



**UNIVERSIDAD ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE INGENIERÍA**

INGENIERÍA INDUSTRIAL

“EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE HUBS CON FLOTA LIMITADA”

CHRISTIAN IGNACIO GAJARDO ARRIAGADA

PROFESOR GUÍA: ARMIN LÜER-VILLAGRA

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO INDUSTRIAL**

**SANTIAGO – CHILE
OCTUBRE, 2018**



FACULTAD DE INGENIERÍA
INGENIERÍA INDUSTRIAL
DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD Y PROPIEDAD

Yo, **Christian Ignacio Gajardo Arriagada**, declaro que este documento no incorpora material de otros autores sin identificar debidamente la fuente.

Santiago, octubre de 2018

Firma del alumno

*A mi madre y padre, por entregarme los valores y
principios por los cuales me rijo,
a mi hermana, por ser el
farol que alumbra mi camino,
a mis abuelos, por siempre acompañarme,
a mi pareja, Constanza, por
guiarme, enseñar y comprender.*

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer enormemente a mi profesor guía PhD. Armin Lüer-Villagra, quien me dio la oportunidad de desarrollar la tesis bajo su tutela. Espero que muchos alumnos tengan la oportunidad de trabajar con él. Asimismo, agradezco su paciencia para explicar cada método utilizado en el desarrollo de esta memoria.

Igualmente, quiero agradecer a Myriam Arriagada Fariás, Francisco Gajardo Bueno y Gabriela Gajardo Arriagada, mi familia, el pilar fundamental de éste gran logro, sin su inagotable apoyo no estaría superando esta etapa. Reconocer enormemente a la familia Arriagada-Pincheira, por el respaldo en la obtención de mi título profesional.

También deseo agradecer a una admirable mujer, mi pareja, Constanza Rozzi Cabello, por nunca dudar de mis capacidades. Agregar que las enseñanzas las cuales me proporcionó y, que, sin duda, me seguirá aportando, las utilizaré en el desarrollo de nuestra vida.

Finalmente, quiero agradecer al programa Fondecyt de CONICYT, por financiar la realización de este trabajo, a través del proyecto 11160345.

ÍNDICE GENERAL

I. Contenido	
<i>I. INTRODUCCIÓN</i> -----	1
I.1. Importancia de resolver el problema -----	3
I.2. Discusión bibliográfica -----	3
I.2.1 Hubs Covering Problems -----	4
I.3. Contribución del trabajo y su importancia -----	6
I.4. Objetivo general -----	6
I.4.1. Objetivos específicos -----	6
I.5. Estado del Arte -----	6
I.6. Propuesta metodológica -----	8
I.7. Referencias Bibliográficas -----	9
<i>II. ARTICULO PROPUESTO</i> -----	11
II.1. Introducción -----	12
II.2. Revisión de literatura -----	15
II.3. El Problema -----	19
II.3.1. Formulación Matemática -----	19
II.4. Experimentos Computacionales y Resultados -----	23
II.4.1. Indicadores -----	24
II.4.1.1. Cálculo de Indicadores -----	24
II.4.2. Resultados -----	26
II.4.2.1. Cantidad de <i>hubs</i> a localizar en la red, p -----	28
II.4.2.2. Sensibilidad del presupuesto disponible, B -----	32
II.4.2.3. Variación de la flota disponible, Q_1 y Q_2 -----	36
II.4.2.4. Sensibilidad del estándar de servicio, S -----	40
II.5. Conclusiones -----	43
II.6. Referencias -----	45

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1: Diferencia entre asignación única (1) y asignación múltiple (2)</i>	2
<i>Figura 2: Asignación única (1) y asignación múltiple (2)</i>	13
<i>Figura 3: Ubicación geográfica de los nodos de la red CAB25</i>	23
<i>Figura 4: Caso base obtenido para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$, $B=25000$</i>	27
<i>Figura 5: Promedio de paradas obtenido en función de número de hubs (p), para $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$</i>	29
<i>Figura 6: Solución gráfica para $p=1$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$</i>	29
<i>Figura 7: Solución gráfica para $p=8$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$</i>	30
<i>Figura 8: Presupuesto utilizado obtenido en función de número de hubs (p), para $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$</i>	31
<i>Figura 9: Tiempo de resolución obtenido en función de número de hubs (p), para $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$</i>	31
<i>Figura 10: Función objetivo obtenida en función de número de hubs (p), $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$</i>	32
<i>Figura 11: Porcentaje de cobertura obtenido en función del presupuesto disponible (B), para $p=4$, $Q_1=100$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$</i>	33
<i>Figura 12: Promedio de paradas obtenido en función del presupuesto disponible (B), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$</i>	33
<i>Figura 13: Solución gráfica para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=20000$</i>	34
<i>Figura 14: Solución gráfica para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=22500$</i>	34
<i>Figura 15: Tiempo de resolución obtenido en función del presupuesto disponible (B), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$</i>	35
<i>Figura 16: Tiempo de resolución obtenido en función del presupuesto disponible (B), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$</i>	36
<i>Figura 17: Tiempo de resolución obtenido en función a la cantidad de vehículos tipo 1 (Q_1), para $p=4$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$</i>	37
<i>Figura 18: Tiempo de resolución obtenido en función a la cantidad de vehículos tipo 2 (Q_2), para $p=4$, $Q_1=1000$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$</i>	37
<i>Figura 19: Porcentaje de cobertura obtenido en función a la cantidad de vehículos tipo 1 (Q_1), para $p=4$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$</i>	38
<i>Figura 20: Porcentaje de cobertura obtenido en función a la cantidad de vehículos tipo 2 (Q_2), para $p=4$, $Q_1=1000$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$</i>	38
<i>Figura 21: Función objetivo obtenida en función a la cantidad de vehículos tipo 1 (Q_1), para $p=4$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$</i>	39
<i>Figura 22: Porcentaje de cobertura obtenido en función a la cantidad de vehículos tipo 2 (Q_2), para $p=4$, $Q_1=1000$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$</i>	40

<i>Figura 23: Promedio de paradas obtenido en función al estándar de servicio (S), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $B=25000$.</i>	41
<i>Figura 24: Porcentaje de cobertura obtenido en función al estándar de servicio (S), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $B=25000$.</i>	41
<i>Figura 25: Presupuesto utilizado obtenido en función al estándar de servicio (S), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $B=25000$.</i>	42
<i>Figura 26: Tiempo de resolución obtenido en función al estándar de servicio (S), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $B=25000$.</i>	43
<i>Figura 27: Función objetivo obtenida en función al estándar de servicio (S), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $B=25000$.</i>	43

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1: Ciudades de la instancia CAB25</i>	24
--	----

I. INTRODUCCIÓN

Frecuentemente escuchamos hablar sobre logística, logística inversa, logística industrial, logística comercial y muchas otras. La RAE define la logística como “el conjunto de medios y métodos necesarios para llevar a cabo la organización de una empresa, o de un servicio, especialmente de distribución”. Esta actividad es fundamental para el comercio, ya que es el enlace entre la producción y los clientes que están separados por la distancia y el tiempo. Dentro de la logística existe la distribución y el transporte, áreas muy costosas para la actividad logística.

Para poder mover carga o pasajeros entre múltiples orígenes y destinos, comúnmente se utiliza la topología de red hub-and-spoke, porque permite una mejor utilización de activos, además de simplificar la administración de la red resultante. En esta topología, todos los flujos desde orígenes a destinos deben pasar por un tipo de instalaciones especiales, denominadas hubs, donde los flujos son consolidados, clasificados y combinados.

Una forma común de diseñar redes hub-and-spoke es mediante problemas de localización de Hubs (HLP, desde ahora en adelante, de sus siglas en inglés). Formalmente, los hubs son centros logísticos que son altamente capaces de distribuir o descomponer carga, ya sea carga como tal o pasajeros (si es que lo vemos como un aeropuerto, terminal de buses o terminal portuario).

Los HLP tienen como objetivo encontrar la localización de los hubs junto con el enrutamiento de flujo desde los orígenes hasta los destinos, a través de los hubs. La gran decisión de los HLP es el lugar en donde se localizará un hub y el camino que se le asignará al flujo para poder atender la demanda.

Una de las características de los HLP es el tipo de asignación (o conexión) de los nodos existentes en la red con los nodos que son hubs, ya que esta puede ser única o múltiple. La primera, se refiere a que cada nodo de demanda (no-hub) se asigna a un único nodo-hub, es decir, cada nodo puede enviar y recibir flujo a través de un solo hub. Por otra parte, la segunda clasificación indica que un nodo (no-hub) puede enviar y recibir flujo a través de uno o más hubs.

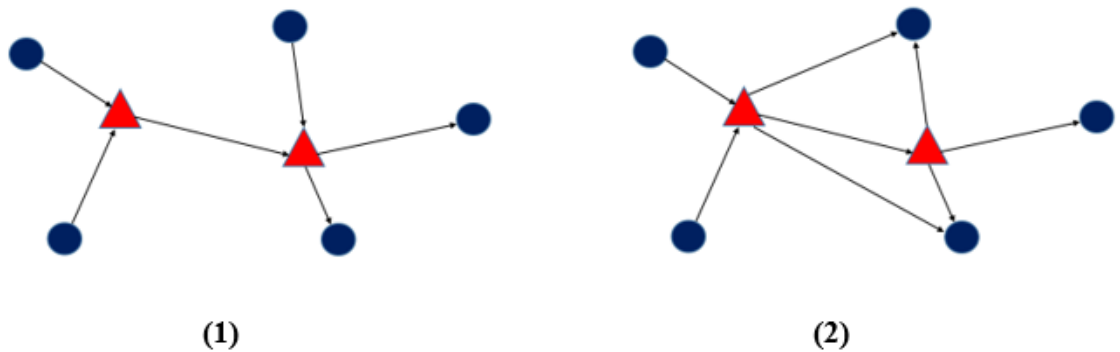


Figura 1: Diferencia entre asignación única (1) y asignación múltiple (2).
Fuente: Elaboración propia.

Una variante de los HLP, son los problemas de cobertura de hub (HCP, desde ahora en adelante, de sus siglas en inglés). En ellos un par O-D está cubierto si su tiempo o costo de servicio no superan un límite.

Uno de los grandes referentes en este ámbito son el profesor Morton O'Kelly, como el fundador del área, y el profesor James Campbell, que propone los tres tipos de cobertura para pares origen-destino.

En el siguiente documento se presentarán los resultados y análisis a un problema de localización de p hubs con asignación múltiple, que maximiza la cobertura de la demanda de los pares origen-destino contando, mediante una flota limitada de vehículos y un presupuesto limitado.

I.1. Importancia de resolver el problema

En los modelos matemáticos de localización de hubs en donde se busca maximizar la cobertura no considera una flota limitada, tanto en capacidad como en cantidad, o bien, un presupuesto limitado.

Pero, ¿Cómo solucionar los problemas de cobertura en organizaciones que no cuentan con una flota, o un presupuesto grande? Se podría considerar minimizar la distancia de cada viaje, esto involucra realizar transbordos de vehículos, pero realizar esta acción, la gran mayoría de las veces, incrementa los costos.

Es por esto que, en la siguiente investigación, se propone un nuevo modelo que podrá ser muy útil para organizaciones de distribución en la toma decisiones, sobre cómo realizar la distribución de sus centros logísticos, cuantos vehículos necesitará y cuantos clientes logrará atender con el presupuesto disponible.

I.2. Discusión bibliográfica

Los Hub Location Problems, conocidos por sus siglas HLP, se estudian hace más de 25 años. La primera noción respecto a este tema la entregó (Hakimi, 1964), quien en su investigación demuestra la optimalidad de los nodos para el problema de la 1-mediana y para el problema de la p -mediana. Quien realiza una de las primeras publicaciones sobre HLP fue (Goldman, 1969), quien extiende la optimización de nodos realizada por Hakimi.

(O'Kelly, 1986a, 1986b) introduce la localización de hubs centrales con asignación única. Un año más tarde (O'Kelly, 1987) continúa con los estudios para los modelos discretos, con un modelo entero cuadrático.

Otro tipo de problema, definido por (Campbell, 1994) es el “The uncapacitated hub location problem”, el cual difiere del *p-hub median problem* en que no se especifica la cantidad de hubs y se asocia un costo fijo no negativo de localizar un hub en una cierta ubicación.

(Campbell, 1994) define el “*p-hub center problem*”, como localizar un conjunto de hubs para minimizar el costo máximo incurrido, para cualquier par origen-destino. Este tipo de problemas son importantes para un sistema que involucra artículos sensibles al tiempo.

(Campbell, 1996) definió un tipo de problema que es el *p-hub median*, análoga a la *p-median* de Hakimi, el problema de *p-hub median* tiene aplicaciones directas para las redes de transporte y telecomunicaciones en las que se busca minimizar el costo total de los movimientos.

1.2.1 Hubs Covering Problems

Una de las áreas de investigación dentro de los HLP, son los Hub Covering Problems, también conocidos como HCP. Son diferentes a los problemas de cobertura habituales debido a las interacciones entre hubs. Estas interacciones generan complicaciones importantes, debido a que los pares origen-destino están cubiertos por pares de Hubs, pero los costos fijos están asociados a hubs individuales.

(Campbell, 1994) indica que en los HCP es mejor pensar en términos de pares origen-destino en lugar de puntos de demanda individuales. Además, presenta variantes para los HLP que se utilizan en los problemas de cobertura.

En los HCP, la demanda estará cubierta si ambos puntos origen-destino están dentro de una distancia específica de un hub, o bien la ruta no es más larga que un cierto umbral. Además, Campbell propone tres tipos de criterios de cobertura para un par origen-destino:

- (i) El costo para ir de i hasta j , pasando por los hubs localizados en k y m , deben ser menor a un valor dado.
- (ii) El costo en cada arco formado en el recorrido de i a j , pasando por k y m , no debe superar un valor predeterminado.
- (iii) Tanto el costo del arco entre el nodo de origen i , y el nodo hub k ; como el costo del arco entre el nodo hub m , y el nodo de destino j , no superan un valor dado.

Dos años más tarde (Campbell, 1996) continúa sus estudios en localización de hubs, aplicados específicamente al transporte de carga. Desarrolla un modelo con asignación múltiple y provee nuevas formulaciones para resolver problemas de asignación única. Nota que minimizar la distancia de los viajes generalmente no minimiza los costos de transporte.

Según (Kara & Tansel, 2003), los HLP surgen cuando se desea consolidar y/o diseminar flujos en ciertas ubicaciones centralizadas en sistemas de distribución de muchos a muchos. Los autores proporcionan nuevos estudios sobre HCP de asignación única. Además, realizan una formulación combinatoria y otra de programación entera de HCP, diferente a otras anteriores. Las formulaciones son programas enteros binarios no lineales.

Junto con los métodos exactos, se han realizado esfuerzos en resolver aproximaciones en los HCP. Por ejemplo, (Weng, Yang, & Ma, 2006) utilizan un algoritmo genérico y otro de búsqueda tabú para resolver el problema de localización de hubs con asignación múltiple y maximizar la cobertura.

Luego, (Qu & Weng, 2009) extienden el problema de localización con asignación múltiple considerando un nivel de servicio origen-destino a través de uno o dos hubs con recursos limitados, con esto buscan la manera óptima de localizar p -hubs para maximizar los flujos atendidos.

I.3. Contribución del trabajo y su importancia

Hasta el momento, no existen estudios en donde se busque maximizar la captura de la demanda con una cantidad limitada de vehículos. El modelo propuesto busca estudiar cómo se comportaría la captura de la demanda al variar la cantidad de vehículos disponibles para una posible distribución de carga, además de variar el presupuesto.

La importancia del modelo propuesto es que se puede adaptar fácilmente a organizaciones, independiente de su tamaño, ajustar los valores de ciertos parámetros, y con los resultados poder tomar soluciones estratégicas para llegar a más clientes.

I.4. Objetivo general

Comprender el efecto en la captura de demanda, al limitar un modelo de localización de hubs, tanto por flota, como presupuesto.

I.4.1. Objetivos específicos

- Formular un modelo matemático que resuelva el problema de localización de hubs de captura máxima con flota y presupuesto limitado.
- Desarrollar indicadores de rendimiento para los hub covering problems.
- Analizar resultados obtenidos, realizando comparaciones y tablas para observar el rendimiento del modelo matemático.

I.5. Estado del Arte

Como se ha nombrado, existen diversas formas de ver los problemas de localización de hubs, nuestro enfoque de estudio es ver cómo se comporta la cobertura de demanda

teniendo una flota limitada de vehículos y un presupuesto limitado, es por eso que nuestro modelo forma parte de los ya nombrados hub covering problems (HCP).

Para resolver esta problemática se tuvo de base los modelos fundamentales sobre HLP y HCP. Parte de la literatura que se tomó en cuenta es el modelo de (Campbell, 1992), que es una formulación de asignación múltiple, que localiza los p hubs necesarios a una red. Dado que:

- i. (Campbell, 1994) indica que en los HCP es mejor pensar en términos de pares origen-destino en lugar de puntos de demanda individuales.
- ii. En los HCP, la demanda estará cubierta si el par Origen-Destino está dentro de una distancia específica de un hub, o bien la ruta no es más larga que un cierto umbral

Se utilizó el segundo criterio de cobertura que se define como “El costo en cada arco formado en el recorrido de i a j , pasando por los hubs localizados en k y m , no debe superar un valor predeterminado”.

Nuestro trabajo está enfocado en la localización de hubs en áreas donde se ve afectado el transporte de carga, tal como (Campbell, 1996). Tomamos en cuenta que, en estos casos, la asignación múltiple es necesaria para minimizar el costo total del transporte, y que el resolver HLP con asignación múltiple puede proveer nuevas oportunidades para resolver problemas de asignación única.

Nuestra línea de trabajo se asemeja con el modelo que presenta (Weng et al., 2006) debido a que resuelven problemas de localización con asignación múltiple, buscando maximizar la captura de la demanda, en nuestro caso, resolver el modelo de forma exacta.

Además, consideramos el punto de vista alternativo que usó (Kimms, 2006), que considera explícitamente las características de los vehículos utilizados en el transporte. Estudia

cómo se logra capturar la mayor cantidad de la demanda teniendo una flota de vehículos en cantidad limitada y un presupuesto para recorrer instalaciones limitado.

I.6. Propuesta metodológica

La metodología utilizada para el desarrollo de esta investigación, se describe a continuación:

1. Revisión de literatura: en este punto el profesor guía instruye sobre posibles problemáticas y recomienda al alumno leer trabajos para detectar el ámbito del problema, como, por ejemplo: minimización de costos, utilización de descuentos por realizar envíos directos y posibilidad de capturar la mayor cantidad de demanda.
2. Escribir formulación de un HCP con limitación de flota de vehículos y presupuesto: en este punto, primero se escribe lo que se desea que el modelo solucione y restrinja. Y segundo, se da paso a escribir el modelo en el lenguaje de programación AMPL.
3. Experimentos computacionales: una vez que el modelo está escrito en el lenguaje requerido, se realizan las pruebas necesarias para obtener resultados.
4. Obtención de resultados: en este punto, que ya se tienen los resultados, se da paso a discutirlos, elaborar gráficos y tablas, para luego redactar la tesis de investigación.
5. Redactar tesis de investigación: se procede a escribir informe final para su futura presentación.

I.7. Referencias Bibliográficas

- Campbell, J. F. (1992). Location and allocation for distribution systems with transshipments and transportation economies of scale. *Annals of Operations Research*, 40(1), 77–99. <https://doi.org/10.1007/BF02060471>
- Campbell, J. F. (1994). Theory and Methodology Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72, 387–405. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)90318-2](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)90318-2)
- Campbell, J. F. (1996). Hub Location and the p -Hub Median Problem. *Operations Research*, 44(6), 923–935. <https://doi.org/10.1287/opre.44.6.923>
- Goldman, A. J. (1969). Optimal location for centers in a network. *Transportation Science*, 3(4), 352–360. <https://doi.org/10.1287/trsc.3.4.352>
- Hakimi, S. L. (1964). Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph. *Operations Research*, 12(3), 450–459. <https://doi.org/10.1287/opre.12.3.450>
- Kara, B. Y., & Tansel, B. C. (2003). The single-assignment hub covering problem: Models and linearizations. *Journal of the Operational Research Society*, 54(1), 59–64. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601473>
- Kimms, A. (2006). Economies of scale in hub & spoke network design models: We have it all wrong. *Perspectives on Operations Research*, 293–317. https://doi.org/dx.doi.org/10.1007/978-3-8350-9064-4_17
- O’Kelly, M. E. (1986a). Activity Levels at Hub Facilities in Interacting Networks. *Geographical Analysis*, 18(4), 343–356. <https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1986.tb00106.x>
- O’Kelly, M. E. (1986b). The Location of Interacting Hub Facilities. *Transportation Science*, 20(2), 92–106. <https://doi.org/10.1287/trsc.20.2.92>

- O'Kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities.
- Qu, B., & Weng, K. (2009). Path relinking approach for multiple allocation hub maximal covering problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(11–12), 1890–1894. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.10.004>
- Weng, K., Yang, C., & Ma, Y. (2006). Two artificial intelligence heuristics in solving multiple allocation hub maximal covering problem. *Intelligent Computing*, 737–744. https://doi.org/10.1007/11816157_90

II. ARTICULO PROPUESTO

Un problema de localización de p-Hubs con flota limitada

A p-Hub location problem with limited fleet

CHRISTIAN GAJARDO ARRIAGADA

Universidad Andrés Bello, c.gajardoarriagada@gmail.com

RESUMEN: Las redes hub-and-spoke son comúnmente diseñadas utilizando modelos de localización de hubs y se usan tanto para el transporte de carga y/o pasajeros. En la literatura existe la definición de Hub Covering Problems, los cuales son diferentes a los problemas de cobertura habituales debido a las interacciones entre Hubs. A continuación, se expone un modelo de asignación múltiple para localizar hubs con flota limitada, tiene por objetivo capturar la mayor cantidad de demanda disminuyendo tiempo y costo cumpliendo un estándar de servicio dado.

PALABRAS CLAVE: Asignación múltiple, cobertura máxima, localización de hubs, flota de vehículos, Hub Covering, transporte.

ABSTRACT: Hub & Spoke networks are commonly designed using hub location models, and are used for both cargo and passenger transportation. In the literature there is the definition of Hub Covering Problems, wich are different from the usual coverage problems because of the interaction between Hubs. The following is a multiple allocation model for locating hubs with limited fleet, the objective is to capture the greatest amount of demand, decreasing time and cost, fulfilling a level of service.

KEYWORDS: Multiple allocation, maximum coverage, hub location, vehicle fleet, hub covering, transportation.

II.1. Introducción

Las últimas décadas se han caracterizado por buscar procesos más eficientes y rápidos, en particular en transporte y telecomunicaciones.

Dentro de esto, la logística fue fundamental para el desarrollo de las ciudades y otros tipos de centros urbanos. En el ámbito empresarial se definió como un centro generador de costos sin capacidad de diferenciación, a diferencia del ámbito académico, en el cual se definió como la búsqueda de métodos que permiten optimizar espacios, planificar distribuciones y reducir costos. Con el tiempo y la globalización, la percepción de la logística cambió, para observarla como una ventaja competitiva basada en la reducción de los tiempo de entrega y en la optimización de costos (Servera-Francés, 2010).

Una de las actividades logísticas es la distribución de bienes hacia los puntos de consumo. Para esto, usualmente se requiere el movimiento eficiente de carga entre muchos pares origen-destino. Una forma de esto es mediante un tipo especial de red, denominada hub-and-spoke.

Las redes hub-and-spoke son comúnmente diseñadas utilizando modelos de localización de hubs (HLM, de sus siglas en inglés, Hub Location Models), y se usan tanto para el transporte de carga como pasajeros. Se entiende por hub aquel centro logístico de gran tamaño, que permite clasificar, conmutar, conectar y redireccionar flujos de carga o pasajeros. Los hubs adicionalmente pueden consolidar y descomponer los flujos que pasen por ellos.

Los HLM se formulan para resolver algunas situaciones problemáticas, denominadas HLP (Hub Location Problems). Los HLP involucran la localización de hubs y el enrutamiento de flujo entre orígenes y destino, a través de los hubs, que se denomina “Redes de Hubs”. En el transporte y en la literatura es muy común visualizarlo y oírlo, debido a que ayudan

a reducir costos, aumentar la frecuencia y proteger la incertidumbre de la demanda, esto sumado a la función de los hubs.

Las grandes decisiones en los HLP son las ubicaciones que tomarán los hubs centrales y el recorrido que se asignarán a los flujos para atender la demanda. La demanda de transporte viene definida por su monto, origen y destino. La red donde circula el flujo consta de nodos, hubs, arcos de acceso/salida, que conectan nodos de origen-no hubs y de acceso/salida entre hubs.

Los problemas de localización de hubs pueden clasificarse según su política de asignación en única y múltiple. Ambas se muestran en la Figura 2. La primera, se refiere a que cada nodo de demanda (no-hub) se asigna a un único hub, es decir cada nodo puede enviar y recibir flujo a través de un solo hub. Por otra parte, la segunda clasificación indica que un nodo, no-hub puede enviar y recibir flujo a través de más de un hub.

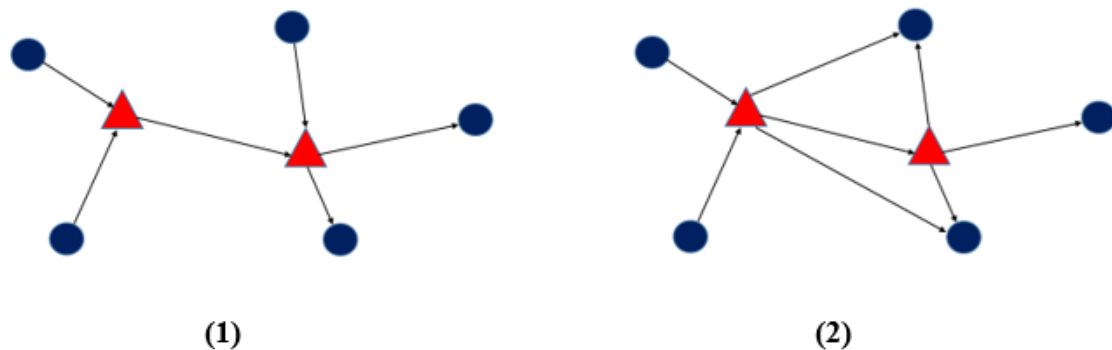


Figura 2: Asignación única (1) y asignación múltiple (2).

Fuente: Elaboración propia.

Comúnmente en la literatura se presentan 4 tipos de HLPs, denominados: “p-hub median problems”, “uncapacitated hub location problems”, “p-hub center problems” y “hub

covering problems”. Para el presente estudio, resultan relevantes los del tipo “hub covering”, que buscan maximizar la demanda cubierta, lo que ocurre si las instalaciones están suficientemente cerca, dentro de los parámetros especificados.

Las principales características de los HLP, según Campbell y O’Kelly, son las siguientes:

1. La demanda se asocia con flujos entre pares origen-destino.
2. Los flujos pasan por los hubs centrales.
3. Los hubs son instalaciones que se localizarán en el plano.
4. Existen ventajas para que los flujos se enruten por hubs centrales.
5. Existen objetivos que dependen de la localización de los hubs y también del enrutamiento de los flujos.

La primera publicación sobre HLP es de (O’Kelly, 1986a), pero las raíces de la localización de hubs están mucho más atrás, en las primeras obras de análisis de localización. Como, por ejemplo, los trabajos seminales de localización de instalaciones en redes de Hakimi en la década de los 60, demuestran que existían conocimientos previos sobre la localización de hubs.

Poco después (O’Kelly, 1987) sugiere una nueva formulación de programación para el problema de localización de p hubs. En el estudio muestra un programa cuadrático con variables enteras para la ubicación de hubs, buscando minimizar los costos de transporte. En dicho modelo la magnitud del flujo entre hubs o en los arcos entre nodos no-hubs depende de la ubicación de los hubs. Es por esto que los costos de flujo entre hubs son funciones endógenas de las localizaciones de hubs. Esto hace difícil a esta clase de modelos.

Posteriormente (Campbell, 1994) definió los HLP fundamentales como aquellos que además cumplen lo siguiente:

- (6) Las rutas origen-destino visitan como máximo dos hubs.
- (7) Los flujos entre nodos no-hubs no están permitidos.

La contribución de este estudio es la formulación y resolución de un modelo de localización de hubs con flota limitada de vehículos. El modelo considera además la existencia de presupuesto monetario. Es decir, es un modelo capacitado, tanto por flota como por lo monetario.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: la sección II.2 informa la revisión de literatura, la sección II.3 describe el problema y el modelo creado, la sección II.4 muestra los experimentos computacionales y sus resultados, finalizando con la conclusión en la sección II.5.

II.2. Revisión de literatura

Durante más de 25 años se han llevado a cabo estudios sobre HLP, por investigadores de diferentes áreas como del transporte, geografía, ciencias, etc. El pionero en los estudios sobre HLP es (O'Kelly, 1986a, 1986b), en donde el autor introduce la localización de hubs centrales, con asignación única, para ciudades que interactúan entre sí. Sabemos que este problema tiene una amplia gama de aplicaciones en las áreas de redes de transporte aéreo, sistema de comunicaciones y en cualquier tarea de distribución que requiera conexiones eficientes entre nodos. Luego (O'Kelly, 1987) formuló el primer modelo (cuadrático entero mixto) para un HLP discreto. Además, presenta un nuevo conjunto de datos, del año 1970, del flujo de pasajeros entre 25 ciudades de EEUU, hoy denominado CAB25.

Los problemas de localización de hubs se clasifican en p -hub median problem, uncapacitated hub location problems, capacitated hub location problems, p -center problems y hub covering problems. El primer tipo tiene por objetivo minimizar el costo total de movimiento localizando p -hubs en la red, el segundo tipo es distinto al primero

en que no se especifica el número de hubs a localizar y se asocia un costo fijo (no negativo) a cada posible ubicación del hub, el tercer tipo de problema resulta cuando a los p-hubs se le limita la capacidad de flujo, el objetivo del cuarto tipo de problema es optimizar la ubicación de p-hubs y minimizar el camino más largo en la red, la característica de los covering problems es que la demanda de un par origen-destino será cubierta si se encuentran dentro de una distancia los parámetros especificados de un hub.

En la literatura existe la definición de Hub Covering Problems (HCP, por sus siglas en inglés), los cuales son diferentes a los problemas de cobertura habituales debido a las interacciones entre Hubs. (Campbell, 1994) indica que en los HCP es mejor pensar en términos de pares Origen-Destino en lugar de puntos de demanda individuales, además presenta variantes para los HLP que se utilizan en los problemas de cobertura.

Estas interacciones generan complicaciones importantes, debido a que los pares Origen-Destino están cubiertos por pares de hubs, pero los costos pueden ser por hubs individuales. En los HCP, la demanda estará cubierta si ambos puntos Origen-Destino están dentro de una distancia específica de un hub, o bien la ruta no es más larga que un cierto umbral. Es por esto que (Campbell, 1994) propone tres tipos de criterios de cobertura para un par Origen-Destino, los cuales se presentan a continuación:

- a. El costo de enrutamiento desde i hasta j a través de los hubs k y m (L_{ijkm} , sea L el lapsus de tiempo), está dentro de un valor dado (S_{ij} , sea S el estándar de servicio).

$$L_{ijkm} \leq S_{ij}$$

- b. El costo de enrutamiento de cada arco en la ruta desde i hasta j a través de los hubs k y m (L_{ik}, L_{km}, L_{mj}), no supera un valor predeterminado (S_{ij}).

$$\max(L_{ik}, L_{km}, L_{mj}) \leq S_{ij}$$

- c. Los costos de enrutamiento de los arcos Origen-Hub (L_{ik}) y Hub-Destino (L_{ij}), no exceden un valor predeterminado (S_{ij}).

$$\max(L_{ik}, L_{mj}) \leq S_{ij}$$

Luego (Campbell, 1996) se enfoca en la localización de hubs en sistemas que implican el transporte de pasajeros o carga. Indica que la asignación múltiple es necesaria para minimizar el costo total de transporte, donde la asignación única es un caso especial. Resolver HLPs con asignación múltiple provee nuevas oportunidades para resolver problemas de asignación única. En su investigación observa que minimizar la distancia de viaje generalmente no minimiza los costos de transporte, debido a que se pueden utilizar distintos medios de transporte.

(Kara & Tansel, 2003), basados en el tercer criterio definido por (Campbell, 1994), proponen un nuevo HLM de programación entera para el HCP, con el objetivo de minimizar el número de hubs mientras que se asegura de que todos los tiempos entre pares origen-destino estén dentro de límites predeterminados, consiguiendo rebajar costos de instalación y operación.

Dos años más tarde (Yaman & Carello, 2005) abordan los HLP desde un punto de vista distinto, en donde intentan resolverlos con dos formas distintas. La primera, el costo de usar los extremos de la red no es lineal, pero sí gradual. Y en la segunda, los hubs tienen una capacidad restringida de tráfico entrante. Los modelos resultantes son resueltos mediante un método exacto y otro heurístico. Además, realizan un análisis de la eficiencia computacional de ambos métodos. Con la heurística se obtiene un buen conjunto de localizaciones, pero no logra una buena asignación cuando el gap es alto.

(Weng, Yang, & Ma, 2006) resuelven el problema de localización de hubs con asignación múltiple (MAHMCP), maximizando la cobertura de servicio. Proponen diversas metodologías de resolución, utilizando un algoritmo genético y otro de búsqueda tabú.

(Kimms, 2006) diseña redes hub-spoke motivado por el modelamiento de las economías de escala en los modelos de localización de hubs. De acuerdo con su enfoque, las conexiones inter-hub tienen una ventaja económica de operación que permite reducir los costos de flujos unitarios. El autor se dedica al modelamiento considerando las características de los vehículos utilizados en el transporte de carga. Las fuentes de las economías de escala mencionadas en el estudio son: a. Descuento por cantidad, b. Costos fijos, c. Modos múltiples. Los descuentos por cantidad son representados comúnmente en la literatura por un factor de descuento, denominado α . Esto sorprende al autor, porque es una forma incorrecta de representar las economías de escala. En su modelo se permite que las economías de escala no se produzcan solamente en conexiones inter-hub, sino que en todo tipo de conexiones. (Kimms, 2006) indica que los trabajos a futuros a desarrollar y probar son procedimientos de solución exactos y heurísticos para los modelos expuestos en su estudio.

A menudo en la literatura, la red de entrega de carga se ha modelado como una red de estrella, es decir, se supone que la red que conecta los hubs está completa. Sin embargo, no siempre es así. Por esto que (Yaman, 2008) considera los HLP como una red estrella-estrella, donde se eligen p hubs dentro de un conjunto dado de nodos, cada nodo no-hub está conectado a un hub y cada nodo-hub está conectado a nodo-hub central.

(Qu & Weng, 2009) extienden el problema de (Weng et al., 2006) llamado localización de hubs con asignación múltiple (MAHMCP), considerando un servicio Origen-Destino a través de uno o dos hubs con tiempo, costo o distancia limitados. Con el MAHCP se busca la manera óptima de localizar p hubs para maximizar los flujos atendidos.

Para (Tanash, Contreras, & Vidyarathi, 2017) la consolidación de flujos es una de las características clave de las redes hub-and-spoke. La agrupación de flujos permite la reducción de los costos de transporte, que a menudo se modela utilizando un factor de descuento constante que se aplica al costo de flujo asociado con todos los enlaces inter-

hub. Se enfocan en el problema de localización de hubs con capacidades modulares, que modela explícitamente los costos de transporte dependientes del flujo utilizando costos de arcos modulares. No asumen interconexiones totales entre los hubs centrales o una estructura topológica particular, sino que considera decisiones de activación de enlaces como parte del diseño de red. Los autores presentan una heurística primaria para construir una solución factible y calcular un límite superior. Además, presentan un algoritmo exacto basado en el método de branch and bound.

II.3. El Problema

Una compañía busca localizar p hubs para diseñar su red de transporte. La red hub-and-spoke es de asignación múltiple. Cuenta con una flota limitada de vehículos, los que deben decidir a qué arco de la red asignar. El problema consiste en maximizar la demanda cubierta utilizando la flota y los p hubs, respetando un presupuesto monetario.

II.3.1. Formulación Matemática

Sea el conjunto de los tipos de vehículos disponibles T . La red hub-and-spoke será diseñada sobre un grafo $G(N, A)$, donde N representa a los nodos de la red y A representa los arcos. Cada par origen destino $(i, j) \in N \times N$ tiene asignada una demanda de transporte, denominada V_{ij} . Cada arco $(i, j) \in A$ tiene un costo unitario asociado al transporte de la demanda denominado, L_{ij} , los arcos mencionados pueden ser entre nodo-hub, hub-hub y hub-nodo.

Conjuntos:

- H , representa a los potenciales Hubs.
- N , contiene a todos los nodos de demanda.
- T , contiene todo lo referente a la flota de vehículos.

- A , contiene a los arcos formados en la red.

Parámetros:

- Q_t : cantidad de vehículos del tipo $t \in T$ disponibles
- F_t : capacidad de carga, en términos de unidades de flujo, de un vehículo de tipo $t \in T$
- L_{ij} : tiempo entre $(i, j) \in N$
- p : número de Hubs
- S_{ij} : estándar de servicio entre $i \in N$ y $j \in N$
- V_{ij} : demanda entre $i \in N$ y $j \in N$
- $C_{ij} : \{(k, m) : L_{ik} + L_{km} + L_{mj} \leq S_{ij}\}$
- $|N|$: cantidad de nodos en la red
- $|T|$: cantidad de tipo de vehículos
- B : presupuesto

Variables de decisión:

- $X_{ijkm} = \begin{cases} 1, & \text{si existe flujo de } i \text{ a } j \text{ pasando por los hubs } k \text{ y } m \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$
- $Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si se localiza el Hub } k \in H \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$
- $W_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la demanda de } i \text{ a } j \text{ es cubierta} \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}$
- Z_{ijt} : cantidad de vehículos tipo $t \in T$ utilizados en $(i, j) \in A$

Función Objetivo

$$\max \sum_{(i,j) \in N: i \neq j} V_{ij} \cdot W_{ij} \quad (1)$$

Restricciones

$$\sum_{\substack{a \in N, b \in H: \\ (i,a) \in A}} V_{ia} * X_{iajb} + \sum_{a,b \in A} V_{ab} * X_{abij} + \sum_{a,j \in A} V_{aj} * X_{ajbi} \leq \sum_{t \in T} Z_{ijt} * F_t \quad \forall (i,j) \in A \quad (2)$$

$$\sum_{k \in H} Y_k \leq p \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} Z_{ijt} \leq Q_t \quad \forall t \in T \quad (4)$$

$$W_{ij} \leq \sum_{(k,m) \in C_{ij}} X_{ijkm} \quad \forall (i,j) \in A: i \neq j \wedge \text{card}(C_{ij}) > 0 \quad (5)$$

$$\sum_{(k,m) \in C_{ij}} X_{ijkm} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A: i \neq j \wedge \text{card}(C_{ij}) > 0 \quad (6)$$

$$\sum_{k \in H: (k,m) \in C_{ij}} X_{ijkm} \leq Y_m \quad \forall (i,j) \in A, m \in H: \text{card}(C_{ij}) > 0 \quad (7)$$

$$\sum_{m \in H: (k,m) \in C_{ij}} X_{ijkm} \leq Y_k \quad \forall (i,j) \in A, k \in H: \text{card}(C_{ij}) > 0 \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H}} (L_{ik} + L_{km} + L_{mj}) * X_{ijkm} \leq B \quad (9)$$

$$Z_{ijt} = Z_{jit} \quad \forall (i,j) \in A, t \in T \quad (10)$$

$$Z_{ijt} \leq Q_t * (Y_i + Y_j) \quad \forall (i,j) \in A \wedge t \in T \quad (11)$$

$$X_{ijkm} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A \wedge (k,m) \in H \quad (12)$$

$$Y_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall k \in H \quad (13)$$

$$Z_{ijt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in A \wedge t \in T \quad (14)$$

$$W_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A : i \neq j \wedge Card(C_{ij}) > 0 \quad (15)$$

La expresión (1), representa la función objetivo del modelo que maximiza la captura de la demanda. Las restricciones (2) representan la restricción de flujo total, la sumatoria de cada rol (recolección, transición y distribución) debe ser menor o igual al total de la capacidad de la flota en los tres roles mencionados. La cantidad máxima de hubs a localizar lo podemos observar en la restricción (3). En (4) observamos las restricciones para la flota de vehículos. En las restricciones (5) observamos que la demanda no puede ser mayor a los flujos asignados. En (6) observamos que los flujos asignados son del orden porcentual para todo (i, j) .

Las restricciones (7) y (8) fuerzan a los flujos a pasar por los hubs k y m , respectivamente, si la ruta elegida pasa por ellos. La restricción (9) limita el tamaño de red, al requerir

cumplir con un presupuesto dado Por otro lado, las restricciones (10) fuerzan que la flota utilizada por arco sea la misma en ambos sentidos. En (11) observamos que se restringe la utilización de la flota por Hub asignado, finalmente el grupo de restricciones (12) - (15) indican el dominio de las variables de decisión.

II.4. Experimentos Computacionales y Resultados

Para resolver los experimentos computacionales y realizar el análisis de sus salidas se utilizó el lenguaje AMPL con el optimizador CPLEX 12.8, en una máquina con un procesador Intel(R) Core(TM) i5-6200U CPU @ 2.30GHz y 8,00 GB de memoria RAM. El sistema operativo utilizado fue Windows 10 Pro de 64 bits, procesador x64.

La base de datos utilizada en esta ocasión fue la CAB25 (Civil Aeronautic Board), que representa 25 ciudades de Estados Unidos y es la base de datos que mayormente se utiliza para probar y validar modelos de localización de Hubs.

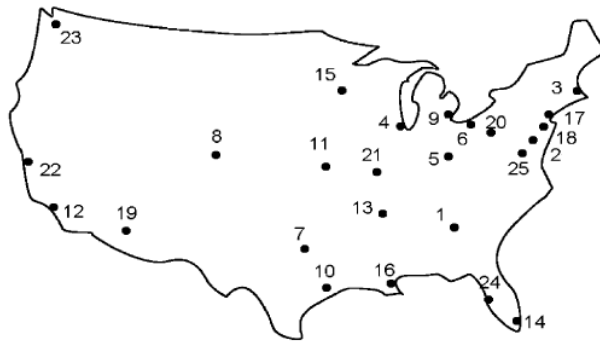


Figura 3: Ubicación geográfica de los nodos de la red CAB25
Fuente: (Elhedhli & Hu, 2005)

Número	Ciudad	Número	Ciudad	Número	Ciudad	Número	Ciudad	Número	Ciudad
1	Atlanta	6	Cleveland	11	Kansas City	16	New Orleans	21	St. Louis
2	Baltimore	7	Dallas/Forth Worth	12	Los Angeles	17	New York	22	San Francisco
3	Boston	8	Denver	13	Memphis	18	Philadelphia	23	Seattle
4	Chicago	9	Detroit	14	Miami	19	Phoenix	24	Tampa
5	Cincinnati	10	Houston	15	Minneapolis	20	Pittsburgh	25	Washington

Tabla 1: Ciudades de la instancia CAB25

Fuente: Elaboración propia

Para analizar los resultados de los experimentos computacionales, se utilizaron indicadores así podemos dimensionar y comparar estos resultados.

II.4.1. Indicadores

Los indicadores fueron utilizados para comparar resultados según los resultados esperados, se detallan a continuación:

- (i) OFV, valor de la función objetivo.
- (ii) Time, tiempo el cual se demora CPLEX en resolver el experimento.
- (iii) PercODPairs, porcentaje de cobertura en pares origen-destino de CAB25.
- (iv) Fleet1, cantidad utilizada de vehículos tipo 1.
- (v) Fleet2, cantidad utilizada de vehículos tipo 2.
- (vi) AvgNumStop, promedio de paradas de ruta.
- (vii) Budget, presupuesto utilizado para abrir ruta.

II.4.1.1. Cálculo de Indicadores

A continuación, se detallan las fórmulas matemáticas utilizadas para calcular los indicadores mencionados en la sección anterior:

- (i) Valor de la función objetivo

$$\sum_{(i,j) \in N: i \neq j \wedge \text{card}(C[i,j]) > 0} W_{ij} * V_{ij}$$

(ii) Tiempo de CPLEX, extraído directamente desde AMPL, utilizando la variable

_solve_time

(iii) Porcentaje de cobertura en pares origen-destino

$$\sum_{\substack{(i,j) \in N: i < j \wedge \\ \text{card}(C[i,j]) > 0 \wedge W_{ij} \geq 1}} \frac{W_{ij}}{(|N| * (|N| - 1))}$$

(iv) Cantidad de vehículos tipo 1 utilizados

$$\sum_{(i,j) \in A: Z[i,j,1] \geq 1} Z_{ij1}$$

(v) Cantidad de vehículos tipo 2 utilizados

$$\sum_{\substack{(i,j) \in A: \\ Z[i,j,2] \geq 1}} Z_{ij2}$$

(vi) Promedio de paradas de rutas

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & \left(\sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H: \\ i=j=m \\ \wedge i \neq k \wedge k \neq j \\ \wedge k \neq m}} X_{ijkm} * V_{ij} + \sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H: \\ i=j=k \\ \wedge k \neq m}} X_{ijkm} * V_{ij} + \right. \\
 & \sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H \\ :i=j \\ \wedge j \neq k \wedge k=m}} X_{ijkm} * V_{ij} + \sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H \\ :i=m \\ \wedge m \neq k \neq j}} X_{ijkm} * V_{ij} + \\
 & \left. \sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H \\ :j=m \\ \wedge i \neq k \neq j}} X_{ijkm} * V_{ij} + \sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H \\ :i=k \\ \wedge k \neq j \wedge k \neq j \wedge k \neq m}} X_{ijkm} * V_{ij} + \right. \\
 & \left. \sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H \\ :i \neq j \\ \wedge j=k \wedge k \neq m \wedge m \neq i}} X_{ijkm} * V_{ij} + \sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H \\ :i \neq j \\ \wedge j \neq k \\ \wedge k \neq i \wedge k=m}} X_{ijkm} * V_{ij} \right) \\
 & 1 * \left. \left(\sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H \\ :i=j \\ \wedge i \neq k \neq m}} X_{ijkm} * V_{ij} + \sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H \\ :i \neq k \neq j \neq m}} X_{ijkm} * V_{ij} \right) \right] + \\
 & 2 * \left(\sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H \\ :i=j \\ \wedge i \neq k \neq m}} X_{ijkm} * V_{ij} + \sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H \\ :i \neq k \neq j \neq m}} X_{ijkm} * V_{ij} \right) \\
 & \left[\sum_{(i,j) \in N: i \neq j} W_{ij} * V_{ij} \right]
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

(vii) Presupuesto utilizado en apertura de rutas

$$\sum_{\substack{(i,j) \in N \\ (k,m) \in H: \\ \text{card}(C[i,j]) > 0}} (L_{ik} + L_{km} + L_{mj}) * X_{ijkm}$$

II.4.2. Resultados

Los análisis de resultados de los experimentos se realizan a partir del caso base definido con los parámetros que se muestran a continuación:

- (i) Número de hubs, $p = 4$
- (ii) Cantidad de vehículos tipo 1, $Q_1=1000$

- (iii) Cantidad de vehículos tipo 2, $Q_2=500$
- (iv) Capacidad de camión tipo 1, $F_1=3000$
- (v) Capacidad de camión tipo 2, $F_2=6000$
- (vi) Estándar de servicio, $S=1500$
- (vii) Presupuesto, $B=25000$



Figura 4: Caso base obtenido para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$, $B=25000$
Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4 observamos que con los datos del caso base, la atención a la demanda se sectoriza, cubriendo un 10,3% del total de la red. Por otro lado, el tiempo de resolución es de 4 [segundos]. El presupuesto utilizado por el modelo es de 24.951, con un promedio de paradas del orden de 0,511. Esta solución utiliza el 100% de la flota de vehículos.

A continuación, se presenta el análisis de sensibilidad en base a los resultados obtenidos de experimentos variando distintos parámetros. Estos experimentos hacen visualizar como

varía el tamaño de red Hub and Spoke, como varían los tiempos de resolución del modelo, así como también el presupuesto necesario para nuestra demanda.

Los parámetros que fueron expuestos a variaciones en los experimentos son los siguientes:

- (i) Cantidad de hub a localizar en la red, p .
- (ii) Presupuesto B
- (iii) Cantidad de vehículos tipo 1 (Q_1)
- (iv) Cantidad de vehículos tipo 2 (Q_2)
- (v) Estándar de servicio (S)

II.4.2.1. Cantidad de *hubs* a localizar en la red, p

En la sensibilización del parámetro p se le dieron valores entre 1 y 8, arrojando resultados esperados como, por ejemplo, el promedio de paradas en cada ruta abierta tiende a disminuir mediante el número de hubs existente en la red aumenta (ver Figura 5). Esto se explica porque al tener más hubs es más fácil ofrecer rutas más cortas (menos paradas). El indicador PercODPairs nos indica el porcentaje de la demanda de transporte de la red que está siendo atendida. Los experimentos arrojan que con menos hubs, el porcentaje de demanda que se cubrirá será menor. Observe lo que ocurre con $p = 1$ y $p = 8$, donde se obtienen un 8,2% y un 12% de cobertura, respectivamente.

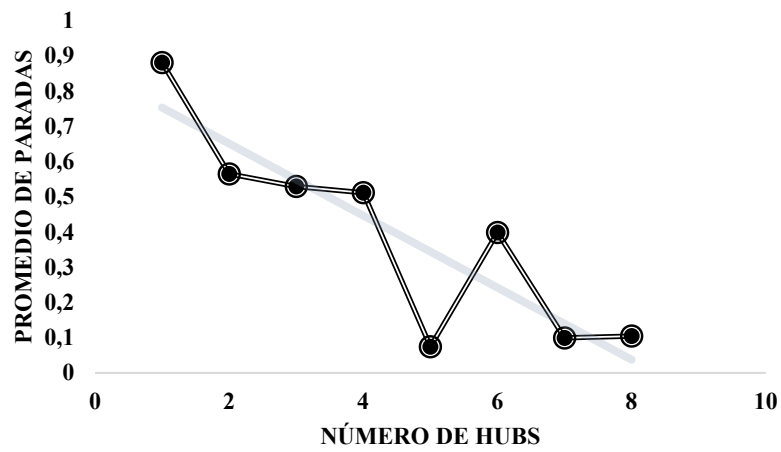


Figura 5: Promedio de paradas obtenido en función de numero de hubs (p), para $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$
Fuente: Elaboración propia



Figura 6: Solución grafica para $p=1$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia



Figura 7: Solución grafica para $p=8$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$.
 Fuente: Elaboración propia

El presupuesto utilizado (budget) es otro parámetro el cual nos ayuda a realizar comparaciones. Siguiendo en el ámbito de la variación de la cantidad de hubs, la tendencia del budget es al alza cuando aumentamos la cantidad de hubs, esto es lógico si pensamos que cada vez que habilitamos un hub, nuestro costo va aumentando debido a que necesitamos que nuestra flota de vehículos cubra más clientes. Observamos un caso en particular, con $p = 3$, en donde no es utilizada la cantidad total de vehículos disponibles debido a tener una solución no optima con esa cantidad de hubs puestos en la red.

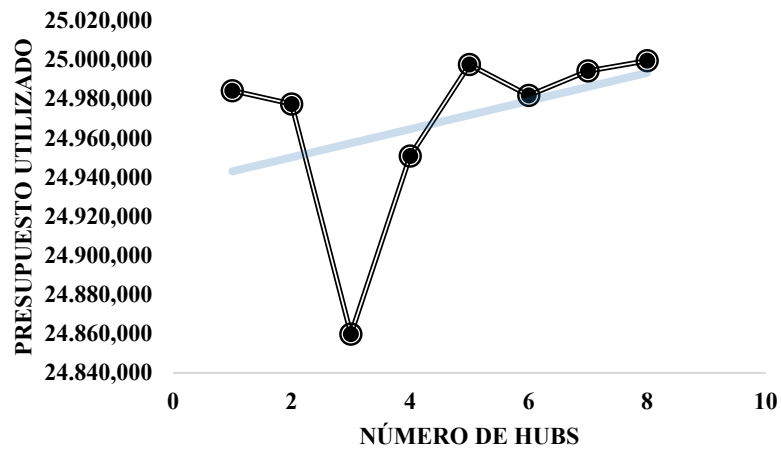


Figura 8: Presupuesto utilizado obtenido en función de numero de hubs (p), para $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia

Otro indicador que se consideró para los análisis es el tiempo de resolución, el cual llamó la atención debido a que presenta puntos en los cuales baja al momento de aumentar la cantidad de hubs en la red y en otros momentos en los que el tiempo de respuesta aumenta.

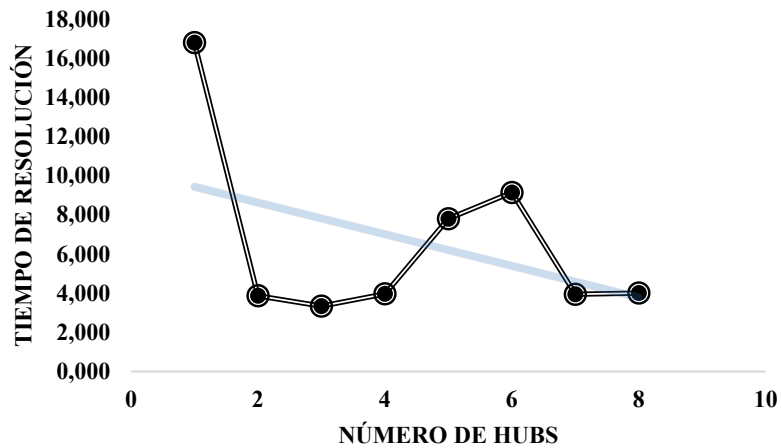


Figura 9: Tiempo de resolución obtenido en función de numero de hubs (p), para $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia

En la Figura 10 observamos que el valor de la función objetivo tiende a un aumento cuando localizamos mayor número de hubs en la red.

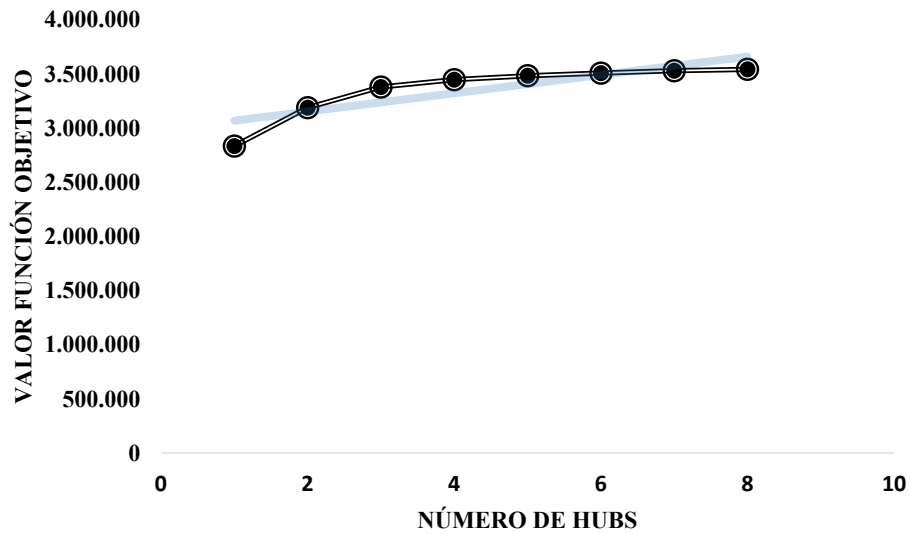


Figura 10: Función objetivo obtenida en función de número de hubs (p), $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia.

II.4.2.2. Sensibilidad del presupuesto disponible, B

El parámetro B , nos indica el presupuesto con el cual la flota de vehículos puede trabajar. Si tenemos un presupuesto muy grande, vemos resultados en los cuales el tamaño de flota es el que limita nuestra captura de demanda. Por otra parte, si el presupuesto es muy limitado, esto afectará la demanda total capturada.

Uno de los análisis realizados fue comparar el presupuesto con el porcentaje de la demanda de pares origen-destino que es cubierto al variar el presupuesto disponible, arrojando el resultado esperado que, a mayor presupuesto, es mayor el porcentaje de cobertura, como se aprecia en la Figura 11.

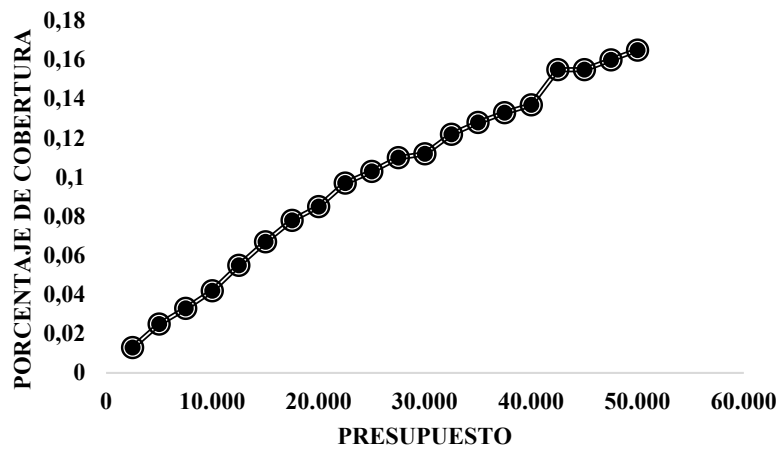


Figura 11: Porcentaje de cobertura obtenido en función del presupuesto disponible (B), para $p=4$, $Q_1=100$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$.
Fuente: Elaboración propia

La variación de B en relación al índice promedio de paradas en la red presenta un caso llamativo, el cual presenta un índice más alto debido a que cuando se cuenta con un presupuesto entre 22.500 y 42.500, la solución óptima se encuentra cambiando la localización de un potencial nodo-hub del nodo 17 al nodo 18 y con esta optimalidad, en el nodo 18, se realizan más paradas en promedio. Esto último se puede ver en la Figura 13 y en la Figura 14 donde se aprecia el cambio de localización del hub entre nodos 17 y 18.

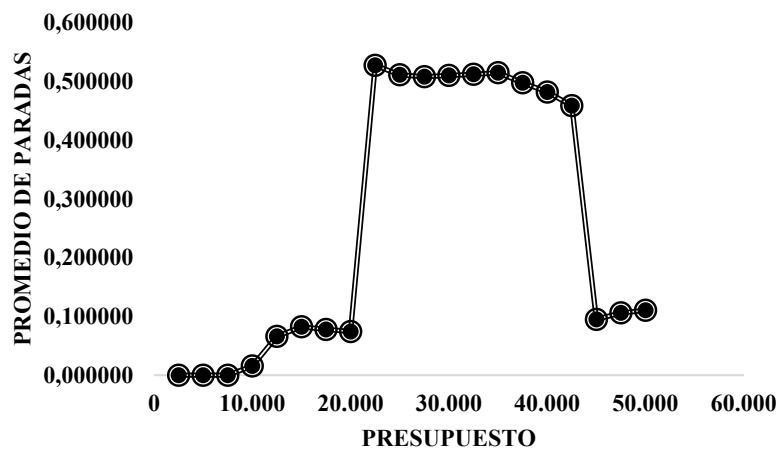


Figura 12: Promedio de paradas obtenido en función del presupuesto disponible (B), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$.
Fuente: Elaboración propia



Figura 13: Solución grafica para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=20000$.
Fuente: Elaboración propia



Figura 14: Solución grafica para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $S=1500$ y $B=22500$.
Fuente: Elaboración propia

En la Figura 15 observamos que el tiempo de resolución del modelo aumenta gradualmente como se espera, debido a que tiene más opciones de una respuesta óptima. Esto se debe al aumento del presupuesto. Llama la atención como incrementa el tiempo, con $B = 42.500$, esto es debido a una no optimalidad de la solución.

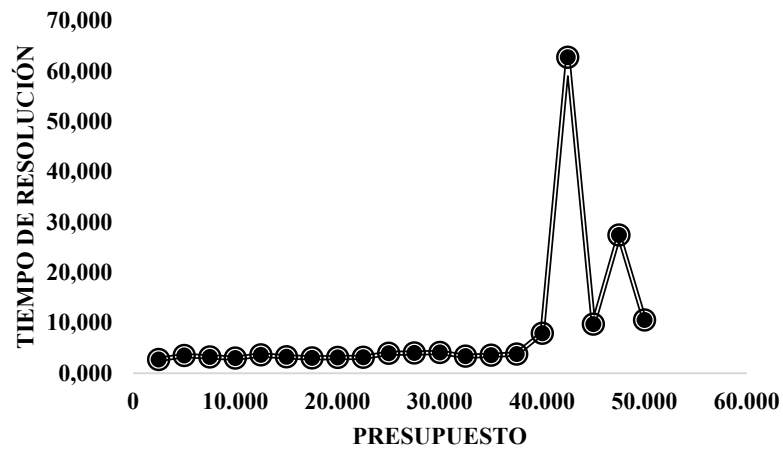


Figura 15: Tiempo de resolución obtenido en función del presupuesto disponible (B), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$.
Fuente: Elaboración propia

El valor de la función objetivo incrementa cuando aumentamos la cantidad de presupuesto disponible, debido a que cuando tenemos más presupuesto, es más llevadero abrir rutas y así poder cubrir más demanda, esto lo podemos observar en la Figura 16.

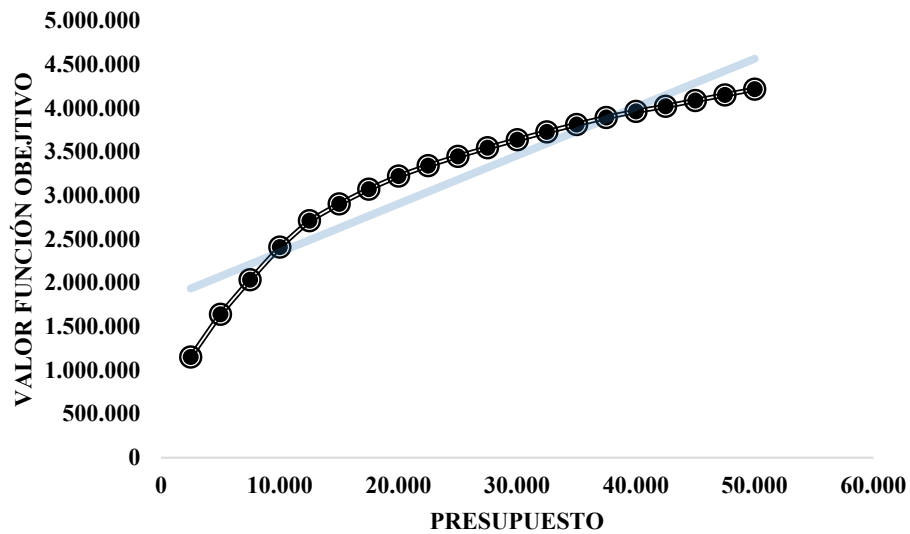


Figura 16: Tiempo de resolución obtenido en función del presupuesto disponible (B), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$.

Fuente: Elaboración propia

II.4.2.3. Variación de la flota disponible, Q_1 y Q_2

Como fue nombrado anteriormente, Q_1 y Q_2 representan la flota de vehículos y estas cantidades fueron sensibilizadas para poder ver como se comportaban los indicadores de tiempo de resolución, porcentaje de cobertura, presupuesto utilizado y promedio de paradas.

El tiempo de resolución para ambos casos de Q presenta un comportamiento similar, menos tiempo debemos esperar a medida que va aumentando la cantidad de Q_1 y Q_2 , se observa en la Figura 17 y Figura 18, respectivamente.

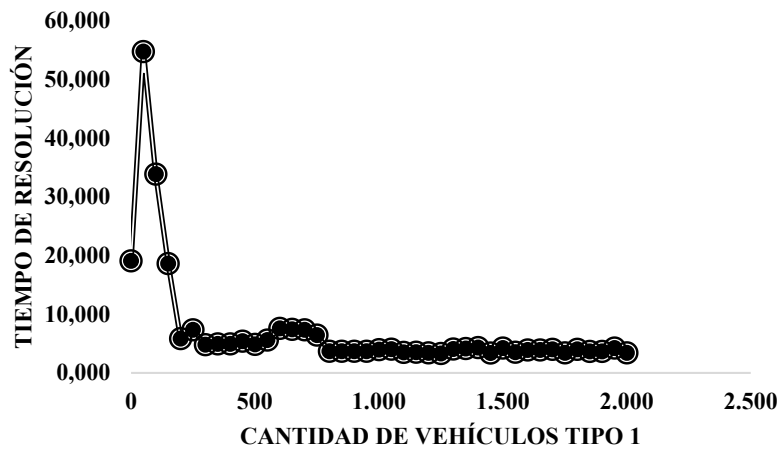


Figura 17: Tiempo de resolución obtenido en función a la cantidad de vehículos tipo 1 (Q_1), para $p=4$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia

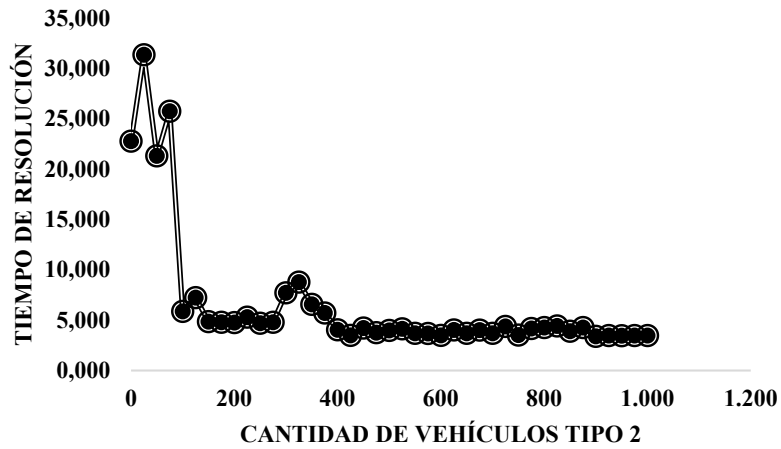


Figura 18: Tiempo de resolución obtenido en función a la cantidad de vehículos tipo 2 (Q_2), para $p=4$, $Q_1=1000$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia

El porcentaje de cobertura, realizando las variaciones en el parámetro Q (ambos tipos), se comportan de forma de que, a mayor flota, mayor cobertura de red, ambos casos se comportan de manera semejante como se aprecia en la Figura 19 y Figura 20.

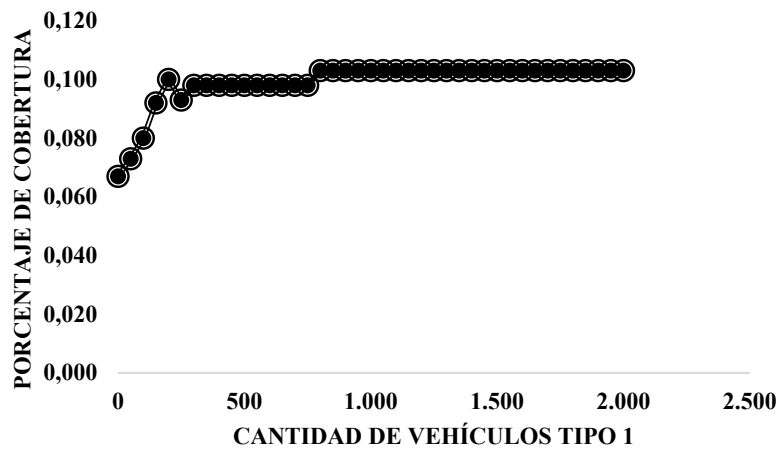


Figura 19: Porcentaje de cobertura obtenido en función a la cantidad de vehículos tipo 1 (Q_1), para $p=4$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia

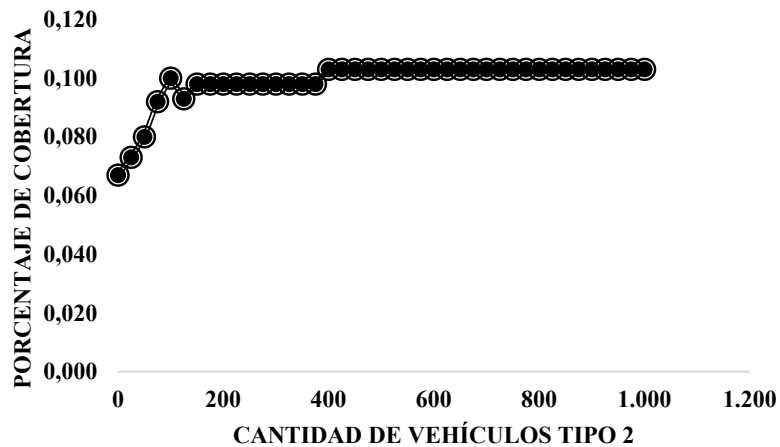


Figura 20: Porcentaje de cobertura obtenido en función a la cantidad de vehículos tipo 2 (Q_2), para $p=4$, $Q_1=1000$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia

El presupuesto utilizado y el promedio de paradas, al igual que los otros indicadores, tienen un comportamiento similar en ambos casos, para el primero, es lógico pensar que a mayor flota es mayor el gasto que existe para el movimiento de esa flota. En cambio, para el segundo caso, el promedio de paradas tiene una explicación no tan lógica como la

anterior, pero si existe mayor flota, se abren más caminos, por lo tanto, existe mayor promedio de paradas en la red completa.

En la Figura 21 y Figura 22 se observa que al variar Q_1 y Q_2 el valor de la función objetivo aumenta, esto es debido a que cuando se incrementa la cantidad de vehículos, hay más posibilidades de cubrir más demanda, por la utilización de los vehículos. Las rectas que observamos en el valor de la función objetivo se debe a la limitación del presupuesto para la utilización de vehículos.

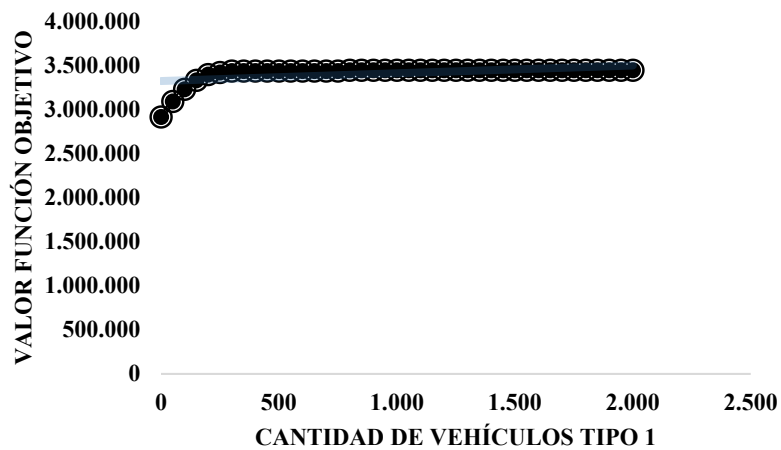


Figura 21: Función objetivo obtenida en función a la cantidad de vehículos tipo 1 (Q_1), para $p=4$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$.

Fuente: Elaboración propia

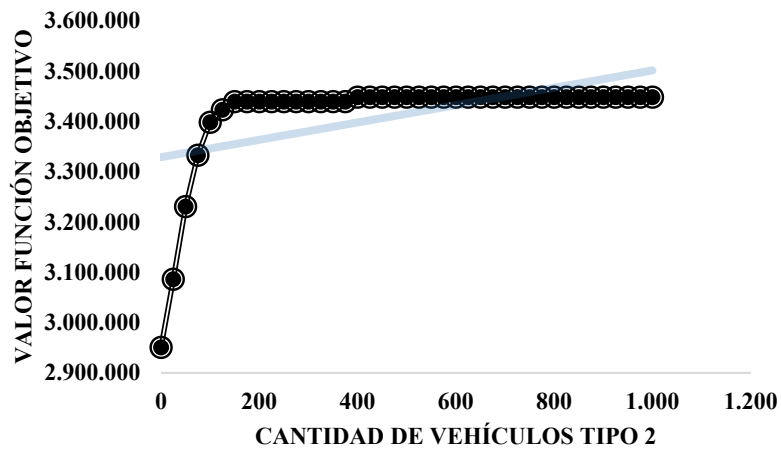


Figura 22: Porcentaje de cobertura obtenido en función a la cantidad de vehículos tipo 2 (Q_2), para $p=4$, $Q_1=1000$, $F_1=3000$, $F_2=6000$ y $S=1500$, $B=25000$.

Fuente: Elaboración propia

II.4.2.4. Sensibilidad del estándar de servicio, S

El parámetro S , representa el estándar de servicio, se utilizó una media de estándar de servicio de 1.500, debido a que la longitud máxima que presenta la CAB25 es de 2.703, aproximadamente.

El promedio de paradas con respecto al estándar de servicio, tiene una tendencia al alza mediante el estándar va incrementando, esto es debido a que como el estándar de servicio aumenta la longitud de caminos va incrementando y sube el promedio de paradas. En la Figura 19 observamos que con un estándar de servicio de 1.200 en adelante se genera una recta, esto se produce debido al presupuesto disponible que es lo que limita que la red se expanda. Otro caso que se observa en la Figura 23, con $S = 1100$, esto se explica porque con este valor del estándar de servicio se encuentra una solución óptima en el sentido de que los viajes son más cortos y necesita menos paradas para cubrir la demanda.

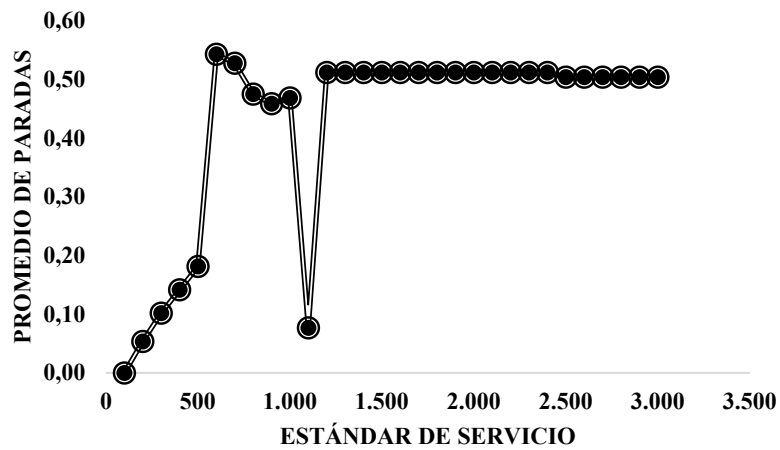


Figura 23: Promedio de paradas obtenido en función al estándar de servicio (S), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia

Se espera que el porcentaje de cobertura incremente a medida que el estándar de servicio también incremente, debido a que se le da más holgura al modelo con el estándar de servicio alto, capta más demanda y las rutas son más largas como se observa en la Figura 24.

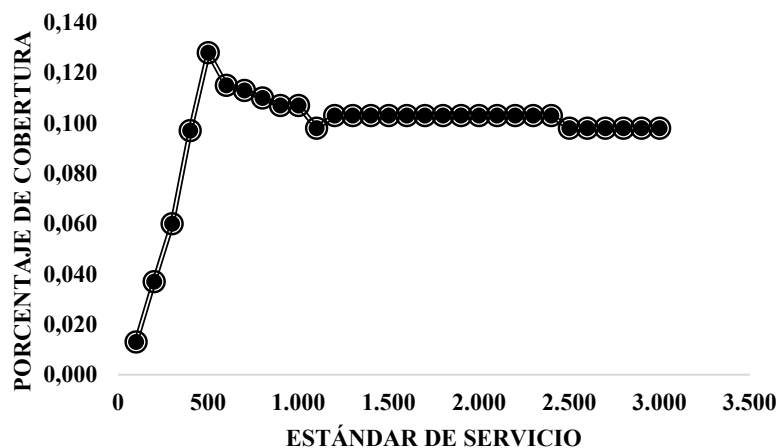


Figura 24: Porcentaje de cobertura obtenido en función al estándar de servicio (S), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia

En la Figura 25 se observa que el presupuesto utilizado es la limitante en el incremento del estándar de servicio, si experimentáramos con un presupuesto ilimitado, obtendríamos una gráfica con una curva exponencial positiva.

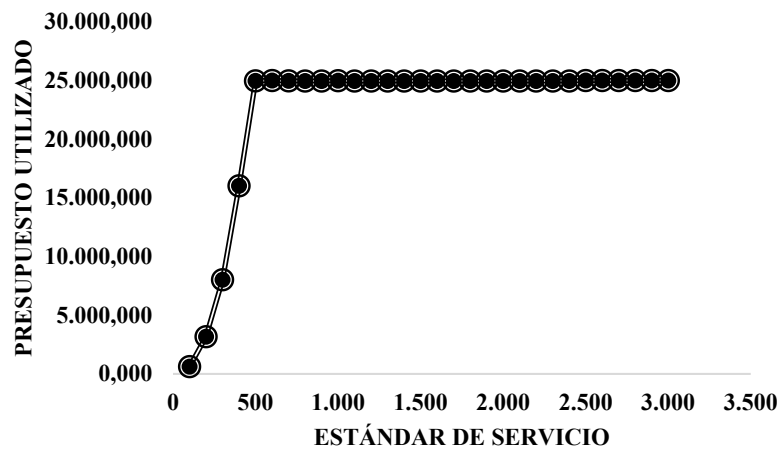


Figura 25: Presupuesto utilizado obtenido en función al estándar de servicio (S), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $B=25000$.

Fuente: Elaboración propia

El tiempo de resolución incrementa a medida que el estándar de servicio aumenta, esto lo causa la gran cantidad de datos que se deben procesar, la cantidad de variables y caminos que son posibles habilitar con el modelo.

En la Figura 27 se puede observar que la función objetivo aumenta cuando incrementa el nivel de servicio, la recta que se observa en la gráfica se debe a la limitación del presupuesto para abrir rutas más largas.

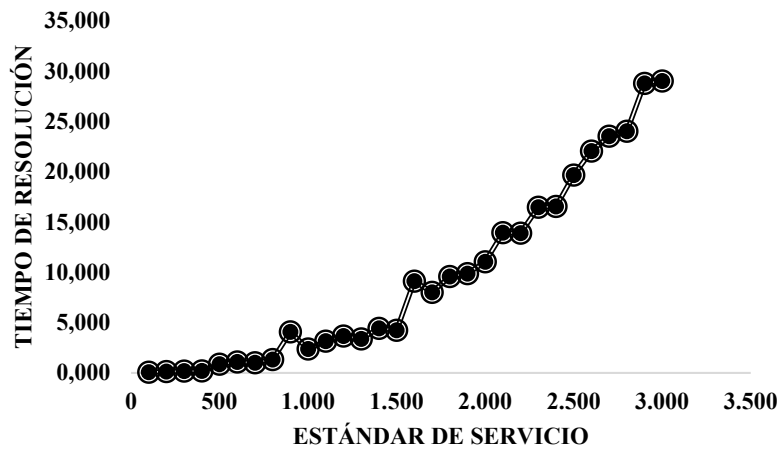


Figura 26: Tiempo de resolución obtenido en función al estándar de servicio (S), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia

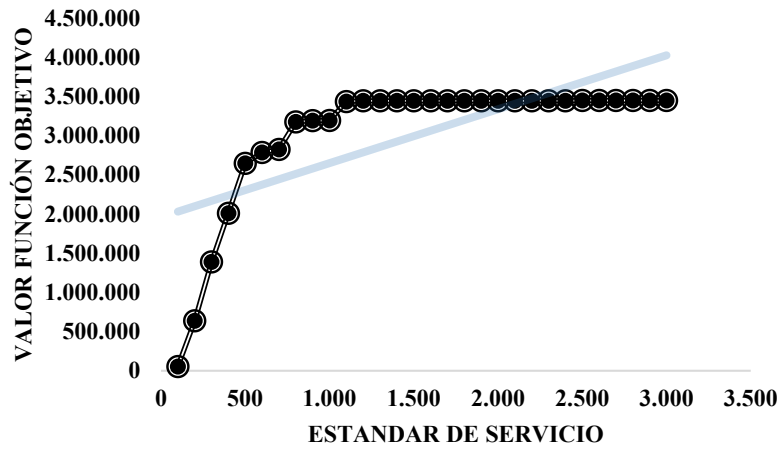


Figura 27: Función objetivo obtenida en función al estándar de servicio (S), para $p=4$, $Q_1=1000$, $Q_2=500$, $F_1=3000$, $F_2=6000$, $B=25000$.
Fuente: Elaboración propia

II.5. Conclusiones

Con este trabajo se logró profundizar en los estudios sobre los hub location problems (HLP), en la sección de los hub covering problems (HCP). En los trabajos leídos y

estudiados no se considera una flota de vehículos de distintas capacidades para cubrir la demanda de una red en donde se cuenta con las principales 25 ciudades de estados Unidos.

El modelo logra localizar hubs utilizando una cantidad flota específica de vehículos, y así cubriendo la mayor cantidad de demanda en la red utilizada. La estructura conseguida con este modelo ordena el ingreso de datos, tales como: (i) tamaño de flota, (ii) capacidad de flota, (iii) estándar de servicio, (iv) cantidad de hubs a localizar, (v) estándar de servicio a cumplir y (vi) presupuesto disponible. También cabe recalcar que no es necesaria una gran CPU o máquina para obtener resultados.

Con respecto al análisis de sensibilidad del parámetro p , observamos que a mayor cantidad de hubs a localizar es mayor el porcentaje de cobertura que se obtendrá, pero el tiempo de resolución tiende a disminuir, como también se observa que cuando aumenta la cantidad de hubs localizados las rutas son más cortas, por lo tanto el índice de paradas disminuye. Otro punto importante es el presupuesto utilizado, a mayor cantidad de hubs localizados es mayor el gasto.

Con respecto a las variaciones del presupuesto disponible, a mayor cantidad de éste mayor es el porcentaje de cobertura debido a que tiene mayor holgura para abrir rutas, el promedio de paradas aumenta mediante el presupuesto es mayor, pero como fue mencionado en la sección II.4.2.2 existe un caso llamativo para los experimentos el cual se re-localiza un hub y esto incrementa el promedio de paradas para ciertos valores del presupuesto. Como es de esperar con el tiempo de resolución, éste aumenta cada vez que incrementamos el presupuesto disponible.

Para la sensibilización del tamaño de flota, Q_1 y Q_2 , cada vez que aumenta Q el tiempo de resolución presenta una disminución, esto se debe a que a mayor tamaño de flota más rápido se encuentra una solución factible, el porcentaje de cobertura aumentará a la vez que se aumenta el tamaño de la flota, siempre y cuando se cuente con un B suficiente para

la movilización de los vehículos necesarios. El presupuesto utilizado siempre incrementará cuando el tamaño de la flota aumente, así también, el promedio de paradas incrementará a la vez se utilice una mayor flota, debido a que se abren más rutas.

Con respecto al análisis de sensibilidad del estándar de servicio, S , se puede observar que mientras aumenta el estándar de servicio el promedio de paradas en la red incrementará, debido a que las rutas que se abrirán serán más largas, también el porcentaje de cobertura crecerá a la par del estándar de servicio. Por otro lado, para observar el *budget*, mientras incrementa el estándar de servicio deberíamos realizar pruebas con un presupuesto ilimitado, ya que se utiliza cada vez más presupuesto al aumentar el tamaño de red, pero se escapa de la realidad. Finalmente, el tiempo de resolución aumentará cuando el estándar de servicio incrementa, por la cantidad de variables y rutas que son posible calcular.

Se consideran estudios futuros, tales como añadir restricciones con descuentos cuando el flujo es hub-hub, mejorar la formulación del problema ya que es muy rápida la solución de éste, se espera que sea más compleja la solución óptima del problema.

II.6. Referencias

- Campbell, J. F. (1994). Theory and Methodology Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72, 387–405. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)90318-2](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)90318-2)
- Campbell, J. F. (1996). Hub Location and the p -Hub Median Problem. *Operations Research*, 44(6), 923–935. <https://doi.org/10.1287/opre.44.6.923>
- Elhedhli, S., & Hu, F. X. (2005). Hub-and-spoke network design with congestion. *Computers and Operations Research*, 32(6), 1615–1632. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2003.11.016>
- Kara, B. Y., & Tansel, B. C. (2003). The single-assignment hub covering problem: Models and linearizations. *Journal of the Operational Research Society*, 54(1), 59–64. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601473>
- Kimms, A. (2006). Economies of scale in hub & spoke network design models: We have it all wrong. *Perspectives on Operations Research*, 293–317.

https://doi.org/dx.doi.org/10.1007/978-3-8350-9064-4_17

- O'Kelly, M. E. (1986a). Activity Levels at Hub Facilities in Interacting Networks. *Geographical Analysis*, 18(4), 343–356. <https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1986.tb00106.x>
- O'Kelly, M. E. (1986b). The Location of Interacting Hub Facilities. *Transportation Science*, 20(2), 92–106. <https://doi.org/10.1287/trsc.20.2.92>
- O'Kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities.
- Qu, B., & Weng, K. (2009). Path relinking approach for multiple allocation hub maximal covering problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(11–12), 1890–1894. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.10.004>
- Servera-Francés, D. (2010). Concepto y evolución de la función logística. *Innovar*, 20(38), 217–234.
- Tanash, M., Contreras, I., & Vidyanthi, N. (2017). An exact algorithm for the modular hub location problem with single assignments. *Computers and Operations Research*, 85, 32–44. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.03.006>
- Weng, K., Yang, C., & Ma, Y. (2006). Two artificial intelligence heuristics in solving multiple allocation hub maximal covering problem. *Intelligent Computing*, 737–744. https://doi.org/10.1007/11816157_90
- Yaman, H. (2008). Star p-hub median problem with modular arc capacities. In *Computers and Operations Research* (Vol. 35, pp. 3009–3019). <https://doi.org/10.1016/j.cor.2007.01.014>
- Yaman, H., & Carello, G. (2005). Solving the hub location problem with modular link capacities. *Computers and Operations Research*, 32(12), 3227–3245. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2004.05.009>