Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165
Volumen 5, número 10, diciembre de 2009, páginas 171–182

Solución aproximada de sistemas diferenciales mixtos

Solução aproximada de sistemas diferenciais mistos

Approximated solution of differentials mixed systems

Jorge I. Castaño–Bedoya[1], Orlando García–Jaimes[2] y José A. Sánchez–Cano[3]

Recepción: 16-sep-2009/Modificación: 23-nov-2009/Aceptación: 23-nov-2009
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

En este artículo se propone encontrar una solución aproximada para problemas de valor en la frontera y problemas de valor inicial de un sistema diferencial utilizando el método de los desarrollos de Fer.

Palabras claves: ecuaciones diferenciales, problemas de valor inicial, solución aproximada, desarrollos de Fer.

Resumo

Neste artigo propomos-nos encontrar uma solução aproximada para problemas de valor na fronteira e problemas de valor inicial de um sistema diferencial utilizando o método dos desenvolvimentos de Fer.

Palavras chaves: equações diferenciais, problemas do valor inicial, solução aproximada, desenvolvimentos de Fer.

[1] Doctor en Ciencias matemáticas, icastano@eafit.edu.co, profesor del departamento de Ciencias básicas , Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.
[2] Doctor en Ciencias matemáticas, olgarcia@eafit.edu.co, profesor del departamento de Ciencias básicas, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.
[3] Doctor en Ciencias matemáticas, josanche@eafit.edu.co, profesor del departamento de Ciencias básicas, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.

Abstract

In this paper we propose to find an approximate solution to boundary value problems and initial value differential system problems using the method of Fer developments.

Key words: differential equations, problems of initial value, approximate solution, developments of Fer.

1 Introducción

El problema de encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales con coeficientes matriciales aparece en la formulación de modelos matemáticos de diversos problemas tecnológicos.

En este artículo se utilizará el método de los desarrollos de Fer para encontrar una solución aproximada de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

Los desarrollos de Fer fueron obtenidos originalmente en la década del 50 para la solución de ecuaciones diferenciales lineales no autónomas. En estudios posteriores se aplicaron para la resolución de la ecuación diferencial de un operador lineal $A(t)$ en mecánica cuántica y la ecuación diferencial correspondiente al operador no lineal en mecánica clásica.

El método en mención tiene la ventaja de exigir un mínimo de condiciones a los coeficientes matriciales, tan solo se exige continuidad en ellos, frente a otros métodos que exigen condiciones mucho más fuertes, tales como la diferenciabilidad y la analiticidad, entre otros. Con respecto a las desventajas que puede presentar el método, se destaca el elevado costo computacional, debido a la presencia de funciones exponenciales matriciales.

En este artículo se considerará el problema mixto

$$u_t(x,t) = A(t)u_{xx}(x,t) \qquad 0 < x < p, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(p,t) = 0 \qquad t > 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq p\,, \tag{3}$$

donde $u(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ y $f(x)$ son vectores de $\mathbb{C}^r$ y $A(t)$ es una matriz en $\mathbb{C}^{r\times r}$ cuyas entradas son funciones continuas y además existe un número positivo

δ tal que para todo valor propio z de la matriz

$$\frac{1}{2}\left[A(t)+A^H(t)\right] \quad \text{se verifica que} \quad z \geqslant \delta\,, \tag{4}$$

donde $A^H(t)$ denota la transpuesta conjugada de la matriz $A(t)$.

A través de este trabajo, el conjunto de todos los valores propios de una matriz A se denotará por $\sigma(A)$ y el radio espectral de A, denotado por $\rho(A)$, es el máximo del conjunto $\{|z|; z \in \sigma(A)\}$

Se denotará por $\|A\|$ la 2–norma de A:

$$\|A\| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|_2} = \text{máx}\left\{|w|^{\frac{1}{2}};\, w \in \sigma(A^H A)\right\}\,,$$

donde para un vector $y \in \mathbb{C}^r$, $\|y\|_2 = (y^H y)^{\frac{1}{2}}$ es la norma euclídea usual.

De acuerdo con [1, página 110], la norma logarítmica está dada por

$$\mu(A) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\|I+hA\|-1}{h}\,,$$

donde I es la matriz identidad.

Además, la norma logarítmica cumple las siguientes propiedades

- $\mu(A) \leqslant \|A\|$
- $\mu(\alpha A) = \alpha\mu(A) \qquad \text{para} \quad \alpha \geqslant 0$
- $\mu(A) \geqslant Re(z)$ para todo valor propio z de A
- $\mu(A) = \text{máx}\left\{w;\, w \in \sigma(\frac{A+A^H}{2})\right\}$.

2 Solución en series infinitas

Usando el método de separación de variables clásico, una candidata a la solución en serie del problema (1)–(3), es de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\,,$$

donde $T_n(t)$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} T_n'(t) &= \left[-\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 A(t)\right] T_n(t) \\ T_n(0) &= C_n, \qquad t > 0\,, \end{aligned} \tag{5}$$

y C_n es el enésimo coeficiente de la serie de Fourier para $f(x)$,

$$C_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx \qquad n \geqslant 1\,.$$

Considérese la sucesión $\{u_n(x,t)\}_{n\geqslant 1}$ definida por

$$u_n(x,t) = T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\,.$$

Es de notar que $u_n(0,t) = u_n(p,t) = 0$, $t > 0$ y para $0 < x < p$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - A(t)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \left[T_n'(t) + \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 A(t)T_n(t)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) = 0\,,$$

donde $u_n = u_n(x,t)$. La solución exacta $T_n(t)$ de (5) no es conocida, además de [1], se sigue que

$$\|T_n(t)\| \leqslant \|C_n\|\exp\left[\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\int_0^t \mu(A(s))ds\right], \qquad t \geqslant 0\,.$$

Lo anterior se puede resumir en el teorema

Teorema 2.1. *Dado el problema* (1)–(3)*, donde* $A(t) \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *es una función continua para todo* $t \geqslant 0$ *tal que se cumple la condición* (4) *y sea* $f(x)$ *una función continua en* $[0,p]$ *tal que* $f(0) = f(p) = 0$ *y cada una de sus componentes* f_j *para* $1 \leqslant j \leqslant r$ *satisface una de las dos condiciones:*

1. $f_j(x)$*es localmente de variación acotada en algún punto* $x \in [0,p]$ *,*
2. $f_j(x)$ *admite una derivada* $\left(f_j'\right)_{R(x)}$ *y* $\left(f_j'\right)_{L(x)}$*, donde* $\left(f_j'\right)_{R(x)}$ *representan las derivadas por la izquierda y la derecha en todo punto* $x \in [0,p]$*.*

Entonces la función $u(x,t)$ *definida por*

$$u(x,t) = \sum_{n \geqslant 1} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

es solución del problema (1)–(3)*.*

Obsérvese que la solución del problema vectorial se puede escribir de la forma

$$T_n(t) = U_n(t) C_n\,, \tag{6}$$

donde $U_n(t)$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} U_n'(t) &= \left[-\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 A(t)\right] U_n(t) \\ U_n(0) &= I. \end{aligned} \tag{7}$$

Para encontrar una solución aproximada a $T_n(t)$, se utilizará el desarrollo de Fer y de esta forma se tendrá una solución aproximada para el problema (1)–(3).

Antes de abordar este trabajo, se considerá el siguiente teorema y algunos otros resultados.

Teorema 2.2. *Bajo la hipótesis* (4)*, sea*

$$\alpha(a_0, a_1) = mín\left\{ z \in \sigma\left(\frac{A(t) + A^H(t)}{2}\right),\, a_0 \leqslant\ t \leqslant a_1 \right\},$$

entonces la solución $V(t)$ *del problema*

$$V'(t) = \left[-\lambda^2 A(t)\right] V(t) \quad V(a_0) = V_0 \quad a_0 \leqslant t \leqslant a_1, \quad \lambda > 0$$

satisface

$$\|V(t)\| \leqslant \|V_0\| \exp\left[-(t - a_0)\lambda^2 \alpha(a_0, a_1)\right]$$

con $a_0 \leqslant t \leqslant a_1$*.*

Demostración. Por [1], se sabe que

$$\|V(t)\| \leqslant \|V_0\| \exp\left[\int_{a_0}^{t} \mu(-\lambda^2 A(s))ds\right], \qquad a_0 \leqslant t \leqslant a_1.$$

Sea τ cualquier valor propio de

$$-\lambda^2 \left(\frac{A+A^H}{2}\right),$$

entonces

$$\tau_{\text{mín}}\left(-\lambda^2\left(\frac{A+A^H}{2}\right)\right) \leqslant \tau \leqslant \tau_{\text{máx}}\left(-\lambda^2\left(\frac{A+A^H}{2}\right)\right).$$

Como $\lambda^2 \geqslant 0$, entonces

$$-\lambda^2\tau_{\text{máx}}\left(\frac{A+A^H}{2}\right) \leqslant \tau \leqslant -\lambda^2\tau_{\text{mín}}\left(\frac{A+A^H}{2}\right),$$

en consecuencia

$$\mu(-\lambda^2 A(s)) \leqslant -\lambda^2\alpha(a_0,a_1) \qquad a_0 \leqslant s \leqslant a_1\,,$$

por lo tanto

$$\|V(t)\| \leqslant \|V_0\| \exp\left[\int_{a_0}^{t} (-\lambda^2\alpha(a_0,a_1))ds\right]$$
$$\|V(t)\| \leqslant \|V_0\| \exp\left[-(t-a_0)\lambda^2\alpha(a_0,a_1)\right] \qquad a_0 \leqslant t \leqslant a_1\,.$$

□

Se sabe que por ser integrable, en el sentido de Riemann–Lebesgue, ver [2], existe una constante M tal que $\|C_n\| \leqslant M$, $n \geqslant 1$. Aplicando el teorema 2.2, la solución de (5) satisface

$$\|T_n(t)\| \leqslant M \exp[-t_0\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \alpha(0,t_1)] \quad 0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_1\,. \tag{8}$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, se está interesado en determinar n_0 tal que

$$\left\|\sum_{n\geqslant n_0} T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{9}$$

con $(x,t) \in D(t_0,t_1)$, siendo

$$D(t_0,t_1) = \{(x,t)/0 \leqslant x \leqslant p,\, 0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}\,. \tag{10}$$

De (8) se considera que

$$\begin{aligned}\sum_{n>n_0} \exp\left[-t_0\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \alpha(0,t_1)\right] &\leqslant \int_{n_0}^{\infty} \exp\left[-t_0\left(\frac{\pi x}{p}\right)^2 \alpha(0,t_1)\right] dx \\ &= \frac{p}{2\sqrt{\pi t_0 \alpha(0,t_1)}} erfc\left(\frac{n_0\pi}{p}\sqrt{t_0\alpha(0,t_1)}\right),\end{aligned}$$

donde

$$erfc(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty} e^{-x^2} dx$$

es la función de error complementaria. Luego, a partir de (9), se tiene que

$$\sum_{n>n_0} \|T_n(t)\| \leqslant \frac{Mp}{2\sqrt{\pi t_0\alpha(0,t_1)}} erfc\left(\frac{n_0\pi}{p}\sqrt{t_0\alpha(0,t_1)}\right).$$

Tomando el primer entero positivo n_0 tal que

$$erfc\left(\frac{n\pi}{p}\sqrt{t_0\alpha(0,t_1)}\right) < \frac{\epsilon\sqrt{\pi t_0\alpha(0,t_1)}}{Mp}\,, \tag{11}$$

la desigualdad (9) se tiene

$$\left\| u(x,t) - \sum_{n=1}^{n_0} T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{con} \quad (x,t) \in D(t_0,t_1)\,. \tag{12}$$

Con los desarrollos anteriores, se puede establecer el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Sea $A(t)$ una función continua en $\mathbb{C}^{r\times r}$ tal que se cumple la condición* (4)*. Sea $f(x)$ continua en $[0,p]$ con $f(0) = f(p) = 0$ y tal que cada una de las componentes f_j de $f(x)$ satisface una de las condiciones dadas en el teorema 2.1. Además sea $t_1 > t_0 > 0$, $\epsilon > 0$ y sea $D(t_0,t_1)$ definido como en* (10)*. Si $u(x,t)$ es la solución exacta del problema* (1)*–*(3)*, definida en el teorema 2.1 y n_0 es el primer entero positivo que satisface* (11)*, entonces*

$$\sum_{n=1}^{n_0} T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

es una aproximación que satisface (12)*.*

3 Solución aproximada

El interés de los autores radica en encontrar una solución aproximada al problema (5) mediante desarrollos de Fer en el intervalo $[t_0, t_1]$. Para garantizar la convergencia del método, se divide el intervalo en pequeños subintervalos donde el algoritmo de Fer sea convergente.

Dado $\epsilon > 0$, $0 < t_0 < t_1$ y n_0 dado por el teorema 2.3, se trata de encontrar el orden m de la aproximación de Fer $T_n^m(t)$ a la solución exacta $T_n(t)$ del problema (5) tal que

$$\|T_n(t) - T_n^m(t)\| < \frac{\epsilon}{2n_0}\,,$$

donde $0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $1 \leqslant n \leqslant n_0$.

Considérese una partición $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_N = t_1$ donde $h_j = jh$ y $Nh = t_1$ con $h > 0$, entonces en cada uno de los subintervalos se aplica el método de Fer a (7). De esta manera se puede escribir

$$\begin{aligned} T_n(t) &= U_n(t,0)C_n \\ \frac{dU_n(t,h_j)}{dt} &= \left[-\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 A(t)\right] U_n(t,h_j) \qquad (13) \\ U_n(h_j,h_j) &= I \qquad h_j \leqslant t \leqslant h_{j+1} \\ U_n(t,0) &= U_n(t,h_i)U_n(h_i,h_{i-1})\dots U_n(h,0), \quad h_i \leqslant t \leqslant h_{i+1}\,. \end{aligned}$$

Ahora, se trata entonces de encontrar una solución aproximada $U_n^m(t)$ para el problema (13) por medio de los desarrollos de Fer.

Considérese la notación

$$U_n(t,h_j) = U_{n,j}(t), \quad U_n^m(t,h_j) = U_{n,j}^{(m)}(t)$$

con $0 \leqslant j \leqslant N-1$, $h_j \leqslant t \leqslant h_{j+1}$ donde, por comodidad, se escribirá

$$U_{n,j}(h_{j+1}) = U_{n,j}(h), \quad U_{n,j}^{(m)}(h_{j+1}) = U_{n,j}^{(m)}(h)\,.$$

Así, para $h_i \leqslant t \leqslant h_{i+1}$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$, se tiene que

$$U_n(t,0) - U_n^{(m)}(t,0) \;\; = \;\; U_{n,i}(t)U_{n,i-1}(h)\dots$$

$$
\begin{aligned}
& -U_{n,0}(h) - U_{n,i}^{(m)}(t)U_{n,i-1}^{(m)}(h)\ldots U_{n,0}^{(m)}(h) \\
= \;& \left(U_{n,i}(t) - U_{n,i}^{(m)}(t)\right) U_{n,i-1}(h)\ldots U_{n,0}(h) \\
& +U_{n,i}^{(m)}(t)\left(U_{n,i-1}(h) - U_{n,i-1}^{(m)}(h)\right) \\
& U_{n,i-2}(h)\ldots U_{n,0}(h) + \cdots + U_{n,i}^{(m)}(t) \\
& +\cdots U_{n,i-j+1}^{(m)}(h)\left(U_{n,i-j}(h) - U_{n,i-j}^{(m)}(h)\right) \\
& U_{n,i-j-1}(h)\ldots U_{n,0}(h) + \cdots + U_{n,i}^{(m)}(t) \\
& \ldots U_{n,2}^{(m)}(h)\left(U_{n,0}(h) - U_{n,0}^{(m)}(h)\right),
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{gathered}
\left\|U_n(t,0) - U_n^{(m)}(t,0)\right\| \leqslant \sum_{j=0}^{i} \left\|U_{n,i}^{(m)}(t)\right\| \times \ldots \times \left\|U_{n,i-j+1}^{(m)}(h)\right\| \\
\left\|U_{n,i-j}(h) - U_{n,i-j}^{(m)}(h)\right\| \|U_{n,i-j-1}(h)\| \times \ldots \times \|U_{n,0}(h)\|
\end{gathered}
\tag{14}
$$

con $h_i \leqslant t \leqslant h_{i+1}$.

Por [3], para $h_j \leqslant t \leqslant h_{j+1}$ se consigue que

$$
\left\|U_{n,j}^{(m)}(t)\right\| \leqslant \|U_{n,j}(t)\| \exp\left[K_{n,j}^{(m)}(t,h_j)\right], \tag{15}
$$

además

$$
\left\|U_{n,i-j}(t) - U_{n,i-j}^{(m)}(t)\right\| \leqslant \|U_{n,i-j}(t)\| K_{n,i-j}^{(m)}(t,h_{i-j}) \exp\left[K_{n,i-j}^{(m)}(t,h_{i-j})\right]. \tag{16}
$$

Por (15) y (16) se tiene que

$$
\begin{gathered}
\left\|U_{n,i}^{(m)}(t)\right\| \times \ldots \times \left\|U_{n,i-j+1}^{(m)}(h)\right\| \left\|U_{n,i-j}(h) - U_{n,i-j}^{(m)}(h)\right\| \leqslant \\
\|U_{n,i}(t)\| \times \ldots \times \|U_{n,i-j+1}(h)\| \|U_{n,i-j}(h)\| K_{n,i-j}^{(m)}(h_{i-j+1},h_{i-j}) \\
\exp\left[K_{n,i}^{(m)}(t,h_i) + K_{n,i-1}^{(m)}(h_i,h_{i-1}) + \cdots + K_{n,i-j}^{(m)}(h_{i-j+1},h_{i-j})\right].
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Obsérvese que, por el teorema 2.2, para $0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, se tiene que

$$
\|U_{n,i}(t)\| \times \ldots \times \|U_{n,0}(t)\| \leqslant \exp\left[-t_0\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \alpha(0,t_1)\right]. \tag{18}
$$

Por (14)–(17) y (18) se sigue que

$$\left\|U_n(t,0)-U_n^{(m)}(t,0)\right\| \leqslant \exp\left[-t_0\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\alpha(0,t_1)\right]$$

$$\times\sum_{j=0}^{i} K_{n,i-j}^{(m)}(h_{i-j+1},h_{i-j})\exp\left[K_{n,i}^{(m)}(t,h_i)+\cdots+K_{n,i-j}^{(m)}(h_{i-j+1},h_{i-j})\right], \tag{19}$$

donde $h_i \leqslant t \leqslant h_{i+1}, \quad N_0=\frac{t_0}{h} \leqslant i \leqslant N-1$.

Sea $0<\delta<1$ y sea n_0 dado en el teorema 2.3, tómese $h>0$ y selecciónese el entero positivo N tal que

$$N > t_1\frac{a(t_1)}{\delta\xi}\left(\frac{n_0\pi}{p}\right)^2 \quad \text{con} \quad h=\frac{t_1}{N} \tag{20}$$

donde $\xi = 0{,}8604065$ (ver [3]) y $a(t_1) = \max\|A(t)\|$, $0\leqslant t\leqslant t_1$, entonces tomando

$$\delta_n = \frac{a(t_1)\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2}{a(t_1)\left(\frac{n_0\pi}{p}\right)^2}\,\delta \quad 1\leqslant n\leqslant n_0 \tag{21}$$

donde $\delta_n<\delta$ y $\delta_{n_0}=\delta$, se puede considerar

$$\int_{j_h}^{t}\left\|-\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 A(s)\right\|ds < K_{n,j}^{(0)}(t,h_j) = h\left[\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 a(t_1)\right] < \delta_n\xi \tag{22}$$

con $j_h\leqslant t\leqslant (j+1)h$, $0\leqslant j\leqslant N-1$, $1\leqslant n\leqslant n_0$.

Por (21) y (22) se sigue que:

$$K_{n,j}^{(0)}(t,h_j)\leqslant K_{n,j}^{(0)}(h_{j+1},h_j)\leqslant\delta_n\xi$$

$$K_{n,j}^{(m)}(t,h_j)=\xi\left(\frac{K_{n,j}^{(0)}(t,h_j)}{\xi}\right)^{2^m}$$

$$K_{n,j}^{(m)}(t,h_j)\leqslant K_{n,j}^{(m)}(h_{j+1},h_j)=\xi\left(\frac{K_{n,j}^{(0)}(h_{j+1},h_j)}{\xi}\right)^{2^m}\leqslant\delta_{n,m}(\xi)\,,$$

donde

$$\delta_{n,m}(\xi) = \delta_n^{2^m}\xi, \qquad \lim_{m\to\infty} K_{n,j}^{(m)}(t,h_j) = 0\,. \tag{23}$$

Bajo la hipótesis (20) y por (19) y (23) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left\|U_n(t,0) - U_n^{(m)}(t,0)\right\| \\
&\leqslant \exp\left[-t_0\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\alpha(0,t_1)\right]\delta_{n,m}(\xi)\exp\left[\delta_{n,m}(\xi)\right]\sum_{j=0}^{i} e^{j\delta_{n,m}(\xi)} \\
&= \exp\left[-t_0\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\alpha(0,t_1)\right]\delta_{n,m}(\xi)\exp\left[\delta_{n,m}(\xi)\right]\frac{e^{(i+1)\delta_{n,m}(\xi)}-1}{e^{\delta_{n,m}(\xi)}-1}
\end{aligned} \tag{24}$$

con $ih \leqslant t(i+1)h$ y $N_0 \leqslant i \leqslant N-1$.

Obsérvese que si $\alpha > 0$ y $x > 0$, por el teorema del valor medio $e^{\alpha x} - 1 = \alpha x e^{\alpha s}$ para algún $s \in (0,x)$. Por lo tanto, como $e^x - 1 \geqslant x$, se tiene que

$$\frac{e^{\alpha x}-1}{e^x - 1} \leqslant \alpha e^{\alpha s} \leqslant \alpha e^{\alpha x} \quad \alpha > 0, \quad x > 0\,, \tag{25}$$

luego, por (24)) y (25) se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|U_n(t,0) - U_n^{(m)}(t,0)\right\| \;\leqslant\; & \exp\left[-t_0\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\alpha(0,t_1)\right]\times \\
& \delta_{n,m}(\xi)(i+1)e^{(i+2)\delta_{n,m}(\xi)}\,,
\end{aligned}$$

y por (6) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\|T_n(t) - T_n^{(m)}(t)\right\| \;\leqslant\; & \|C_n\| N \exp\left[-t_0\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\alpha(0,t_1)\right] \\
& \times\delta_{n,m}(\xi)e^{(N+1)\delta_{n,m}(\xi)}
\end{aligned}$$

con $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ y $1 \leqslant n \leqslant n_0$.

Sea ahora ρ_n la raíz única de la ecuación

$$xe^{(N+1)x} = \epsilon\frac{\exp\left[-t_0\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\alpha(0,t_1)\right]}{2\|C_n\|Nn_0} \qquad 1 \leqslant n \leqslant n_0$$

y sea m_n el primer entero positivo m tal que satisface

$$2^m > \frac{\ln\left(\frac{\rho_n}{\xi}\right)}{\ln(\delta_n)}\,,$$

entonces

$$2^m \ln(\delta_n) < \ln\left(\frac{\rho_n}{\xi}\right); \quad \delta_{n,m}(\xi) = \xi\delta_n^{2^m} < \rho_n$$

y en consecuencia

$$\left\| T_n(t) - T_n^{(m)}(t) \right\| \leqslant \frac{\epsilon}{2n_0}$$

con $0 \leqslant t \leqslant t_1$ y $1 \leqslant n \leqslant n_0$. De esta forma bajo la hipótesis (4) se tiene que

$$\left\| u(x,t) - \sum_{n=1}^{n_0} T_n^{(m)}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right\| \leqslant \epsilon \qquad (x,t) \in D(t_0,t_1)\,,$$

veáse [4], con lo cual se garantiza la convergencia del método.

Referencias

[1] T. M. Flett. *Differential Analysis*, ISBN 9780521224208. Cambridge University Press. Cambridge 1980. Referenciado en Referenciado en 173, 174, 176

[2] P. Henrici. *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, ISBN 0471372242. John Wiley & Sons Inc, New York, 1962. Referenciado en 176

[3] Sergio Blanes Zamora. *Estudio de la evolución de sistemas dinámicos clásicos y cuánticos utilizando métodos algebraicos*, Tesis doctoral Universidad de Valencia, 1998. Referenciado en 179, 180

[4] E. Hairer, S. P. Norsset and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations I*, ISBN 3540566708. Springer, 2009. Referenciado en 182