



UNIVERSIDAD ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL INDUSTRIAL

**“ESTUDIO COMPUTACIONAL DE PROCEDIMIENTOS DE DESCOMPOSICION
AUTOMATICA DE MODELOS FUNDAMENTALES DE LOCALIZACION DE
HUBS”**

MATIAS ANTONIO OLATE LABRAÑA
PROFESOR GUIA: ARMIN LÜER-VILLAGRA

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL**

SANTIAGO – CHILE
DICIEMBRE, 2017



UNIVERSIDAD ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL INDUSTRIAL
DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD Y PROPIEDAD

Yo, **Matías Antonio Olate Labraña**, declaro que este documento no incorpora material de otros autores sin identificar debidamente la fuente.

Santiago, 5 de diciembre de 2017

Firma del alumno

ÍNDICE GENERAL

I. INTRODUCCIÓN.....	7
I.1 Importancia de resolver el problema.....	10
I.2 Discusión bibliográfica.....	12
I.3 Contribución del trabajo y su importancia.....	15
I.4 Objetivo general.....	15
I.4.1 Objetivos específicos.....	15
I.5 Estado del arte.....	16
I.5.1 Optimizadores.....	17
I.5.2 Formulación más ajustada.....	17
I.6 Propuesta metodológica.....	18
I.7 Bibliografía.....	19
II. ARTICULO PROPUESTO.....	21
1. INTRODUCCION.....	22
2. REVISION DE LITERATURA.....	24
2.1 Modelos fundamentales para HLP.....	24
2.1.1 The p-hub median problem.....	24
2.2 líneas de trabajo activas.....	28
2.2.1 Resolución de problemas de gran envergadura.....	29
2.2.2 Topologías alternativas.....	29
2.2.3 Localización dinámica de hubs.....	29
2.2.4 Integración de costos y servicios.....	29
2.2.5 Localización competitiva de hubs.....	30
2.3 Revisión de literatura para Descomposición de Benders.....	30
2.3.1 Descomposición de Benders en HLP.....	31
3. PROBLEMAS A RESOLVER.....	33
3.1 Single allocation p-Hub Median Problem.....	33
3.2 FLOWLOC.....	34
3.3 Múltiple allocation p-Hub Median Problem.....	35
3.4 Múltiple allocation hub location problem.....	36
4. EXPERIMENTO.....	38
4.1 Maquina a utilizar.....	38

4.2 Datos.....	38
4.3 Protocolo experimental	39
4.4 Experimentos a realizar	40
4.5 Indicadores de rendimiento	40
4.5.1 Calculo de indicadores	40
4.6 Análisis de resultados	41
4.6.1 Sensibilidad de p para Single allocation p -Hub Median Problem	41
4.6.2 Sensibilidad de α para Single allocation p -Hub Median Problem.....	42
4.6.3 Sensibilidad de p para Múltiple allocation hub location problem	43
4.6.3 Sensibilidad de α para Múltiple allocation hub location problem	44
4.6.4 Sensibilidad de A para Múltiple allocation hub location problem	46
4.6.5 Otros experimentos	46
5. Conclusiones	47
6. Bibliografía	48

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Revisión de literatura para problemas de localización de hubs	28
Tabla 2: Revisión de literatura para Descomposición de Benders.....	31
Tabla 3: Revisión de literatura para problemas de localización de hubs utilizando descomposición de Benders	32
Tabla 4: Ciudades del conjunto CAB25	39
Tabla 5: Tiempo de solución, para Campbell (2012)	47

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Diagrama de solución de modelos por AMPL. Fuente: Elaboración Propia	9
Figura 2: N° de estudios por año sobre Descomposición de Benders. Fuente: (Rahmaniani, et al. 2016)	10
Figura 3: Topología Hub and Spoke. Fuente: Elaboración propia	13
Figura 4 : Ejemplo para los tipos de asignación. Fuente: Elaboración propia.	23
Figura 5: Mapa de conjunto de datos CAB25. Fuente: Elhedhli & Hu (2005)	39
Figura 6: Rendimiento porcentual para número de Iteraciones, para diferente cantidad de hubs.....	42
Figura 7: Mejora porcentual para los tiempos de solución, para diferentes valores de alfa.	43
Figura 8: Mejora porcentual para número de Iteraciones, para diferente cantidad de hubs.	44
Figura 9: Mejora porcentual para número de Iteraciones, para diferentes valores de alfa	45
Figura 10: Mejora porcentual para número de Iteraciones, para diferentes valores de hubs.....	45
Figura 11: Mejora porcentual para número de Iteraciones, para diferentes costos de instalar un hubs.....	46

I. INTRODUCCIÓN

Los servicios de transporte de productos surgen por la necesidad de unir y transportar los recursos de consumo desde su punto de origen (producción) hasta su destino (clientes). En los procesos de distribución, los recursos son transportados usando diferentes tipos de vehículos, tales como ferrocarril, transporte aéreo, marítimo o por carretera, los cuales pueden realizar varias paradas en almacenes o nodos para llegar a su destino. Con el crecimiento económico, la globalización y la permanente exigencia de entregar mejores servicios, se genera la necesidad de aplicar conceptos básicos y específicos de Logística y Gestión de Operaciones, con la finalidad de alcanzar los objetivos trazados. Esto lleva al uso frecuente de herramientas y técnicas de Investigación de Operaciones, las cuales permiten responder de mejor manera, cuando se presentan grandes dificultades dentro de una empresa (Taha, 2012).

Las primeras actividades formales de Investigación de Operaciones (IO) se iniciaron en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial, cuando un equipo de científicos empezó a tomar decisiones con respecto a la mejor utilización del material bélico. La metodología básica de IO, se basa en modelos matemáticos, soluciones, factibilidad, optimización y cálculos iterativos. IO se puede considerar como una herramienta para la toma de decisiones, donde se busca las alternativas de decisión disponibles. La técnica de IO más importante es la Programación Lineal, que está diseñada para modelos de optimización con función objetivo y restricciones lineales. Otras técnicas incluyen la Programación (Lineal) Entera (en la cual las variables asumen valores enteros), Programación Dinámica (en la cual el modelo original puede descomponerse en sub-problemas más pequeños y manejables), la Programación de Redes (en la cual el problema puede modelarse mediante grafos y flujos), y la Programación No-Lineal (en la cual las funciones objetivo o de lado izquierdo de las restricciones del modelo son no-lineales).

Como los cálculos asociados con cada iteración suelen ser tediosos y voluminosos, es recomendable que los algoritmos de IO sean ejecutados en computadores. Algunos modelos matemáticos pueden ser tan complejos que es imposible resolverlos con cualquiera de los algoritmos de optimización disponibles y debe limitarse a la búsqueda a una solución factible lo suficientemente 'buena' (Taha, 2012).

Un área activa dentro de la Investigación de Operaciones es la Localización de Instalaciones, que es el proceso de determinar los sitios geográficos para la ocupación de una empresa, en las decisiones sobre la localización se elige entre sitios múltiples en donde los criterios, por lo general, varían según los intereses, ya sea costos, rentabilidad, tiempo de respuesta, cercanías a determinados lugares o algún otro de acuerdo con las necesidades o la actividad llevada a cabo. La importancia de este proceso estratégico tiene dos razones principales. En primer lugar, implican una inmovilización considerable de recursos financieros; y esta decisión afecta a la capacidad competitiva de la empresa, dado que una buena estimación de estos parámetros favorecerá el desarrollo de las operaciones de forma eficiente.

En diversas industrias que operan en áreas geográficas extensas, la gran cantidad de clientes servidos por las diferentes empresas ha permitido la consolidación de envíos mediante instalaciones especiales que denominadas hubs o concentradores.

Los hubs se utilizan en general para combinar, transbordar y clasificar flujos de carga o pasajeros. También es común verlos en el transporte de gran escala ya que ayudan a la reducción de costos de proporcionar el servicio, aumentan las frecuencias de despacho y los niveles de servicio, además de proteger la incertidumbre (Chase & Jacobs, 2009) .

El objetivo de consolidar los recursos en un hub es aprovechar el equilibrio que se forma entre el incremento del factor de carga del vehículo hacia un mismo destino con el incremento de la distancia que conlleva en relación el envío directo.

En los Problemas de Localización de Hubs (HLP, por sus siglas en inglés), la carga que es enviada de un mismo origen es consolidada en un hub y combinada con la carga proveniente de otros nodos, pero tienen el mismo destino.

Existen dos tipos básicos de HLPs: de asignación única y múltiple. En los problemas de asignación única, toda la carga entrante y saliente de cada nodo es llevada a un único hub. En los HLPs de asignación múltiple, cada centro de demanda (nodo) puede enviar o recibir flujos por al menos un hub.

La Localización de Hubs ha sido un área fértil para los investigadores en diferentes áreas, transporte, geografía, diseño de redes, economía, etc.(Campbell & O'Kelly, 2012).

Dentro de IO es común expresar el modelo mediante expresiones matemáticas que involucran sumatorias, condiciones y parametrizaciones diversas. Por esto se han creado

programas computacionales dirigidos a la construcción y resolución de modelos de optimización. Por ejemplo, AMPL (A Mathematical Programming Lenguaje) (www.ampl.com) es un lenguaje de programación algebraica para describir y solucionar problemas de gran complejidad para la computación matemática que se enfoca en modelos de Programación Lineal, Programación Entera y Programación No-Lineal.

AMPL es un software que permite especificar como queremos resolver el problema, lo que permite utilizar diversos tipos de algoritmos y resolver grandes variedades de modelos, también tiene una gran cantidad de motores de optimización que pueden ser ejecutados, donde destaca CPLEX, como solver para problemas de diversos tamaños, desarrollado por IBM ILOG que soporta problemas de optimización lineal y cuadráticas en variables enteras continuas y enteras. En la **Figura 1**, podemos ver el proceso que se realiza para solucionar un modelo. Donde ingresa a AMPL para ser interpretado y resuelto por algún solver.

La versión 12.7.0 de CPLEX, por primera vez se incluye la descomposición de Benders (BD), también conocido como Descomposición por partición de variables. La

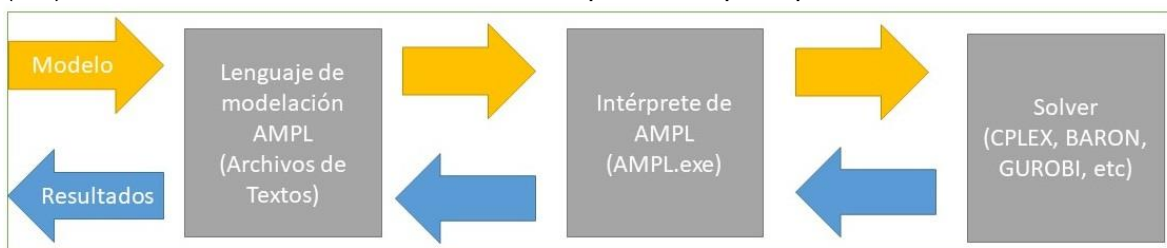


Figura 1: Diagrama de solución de modelos por AMPL. Fuente: Elaboración Propia

Descomposición de Benders busca descomponer el problema en dos partes, el Master Problem (MP) y el Sub-Problem (SP). En la actualidad no existen estudios que nos indique cómo se comporta la descomposición de Benders incorporada en CPLEX 12.7.0.

El presente trabajo busca caracterizar dicho comportamiento, aplicado a problemas de localización de hubs. Se busca definir el comportamiento de la descomposición de Benders mediante un estudio computacional en CPLEX 12.7.0 y establecer de mejor forma bajo qué variables o tipos de problemas funciona más eficientemente.

I.1 Importancia de resolver el problema

La programación matemática es un área de la Investigación Operativa que atrajo mucho interés cuando se comenzó a desarrollar diferentes tipos de métodos para resolver los problemas de forma más eficiente. La aplicación matemática era dificultosa por las limitaciones computacionales que existían. Es por esto que surgieron diferentes métodos de descomposición para ayudar a resolver de mejor manera los problemas que surgían en la realidad. El método de DB (también conocido como variable de particionado) se ha convertido en uno de los más utilizados en la actualidad, porque aprovecha la estructura del problema y descentraliza la carga computacional. Existe un interés creciente por DB al

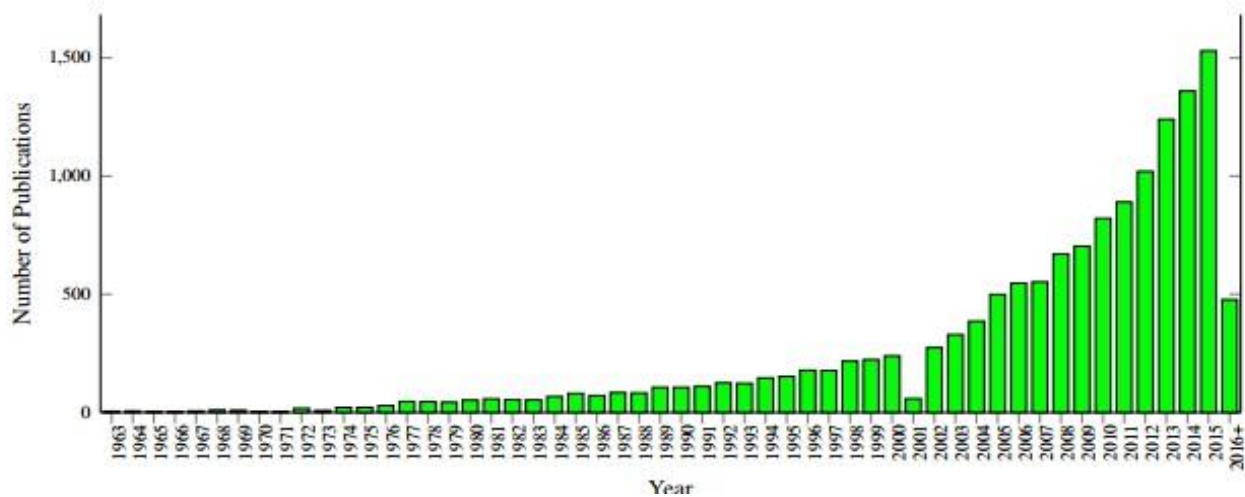


Figura 2: N° de estudios por año sobre Descomposición de Benders. Fuente: (Rahmaniani, et al. 2016)

largo de los años (ver Figura 2). La aplicaciones exitosas se encuentran en muchos campos, como Cuidado de la salud (Loung, 2015), La energía y Gestión de los recursos (Cai, et al. 2001), Diseño de proceso químico (Zhu & Kuno, 2003) Planificación y Programación (Hooker, 2007) así como Transporte y Telecomunicaciones (Costa, 2005) Esta investigación se basará en la aplicación de este método para los problemas fundamentales de localización de hubs.

El algoritmo DB se propuso inicialmente para una clase de problemas de Programación Lineal de número enteros mixtos (MILP). Pero dado la eficacia de este método se utiliza en problemas Lineales, No-Lineal, Entero, Estocásticos, Multi-Etapa, y otros problemas de optimización (Rahmaniani, et al. 2016). Se presenta a continuación la formulación básica de la descomposición de Benders.

Consideremos un MILP de la forma,

Minimizar : $f^T y + c^T x$

Sujeto a : $Ay = b$

$$By + Dx = d$$

$$x, y \geq 0$$

$$y \in \mathbb{Z}$$

Como se menciona anteriormente esta formulación se puede separar en dos partes. En el Master Problem que contiene las variables que son enteras y el Sub-problem que contiene las variables continuas, por lo que este último cumple con ser un problema de Programación Lineal. Al resolver el MP obtendremos el valor de las variables enteras, las cuales se utilizan como parámetros para resolver el Sub-problem, que es un problema lineal donde las variables enteras son un dato. Para definir cuantas veces iterar en la solución del problema se tendrá que establecer la cota superior e inferior. La cota superior corresponde al valor de la función objetivo original del problema y la cota inferior corresponde al valor de la función objetivo del Master Problem, por lo tanto, se tendrá que iterar hasta que estos valores sean iguales o lo suficientemente cercanos.

La investigación sobre el método DB todavía no está completa, ya que hay muchos desafíos y preguntas abiertas. En términos generales, el método DB, ha sido adecuado para problemas con variables “complicadas”, las cuales, cuando se encuentra su valor, producen un problema significativamente más fácil de manejar. Por ejemplo, haciéndose adecuado para algoritmos especializados o dar la oportunidad de transformar un problema no convexo a uno convexo (Rahmaniani, et al. 2016). Hoy en día este método ha ayudado considerablemente a la resolución de HLP, lo que ha llevado a resolver problemas de mayor tamaño y más cercano a la realidad, por lo que caracterizar su comportamiento en CPLEX 12.7.0 con distintas formulaciones, es de importancia para la actualidad.

I.2 Discusión bibliográfica

En esta subsección se llevará a cabo una revisión bibliográfica de los estudios más relevantes que van a utilizarse para cumplir el objetivo del estudio. Se han revisado varios artículos especializados en localización y asignación de centros de distribución, haciendo especial atención en aquellos que se presenta descomposición de Benders (DB).

Los problemas de localización de hubs se evidencian en muchas situaciones reales en la actualidad, por lo que ha sido un área amplia de investigación para diferentes disciplinas. Si se revisa la literatura nos podemos encontrar que a finales de los años 60 se comenzó a estudiar los problemas de localización de hubs en una red (Goldman, 1969). Siendo el primero en tratar el problema de ubicar n centros en una red, con la finalidad de minimizar el costo total de transporte asociado a su uso. Pero no sería hasta después de los años 80 con los trabajos de (O'Kelly, 1986) y (O'Kelly, 1987) que se evidenciará un fuerte incremento de publicaciones, que aportarían diferentes variantes a la solución de problemas de localización de hubs.

Los transportes frecuentemente emplean arquitecturas Hub and Spoke (H&P), ver Figura 3. En ella, existen nodos con mayor infraestructura, que realizan labores de ordenamiento, clasificación y conmutación. El diseño de redes con topología hub and spoke está motivado por la existencia de economías en escala, que son la disminución de los costos unitarios medios debido al aumento de flujo transportado entre varios pares de Origen-Destino (Basso & Jara-Díaz, 2006; Kimms, 2006).

En la industria aérea de transporte de pasajeros en Estados Unidos, los sistemas H&P cobran fuerza como resultado de la liberación de las compañías aéreas, por las restricciones impuestas por el gobierno de Estados Unidos (Airline Desregulación Act of 1978). Esta topología de red se caracteriza por la existencia de hubs donde la carga se manipula, para agruparla y distribuirla en otras rutas.

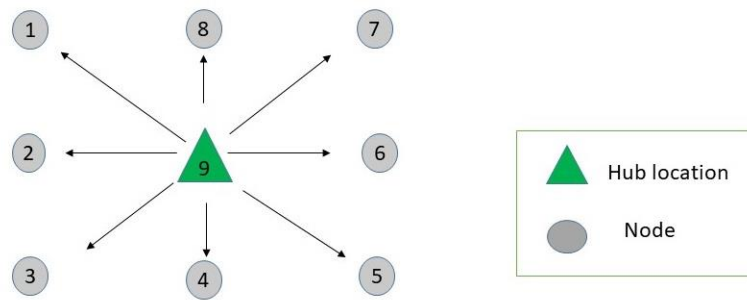


Figura 3: Topología Hub and Spoke. Fuente: Elaboración propia

Como ya se ha mencionado, (O'Kelly, 1987) fue el primero en presentar una formulación matemática para los HLP, inspirado por las redes de las líneas áreas de pasajeros. El autor propone una programación entera cuadrática aplicando asignación simple, considerando hubs sin capacidad y usando un número p fijo de hubs. El objetivo de esta formulación es minimizar el costo total de transporte (tiempo, distancia, etc.), dado una serie de n puntos de demanda.

Posteriormente se fueron añadiendo nuevas variantes a la formulación original, donde (Campbell, 1992) fue el primero en formular el problema de asignación múltiple para p -Hub Median Problem (pHMP) como un modelo de programación lineal entera. (Campbell, 1994) es quién formuló el problema de asignación múltiple para pHMP con los umbrales de flujo y los costos fijos. Además, definió un conjunto fundamental de problemas de HLP que sirvieron para la investigación posterior.

Ernst & Krishnamoorthy (1996) estudian los HLP de asignación única desde otro punto de vista, para así poder resolver problemas de gran tamaño más cómodamente. Los autores utilizan una formulación en que el transporte entre hubs se ve como un problema de transporte commodity.

Kara & Tansel (2000) proporcionaron varias formulaciones lineales para p -Hub Center Problem de asignación única, los problemas lineales resueltos computacionalmente con CPLEX dieron mejores resultados que los obtenidos por Campbell (1994). Ernst & Krishnamoorthy (1998) formulan y resuelven el mismo problema de Ernst & Krishnamoorthy (1996) pero con asignación múltiple. Ebery & Ernst (2000) presentan una formulación de

HLP con capacidad y asignación múltiple basada en el planteamiento de Ernst & Krishnamoorthy (1996) y Ernst & Krishnamoorthy (1998), aplicando la formulación lineal de Campbell (1994). El resultado es una reducción del tamaño del problema.

Marin (2005) propuso una formulación que podía resolver hasta la optimalidad una red de 50 nodos. Posteriormente Landete & Marin (2006) desarrollaron hasta hoy unas de las formulaciones más ajustadas y más pequeñas para problemas de asignación múltiple pHMP, que será analizada en la subsección 1.5, donde se propusieron restricciones más estrictas para acortar los tiempos de solución.

Existen distintas instancias utilizadas ampliamente en la literatura como benchmark. El primero es el conjunto CAB25, correspondiente al tráfico pasajero de aerolíneas de 25 ciudades estadounidenses, que fue evaluada por la Junta Aeronáutica Civil (CAB) en 1970. Su importancia radica en su utilización por casi todos los investigadores del área. Por su parte, Ernst & Krishnamoorthy (1996) utilizaron un conjunto de datos que procede de un caso real de distribución de correos de Australia Post (AP) en Sydney, que constaba de 200 nodos que representaban los distritos. También es importante mencionar el conjunto de datos de Turquía proveído por Tan & Kara (2007) para el transporte terrestre entre 81 ciudades, que ayudaron a replicar instancias del mundo real parecidas y aplicaciones de diferentes alcance.

Hoy existen nuevas áreas de interés como localizaciones competitivas de hub, integración de cosas y servicios, modelos con elementos estocásticos y ubicación de hub dinámicos. La investigación descrita muestra como los estudios en el área han sufrido modificaciones con los años, con el fin de responder antes redes de distribución más complejas.

I.3 Contribución del trabajo y su importancia

En síntesis, las principales contribuciones científicas de esta tesis son las siguientes:

1. Estudio computacional sobre la solución de problemas de localización de hubs usando el optimizador CPLEX 12.7 que actualmente soporta la descomposición de Benders.
2. Caracteriza el comportamiento de la descomposición de Benders en CPLEX para HLPs.
3. Se establece bajo qué condiciones o tipos de problemas la descomposición de Benders funciona adecuadamente en CPLEX 12.7.0.

I.4 Objetivo general

Caracterizar el comportamiento de la descomposición de Benders en CPLEX 12.7.0 respecto a distintas formulaciones de problemas de localización de hubs.

I.4.1 Objetivos específicos

1. Establecer que la literatura revisa sobre HLP y BD sea la adecuada para la investigación.
2. Verificar que la estructura de los modelos seleccionados para el estudio computacional sean los adecuados.
3. Determinar si las instancias estudiadas representan problemas reales.
4. Comparar los resultados de las diferentes instancias.
5. Contribuir con el estudio de Benders en CPLX.

I.5 Estado del arte

Han pasado más de cinco décadas desde que la descomposición de Benders (BD) fue propuesta por Benders (1962), con el objetivo principal de abordar los problemas con “variables complicadas” es decir las variables que hacen que nuestro problema se complique.

Se han desarrollado muchas extensiones para aplicar el algoritmo a un rango más amplio de problemas. Geoffrion (1974) observó que la formulación de los problemas tiene un impacto directo con el rendimiento de BD.

Por su parte, Magnanti & Wong (1981) demostraron que una formulación con un LP con relajación más elaborada tendrá un mejor rendimiento y se estableció que más del 90% del tiempo total de la ejecución BD se usa en la resolución del MP. Por lo que mucha investigación se dedicó a explorar formas de mejorar la convergencia del algoritmo reduciendo el número de iteraciones y el tiempo requerido para cada iteración.

La estrategia utilizada para el MP y Sub-problem es fundamental para la construcción de los algoritmos porque tiene relación con su eficacia, ya que se determina tanto la dificultad de los problemas y la calidad de las soluciones.

Es así que en Rahmaniani et al. (2016) se desarrollaron la siguiente taxonomía para BD:

1. **Estrategia de descomposición:** Especifica como el problema se divide para obtener el MP y Sub-problem inicial.
2. **Generación de soluciones:** Es el método utilizado para establecer los valores de prueba para las “variables complicadas”. La estrategia clásica es resolver el MP sin modificación la otra alternativa heurística es la modificación del MP que se utiliza para generar soluciones más rápidas o encontrar mejores soluciones.
3. **Procedimiento de solución:** Se refiere a los algoritmos utilizados para el MP y Sub-problem, las técnicas más utilizadas son el método Simplex y Branch and bound.

4. **Generación de cortes:** Es la estrategia utilizada para generar cortes viables y optimalidad en el problema, se hace regularmente para resolver el Sub-problem obtenido a partir de la descomposición.

I.5.1 Optimizadores

En la actualidad existen diferentes tipos de optimizadores que nos ayudan a la solución de problemas, uno de ellos es Gurobi. Se ha utilizado para producir mejoras medibles en una amplia gama de funciones de negocio de alto valor, incluyendo la producción, distribución, compras, finanzas, inversiones de capital y los recursos humanos. Gurobi ha demostrado ser robusto y escalable, y es capaz de resolver los problemas que afectan a millones de variables de decisión, tiene una amplia gama de APIs (Interfaz de Programación de Aplicaciones) para minimizar la curva de aprendizaje, donde destaca la de Python (www.gurobi.com).

IBM ILOG CPLEX, es uno de los optimizadores más utilizados en la actualidad permite disponer de un sistema de soporte para la toma de decisiones mediante análisis para mejorar la eficacia, reducir costes y aumentar la rentabilidad. Ofrece la potencia necesaria para resolver grandes problemas del mundo real y acepta problemas de Programación Lineal, Programación Entera Mixta, Programación Cuadrática y Programación con Restricciones Cuadráticas. La última actualización de CPLEX (versión 12.7) ofrece la DB en forma integrada, lo que lo hace un solver más atractivo de estudiar.

I.5.2 Formulación más ajustada

Dentro de todas las formulaciones que se investigaron destaca la de (Landete & Marin, 2006) una de las más ajustada y pequeña para los problemas de asignación múltiple. Esta será el punto de referencia para el estudio computacional. A continuación, se describirá la formulación propuesta por los autores. Las variables que se establecen son la cantidad de pasajeros transportados de Origen-Destino (OD). Los costos de transporte por unidad de flujo OD. La porción del flujo en una trayectoria determinada y la variable binaria para la ubicación de hub. Donde la función objetivo será minimizar el coste total para la colección, distribución y transferencia. Para las restricciones se propone,

1. Que cada flujo Origen-Destino, sea enviado a través de algún Hub.
2. Requiere que se seleccione exactamente un número de Hubs.

3. Todos los Hubs seleccionados, deben estar disponibles para enviar los flujos de cualquier ruta seleccionada.
4. Explica el dominio de las variables.

I.6 Propuesta metodológica

Esta subsección se propondrán los pasos metodológicos necesarios para el estudio computacional de Descomposición de Benders en CPLEX 12.7.0.

1. Estudio del problema.

Revisar la literatura existente sobre HLP y BD. Para conocer los mejores modelos propuestos para los diferentes problemas existentes.

2. Análisis de los modelos.

Determinar la importancia del BD para las diferentes formulaciones de HLP. Posteriormente clasificar la estructura de los modelos que se utilizaran para la investigación.

3. Periodo de prueba.

Como en la actualidad no se ha medido el desempeño computacional del BD, se generarán instancias de diferentes tamaños, que se asemejen a la realidad.

4. Desarrollo de las pruebas computacionales.

Dado los diferentes niveles de complejidad de los modelos, se utilizará el software CPLEX 12.7.0 como optimizador especializado para la solución eficiente de los modelos.

5. Recopilación de resultados computacionales.

Después de desarrollar un conjunto de pruebas, se analizarán los resultados obtenidos, para ser comparados con otro tipo de formulaciones existentes.

6. Validación y clasificación

Se revisará la eficiencia del BD, para las diferentes formulaciones propuesta. Finalmente se establecerá bajo que variables y tipos de problemas funciona.

I.7 Bibliografía

- A. Geoffrion. (1974). Geoffrion 1974 Lagrangean relaxation.
- Alumur, S., & Kara, B. Y. (2008). Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190(1), 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.06.008>
- Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems .
BENDERS , J . F . Nutzungsbedingungen Kontakt / Contact.
- Campbell, J. F. (1992). Location and allocation for distribution systems with transshipments and transportation economies of scale, 40, 77–99.
- Campbell, J. F. (1994). Theory and Methodology Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72, 387–405.
[https://doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)90318-2](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)90318-2)
- Campbell, J. F., & O’Kelly, M. E. (2012). Twenty-Five Years of Hub Location Research - Tags: TRANSPORTATION Science (Periodical) NETWORK hubs. *Transportation Science*, 46(2), 153–169. <https://doi.org/10.1287/trsc.1120.0410>
- Costa, A. M. (2005). Costa, A. M., 2005. A survey on Benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. *Computers & Operations Research*.pdf.
- Ebery, J., & Ernst, A. (2000). The capacitated Múltiple allocation hub location problem : Formulations and algorithms, 120, 614–631.
- Ernst, A. T., & Krishnamoorthy, M. (1996). EFFICIENT ALGORITHMS FOR THE UNCAPACITATED SINGLE ALLOCATION_p-HUB MEDIAN PROBLEM, 4(3), 139–154.
- Ernst, A. T., & Krishnamoorthy, M. (1998). Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated Múltiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, 104(96), 100–112. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(96\)00340-2](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(96)00340-2)
- Goldman, A. J. (1969). Optimal Locations for Centers in a Network, (March 2017).
- Hooker, J. N. (2007). Hooker, J. N., 2007. Planning and scheduling by logic-based Benders decomposition. *Operations Research* 55 (3), 588–602.pdf.
- Jara-Díaz, B. &. (2006). The cost of transport.

- Kimms, A. (2006). Economies of Scale in Hub & Spoke Network Design Models : We Have It All Wrong.
- Landete, M., & Marin, A. (2006). New formulations for the uncapacitated Multiple allocation hub location problem, *172*, 274–292. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.09.047>
- Loung, C. (2015). Luong, C., 2015. An examination of benders decomposition approaches in large-scale healthcare optimization problems.
- Magnanti, A. T. L., & Wong, R. T. (1981). Accelerating Benders Decomposition : Algorithmic Enhancement and Model Selection Criteria, *29*(3), 464–484.
- Marin, A. (2005). Uncapacitated Euclidean Hub Location : Strengthened Formulation , New Facets and a Relax-and-cut Algorithm, 393–422. <https://doi.org/10.1007/s10898-004-6099-4>
- O’Kelly, M. E. (1986). The Location of Interacting Hub Facilities, (December 2014).
- O’Kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities.
- R. Rahmaniani, T. Crainic, M. Gendreau, W. R. (2016). The Benders Decomposition Algorithm: A Literature Review.
- R.Chase, F.Jacobs, N. A. (2009). *Investigacion de operaciones-Produccion y cadena de suministros*.
- Taha, H. a. (2012). *Investigación de operaciones - Modelo de transbordo. Investigación de Operaciones*. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Tan, P. Z., & Kara, B. Y. (2007). A Hub Covering Model for Cargo Delivery Systems. <https://doi.org/10.1002/net>
- X. Cai, et al. (2001). Cai, X., McKinney, D. C., Lasdon, L. S., Watkins, D. W., 2001. Solving large nonconvex water resources management models using generalized.
- Y. Kara, C. T. (2000). On the single-assignment p -hub center problem q, *125*, 648–655.
- Y. Zhu, T. K. (2003). Zhu, Y., Kuno, T., 2003. Global optimization of nonconvex MINLP by a hybrid branch-and-bound and revised general Benders decomposition.pdf.

II. ARTICULO PROPUESTO

“ESTUDIO COMPUTACIONAL DE PROCEDIMIENTOS DE DESCOMPOSICION AUTOMATICA DE MODELOS FUNDAMENTALES DE LOCALIZACION DE HUBS”

“COMPUTATIONAL STUDY OF AUTOMATIC DECOMPOSITION PROCEDURES OF FUNDAMENTAL MODELS LOCALIZATION HUBS”

MATÍAS OLATE

Universidad Nacional Andrés Bello, matiasolate@outlook.es

RESUMEN: Existen diferentes problemas de localización de hubs. En la literatura no se encontraron estudios sobre el comportamiento de estos problemas, utilizando el método de la descomposición de Benders. Se presentan diferentes problemas de localización de hubs para ser resueltos por el método de Descomposición de Benders en el solver CPLEX 12.7, se busca caracterizar el método para diferentes instancias y parámetros. Midiendo el rendimiento de cada modelo.

PALABRA CLAVES: Localización de hubs, Descomposición de Benders, CPLEX 12.7.

ABSTRACT: there are different problems of hubs location. in the literature there is not studies about the behavior of hubs location, using Benders Decomposition. This paper present different hubs location problems resolved by Benders Decomposition using the optimizer CPLEX 12.7. It is sought to characterize the method for different instances and parameters where performance of each model is measured

KEYWORDS: Hubs location, Benders Decomposition, CPLEX 12.7.

1. INTRODUCCION

La Investigación de Operaciones (IO), según Hamdy A. Taha (2012), aspira a determinar el mejor curso de acción óptimo de un problema de decisión con restricción de recursos limitados, aplicando técnicas matemáticas para representarlo por medio de un modelo y analizar problemas de decisión. Las primeras actividades formales de Investigación de Operaciones (IO) se iniciaron en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial para la toma de decisiones en la utilización de material bélico. La terminología básica de IO, se basa en modelos matemáticos, soluciones, factibilidad, optimización y cálculos iterativos. Se puede considerar como una herramienta para la toma de decisiones, donde se busca las mejores alternativas disponibles. La IO se ha aplicado en diferentes áreas, como manufactura, finanzas, distribución, transporte entre otras.

Un área activa dentro de la Investigación de Operaciones es la Localización de Instalaciones, que es el proceso de determinar los sitios geográficos para la ocupación de una empresa, almacenes, centros de distribución, etc. está presente tanto a las empresas nuevas como en las existentes, y su solución es crucial para el éxito eventual de una compañía. Sobre la localización se elige entre sitios múltiples en donde los criterios, por lo general, varían según los intereses, ya sea costos, proximidad clientes, proveedores, infraestructura, riesgos políticos entre otros. Existen diferentes técnicas para seleccionar los sitios factibles, donde destacan:

1. Calificación de factores
2. Transporte de programación lineal
3. Método centro de masas

La localización de instalaciones ayuda a resolver uno de los problemas más amplios; mover los bienes por toda la cadena de suministros (R.Chase, F.Jacobs, 2009).

La gran cantidad de clientes servidos por las diferentes empresas ha permitido la consolidación de envíos mediante instalaciones especiales, que se denominan hubs. En los Problemas de Localización de Hubs (HLP, por sus siglas en inglés), consiste en ubicar una o varias instalaciones, donde se combinan los flujos provenientes de diferentes orígenes para ser enviados a un mismo destino con el objetivo principal de reducir los costos operacionales e incrementar la rapidez de los flujos que circulan por la red. Según Estrada (2007) existen diferentes topologías básicas de distribución como Peddling, many-to-many

y hub-and-spoke (H&P). Los transportes frecuentemente emplean arquitecturas H&P, dado que es una red de distribución que se caracteriza por la existencia de hubs.

En esta topología los nodos que concentran el flujo de la red realizan labores de ordenamiento, clasificación y conmutación. Existen dos tipos básicos de HLPs: de asignación única y múltiple (Figura 4). En los problemas de asignación única (Figura 4.a), toda la carga entrante y saliente de cada nodo es llevada a una única instalación (hub). En los problemas de asignación múltiple (Figura 4.b), cada centro de demanda (nodo) puede enviar o recibir flujos por al menos una instalación (hub).

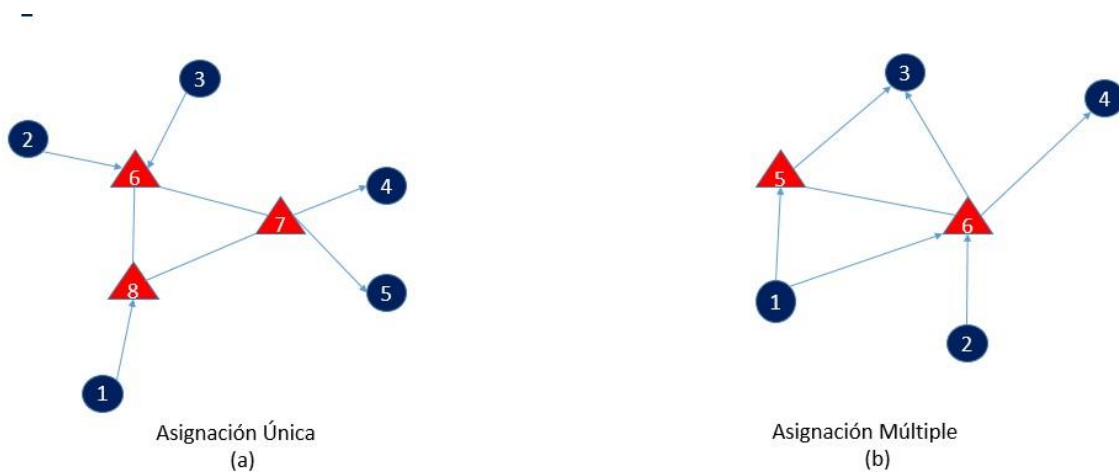


Figura 4 : Ejemplo para los tipos de asignación. Fuente: Elaboración propia.

Es común ver en diferentes campos, el uso de métodos matemáticos, para ayudar a tener soluciones más rápidas y efectivas. El método de Descomposición de Benders (BD, por sus siglas en inglés) propuesto por (Benders, 1962), es uno de los más utilizados en la actualidad, porque aprovecha la estructura de los problemas y descentraliza la carga computacional. Este método tiene como objetivo principal abordar los problemas con “variables complicadas”, se basa en un algoritmo de relajación que divide el problema original en dos partes más pequeñas el Master Problem (MP) y el Sub-problem (SP). El primero es una versión relajada del problema original que contiene las variables enteras, clasificadas como variables complicadas, y sus restricciones. El segundo es una versión dual del problema original que contiene las variables continuas y cumple con ser un problema de Programación Lineal. El algoritmo se soluciona por iteraciones continuas en el MP seguido por el SP. Para la solución de estos métodos matemáticos existen optimizadores computacionales los cuales ofrecen la potencia necesaria para abarcar

problemas de tamaños reales. Uno de los más utilizados es CPLEX desarrollado por IBM ILOG que acepta problemas de Programación Lineal, Programación Entera Mixta, Programación Cuadrática y Programación con Restricciones Cuadráticas. La última versión de este solver (CPLEX 12.7) ofrece el BD, en el cual no existen estudios que puedan demostrar los resultados de este método en CPLEX para problemas de HLPs.

El BD es un método que ha ayudado considerablemente a la resolución de HLP, lo que ha llevado a estudiar problemas con mayor tamaño y más cercano a la realidad. La contribución de este trabajo es caracterizar el comportamiento de dicho método matemático, aplicado a los modelos más significativos para la localización de hubs, por medio de un estudio computacional en CPLEX.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera: la sección 2 proporciona una revisión de literatura, con las contribuciones más importante realizadas por diferentes autores. La sección 3 se describe el problema a resolver. Luego, en la sección 4 se presentarán los experimentos computacionales realizados y finalmente en la sección 5 las conclusiones realizadas y las futuras líneas de trabajo.

2. REVISION DE LITERATURA

2.1 Modelos fundamentales para HLP

La Localización de Hubs, es un área nueva dentro de la investigación. (Goldman, 1969) fue unos de los primeros en abordar un problema de ubicar n centros en una red, con el objetivo de minimizar todos los costos asociados al transporte. Pero años después (O'Kelly, 1987) presento la primera formulación matemática para los HLP estudiando una red de pasajeros de líneas áreas. Casi todos los modelos de localización de hubs definidos en la literatura tienen diferentes extensiones. Las siguientes subsecciones de este documento se dedican a clasificar los diferentes tipos de formulaciones y contribuciones más importantes para HLP, finalizando con las líneas de trabajo activas.

2.1.1 The p-hub median problem

El objetivo de p-hub median problem (pHMP) es minimizar el costo total del transporte (tiempo, distancias, etc.) necesario para servir el conjunto dado de flujos de n nodos de demanda entre pares de origen-destino (OD) y el número de hubs (p) a localizar. La

literatura que considera el pHMP se analizara en dos subsecciones diferentes: asignación única y asignación múltiple.

2.1.2 p-Hub Median Problem con asignación única

Las primeras heurísticas para el problema de la asignación única de pHMP fueron propuestas por O'Kelly (1987). Estas enumeran todas las opciones posibles de ubicaciones de p . en la primera heurística (HEUR1) n se asignan al p más cercano y en la segunda heurística (HEUR2) se asignan al primero y segundo hubs más próximo, siendo mejor en términos del valor de la función objetivo.

Campbell (1994) estableció la primera formulación de programación de números lineales enteros para pHMP. El autor también formulo el problema con los umbrales de flujo, es decir el flujo mínimo necesario para permitir el servicio en un enlace. Ernst and Krishnamoorthy (1996) proponen una formulación de LP diferente que requiere menos variables y restricciones, con la finalidad de resolver problemas más grandes. La transferencia entre hubs se trató como un problema de flujo multicommodity, siendo la mejor formulación matemática en términos de requisitos de tiempo de cálculo.

Campbell (1996) propuso dos nuevas heurísticas llamadas MAXFLO y ALLFLO, esta consiste en derivar las soluciones pHMP de asignación única desde los pHMP de asignación múltiple, para este tipo de heurísticas las asignaciones se realizan según diferentes reglas, pero las decisiones de ubicación son las mismas. Ernst y Krishnamoorthy (1998) propusieron otro algoritmo de ramificación y enlace basado en la ruta más corta. A diferencia de los algoritmos tradicionales este no comienza con un único nodo raíz, sino con un conjunto de nodo raíz. Este autor presenta el procedimiento de solución exacta más eficiente. Ebery (2001) presento una formulación donde los resultados de esta indican que para grandes problemas con $p=2$ o $p=3$ usando CPLEX mejoran con respecto al enfoque del camino más corto propuesto por Ernst and Krishnamoorthy (1998).

2.1.3 p-Hub Median Problem con asignación múltiple

Para los problemas de asignación múltiple cada nodo de demanda puede asignarse a más de un hubs, por lo que pueden recibir y enviar flujos por más de un hubs. El primer autor en formular un pHMP de asignación múltiple como un programa entero lineal fue Campbell (1992).

Campbell (1994) afirmó que, en falta de restricciones de capacidad en los enlaces, hay una solución óptima donde todas las variables de X_{ijkm} se establecen en 0 o 1, ya que el flujo total para cada par OD debe ser enviado por el par de menor costo. El autor también formuló el pHMP de asignación múltiple con umbrales de flujo y costos fijos lineales.

Ernst y Krishnamoorthy (1998) propusieron una nueva formulación, basado en la idea que propusieron para la versión de asignación única en Ernst y Krishnamoorthy (1996) presentaron una LP basado en branch and bound. Fortalecieron el límite inferior identificando las desigualdades y agregándolas a la LP.

2.1.4 Localización de hubs con costos fijos

Para los pHMP, se ignoran los costos fijos de las instalaciones de apertura. O'Kelly (1992) presentó el problema de ubicación de hub de asignación única con costos fijos, así convierte la cantidad de hub en una variable de decisión.

Ernst y Krishnamoorthy (1999) presentaron dos nuevas formulaciones para HLP capacited de asignación única, siendo una nueva versión modificada de las formulaciones enteras mixtas anteriores desarrolladas para el problema de pHMP. La primera se basa en el recorrido simulado y el otro en el descenso aleatorio. También propusieron algunos procesamientos previos para mejorar el rendimiento del algoritmo Brand and bound.

Ca'novas et al. (2007) presentó una nueva heurística para asignación múltiple uncapacitated basada nuevamente en la técnica dual-ascent. Luego implementaron esta heurística dentro del método branch-and-bound.

Ebery et al. (2000) considero la versión de asignación múltiple capacitated. Esta formulación es similar a la propuesta por Ernst y Krishnamoorthy (1998) excepto que no hay restricción en el número de hubs a ubicar.

2.1.5 The p-hub center problem

El pHCP (p-hub center problem) es un problema tipo minimax que es análogo al p-center problem. Campbell (1994) fue el primero en formular y debatir el pHCP en la literatura sobre hub, para lo que definió tres diferentes tipos de problemas para p-hub center.

1. Se minimiza el costo máximo para cualquier par OD.

2. Se minimiza el costo máximo por movimiento en un único enlace (O-Hub, Hub-Hub, Hub-D)
3. Se minimiza el costo máximo entre un hub y OD (Centro de vértice)

Kara y Tansel (2000) proporcionaron varias formulaciones lineales para el pHCP. Proporcionaron linealizaciones diferentes del modelo propuesto por Campbell (1994). A través del análisis computacional con CPLEX, su nueva formulación es superior a las anteriores propuestas. También proporcionaron una formulación combinatoria del pHCP. Ernst et al. (2002) estudiaron este tipo de problema para asignación múltiple. Propuso dos nuevas formulaciones y demostró que el problema es NP-hard. Presentaron un método heurístico para asignación única y múltiple. Para esta última propusieron una versión más pequeña con el algoritmo de branch and bound basado en ruta, muy similar al desarrollado por Ernst y Krishnamoorthy (1998) para pHMP.

Campbell et al. (2007) también estudio el sub-problema de asignación. Presentaron varios resultados de complejidad y proporcionaron formulaciones de programación completas para casos uncapacited/capacitated.

2.1.6 Hub covering problem

En los problemas de cobertura de hubs los nodos de demanda se consideran cubiertos si se encuentra dentro de una distancia específica de un hub que pueda atender su demanda. Al igual que en el pHCP, Campbell (1994) definió tres criterios de cobertura para Hubs.

El par de OD (i, j) estos cubiertos por los Hubs k y m si:

1. El costo de i a j a través de k y m no excede un valor específico.
2. El costo para cada enlace en el camino de i a j a través de k y m no excede un valor especificado.
3. Cada uno de los enlaces OD y DH cumple con valores especificados por separado.

Kara y Tansel (2003) estudiaron el problema de cobertura de asignación única y demostraron que es NPhard. Los autores presentaron y compararon diferentes linealizaciones del modelo cuadrático original. Unos años después Ernst et al. (2005) presentaron una nueva formulación para asignación única similar a la propuesta en Ernst et al. (2002) para el pHCP, esta nueva formulación se compara con la anterior presentada

en Kara y Tansel (2003) reemplazando una restricción por su forma agregada. La formulación funciona mejor en términos de requisitos de tiempo de CPU.

Tabla 1: Revisión de literatura para problemas de localización de hubs

Autor	N° Hubs-Asignación	Objetivo	uncapacited/capacitated
O'Kelly (1992)	P-Única	p -hub median problem	Uncapacited
Campbell (1992)	P-Única	Fixed Cost	Uncapacited
Campbell (1994)	p -Múltiple	p -hub median problem	Uncapacited
Campbell (1994)	p -Única	p -hub median problem	Uncapacited
Campbell (1994)	p -Múltiple	p -hub median problem	Uncapacited
Campbell (1994)	p -Única	p -hub center problem	Uncapacited
Ernst y Krishnamoorthy (1996)	p -Única	Hub covering problems	Uncapacited
Campbell (1996)	p -Única	p -hub median problem	Uncapacited
Ernst y Krishnamoorthy (1998)	p -Única	p -hub median problem	Uncapacited
Ernst y Krishnamoorthy (1998)	p -Única	p -hub median problem	uncapacited
Ernst y Krishnamoorthy (1999)	p -Múltiple	p -hub median problem	Capacited
Kara y Tansel (2000)	p -Única	Fixed Cost	Uncapacited
Ebery et al. (2000)	p -Única	p -hub center problem	Capacited
Ebery (2001)	N-Múltiple	Fixed Cost	Capacited
Ernst et al. (2002)	p -Única	p -hub center problem	Uncapacited
Kara y Tansel (2003)	p -Múltiple	p -hub center problem	Uncapacited
Ernst et al. (2005)	N-Única	p -hub center problem	Uncapacited
Ca'novas et al. (2007)	p -Única	Hub covering problems	Uncapacited
Campbell et al. (2007)	p -Múltiple	Fixed Cost	Uncapacited

2.2 líneas de trabajo activas

A continuación, se describen brevemente las diferentes áreas de trabajo para HLP, con sus más recientes investigaciones.

2.2.1 Resolución de problemas de gran envergadura

Con los años se ha intentado resolver instancias más grandes con mejores formulaciones matemáticas. Con los avances realizados por diferentes autores, ahora pueden resolver óptimamente problemas más grandes de localización de hubs. Contreras, Cardeau y Laporte (2011) resolvieron problemas hasta 500 nodos (250.000 pares OD) usando descomposición de Benders para problemas de asignación múltiple uncapacited.

2.2.2 Topologías alternativas

Diferentes investigadores han desarrollado recientemente nuevos modelos que brindan alternativas diferentes para tener hubs totalmente conectador por arcos con descuentos. Alumur, Kara, y Karasan (2009) (O 'Kelly 2009) Contreras, Fernández, y Marín (2010) (Campbell 2010).

2.2.3 Localización dinámica de hubs

La mayoría de los modelos a la fecha se preocupan de la localización de hubs como un caso estático, dado el costo en instalaciones de grandes hubs. Pero algunos casos los hubs son instalaciones menos costosas y su dinámica o configuraciones posibles están abiertas a muchas aplicaciones. Por ejemplo, el autor Campbell (2010) exploró una dinámica donde los hubs aislados pueden usarse en respuesta a una demanda creciente en una región fija y en respuesta a la expansión geográfica.

2.2.4 Integración de costos y servicios

Tanto los costos como el servicio son importantes para la mayoría de las redes de hubs, el valor total de la localización de un hubs es probablemente mejor si en el modelo consideramos estos puntos. Un ejemplo de esto es minimizar el costo con limitaciones de tiempo de viaje OD definiendo un tiempo de transporte Alumur y Kara (2009). Los modelos que combinan el costo y distancia de viaje pueden considerarse modelos fundamentales de

la localización de hubs, mediante el uso de promedio ponderado del costo de viaje y distancia en el objetivo.

2.2.5 Localización competitiva de hubs

Existen algunos sistemas de transporte basados en hub que operan sin competencia, como el transporte público, pero para la mayoría del sector privado compiten con múltiples proveedores de servicios. Cuando dos empresas de rasgos similares compiten por clientes, la ubicación, las redes y los patrones de tráfico pueden ser fundamentales. Eiselt y Marianov (2009) extendieron el trabajo pionero de Marianov, Serra, y ReVelle (1999) con una función más compleja de asignar pasajeros según el costo y tiempo de viaje proporcionado por los competidores. Gelareh, Nickel y Pisinger (2010) también modela la localización de un hub competitivo y diseño de red para él envió en línea, donde se incluye un nuevo competidor con un operador dominante en base al tiempo de servicio y costo de transporte

2.3 Revisión de literatura para Descomposición de Benders

El método de Descomposición de Benders (BD) fue propuesto por Benders (1962), con el objetivo de abordar los problemas con variables complicadas, es un método de partición para resolver problemas de programación mixta lineal y no lineal. El objetivo de este método es dividir el problema en dos pares más simples. Un problema entero, conocido como MP y un problema lineal, conocido como SP. La aplicación de este método se encuentra exitosamente en diferentes áreas como: Control de inventarios Kim et al. (2015), Administración de energía Jenabi et al. (2015), Planificación de producción Behnamian (2014). Geoffrion y Graves (1974) presentaron una variante del algoritmo de BD para el diseño de un sistema de distribución multicommodity. Los autores demostraron que los objetivos no necesitan ser resueltos a la optimalidad. Ya que se puede detener la iteración siempre que se alcance una primera solución factible mejor que la establecida hasta el momento. El algoritmo BD se propuso inicialmente para problemas de programación lineal de enteros mixtos (MILP). Cuando las variables enteras son fijas, el problema resultante es lineal continuo (LP). Hoy podemos encontrar muchas extensiones para aplicar este método a una cantidad más amplia de problemas. Desde el punto de vista computacional, las diversas formulaciones no son equivalentes entre sí. Geoffrion y Graves (1974) observaron que la formulación de BD propuesta tendrá relación con el desempeño del método.

Magnanti y Wong (1981) demostraron que una formulación con una relajación LP más apretada tendrá un mejor rendimiento. Estos últimos introducen una nueva técnica para acelerar la convergencia del algoritmo y una teoría para distinguir modelos “buenos” de formulaciones distintas, pero con números enteros mixtos equivalentes. Cordeau et al. (2006) estudio el problema de diseño de una red logística estocástica. Donde encontraron que la formación original se fortaleció con un conjunto de desigualdades validas, el rendimiento de BD mejoro considerablemente. Posiblemente se necesiten numerosas modificaciones para desarrollar un método de BD eficiente y competitivo (O ‘Kelly et al., 2014).

Tabla 2: Revisión de literatura para Descomposición de Benders

Autor	Metodología- Aplicación	Problema a resolver
Benders (1962)	Metodología	Propuesta de la Metodología Descomposición de Benders
Kim et al. (2015)	Aplicación	Control de inventarios
Jenabi et al. (2015)	Aplicación	Administración de energía
Behnamian (2014)	Aplicación	Planificación de producción
Geoffrion y Graves (1974)	Metodología	variante del algoritmo de BD para el diseño de un sistema de distribución multicommodity
Magnanti y Wong (1981)	Metodología	formulación con una relajación LP más apretada tendrá un mejor rendimiento
Cordeau et al. (2006)	Aplicación	problema de diseño de una red logística estocástica
O ‘Kelly et al., 2014	Aplicación	MINLP, con función cóncava y estructura de matriz

2.3.1 Descomposición de Benders en HLP

En la literatura podemos encontrar distintos documentos que utilizan este método para la solución de HLP más grandes en tiempos razonables. De Camargo et al. (2008) se aborda el uncapacitated multiple allocation hub location problem (UMAHLP) para encontrar el hubs-and-spoke (HS) de menor costo, seleccionado hubs y asignándole flujos, en base a las diferentes demandas entre los pares OD y su respectivo costo de transporte.

El autor propone también tres variantes, la primera la clásica descomposición de Benders, la segunda es la versión de cortes múltiples propuesta por Birge y Louveaux (1997) y el último es el formulado por Geoffrion y Graves (1974).

De Camargo et al. (2009) utiliza el método de BD para HLP con economía de escala, donde presenta una formulación más estricta para estos problemas junto con una estructura especial. Donde idearon un algoritmo de BD más eficiente y competitivo que resolvía casos óptimos más grandes hasta 50 nodos.

Contreras et al. (2011) el autor presenta el BD para Large-Scale Uncapacitated Múltiple Allocation Hub Location Problem. Donde mejora el algoritmo de descomposición mediante la inclusión de diferentes características, como el uso de una reformulación multicut, generando cortes de optimalidad, integración de pruebas de reducción y ejecución de un procedimiento heurístico. Los resultados obtenidos con optimalidad en las instancias clásicas fueron hasta 200 nodos y en instancias nuevas más complejas hasta 500 nodos. De Sa et al. (2013) presentan la resolución de the tree of hubs location problem, la que es una difícil variante para los problemas de localización de hubs. Utilizando descomposición de Benders. Presentan un nuevo esquema de selección de cortes de Benders, basado en la recuperación de información de costos aun cuando no sea factible los SP. Resuelve con optimalidad instancias hasta 100 nodos.

Tabla 3: Revisión de literatura para problemas de localización de hubs utilizando descomposición de Benders

Autor	N° Hubs-Asignación	Objetivo	uncapacitated/capacitated
De Camargo et al. (2008)	<i>N</i> - Múltiple	Fixed Cost	Uncapacitated
De Camargo et al. (2009)	<i>N</i> -Múltiple	Fixed Cost	Uncapacitated
Contreras et al. (2011)	<i>N</i> -Múltiple	Fixed Cost	Uncapacitated
De Sa et al. (2013)	<i>N</i> -Única	Fixed Cost	Uncapacitated

A pesar del interés de diferentes autores por usar Descomposición de Benders en HLP, no existe una caracterización computacional del rendimiento de este método para diferentes modelos fundamentales en la localización de hubs. Con la actual actualización de CPLEX 12.7 que contiene Bender, este documento determinara el rendimiento de Benders bajo diferentes variantes.

3. PROBLEMAS A RESOLVER

Este trabajo pondrá a prueba el rendimiento de diferentes modelos fundamentales de HLP, los cuales localizan p-hubs en una red, representados por un grafo $G(N, A)$ donde V es el conjunto de nodos $= \{1, 2, \dots, N\}$ los que corresponden a los OD de los pasajeros o cargas y la localización potencial de un hubs. A Corresponde al conjunto de arcos de la red.

Los modelos a estudiar son problemas de asignación única/múltiple para p-hub median y hub location. Los cuáles serán puestos a prueba con Descomposición de Benders para medir su rendimiento bajo diferentes parámetros. A continuación, en una subsección se mencionarán sus variables y restricciones más importantes para cada uno de ellos.

3.1 Single allocation p-Hub Median Problem

Para este tipo de problemas estudiaremos el modelo propuesto por Ernst y Krishnamoorthy (1996) donde la idea básica es eliminar la variable X_{ijkl} para que cada commodity represente el flujo que se origina en cada nodo. Define también Y_{kl}^i como el flujo total básico i que se envía a través de los hubs k y l ; $Z_{ik} \in \{1, 0\}$, que es 1 es si el nodo i está asignado a un hub ubicado en el nodo k , y 0 en otro caso. Es un delta de Kronecker que tiene el objetivo de contar solo una actividad en el hub si el origen o destino (pero no ambos) están en el hub. Y se modifica para formar la nueva formulación el parámetro w_{ij} que es el volumen total entre nodos por $O_i = \sum_{j \in N} w_{ij}$ y $D_i = \sum_{j \in N} w_{ji}$ La estructura del modelo:

$$\text{Min} \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} d_{ik} Z_{ik} (\chi O_i + \delta D_i) + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{l \in N} \alpha d_{kl} Y_{kl}^i$$

$$\sum_{k \in N} Z_{kk} = p \quad (2)$$

$$\sum_{k \in N} Z_{ik} = 1 \quad (3)$$

$$Z_{ik} \leq Z_{kk} \quad (4)$$

$$\sum_{l \in N} Y_{kl}^i - \sum_{l \in N} Y_{lk}^i = O_i Z_{ik} - \sum_{j \in N} W_{ij} Z_{jk} \quad (5)$$

$$Z_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i,k \in N \quad (6)$$

$$Y_{kl}^i \geq 0 \quad \forall i,k,l \in N \quad (7)$$

La función objetivo (1) minimiza los costos totales. Las restricciones (2) aseguran que se seleccione exactamente la cantidad p determinada de hubs. Las restricciones (3) imponen asignación única para cada nodo. Las (4) evitan las asignaciones a nodos no hubs. Por otra parte, las (5) son ecuaciones de divergencia para el producto i en el nodo k , donde la demanda y oferta en los nodos está determinado por la asignación de Z_{ik} . Las restricciones (6) y (7) definen el dominio de las variables de decisión.

3.2 FLOWLOC

O`Kelly & Bryan (1998) proponen el modelo FLOWLOC donde hacen referencias a los enlaces inter-hub, que, debido a su función de transbordo, tienen mayor capacidad de aglomeración y por ello disminuye los costos de la red. El modelo de diseño y localización de hub FLOWLOC utiliza una función de costo flow-dependent donde FC_q son los costos fijos de las intersecciones y R_{qkm} flujo total en el enlace inter-hub (k,m) al cual se le aplicara el factor de descuento a_q . Por otra parte, Y_{qkm} es 1 si al flujo en el enlace inter-hub (k,m) se cobrara FC_q , 0 en otro caso y Z_k es 1 si el nodo k es un hub, 0 en otro caso.

La estructura del modelo:

$$\text{Min} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m W_{ij} (C_{ik} + C_{jm}) X_{ijkm} + \sum_q \sum_k \sum_m C_{km} (a_q R_{qkm} + FC_q Y_{qkm}) \quad (8)$$

$$\sum_q R_{qkm} = \sum_i \sum_j W_{ij} X_{ijkm} \quad \forall k,m : k \neq m \quad (9)$$

$$R_{qkm} - Y_{qkm} \sum_i \sum_j W_{ij} \leq 0 \quad (10)$$

$$X_{knkm} \geq Z_k + Z_m - 1 \quad \forall k,m \quad (11)$$

$$\sum_q Y_{qkm} - X_{knkm} = 0 \quad \forall k,m : k \neq m \quad (12)$$

$$\sum_k Z_k = p \quad (13)$$

$$\sum_k X_{ijkm} - Z_m \leq 0 \quad \forall i,j,m \quad (14)$$

$$Y_{qkm} \in \{0,1\} \quad (15)$$

La función objetivo del modelo (8) busca minimizar los costos totales de la red. Las restricciones (9) determinan la cantidad de flujo que viaja a través del interhub (k, m). Las restricciones (10) asocian el flujo con el tramo de flujo correcto. Las (11) garantizan que todos los enlaces inter-hub estén abiertos y sean usados. Las (12) establecen que si un Y_{qkm} es igual a 1, todas las variables flujo asociadas deben ser igual a 0, por cada enlace inter-hub k,m . La (13) determina la cantidad hubs a abrir. Las (14) prohíben que el flujo sea enviado a través de un nodo que no es un hub. Todo flujo debe ser enviado a través de por lo menos un hub (no hay conexiones directas). Finalmente (15) definen el dominio de las variables Y .

3.3 Múltiple allocation p-Hub Median Problem

Campbell (2013) nos presenta un modelo básico pHMP para economías de escala. La estructura del modelo:

$$\sum_{i,j,k,m} W_{ij} (\chi d_{ik} + \alpha d_{km} + \delta d_{mj}) X_{ijkm} \quad (16)$$

$$\sum_k \sum_m X_{ijkm} = 1 \quad \forall i, j \quad (17)$$

$$\sum_k Y_k = p \quad (18)$$

$$X_{ijkk} + \sum_{m \neq k} (X_{ijkm} + X_{ijmk}) \leq Y_k \quad \forall i, j, k \quad (19)$$

$$Y_k \in \{0,1\} \quad \forall k \quad (20)$$

$$X_{ijkm} \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \quad (21)$$

La función objetivo (16) busca minimizar los costos totales del transporte. Las restricciones (17) aseguran que cada flujo OD se envíe a través de un par de hubs, pudiendo ser solo uno.

La restricción (18) limita el número de nodos de hub a p . Las (19) aseguran que todos los nodos de hub estén disponibles para las diferentes rutas de flujos. Finalmente (20) y (21) determinan el dominio de las variables de decisión.

3.4 Múltiple allocation hub location problem

Para los problemas de asignación múltiple se estudiaron los modelos propuesto por Ernst y Krishnamoorthy (1998) y De Camargo et al. (2008). En el primer documento los autores proponen nuevas formulaciones de MILP los cuales requieren menos variables y restricciones que las utilizadas anteriormente en la literatura. Una de sus formulaciones denotada como UMAPHMP-N, donde mantienen los supuestos propuestos en Ernst y Krishnamoorthy (1996), de eliminar la variable X_{ijkl} . Se definen: Y_{kl}^i como el flujo total de del producto i (flujo enviado desde el nodo i); Z_{ik} como el flujo del nodo i al hub k ; X_{lj}^i como el flujo de productos básicos desde el nodo i por el hub l hacia el nodo j , y H_k es una variable binaria donde toma el valor de 1 si hay un hub en k y 0 en otro caso. Asimismo, el flujo total que se origina desde el nodo i es denotado como O_i y el flujo total que termina en el nodo i es D_i . La estructura del modelo,

$$\text{Min} \sum_{i \in N} \left[\sum_{k \in N} \chi d_{ik} Z_{ik} + \sum_{k \in N} \sum_{i \in N} \alpha d_{kl} Y_{kl}^i + \sum_{l \in N} \sum_{j \in N} \delta d_{lj} X_{lj}^i \right] \quad (22)$$

$$\sum_{k \in N} H_k = p \quad (23)$$

$$\sum_{k \in N} Z_{ik} = O_i, \forall i \in N \quad (24)$$

$$\sum_{l \in N} X_{lj}^i = W_{ij}, \forall i, j \in N \quad (25)$$

$$\sum_{l \in N} Y_{kl}^i + \sum_{j \in N} X_{kj}^i - \sum_{l \in N} Y_{lk}^i - Z_{ik} = 0 \quad \forall i, k \in N \quad (26)$$

$$Z_{ik} \leq O_i H_k \quad \forall i, k \in N \quad (27)$$

$$X_{lj}^i \leq W_{ij} H_l \quad \forall i, j, l \in N \quad (28)$$

$$X_{ij}^i, Y_{kl}^i, Z_{ik} \geq 0 \quad \forall i, j, k, l \in N \quad (29)$$

$$H_k \in \{0,1\} \quad \forall k \in N \quad (30)$$

La función objetivo (22) minimiza los costos totales de la red. La restricción (23) asegura que se seleccione exactamente la cantidad p determinada de hubs. Las (24) calculan el flujo del nodo i al hub k , igual al flujo que se origina desde el nodo i . Las (25) determinan que el flujo proveniente del nodo i al nodo j proveniente del hub l sea igual a la demanda del par de nodos $i-j$. Las (26) son ecuaciones de divergencia para el problema de flujo en una red para cada producto i . Las (27) y (28) aseguran que los flujos sean enviados a través de nodos que sean hubs, mientras que (29) y (30) definen el dominio de las variables de decisión.

En De Camargo et al. (2008) se presenta un algoritmo de BD para resolver de manera más eficiente los UMAHLP con la finalidad de trabajar con instancias mayores.

La formulación del modelo se basa en las siguientes definiciones: N como el conjunto de ubicaciones de nodos que intercambian flujos y K conjunto de posibles hubs, para cualquier par de nodos i y j ($i, j \in N$), W_{ij} corresponde al flujo del nodo i y j que debe enviarse a través de uno o dos hubs ya instalados. También menciona que a_k será el costo fijo de instalar un hubs en un nodo $k \in K$. El costo de transporte por unidad de flujo está determinado por C_{ijkm} desde el nodo i y j enviado a través de los hubs k y m ($i, j \in N$), ($k, m \in K$).

El costo total de transporte se compone por tres tipos de costos: $C_{ijkm} = c_{ik} + \alpha c_{km} + c_{mj}$, donde c_{ik} y c_{mj} es el costo de transporte común por unidad desde la ubicación $i(j)$ hasta el hub $k(m)$ y αc_{km} es el costo de transporte con descuento entre los centros k y m . El factor de descuento $0 \leq \alpha \leq 1$ representa las economías en escala en enlace inter-hub. En el caso de que solo se use un solo hub, se tendrá $k = m$ para el cual no se aplicaran el factor de descuento (α). A_k representa el costo fijo de instalar un hub.

Las variables de decisión se definen como:

- $Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si el hub } k \in K \text{ esta instalado} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
- $X_{ijkm} =$ Es el flujo desde el origen i hasta el destino j ($i, j \in N$) que se envía a través de los hubs k y m ($k, m \in K$).

El modelo formulado por el autor se estructura de la siguiente manera.

$$\text{Min} \sum_k A_k Y_k + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m (c_{ik} + \alpha c_{km} + c_{mj}) X_{ijkm} \quad (31)$$

$$\sum_{m|m \neq k} X_{ijmk} + \sum_m X_{ijkm} \leq w_{ij} Y_k \quad \forall i, j \in N, k \in K \quad (32)$$

$$\sum_k \sum_m X_{ijkm} = w_{ij} \quad \forall i, j \in N \quad (33)$$

$$X_{ijkm} \geq 0 \quad \forall i, j \in N, k, m \in K \quad (34)$$

$$Y_k \in \{0, 1\} \quad k \in K \quad (35)$$

La función objetivo (31) minimiza los costos totales, es decir la suma de los costos de instalar un hub y de transportar flujos. Las restricciones (32) garantizan que los flujos solo pasen por hubs instalados. Las (33) que para cada par i, j , todo el flujo sea enviado a través de hubs. Las (34) y (35) definen el dominio de las variables de decisión.

4. EXPERIMENTOS

4.1 Maquina utilizada

Para resolver y analizar de mejor manera se utilizó el lenguaje AMPL con el optimizador CPLEX 12.7.0, limitado a utilizar un núcleo de procesamiento, en un servidor HPE Proliant DL360 G9 con 2 procesadores Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2630 v4 @ 2.20GHz, 160GB de RAM y sistema operativo Ubuntu 16.04 LTS.

4.2 Datos

Existen distintas instancias utilizadas ampliamente en la literatura. Como por ejemplo el conjunto de datos que procede de un caso real de distribución de correos de Australia Post

(AP) en Sídney, que consta con 200 nodos que representaban todos los distritos. También el conjunto de datos de Turquía para el transporte terrestre entre 81 ciudades.

En los experimentos se utilizará la instancia llamada CAB25, correspondiente al tráfico de pasajeros por aerolíneas de 25 ciudades estadounidenses, evaluados por la Junta Aeronáutica Civil (CAB) en 1970. La importancia radica en su utilización por la mayoría de los investigadores del área y la facilidad para representar gráficamente las soluciones.



Figura 5: Mapa de conjunto de datos CAB25. Fuente: Elhedhli & Hu (2005)

Tabla 4: Ciudades del conjunto CAB25

N°	Ciudad	N°	Ciudad	N°	Ciudad	N°	Ciudad	N°	Ciudad
1	Atlanta	6	Cleveland	11	Kansas City	16	New Orleans	16	St. Louis
2	Baltimore	7	Dallas	12	Los Ángeles	17	New York	17	San Francisco
3	Boston	8	Denver	13	Memphis	18	Philadelphia	18	Seattle
4	Chicago	9	Detroit	14	Miami	19	Phoenix	19	Tampa
5	Cincinnati	10	Houston	15	Minneapolis	20	Pittsburgh	20	Washington

4.3 Protocolo experimental

Para realizar los experimentos se utilizó el optimizador CPLEX, el cual se programó de la siguiente manera. En primera instancia CPLEX resolverá los distintos modelos bajo distintos parámetros. Los resultados obtenidos serán graficados para tener un mejor

análisis. Con los mismos parámetros se le pedirá a CPLEX que vuelva a resolver los modelos, pero esta vez usando la descomposición de Benders incorporada. Finalmente se analizarán los resultados obtenidos en términos de tiempo de solución, cantidad de nodos y cantidad de iteraciones en ambos casos.

4.4 Experimentos a realizar

Para poder comprender la estructura de las soluciones, procederemos a realizar los siguientes experimentos, que nos permitirán estudiar el efecto de la Descomposición de Benders para los diferentes modelos descritos anteriormente, a medida que se varían los siguientes parámetros. En la formulación de Ernst y Krishnamoorthy (1996), Ernst y Krishnamoorthy (1998).

- La cantidad de hubs a localizar (p)
- Factor de descuento (α)

Para De Camargo et al. (2008):

- Factor de descuento (α)
- Costo fijo por Instalar (A)

4.5 Indicadores de rendimiento

A continuación, se define el indicador por el cual se medirá el rendimiento de los resultados obtenidos para los diferentes modelos y pruebas computacionales. Este indicador será expresado de forma porcentual para entender de mejor manera los resultados.

- **PercentagelImprovement:** Mejora porcentual al utilizar la Descomposición de Benders.

Este indicador medirá la mejora porcentual de los tiempos de solución, número de nodos y número de iteraciones para las diferentes variaciones, comparado con CPLEX.

4.5.1 Calculo de indicadores

El cálculo del indicador será el siguiente:

- $$\frac{(\text{ResultadoCplex} - \text{ResultadoBenders})}{(\text{ResultadoCplex})} * 100$$

4.6 Análisis de resultados

a continuación, se analizarán los resultados para cada modelo. se variaron los siguientes parámetros.

- $\alpha \in \{0,1,\dots,0,99\}$
- $p \in \{1,\dots,8\}$
- $A \in \{0,\dots,500.000\}$

4.6.1 Sensibilidad de p para Single allocation p-Hub Median Problem

Para el modelo propuesto por Ernst y Krishnamoorthy (1996), aunque no encontramos resultados particularmente prometedores, son los primeros indicios para el análisis del método de Descomposición de Benders. Con respecto a los tiempos de solución el rendimiento mejoró porcentualmente entre un 20% a 50% para diferentes cantidades de hubs. Cuando se encontraba con un factor de descuento cercano a 0,5 la disminución de este parámetro hacía que los valores obtenidos para el indicador fueran negativos, por lo que resolver con CPLEX para factores de descuento menores es mejor. En términos del número de nodos, CPLEX se comporta mejor, dado que el indicador alcanzaba valores negativos. Para el número de iteraciones se encontraron mejores resultados para la descomposición de Benders, ver Figura 6, donde la mejora porcentual de la descomposición de Benders fue entre un 20 a 70% mejor, pero a medida que el factor de descuento disminuía, también lo hacía el indicador hasta alcanzar valores negativos.

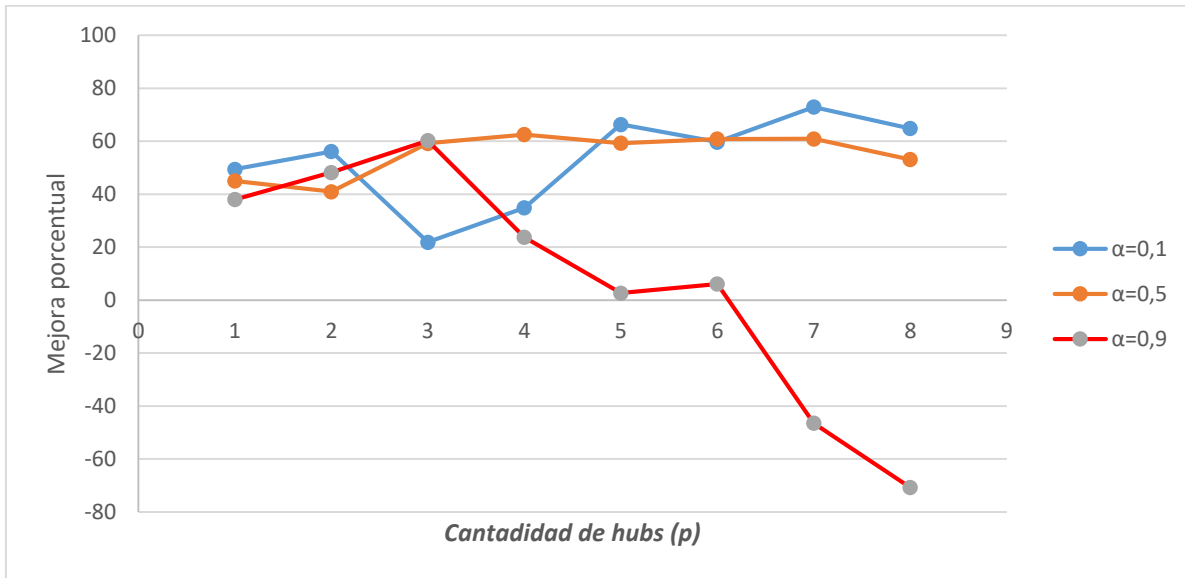


Figura 6: Mejora porcentual para número de Iteraciones, para diferente cantidad de hubs.

4.6.2 Sensibilidad de α para Single allocation p-Hub Median Problem

Quando se sensibilizo el factor de descuento α , encontramos resultados similares a los anteriores. Para la mejora porcentual con respecto a los tiempos de solución, ver Figura 7, se encontró que para menor cantidad de hubs y diferentes alfas. La descomposición de Benders mejora entre un 20% y 30%, pero a medida que aumenta la cantidad de hubs y el factor de descuento disminuye, el indicador comenzaba a disminuir. En el caso de los numero de nodos el indicador siempre presento valores negativos al resolver con Benders. Para el número de iteraciones se evidencia una mejora porcentual, de entre 20% y 60%, pero a medida que aumenta el número de hubs y el valor de α el indicador comenzaba a disminuir considerablemente.

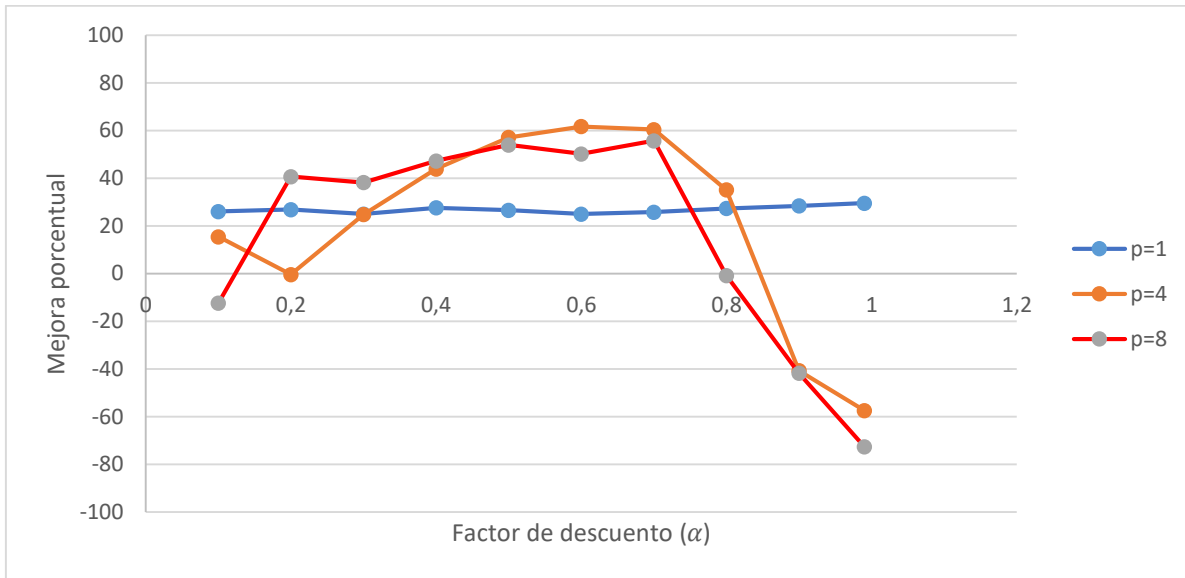


Figura 7: Mejora porcentual para los tiempos de solución, para diferentes valores de alfa.

4.6.3 Sensibilidad de p para Múltiple allocation hub location problema

Para el modelo de Ernst y Krishnamoorthy (1998), se encontraron mejores resultados. En relación con los tiempos de solución, hubo una mejora porcentual para los distintos números de hubs entre un 40% y 80%, exceptuando $p=1$ donde el indicador mostraba valores negativos. Para el número de nodos, no hubo análisis ya que tanto la descomposición de Benders y CPLEX no exploraron nodos del árbol de branch-and-bound. Los mejores valores del indicador se evidenciaron en el número de iteraciones realizadas, ver Figura 8, entre un 97% y 99% mejor que Cplex. Aunque para $p=1$, tanto la Descomposición de Benders como CPLEX no realizaron iteraciones.

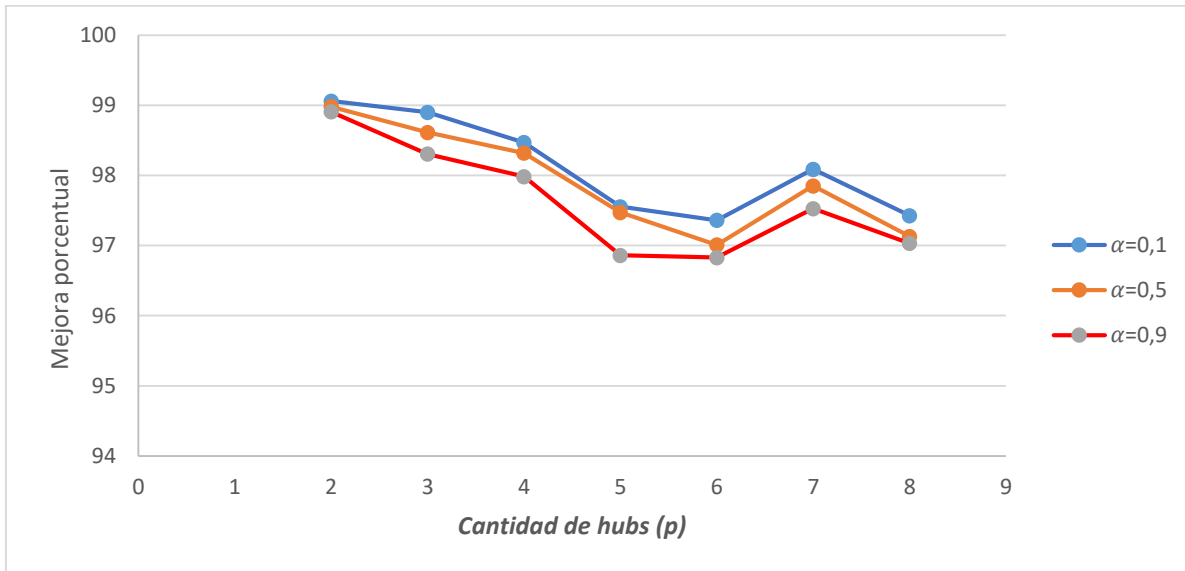


Figura 8: Mejora porcentual para número de Iteraciones, para diferente cantidad de hubs.

4.6.3 Sensibilidad de α para Múltiple allocation hub location problema

Para el modelo de Ernst y Krishnamoorthy (1998), existió una mejora porcentual en los tiempos de solución, ver Figura 9, para los distintos valores de α entre un 20% y 70%, exceptuando $p=1$ que para los todos los valores de α , el indicador entrego valores negativos entre un -20% y -25%. Para el número de nodos, no hubo análisis ya que Bender y CPLEX no exploraron nodos del árbol de branch-and-bound. En el número de iteraciones se observó una alta mejora porcentual entre 97% y 98%. Aunque para $p=1$, Benders y CPLEX no realizaron iteraciones.

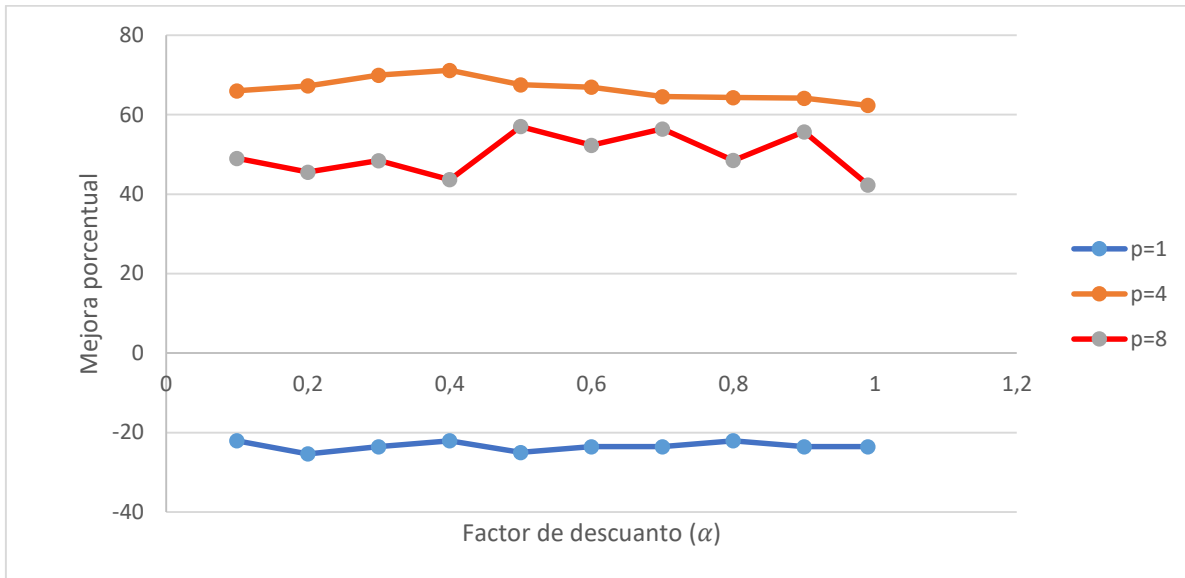


Figura 9: Mejora porcentual para número de Iteraciones, para diferentes valores de alfa

Para el modelo propuesto por De Camargo et al. (2008), la mejora porcentual de los tiempos de solución y numero de nodos fueron negativos, en cambio el número de iteraciones, ver figura 10, obtuvo un mejora porcentual positiva entre un 30% y 83%, exceptuando cuando $A=0$ la mejora porcentual fue 100% para los diferentes valores de α

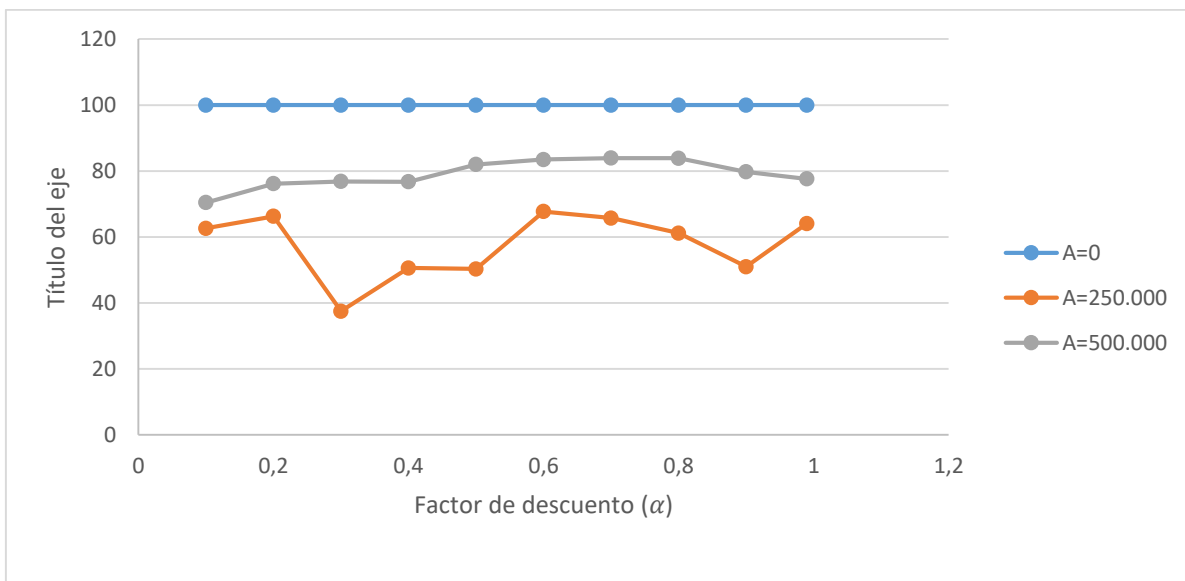


Figura 10: Mejora porcentual para número de Iteraciones, para diferentes valores de hubs.

4.6.4 Sensibilidad de A para Múltiple allocation hub location problema

Para el modelo propuesto por De Camargo et al. (2008), también mostró una mejora porcentual negativa para los tiempos de solución y número de nodos. En los número de iteraciones, ver figura 11, hubo una mejora porcentual positiva entre un 40% y 83%, pero se pudo evidenciar de mejor manera que mientras mayor es el costo fijo de instalarse existe mejores valores para el indicador. Exceptuando $A=0$, que entrego un rendimiento del 100%

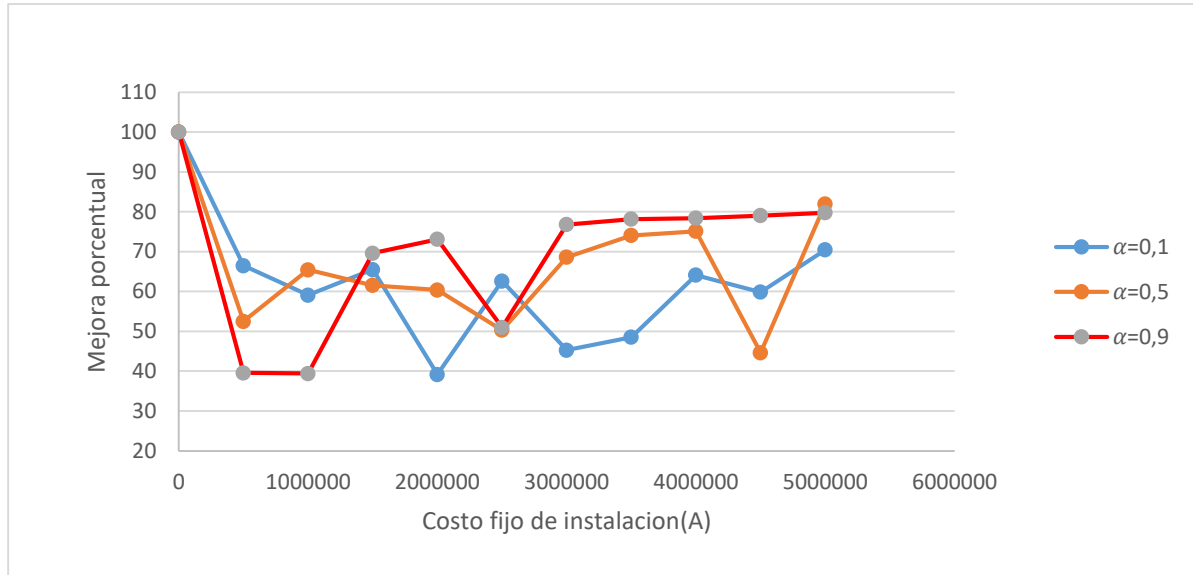


Figura 11: Mejora porcentual para número de Iteraciones, para diferentes costos de instalar un hubs

4.6.5 Otros experimentos

Se probaron también los modelos de Campbell (2012) y O Kelly (1998), los cuales no fueron exitosos. Para el primero los tiempos de solución por el método de Descomposición de Benders fueron bastantes elevados, ver tabla 5. Para O Kelly (1998) al momento de resolver el modelo por el método de Benders, no logro encontrar el óptimo. Por lo que las estructuras de estos modelos no compatibilizan con la descomposición.

Tabla 5: Tiempo de solución, para Campbell (2012)

N	p	alfa	CPLEX_time(s)	Benders_time(s)
25	1	0,1	2,46	2.765
25	1	0,5	2	2.795
25	1	0,9	2	2.721
25	2	0,1	4	2.738
25	2	0,5	3	2.723
25	2	0,9	2	2.857
25	3	0,1	3	2.779
25	3	0,5	3	2.721
25	3	0,9	4	2.865

5. Conclusiones

Como primer análisis se puede mencionar que los problemas de localización de hubs efectivamente son desafiantes, ya que los resultados llegan a ser inestables para diferentes experimentos.

Con respecto a la caracterización de método de Descomposición de Benders para problemas de localización de hubs, se pudo evidenciar que el mejor rendimiento porcentual, fue para el modelo de asignación múltiple de Ernst y Krishnamoorthy (1998), por lo que la estructura de este, se adapta de mejor manera a la descomposición.

En rasgos generales al resolver los problemas con Descomposición de Benders se realizan muchos menos iteraciones, pero el tiempo de solución que se gana es bastante poco. Los rendimientos mejoran para problemas más complejos o más grandes y con un factor de descuento más grande.

También se evidenció que para problemas con costos fijos de instalar un hub, mientras este costo sea más alto el rendimiento mejora, exceptuando cuando instalar cuesta 0, Benders tiene el mejor rendimiento.

La investigación futura incluye probar instancias más grandes, ya que se espera que este método matemático se demore mucho menos que CPLEX, para instancias más grandes,

también probar otras formulaciones con estructuras similares o variar otros parámetros para analizar desde otro punto de vista el rendimiento de la descomposición de Benders.

6. Bibliografía

Behnamian, J., 2014. Decomposition based hybrid VNS-TS algorithm for distributed parallel factories scheduling with virtual corporation. *Computers & Operations Research* 52, 181–191.

Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems . BENDERS , J . F . Nutzungsbedingungen Kontakt / Contact

Camargo, R. S., G. Miranda Jr., H. P. Luna. 2008. Benders decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *Comput. Oper. Res.* 35(4) 1047–1064

Camargo, R.S., Miranda Jr, G., Luna, H.P., 2009b. Benders decomposition for hub location problems with economies of scale. *Transportation Science* 43, 86–97.

Campbell, J.F., 1992. Location and allocation for distribution systems with transshipments and transportation economies of scale. *Annals of Operations Research* 40, 77–99.

Campbell, J.F., 1994. Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research* 72, 387–405.

Campbell, J.F., 1996. Hub location and the p-hub median problem. *Operations Research* 44 (6), 1–13.

Campbell, A.M., Lowe, T.J., Zhang, L., 2007. The p-hub center allocation problem. *European Journal of Operational Research* 176 (2), 819–835.

Cañovas, L., Garcí'a, S., Mari'n, A., 2007. Solving the uncapacitated multiple allocation hub location problem by means of a dual-ascent technique. *European Journal of Operational Research* 179, 990–1007.

Contreras, I., Cordeau, J.-F., Laporte, G., 2011. Benders decomposition for large-scale uncapacitated hub location. *Operations Research* 59 (6), 1477–1490.

Cordeau, J.-F., Pasin, F., Solomon, M. M., 2006. An integrated model for logistics network design. *Annals of Operations Research* 144 (1), 59–82

de Sá, E. M., de Camargo, R. S., de Miranda, G., 2013. An improved benders decomposition algorithm for the tree of hubs location problem. *European Journal of Operational Research* 226 (2), 185 – 202.

Ernst, A.T., Krishnamoorthy, M., 1996. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location Science* 4 (3), 139–154.

Ernst, A.T., Krishnamoorthy, M., 1998. Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research* 104, 100–112.

- Ernst, A.T., Krishnamoorthy, M., 1998. An exact solution approach based on shortest-paths for p-hub median problems. *Inform Journal on Computing* 10 (2), 149–162.
- Ernst, A.T., Krishnamoorthy, M., 1999. Solution algorithms for the capacitated single allocation hub location problem. *Annals of Operations Research* 86, 141–159.
- Ernst, A., Hamacher, H., Jiang H., Krishnamoorthy, M., Woeginger, G., 2002. Uncapacitated single and multiple allocation p-hub center problems. Unpublished Report, CSIRO Mathematical and Information Sciences, Australia.
- Ernst, A.T., Jiang, H., Krishnamoorthy, M., 2005. Reformulations and computational results for uncapacitated single and multiple allocation hub covering problems. Unpublished Report, CSIRO Mathematical and Information Sciences, Australia
- Geoffrion, A. M., Graves, G. W., 1974. Multicommodity distribution system design by Benders decomposition. *Management Science* 20 (5), 822–844
- Jenabi, M., Ghomi, S. F., Torabi, S., Hosseini, S., 2015. Acceleration strategies of Benders decomposition for the security constraints power system expansion planning. *Annals of Operations Research* 235 (1), 337–369
- Kara, B.Y., Tansel, B.C., 2000. On the single-assignment p-hub center problem. *European Journal of Operational Research* 125, 648–655.
- Kara, B.Y., Tansel, B.C., 2003. The single-assignment hub covering problem: Models and linearizations. *Journal of the Operational Research Society* 54, 59–64.
- Kim, G., Wu, K., Huang, E., 2015. Optimal inventory control in a multi-period newsvendor problem with non-stationary demand. *Advanced Engineering Informatics* 29 (1), 139–145
- Magnanti, T. L., Wong, R. T., 1981. Accelerating Benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations Research* 29 (3), 464–484.
- O’Kelly, M. E., Luna, H. P. L., Camargo, R. S., Miranda, G., 2014. Hub location problems with price sensitive demands. *Networks and Spatial Economics* 15 (4), 917–945.