de éste solo se tomen aquellos valores que exceden dicho valor, por lo que existen diversos métodos para la identificación del umbral en este trabajo de investigación se utilizarán la gráfica de excesos medios y el método de los cuantiles.

#### **Gráfica de excesos medios o función de vida media residual**

Si  $X$  es una variable aleatoria continua con función de supervivencia  $S(u)$ , la función de excesos medios o función vida media residual se define como:

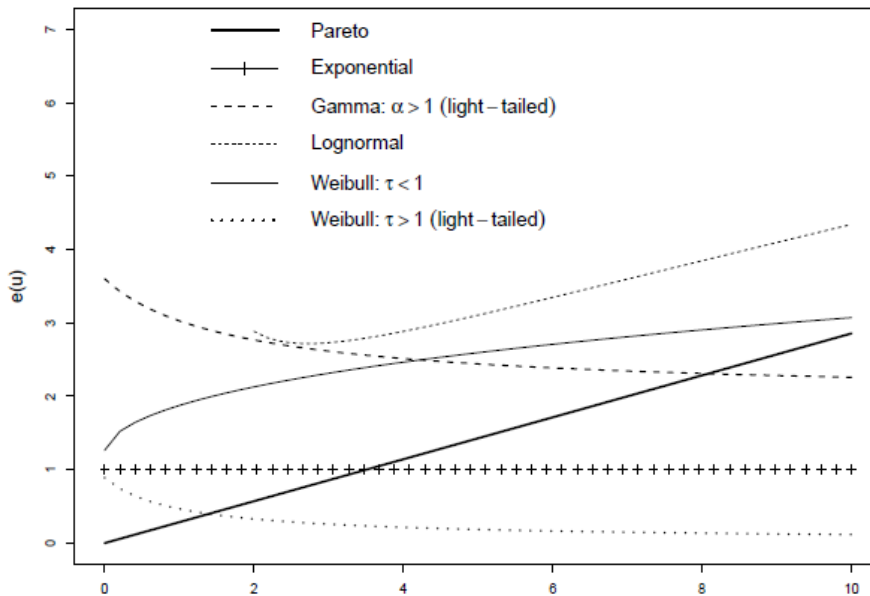
$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\int_u^{\infty} S(t) dt}{S(u)}$$

**Tabla 6.4 Función de excesos medios para diferentes distribuciones**

Distribución	Función de excesos medios
<b>Gamma</b>	$e(x) = \beta^{-1}\{1 + O(1)\}$ Donde $O(1)$ representa un término que tiende a cero a medida que $u \rightarrow \infty$ .
<b>Exponencial</b>	$e(x) = \frac{1}{\beta}$
<b>Pareto</b>	$e(x) = \frac{\sigma + \varepsilon x}{1 - \varepsilon}$
<b>Log-normal</b>	$e(x) = \frac{\sigma^2 x}{\ln x - \mu} \{1 + O(1)\}$
<b>Weibull</b>	$e(x) = \frac{x^{1-\tau}}{\beta\tau} \{1 + O(1)\}$

Fuente: Elaboración propia.

**Gráfica 6.5 Función de excesos medios para diferentes distribuciones**



Fuente: Elaboración propia.



Una propiedad interesante de la distribución de Pareto generalizada es que

$$e(u) = \frac{\sigma + \varepsilon u}{1 - \varepsilon}, \quad \text{donde } \varepsilon < -1$$

es una función lineal de  $u$  con el gradiente  $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$  y el intercepto  $\frac{\sigma}{1-\varepsilon}$  (ver gráfica 6.5).

En la práctica la función de excesos medios es estimada por (Embrechts, Kluppelberg, & Mikosch, 1996):

$$\hat{e}_n = \frac{1}{\text{card } \Delta_n(u)} \sum_{i \in \Delta_n(u)} (x_{(i)} - u)$$

donde  $x_{(i)}$  es la  $i$ -ésima estadística de orden de una muestra aleatoria de tamaño  $n$ ,  $\Delta_n(u) = \{i = 1, \dots, n; x_i > u\}$  y  $\text{card } \Delta_n(u)$  es la cardinalidad del conjunto  $\Delta_n(u)$ .

La gráfica de excesos medios será obtenida mediante las coordenadas  $(u, \hat{e}_n(u))$ . En la tabla 6.4 y gráfica 6.5 se muestran las funciones de excesos medios para las distribuciones mencionadas en el capítulo II.

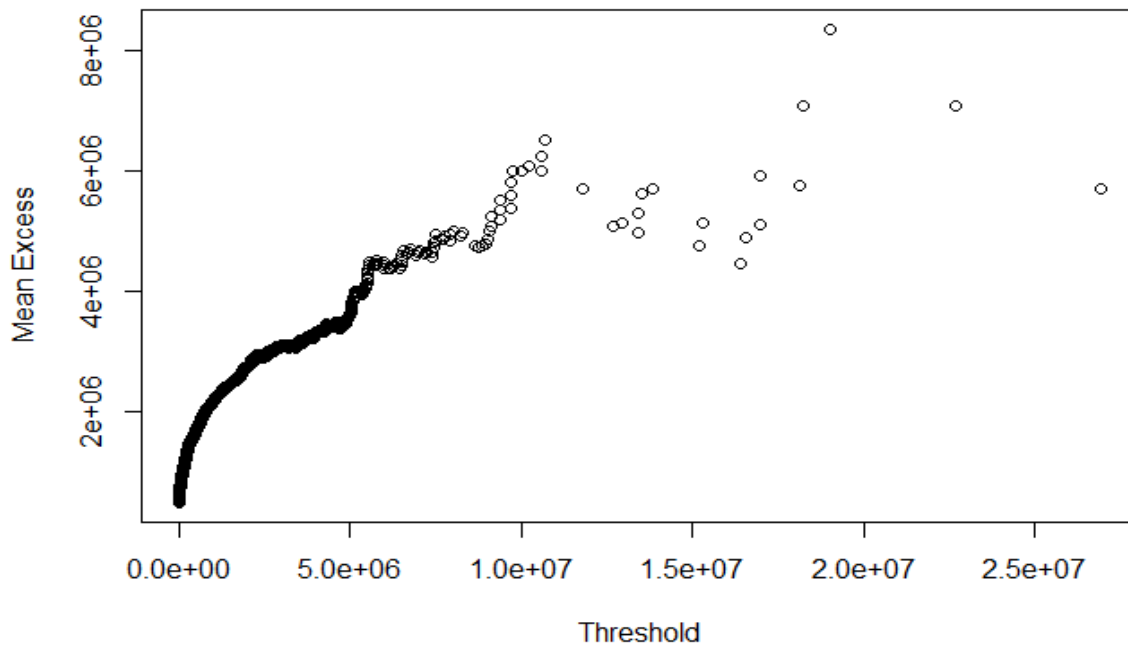
Este método gráfico será uno de los puntos básicos a la hora de verificar la hipótesis de Pareto generalizada en la cola de una distribución, ya que la función de excesos medios para datos de cola gruesa se localiza entre la función de excesos medios de una distribución exponencial, que es constante, y la de la distribución generalizada de Pareto, que es lineal y tiende a infinito para valores altos de  $u$  (ver gráfica 6.6). En general, las distribuciones de cola gruesa dan lugar a una función de excesos medios que tiende a infinito para valores altos de  $u$  y presentan una forma lineal con pendiente positiva.

Si los puntos representados muestran una tendencia ascendente, es señal de un comportamiento de cola gruesa en la muestra representada. Si los datos se

distribuyeran según una distribución exponencial mostrarían un gráfico aproximadamente lineal con una tendencia descendente lo cual muestra una distribución de cola corta o suave.

Para los datos que se presentan en este trabajo de investigación, se tiene la gráfica de los excesos medios de los montos de siniestros del seguro de automóviles en México (ver gráfica 6.6) obtenida en el programa R-studio (versión 3.5.1).

**Gráfica 6.6 Función de excesos medios de los montos de siniestros del seguro de automóviles en México**



Fuente: Elaboración propia.

La grafica de excesos medios indica tendencia lineal ascendente a medida que se incrementa la prioridad o el valor del umbral. En la gráfica 6.6 se observa que, para los valores que exceden los 5,646,466.2 pesos, se tiene una tendencia lineal y pendiente positiva, por lo que sería necesario especificar a este valor como el

umbral pues a partir de este punto la función empieza a tener una tendencia creciente.

La selección de un umbral óptimo está sujeta al problema de elección entre varianza y sesgo, es decir, si se incrementa el número de observaciones para formar las series de máximos (disminuyendo el umbral), la estimación del índice de cola será más precisa (con menor varianza) pero sesgada, ya que algunas observaciones del centro de la distribución (no de la cola) se introducirán en la serie. Por otro lado, si se reduce el número de observaciones (con un umbral más elevado), se reduce el sesgo, pero la estimación del índice será más volátil al realizarse con un menor número de observaciones.

La elección de  $u$ , o análogamente el número de valores  $k$  que quedan por encima de  $u$ , es importante porque se pretende ajustar la distribución de Pareto generalizada a los valores que excedan ese valor.

### **Método de los cuantiles**

Un cuantil es un estadístico de posición definido como un valor de la variable aleatoria por debajo del cual se encuentra una determinada proporción de los valores de la variable. Dicho de otra forma, el cuantil de orden  $\alpha$  de una variable aleatoria es un valor de dicha variable por debajo del cual se acumula un  $\alpha$  por ciento de probabilidad.

Los cuantiles pueden ser de diversos tipos, por ejemplo percentiles cuando la serie de valores se divide en cien partes cada una de ellas equivalente a uno por ciento, cuartiles si la serie de valores se clasifica en cuatro partes cada una relacionada con el 25% o deciles cuando el conjunto de valores se reparte en 10 partes cada una relativa al diez por ciento (Vilchis, 2014).

Ubicación de un percentil:

$$L_p = (n + 1) \frac{P_k}{100}$$

donde:

$L_p$ : es el sitio del percentil en una serie ordenada.

$n$ : es el número de observaciones.

$P_k$ : es el percentil deseado.

Usando el programa R-studio (versión 3.5.1) se obtienen los percentiles que se muestran en la tabla 6.5.

**Tabla 6.5 Percentiles de siniestros del seguro de automóviles en México**

Percentiles (q)	Valor para el percentil ( $x_q$ )	Número de valores por encima de $x_q$ (k)
<b>q= 0.90</b>	$x_{0.90} = 1045910$	k= 690
<b>q= 0.95</b>	$x_{0.95} = 2136970$	k= 345
<b>q= 0.99</b>	$x_{0.99} = 6207701$	k= 69

Fuente: Elaboración propia.

Para este análisis se cuenta con diferentes percentiles empleados en el conjunto de datos como lo son 90%, 95% y 99%, dichos valores fueron obtenidos a través del método de cuantiles y el tipo de cuantiles empleados para este trabajo son los percentiles, a medida de que el valor del percentil aumenta los datos sobre el umbral tienden a ser menos. Los valores de los umbrales para cada uno de los cuantiles son 1045910, 2136970 y 6207701 y el número de observaciones que se obtienen después de cada uno de los umbrales mencionados son 690, 345 y 69, respectivamente.

En las tablas 6.6 a la 6.9 se muestran las estadísticas básicas de los umbrales obtenidos para los percentiles 90, 95 y 99% y el valor del umbral obtenido del método gráfico de excesos medios.

**Tabla 6.6 Estadísticas descriptivas de los excesos después del umbral obtenido en excesos medios**

<b>Tamaño de la muestra: 78 datos</b>	<b>Media: 4408171.63</b>
<b>Mínimo: 17465.91</b>	<b>Desviación estándar: 4966695.74</b>
<b>Máximo: 26966484.2</b>	<b>Coefficiente de asimetría: 2.2020572</b>
<b>Curtosis: 6.00551286</b>	

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 6.7 Estadísticas descriptivas de los excesos después del umbral 90%**

<b>Tamaño de la muestra: 690 datos</b>	<b>Media: 2219254.837</b>
<b>Mínimo: 779.49</b>	<b>Desviación estándar: 3158836.409</b>
<b>Máximo: 31567040.36</b>	<b>Coefficiente de asimetría: 3.77153759</b>
<b>Curtosis: 21.11715664</b>	

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 6.8 Estadísticas descriptivas de los excesos después del umbral 95%**

<b>Tamaño de la muestra: 345 datos</b>	<b>Media: 2875372.1</b>
<b>Mínimo: 10086.83</b>	<b>Desviación estándar: 3709525.71</b>
<b>Máximo: 30475980.4</b>	<b>Coefficiente de asimetría: 3.26722202</b>
<b>Curtosis: 14.9175877</b>	

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 6.9 Estadísticas descriptivas de los excesos después del umbral 99%**

<b>Tamaño de la muestra: 69 datos</b>	<b>Media: 4387699.95</b>
<b>Mínimo: 48903.59</b>	<b>Desviación estándar: 5035577.27</b>
<b>Máximo: 26405249.4</b>	<b>Coefficiente de asimetría: 2.14423535</b>
<b>Curtosis: 5.62458289</b>	

Fuente: Elaboración propia.

### **6.3.2 Estimación de parámetros de la distribución de Pareto generalizada**

Una vez obtenidos los diferentes umbrales para el conjunto de datos se procederá a obtener la estimación de los parámetros de la distribución de Pareto generalizada con el método de momentos y el método de máxima verosimilitud.

El método de momentos se describe en el capítulo IV, ahora para poder estimar los parámetros por este método se usan las fórmulas 2.6 y 2.7 presentadas en el capítulo IV, para así obtener las respectivas estimaciones correspondientes para cada uno de los umbrales.

La estimación de parámetros de  $\varepsilon$  y  $\sigma$  por el método de momentos, queda de la siguiente manera para el cuantil 90% (1045910):

Para  $\hat{\varepsilon}$ :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(2219254.837)^2}{9978247457843.48} \right)$$

$$\hat{\varepsilon} = 0.253$$

Para sigma:

$$\hat{\sigma} = \frac{2219254.837}{2} \left( 1 + \frac{(2219254.83)^2}{9978247457843.48} \right)$$

$$\hat{\sigma} = 1,657,320.51$$

Ahora bien, la estimación de parámetros para el umbral obtenido con el método gráfico de excesos medios y para el método de cuantiles se muestran en la tabla 6.10 y 6.11 respectivamente.

**Tabla 6.10 Estimación de parámetros por el método de momentos para el umbral obtenido en el método de excesos medios**

Umbral = 5,646,466.20	Parámetros
	$\hat{\varepsilon} = 0.10613092$

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 6.11 Estimación de parámetros por el método de momentos para los umbrales obtenidos en el método de los cuantiles**

$x_{0.90} = 1,045,910$	$\hat{\sigma} = 1,657,320.51$
	$\hat{\varepsilon} = 0.25320856$
$x_{0.95} = 2,136,970$	$\hat{\sigma} = 2,301,490.42$
	$\hat{\varepsilon} = 0.19958519$
$x_{0.99} = 6,207,701$	$\hat{\sigma} = 3,859,494.19$
	$\hat{\varepsilon} = 0.12038329$

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede apreciar en las tablas 6.10 y 6.11 conforme aumenta tamaño del percentil va aumentando el valor de la estimación del parámetro de escala, al

aumentar dicho parámetro significa que los datos están más dispersos, es decir hace que la distribución luzca más expandida horizontalmente.

Por otra parte, como se mencionó en el capítulo IV, el método de máxima verosimilitud es otra técnica existente para la estimación de parámetros y es aquel en el que la estimación se basa en el valor del parámetro que maximice el valor de la probabilidad de los datos observados.

Para poder llevar a cabo las soluciones de las ecuaciones 2.8 y 2.9 va hacer necesario emplear métodos de optimización que nos ayuden a encontrar la solución adecuada, en R-studio se emplea la función `optim`.

La función `optim` es un método de optimización de funciones de propósito general, basado en los algoritmos de Nelder-Mead, Cuasi-Newton y gradiente conjugado.

La forma de utilizar este comando se muestra a continuación:

```
optim (par ,fn , method=c("Nelder-Mead", "BFGS", "CG", "L-BFGS-B", "SANN",  
"Brent"), lower= -Inf,...)
```

donde:

*par* : corresponde al valor inicial del parámetro.

*fn*: la función a ser minimizada.

*Method*: el método a ser utilizado.

*lower* : es el límite inferior del parámetro a encontrar.

Los valores que retorna el comando `optim` son: *par* que corresponde al conjunto de los mejores parámetros encontrados, *var* el valor de *fn* que corresponde a los parámetros encontrados, *convergence* la convergencia satisfactoria será indicada con un 0.



Algo que se puede notar en esta función es que ésta depende de los valores iniciales que se le asignan a los parámetros que se quieren estimar, para el caso de la estimación de los parámetros de la distribución de Pareto generalizada, estos valores iniciales son los estimados por el método de momentos que se calculan en los párrafos anteriores, una vez conocidos estos valores iniciales se debe asignar el algoritmo de optimización, para esto existen diferentes métodos, entre ellos se encuentran los Cuasi newton, Nelder- Mead y el gradiente conjugado los cuales se definen en a continuación.

### **Método Cuasi-newton**

Los algoritmos para la optimización no lineal sin restricciones con múltiples variables se pueden clasificar como: búsqueda sin el uso de derivadas, búsqueda con la información de la primera derivada (gradiente) y búsqueda con la información de la segunda derivada. Entre los algoritmos que usan el gradiente se encuentran los métodos Cuasi-Newton los cuales son una modificación del método de Newton, en los que se construye una aproximación de la curvatura de la función no lineal utilizando sólo información de la primera derivada, evitando la construcción de la matriz de segundas derivadas (Hessiana).

Los métodos Cuasi-Newton, forman una aproximación a la inversa del Hessiano, cuya forma puede variar desde las más sencillas, donde la matriz permanece fija durante el proceso iterativo, hasta los más avanzados donde se construyen aproximaciones mejoradas basadas en la información del proceso (Rodríguez, 2015).

### **Método de Nelder-Mead**

El método de Nelder-Mead se basa en la generación sucesiva de hiperplanos en una región factible utilizando su inclinación para hallar la dirección de avance del algoritmo. Para un problema de dimensión  $n$  el método utiliza  $n + 1$  vértices para generar el hiperplano. El punto con el mejor desempeño en la función objetivo y el punto con el peor desempeño direccionan la búsqueda. Los puntos iniciales se

organizan de acuerdo con su valor en la función objetivo. El mejor punto encontrado se denomina en este caso  $B$ , el peor como  $W$  y un punto intermedio  $M$ , que es el centro de los  $n + 1$  puntos y se calcula como:

$$M = \frac{1}{n} \sum_{x_i \neq W}^{n+1} x_i$$

La elección de un nuevo punto para continuar el algoritmo se realiza a través de cuatro procedimientos geométricos: Reflexión, Expansión, Contracción y Reducción (Gómez, Patiño, & Vélez, 2012).

### **Método de Gradiente Conjugado**

Este método es un método de direcciones conjugadas con una propiedad especial. Esta propiedad es la de generar un nuevo vector  $p_k$  usando solamente la dirección anterior  $p_{k-1}$ . Por lo que este método no necesita conocer  $p_0, \dots, p_{k-2}$  del conjunto de direcciones conjugadas, automáticamente el vector  $p_k$  es conjugados a estos (Uribe & Trejo, 2015).

En esta investigación se ocupa el método de Nelder-Mead, debido a que por la naturaleza de la función de distribución de Pareto generalizada se podrían tener problemas de convergencia al emplear algún algoritmo cuasi-Newton, con la utilización de este método de optimización y tomando como valor inicial las estimaciones por el método de momentos, se obtuvieron las estimaciones que se muestran en las tablas 6.12 y 6.13.

**Tabla 6.12 Estimación de parámetros por el método de máxima verosimilitud para el umbral obtenido en el método de excesos medios**

	Parámetros
Umbral = 5,646,466.20	$\hat{\sigma} = 3,840,000$
	$\hat{\varepsilon} = 0.1303$

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 6.13 Estimación de parámetros por el método de máxima verosimilitud para los umbrales obtenidos en el método de los cuantiles**

	Parámetros
$x_{0.90} = 1,045,910$	$\hat{\sigma} = 1,503,000$
	$\hat{\varepsilon} = 0.3352$
$x_{0.95} = 2,136,970$	$\hat{\sigma} = 2,250,000$
	$\hat{\varepsilon} = 0.2184$
$x_{0.99} = 6,207,701$	$\hat{\sigma} = 3,674,000$
	$\hat{\varepsilon} = 0.1667$

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 6.12 nos muestra que, para un umbral de 5,646,466.20 pesos se obtienen como estimaciones para el parámetro de escala y de forma, 3,840,000 y 0.1303 respectivamente, como el valor de forma es positivo y menor a uno la distribución no tiene límite superior, una vez que se tienen estas estimaciones para los parámetros entonces es necesario corroborar que efectivamente los excedentes después del umbral establecido siguen una distribución Pareto Generalizada.

Por otra parte, la tabla 6.13 muestra las estimaciones de los parámetros de escala y forma para cada uno de los umbrales obtenidos en el método de los cuantiles, a grandes rasgos se puede observar un gran contraste de valores de  $\varepsilon$  y  $\sigma$  debido a que todas las estimaciones de los parámetros de forma son menores a 0.5, en cambio los parámetros de escala se encuentran elevados, siendo el

más bajo de 1,503,000 para el umbral de 1,045,910 y el más alto de 3,674,000 para el umbral de 6,207,701, al igual que en las estimaciones obtenidas por el método de momentos indica que hace que la distribución luzca más expandida horizontalmente.

### 6.3.3 Verificación del modelo

Una vez que se cuenta con las estimaciones de los parámetros de escala y forma de la distribución de Pareto Generalizada se procederá a comprobar que la distribución asignada a los datos bajo un umbral determinado es la correcta, para esto se hace uso de las pruebas de bondad de ajuste mencionadas en el capítulo V, las conclusiones se basan en el valor  $p$  de estas pruebas. Para llevar a cabo la verificación del modelo se establece el siguiente juego de hipótesis:

$H_0$ : Los datos proceden de una distribución de Pareto generalizada.

$H_1$ : Los datos no proceden de una distribución de Pareto generalizada.

#### Anderson Darling

Para poder comprobar nuestro juego de hipótesis, se hace el cálculo de la prueba Anderson Darling a través del programa R-studio (versión 3.5.1).

**Tabla 6.14 Aplicación de la prueba Anderson Darling**

	Método de Momentos	Método de Máxima Verosimilitud
<b>Umbral</b>	<b>Estadístico</b>	<b>Estadístico</b>
<b>5,646,466.20</b>	<b>0.9764</b> <b>(0.23787)</b>	<b>0.9853</b> <b>(0.21641)</b>
<b><math>x_{0.90} = 1,045,910</math></b>	<b>0.1218</b> <b>(1.7801)</b>	<b>0.6978</b> <b>(0.54855)</b>
<b><math>x_{0.95} = 2,136,970</math></b>	<b>0.9079</b>	<b>0.8982</b>

$x_{0.99} = 6,207,701$	(0.33705)	(0.34793)
	0.9177	0.9676
	(0.32538)	(0.25495)

Fuente: Elaboración propia, los datos entre paréntesis corresponden al valor  $p$ .

La tabla 6.14 muestra que la  $H_0$  no se rechaza para ningún umbral utilizando cualquiera de las estimaciones de los parámetros calculadas con los métodos antes mencionados, esto indica que todos los datos por arriba de los umbrales establecidos se ajustan a una distribución de Pareto generalizada.

### Cramér Von Mises

**Tabla 6.15 Aplicación de la prueba Cramér Von Mises**

	Método de Momentos	Método de Máxima Verosimilitud
Umbral	Estadístico	Estadístico
5,646,466.20	0.9366 (0.039536)	0.9609 (0.034305)
$x_{0.90} = 1,045,910$	0.1146 (0.32572)	0.6335 (0.090528)
$x_{0.95} = 2,136,970$	0.8647 (0.05194)	0.8345 (0.056787)
$x_{0.99} = 6,207,701$	0.8615 (0.052665)	0.938 (0.039298)

Fuente: Elaboración propia, los datos entre paréntesis corresponden al valor  $p$ .

De acuerdo con la tabla 6.15 los datos que siguen una distribución de Pareto generalizada son aquellos pertenecientes a los percentiles de 90, 95 y 99%, además del umbral de 5,646,466.20 debido a que el valor  $p$  de la prueba es mayor a 0.05 indicando así que no se rechaza la hipótesis nula, también se hace notar

que los valores estadísticos más pequeños son para el percentil de 90% ya que para los demás umbrales los valores oscilan aproximadamente entre 0.83 y 0.97.

## Kolmogorov-Smirnov

**Tabla 6.16 Aplicación de la prueba Kolmogorov-Smirnov**

	Método de Momentos	Método de Máxima Verosimilitud
<b>Umbral</b>	<b>Estadístico</b>	<b>Estadístico</b>
<b>5,646,466.20</b>	<b>0.8931</b> <b>(0.063363)</b>	<b>0.9365</b> <b>(0.058679)</b>
$x_{0.90} = 1,045,910$	<b>0.1196</b> <b>(0.045176)</b>	<b>0.767</b> <b>(0.025349)</b>
$x_{0.95} = 2,136,970$	<b>0.4783</b> <b>(0.045305)</b>	<b>0.5678</b> <b>(0.042292)</b>
$x_{0.99} = 6,207,701$	<b>0.8714</b> <b>(0.069346)</b>	<b>0.9545</b> <b>(0.059639)</b>

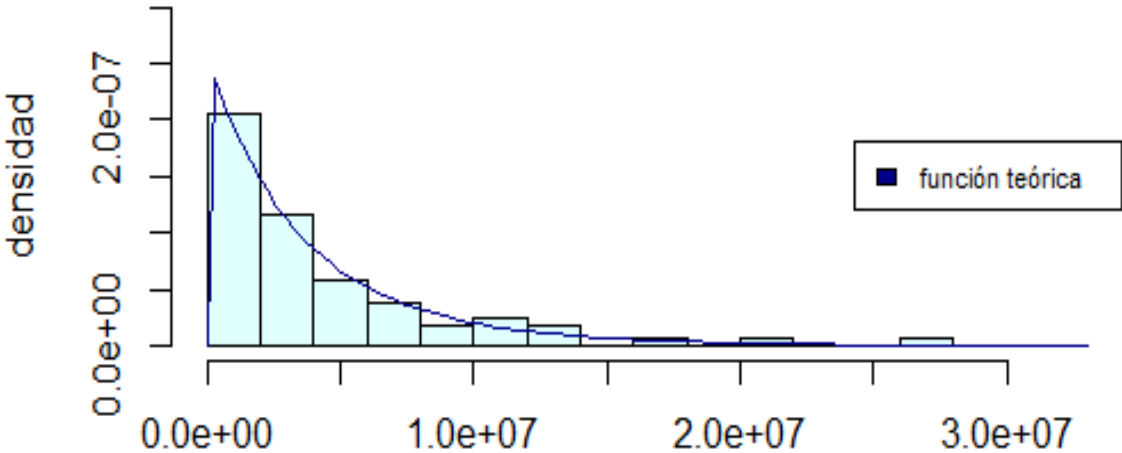
Fuente: Elaboración propia, los datos entre paréntesis corresponden al valor  $p$ .

En la tabla 6.16 se presentan los valores de la prueba Kolmogorov-Smirnov de percentiles 90, 95, 99% y el umbral de 5,646,466.20 obteniendo un valor  $p$  mayor a 0.05 esto indica que los datos que se encuentran después del umbral establecido tienen un buen ajuste a la distribución de Pareto generalizada. Por otra parte, se tiene que en los percentiles 90 y 95% a pesar de que si pasan la prueba cuentan con los valores estadísticos más bajos, a comparación del percentil de 99% y el umbral obtenido en el método de excesos medios, ya que estos dos últimos cuentan con valores entre el rango de 0.87 y 0.96.

De la gráfica 6.7 a 6.10 se muestran los histogramas de los excesos junto con la función teórica de la distribución de Pareto generalizada usando las estimaciones por el método de momentos para los umbrales obtenidos en excesos medios y en

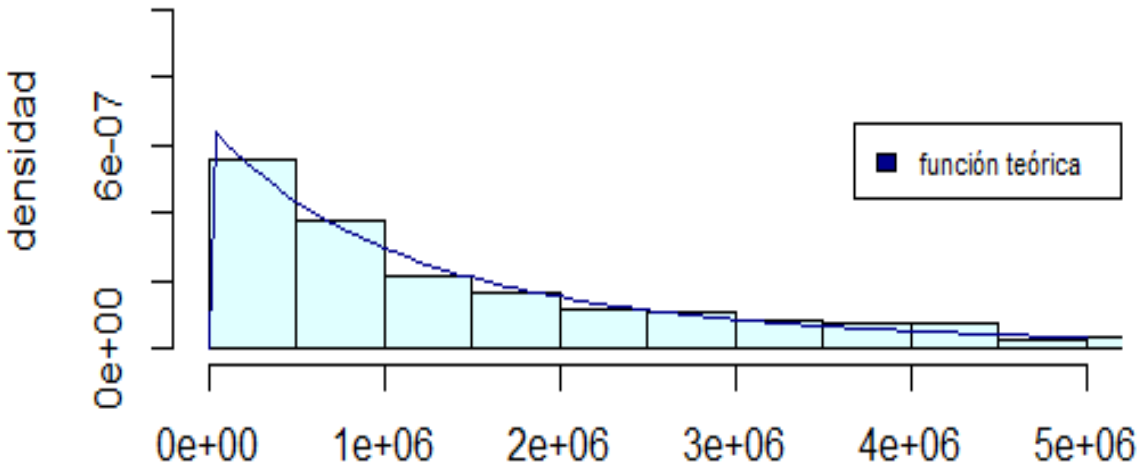
los cuantiles de 90, 95 y 99%, respectivamente. Donde se puede notar en todas las gráficas, que efectivamente los montos máximos correspondientes si se ajustan a una distribución de Pareto generalizada.

Gráfica 6.7 Histograma de los excesos después del umbral  $u$



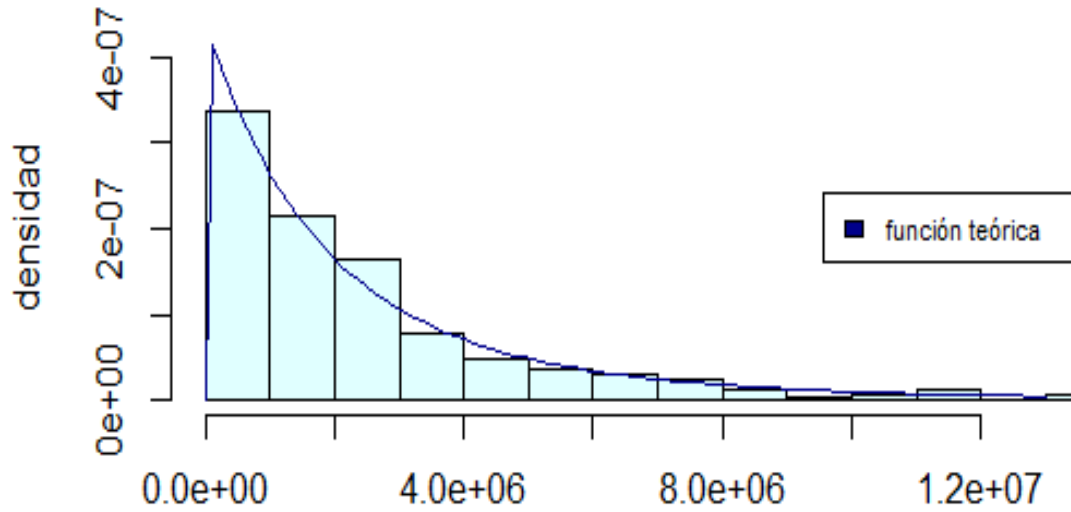
Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 6.8 Histograma de los excesos después del cuantil 90%



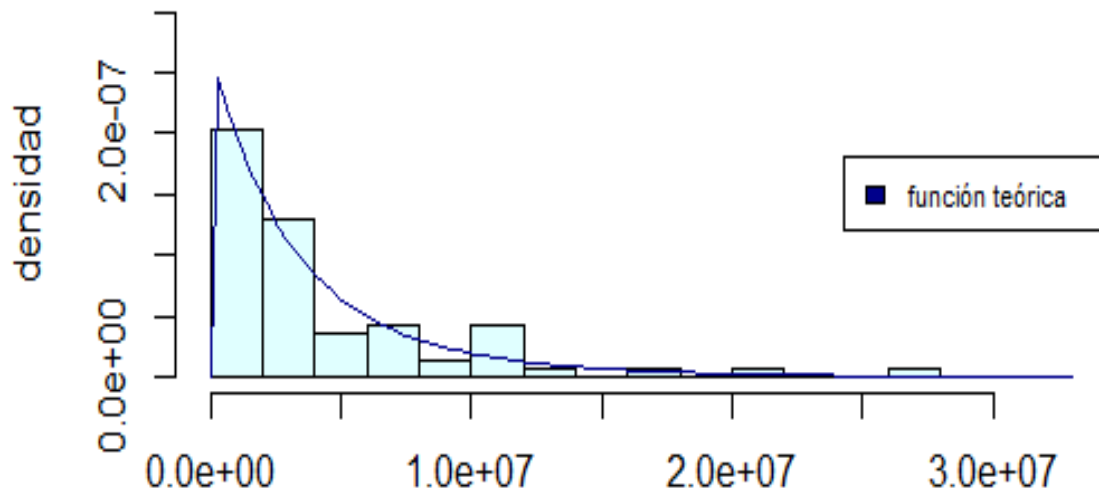
Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 6.9 Histograma de los excesos después del cuantil 95%



Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 6.10 Histograma de los excesos después del cuantil 99%



Fuente: Elaboración propia.



## gp.test

**Tabla 6.17 Aplicación de la prueba gp.test**

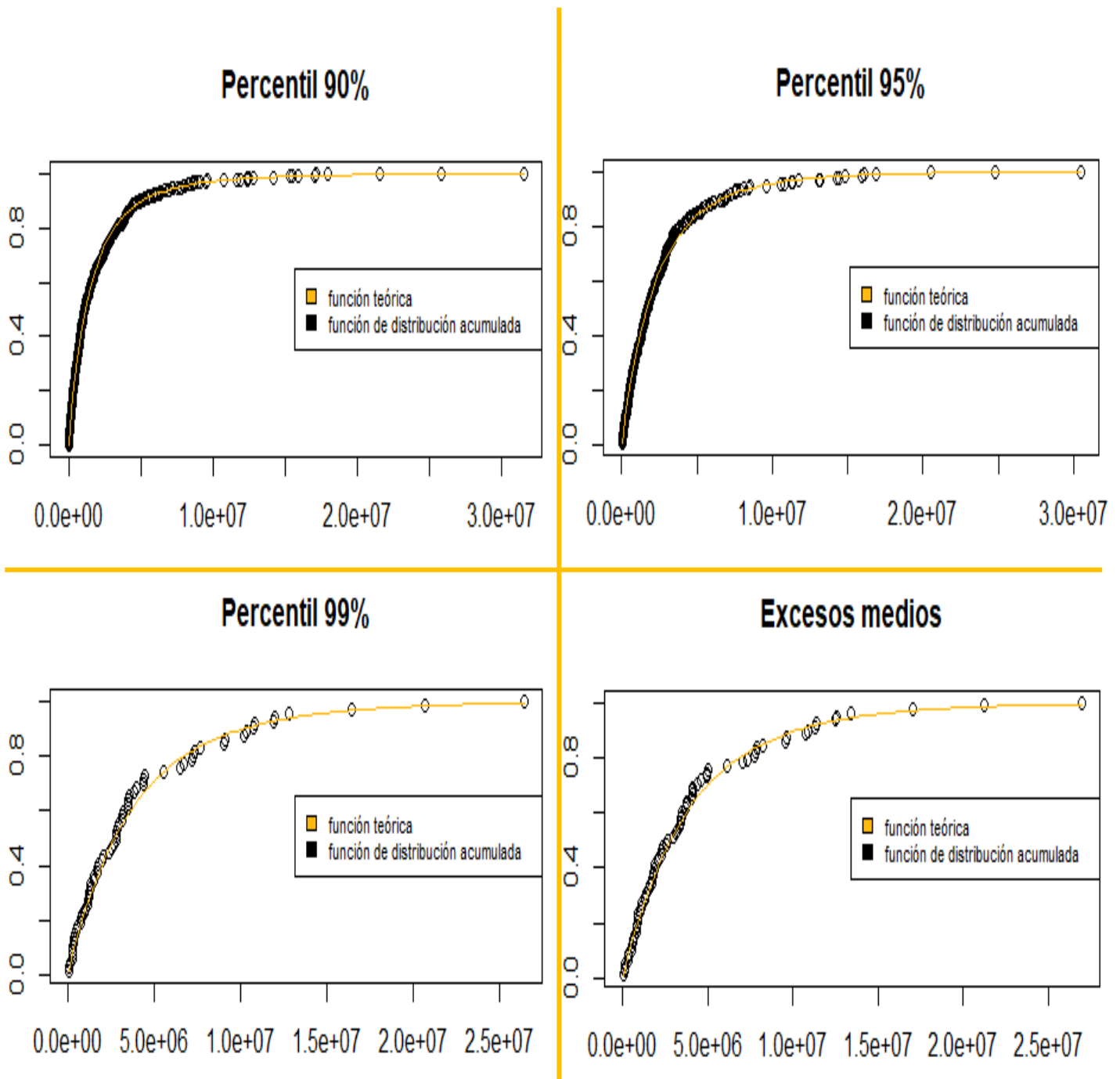
Umbral	Valor $p$
5,646,466.20	0.1752
$x_{0.90} = 1,045,910$	0.2162
$x_{0.95} = 2,136,970$	0.4104
$x_{0.99} = 6,207,701$	0.0981

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 6.17 muestra los diferentes valores  $p$  para los excesos después de los percentiles de 90, 95 y 99% y también para el valor de 5,646,466.20, en la cual podemos observar que los excedentes después de los umbrales elegidos pasan la prueba gp.test y entonces se puede asumir que los montos extremos tomados a partir cualquier tipo de umbral se ajustan a una distribución de Pareto generalizada.

La gráfica 6.11 muestra la comparación entre la función de distribución teórica de la Pareto generalizada usando las estimaciones de los parámetros por máxima verosimilitud y la distribución empírica obtenida de los datos. Las gráficas se hacen para los diferentes umbrales obtenidos en la tesis, se puede notar que para todos los umbrales la distribución teórica y empírica son muy similares, esto quiere decir que la distribución de Pareto generalizada bajo las diferentes estimaciones de los parámetros obtenidos por el método de máxima verosimilitud, puede ser empleada para modelar los montos máximos de siniestros en el seguro de automóvil esto evaluado para los datos que proporcionan la CNSF.

**Gráfica 6.11 Distribución teoría y empírica para los diferentes umbrales**



Fuente: Elaboración propia.

### 6.3.4 Cálculo de probabilidades

Como puede apreciarse por las secciones anteriores para los datos que se proporcionan se puede notar que a partir del cuantil de 90% los datos siguen una distribución de Pareto generalizada. Las estimaciones de los parámetros para los excesos del cuantil 90% obtenidos por el método de máxima verosimilitud fueron para  $\sigma = 1,503,000$  y  $\varepsilon = 0.3352$ , de la misma forma para el umbral obtenido en el método de excesos medios la estimación de los parámetros es  $\sigma = 3,840,000$  y  $\varepsilon = 0.1303$  con estos valores se procederá al cálculo de las probabilidades siendo de interés para el caso de seguros.

La función de probabilidades acumuladas para el cuantil de 90% queda, a partir de las estimaciones de los parámetros del siguiente modo:

$$\widehat{W}_{\varepsilon, \widehat{\beta}, \widehat{\mu}}(x) = 1 - \left[ 1 + 0.3352 \left( \frac{x - 1,045,910}{1,503,000} \right) \right]^{-\frac{1}{0.3352}}$$

El modelo así ajustado es una función de distribución condicionada a que los siniestros excedan \$1,045,910, por tanto, esta función de probabilidades acumuladas calcula la probabilidad de que un siniestro sea inferior al valor  $x$ , una vez que haya excedido el umbral.

A su vez, la probabilidad de que sea superior a dicho valor  $x$ , vendrá dada por la complementaria, esto es, la función de supervivencia.

$$1 - \widehat{W}_{\varepsilon, \widehat{\beta}, \widehat{\mu}}(x) = \left[ 1 + 0.3352 \left( \frac{x - 1,045,910}{1,503,000} \right) \right]^{-\frac{1}{0.3352}}$$

Bajo el modelo ajustado para los excesos después del cuantil de 90% se pueden observar algunos resultados relevantes en la tabla 6.18.

**Tabla 6.18 Probabilidades para los excesos después del cuantil 90%**

<b>x en pesos</b>	<b><math>W(x)</math></b>	<b><math>1 - W(x)</math></b>
<b>6,207,701</b>	89.82%	10.18%
<b>2,136,970</b>	47.78%	52.22%

Fuente: Elaboración propia.

Las conclusiones de la tabla 6.18 son que, condicionado a que un siniestro supere el umbral de \$1,045,910, las probabilidades de que un siniestro sea menor a \$6,207,701 es de 89.82% y que sea mayor es de 10.18%. Por otro parte, las probabilidades de que un siniestro sea inferior a \$2,136,970 es de 47.78% y que sea superior es de 52.22%.

Ahora, para el modelo del umbral obtenido mediante el método gráfico de excesos medios, la función de probabilidades acumuladas queda de la siguiente forma:

$$\widehat{W}_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\beta}, \widehat{\mu}}(x) = 1 - \left[ 1 + 0.1303 \left( \frac{x - 5,646,466.20}{3,840,000} \right) \right]^{-\frac{1}{0.1303}}$$

Y la función de supervivencia:

$$1 - \widehat{W}_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\beta}, \widehat{\mu}}(x) = \left[ 1 + 0.1303 \left( \frac{x - 5,646,466.20}{3,840,000} \right) \right]^{-\frac{1}{0.1303}}$$

Con estos modelos se obtuvieron las probabilidades que se muestran en la tabla 6.19.

**Tabla 6.19 Probabilidades acumuladas para el umbral de la gráfica de excesos medios**

<b>x en pesos</b>	<b><math>W(x)</math></b>	<b><math>1 - W(x)</math></b>
<b>6,207,701</b>	13.47%	86.53%

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 6.19 muestra que la probabilidad de que un siniestro sea menor de \$6,207,701 es de 13.47% y que la probabilidad de que un siniestro sea mayor es de 86.53%.

En comparación de estos resultados con los de la tabla 6.18 para una misma  $x$ , son diferentes debido a que se cuenta con distinto umbral y estimación de parámetros.

## CONCLUSIONES

Con base en la información de la CNSF el seguro de automóvil en México en el año 2018 obtuvo una participación del 19.9% en el mercado de seguros y fianzas, logrando así ser el segundo ramo que tiene mayor participación en este mercado, conocer el comportamiento que siguen los montos de siniestros es relevante debido que es un sector de importancia para la aseguradora, de igual forma para los asegurados también es de significancia con el impacto de la prima que se puede tener en la contratación de una póliza de seguro de automóvil.

En probabilidad es importante conocer a qué tipo de distribución pertenece un conjunto de datos, una vez que se conoce el tipo de distribución que estos siguen, se puede hacer un análisis más detallado de sus características, debido a que cada distribución posee diferentes propiedades.

Para el uso de algunas distribuciones es necesario conocer la estimación de sus parámetros, dentro de la inferencia estadística existen dos métodos de estimación: la estimación por intervalo y la estimación puntual, en esta investigación se hace uso de los dos métodos de estimación puntual principales, el método de momentos y el método de máxima verosimilitud debido a las propiedades matemáticas que estos tienen.

Las estadísticas básicas del conjunto de datos muestran que éstos tienen una distribución sesgada hacia la derecha, ya que el valor de su media (500,403.219) es mayor que la mediana (73,487.805). Esta información se pudo corroborar con el gráfico QQ plot. Además, el valor del estadístico de la prueba Jarque-Bera mostró que los datos no siguen una distribución normal.

Al realizar el análisis conjunto de todos los datos se obtuvo que estos pertenecen a distribuciones de cola pesada, en específico, se encontró que siguen una distribución log-normal, con las siguientes estimaciones de sus parámetros de

forma y de escala,  $\hat{\mu} = 11.2322426$  y  $\hat{\sigma} = 2.0856057$ , respectivamente. Posteriormente, se realizaron las pruebas de bondad de ajuste para verificar que los datos pueden ser modelados con esta distribución, los valores  $p$  de las pruebas fueron mayores a 0.05 por lo que se concluyó que efectivamente los datos proceden de una distribución log-normal. Esto coincide con los estudios mencionados en el capítulo II, donde la distribución adecuada para modelar montos de siniestros es la distribución log-normal.

Además del análisis de todos los datos en conjunto se decidió hacer el estudio de aquellos valores que excedieron a un umbral establecido, es decir, modelar los excedentes, estos valores se obtuvieron de la diferencia entre las observaciones que sobre pasaron al umbral establecido y dicho umbral.

En este trabajo de investigación se ocuparon cuatro umbrales, el primero de ellos se obtuvo mediante la gráfica de excesos medios. Los demás umbrales se obtuvieron de los percentiles de 90, 95 y 99%. Con la aplicación de las pruebas de bondad de ajuste Anderson Darling, Cramér Von Mises y Kolmogorov Smirnov se encontró que los excedentes efectivamente pueden ser modelados con la distribución de Pareto generalizada, bajo las estimaciones encontradas de los parámetros por el método de momentos y el de máxima verosimilitud. Además se aplicó la prueba de bondad de ajuste  $g_p$ .test la cual es una prueba específica para la distribución de Pareto generalizada. Para todas las pruebas de bondad de ajuste se obtuvieron valores  $p$  mayores a 0.05.

El ajuste de los datos de la distribución planteada también se corroboró gráficamente mediante la gráfica de distribución teórica y la de distribución empírica. En consecuencia, una vez que se verificó que los datos pueden ser modelados con la distribución de Pareto generalizada, se realizó el cálculo de probabilidades con la función de probabilidades acumuladas y así poder observar las probabilidades de que sea mayor o menor de un determinado monto de siniestro.

Se considera que la aportación más importante al modelar los montos máximos de siniestros del seguro de automóviles en México para el período de 2008-2017, para un umbral de \$1,045,910 teniendo un nivel de confianza del 90%, las probabilidades de que un siniestro sea mayor a \$6,207,701 es de 89.82% y para un siniestro mayor a \$2,136,970 es de 52.22%, es decir, para ambos casos se maneja una cantidad monetaria suficientemente alta ya que se encuentra expuesta a un riesgo alto.

Este trabajo de investigación sirve como base para poder hacer un estudio para cualquier aseguradora contando con su respectiva serie de los montos de siniestros, es decir, se puede aplicar el modelo antes empleado con los nuevos datos, iniciando con la obtención de las estadísticas básicas y gráficas de importancia, prosiguiendo con la observación si ésta es una distribución de colas pesadas y si es así, se continua con la determinación de un umbral y por último el cálculo de las probabilidades correspondientes. Al realizar este tipo de análisis, le serviría a la entidad aseguradora para determinar el capital económico mínimo que necesitaría para hacer frente a cualquier tipo de reclamación, en otras palabras, que tenga la solvencia suficiente para cubrir cualquier obligación económica que se le presente.



## BIBLIOGRAFÍA

- Almonacid, L. (Agosto de 2017). *Aplicación de la teoría del valor extremo sobre el índice de precios selectivo de acciones (IPSA) de la bolsa de valores de Chile (Tesis de Maestría)*. Santiago, República de Chile.
- Anderson, T., & Darling, D. (1954). A test of goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, XLIX(258), 765-769.
- Arias, G. L. (Junio de 2010). *Modelos de pérdidas agregadas (LDA) y de la teoría del valor extremo para cuantificar el riesgo operativo teoría y aplicaciones (Tesis de Maestría)*. Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
- Arroyo, I., Bravo, L. C., Llinás, H., & Muñoz, F. L. (2014). Distribuciones Poisson y Gamma: Una Discreta y Continua Relación. *Prospect*, 12(1), 99-107.
- Asociados, C. y. (2007). *Atención siniestros*. Obtenido de <http://curyper.com/documents/86.html>
- Burnecka, K., Kuklaa, G., & Weronb, R. I. (12 de Julio de 2000). Property insurance loss distributions. *Physica A*( 287), 269–278.
- CADOAR. (2019). *Cámara Dominicana de Aseguradores y Reaseguradores*. Obtenido de Historia del seguro: <http://www.cadoar.org.do/informaciones/sector-asegurador/historia-del-seguro/>
- Calderon, A., & Rodríguez, G. (2014). *Extreme Value Theory: An Application to Peruvian Stock Market Returns (Documento de Trabajo)*. Lima: PUCP.
- Casella, G., & Berger, R. (2002). *Statistical Inference, 2da edición*. United States of America: Duxbury.
- Castañer, A. (2006). Análisis de la teoría del riesgo: la transformada del momento de ruina. *Revista electrónica de comunicaciones y trabajos de ASEPUMA*(7), 55-94.
- Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Inglaterra: Springer.
- Comisión Nacional de Seguros y Fianzas . (2018). *Boletín de análisis sectorial seguros y fianzas*. México: Secretaría de Hacienda y Crédito Público.
- Duarte, N. (2009). *La teoría del valor extremo en el mercado de las aseguradoras (Monografía)*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Embrechts, P., Kluppelberg, C., & Mikosch, T. (1996). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag.

- García, A. (Julio de 2004). *La teoría del valor extremo: Una aplicación al sector asegurador*. Madrid, España: Universidad de Castilla de la Mancha.
- García, A. (2007). *Una aportación al análisis de solvencia la teoría del valor extremo (Tesis doctoral)*. España: Universidad de Alcalá.
- Gerber, H. (1979). *An introduction to mathematical risk theory*. S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- Gómez, S., Patiño, D., & Vélez, C. (2012). Variante del método de Nelder & Mead para optimización de funciones multivariadas. *Cuaderno activa*(4), 73-62.
- González, E., & Villaseñor, J. (Septiembre de 2009). A bootstrap goodness of fit test for the generalized Pareto distribution. *Computational statistics & data analysis* , 53(11), 3835-3841.
- Gutiérrez, J. (2010). *El efecto de la globalización en la generación de valor de la industria aseguradora en México*. México: Universidad Iberoamericana.
- Herrera , L. A. (2013). Acerca de la teoría de los valores extremos y su aplicabilidad a la estimación del riesgo financiero. *Anuario de la Facultad de Ciencias Económicas del Rosario*,9, 31-57. Obtenido de Anuario de la Facultad de Ciencias Económicas del Rosario.
- Ley de instituciones de seguros y de fianzas. (2013). En Cámara de diputados del H. Congreso de la Unión. México: Secretaría General.
- Ley sobre el contrato del seguro. (2013). En Cámara de diputados del H. Congreso de la Unión. México: Secretaría General.
- Lozano, G. (1990). *Manual de introducción al seguro*. MAPFRE, S. A.
- Marín, A. (1988). *La distribución logarítmico-normal: aplicación a la distribución del coste de siniestros*. Madrid: Instituto de actuarios españoles.
- Medialdea, A. (2016). *Análisis de Valores Extremos (Tesis de Maestría)*. Granada: Universidad de Granada.
- Minzoni, A. (Julio de 2005). *Crónica de dos siglos del seguro en México*. Obtenido de Comisión Nacional de Seguros y Fianzas: <https://www.gob.mx/cnsf/documentos/historia-en-seguros-y-fianzas>
- Myers, R., Myers S, S., Walpole, R., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias (Novena edición)*. México: Pearson educación.
- Nava, R., & Sinha, T. (1999). *Modelos prácticos para obtener la prima del reaseguro stop loss en el seguro de vida (Documento de trabajo No 74)*. México: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

- Olmo, J. (2005). *Aplicaciones de la teoría de valores extremos a la gestión de riesgo (Tesis doctoral)*. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid.
- Ondieki, C., Shalyne, G., & Wairimu, J. M. (2018). Modeling the Frequency and Severity of Auto Insurance Claims Using Statistical Distributions. *Insurance Claims Using Statistical Distributions*, 8(1), 137-160.
- Packová, V., & Brebera, D. (2015). Loss distributions in insurance risk management. *Recent advances on economics and business administration*, 17-22.
- Pearson, K. (1894). *Contributions to the Mathematical Theory of Evolution, University College*. London.
- Penagos, A. (2005). *El seguro de cumplimiento en la contratación administrativa (Tesis de Licenciatura)*. Pontificia Universidad Javeriana, Colombia, Bogotá, Colombia.
- Pérez, J. (Enero de 1986). Conociendo el seguro: teoría general del seguro. *Teoría general del seguro*. Barcelona: Universidad de Barcelona.
- Pérez, J. L. (2016). *Teoría General del Seguro*. Barcelona: Universidad de Barcelona.
- Pérez, M. J., & García, A. (2004). Aplicación de la teoría del valor extremo al ajuste y modelación de catástrofes. *Gerencia de Riesgos*(88), 19-32. Recuperado el 2018, de [https://www.fundacionmapfre.org/documentacion/publico/i18n/catalogo\\_imagenes/imagen\\_id.cmd?idImagen=1026232](https://www.fundacionmapfre.org/documentacion/publico/i18n/catalogo_imagenes/imagen_id.cmd?idImagen=1026232)
- Pérez, M. J., & García, A. (2010). Analyzing solvency with extreme value theory: an application to the Spanish motor liability insurance market. *INNOVAR JOURNAL*, 20(36), 35-48.
- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *The annals of statistics*, 3(1), 119-131.
- Quinto, C. (07 de 01 de 2019). *Rankia Pro*. Obtenido de <https://www.rankia.mx/blog/aseguradoras-y-seguros/3063269-mejores-aseguradoras-auto-2019>
- Reiss, R.-D., & Thomas, M. (2007). *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields. Third Edition*. Birkhäuser.
- Rodríguez, E. J. (2015). Modelado de problemas de regresión lineal con el método Cuasi-Newton. *Tecnocientífica URU*(8), 69- 78.
- Sánchez, C. (2018). La clave del éxito lo definen en gran medida las matemáticas y la estadística. *NeoTrading*.
- Seguros, C. (8 de Noviembre de 2013). *cms seguros*. Obtenido de cms seguros: <http://www.cmsseguros.es/antecedentes-e-historia-del-seguro-de-vehiculos/>

- Spaková, M. (2013). *Parameterization of claims distribution in non-life insurance (Tesis de Maestría)*. Praga, República Checa.
- Tortella, G. (2011). Sobre los orígenes del seguro en España. *X congreso internacional de la AEHE* (pág. 8). España: Universidad de Alcalá de Henares.
- Urbina, J. I., Núñez, G., & Saavedra, P. (2017). *Análisis del riesgo: Una aplicación de la teoría de valores extremos*. México, México.
- Uribe, J., & Ulloa, I. (2012). La medición del riesgo en eventos extremos. Una revisión metodológica en contexto. *Lecturas de Economía*, 76, 87-117.
- Uribe, L. F., & Trejo, J. E. (2015). *Método de Gradientes Conjugados*, Instituto Politécnico Nacional.
- Vanegas, V., & Varela, C. (2011). Seguro de Automóviles Evolución y Comportamiento del Ramo de Automóviles. *Fasecolda*, 352-395.
- Vilchis, M. A. (2014). *Cuartiles, deciles y percentiles*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México.
- Wackerly, D., Mendenhall, W., & Scheaffet, R. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones, Séptima Edición*. Cengage Learning Editores, S.A.
- Winmore, B., & Chiduzza, T. (2013). The use of statistical distributions to model claims in motor insurance. *International in journal of business, economics and law* (3) december, 44-57.