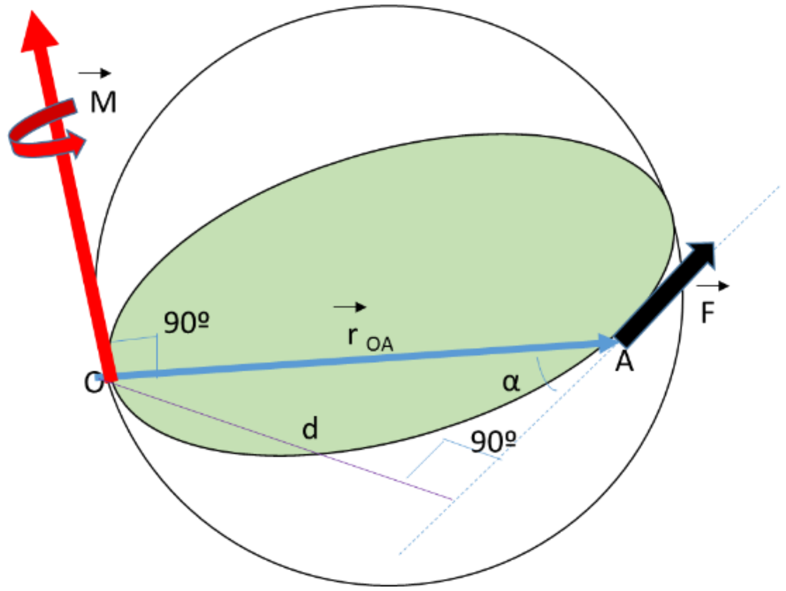
Elemento de Estudo para a Unidade Curricular de Mecânica

Conceitos Gerais da Mecânica Vetorial para Iniciantes



Célio Pina

Fernando Pimentel

IPS, 2020

Elemento de Estudo para a Unidade Curricular de Mecânica

Conceitos Gerais da Mecânica Vetorial para Iniciantes

1º Edição

Autores:

Célio Gabriel Figueiredo Pina

Fernando Carlos Gonçalves Magalhães Pimentel

Editor: Instituto Politécnico de Setúbal

ISBN: 978-989-54631-4-5

Setúbal, Fevereiro de 2020

Preâmbulo

Este apanhado de ideias e apontamentos sobre a Mecânica Vetorial foram elaborados tendo em conta os programas lecionados na disciplina de Mecânica da Escola Superior de Tecnologia de Setúbal, cursos de licenciatura de Tecnologia Biomédica, Tenologia de Energia, e Engenharia Eletrotécnica e Computadores, e as dúvidas e as dificuldades que os seus alunos costumam demonstrar ao longo da aprendizagem da disciplina.

O que é a Mecânica?

Bem a Mecânica é a disciplina da física que permite perceber o comportamento de tudo o que se consegue ver sem o auxílio de grandes telescópios, de tudo o que parece estar em movimento ou do que parece estar parado.

Notem então que objetos simples como uma esferográfica, um automóvel um avião ou uma nave espacial, são estudados pelas mesmas leis da Mecânica, pelas mesmas leis de Newton. Elas são apenas 3.

1) Um objeto permanece em repouso ou em movimento uniforme se for nula a resultante das forças que atuar sobre ele;

2) Se um objeto for sujeito a uma força então adquire de imediato uma aceleração que é igual ao valor dessa força dividido pela sua Massa; (F=ma)

3) Se um objeto exercer sobre outro uma Força F, então esse segundo objeto exerce sobre o primeiro uma força igual e de sinal contrário a F.

São estas as 3 leis de Newton em que assentam todos os conhecimentos da Mecânica.

A mecânica divide-se em 3 grandes capítulos:

1) <u>Estática</u>
   A estática estuda as forças aplicadas a um corpo. Qual é o resultado final de um sistema de forças ou conjunto de forças, a atuar sobre um corpo?

2) Cinemática

   A cinemática estuda o movimento dos corpos independentemente do que possa originar esses movimentos.

3) Dinâmica

   A dinâmica estuda a influência que um sistema de forças exerce sobre o movimento de um corpo. Ela é baseada na terceira lei de Newton F= m a.

Antes de se terminar este preâmbulo vai-se ainda recordar alguns conceitos que os alunos já conhecem.

Quantos movimentos diferentes existem?

São dois. Movimento de translação e movimento de rotação.

Mas quais são os movimentos mais importantes na nossa realidade? Os de rotação ou os de translação?

Como se move um carro para a frente se as rodas não rodarem?

Coloque-se um dedo no nariz. Como se mexe o dedo para a frente se o cotovelo e o pulso não rodarem?

Como se consegue andar para a frente se não se rodar os joelhos, os tornozelos e os dedos do pé?

Então que movimentos são os mais importantes na Mecânica? Os de translação ou os de rotação? Bem, a pergunta nem faz qualquer sentido, pois os movimentos de translação e de rotação estão na maioria das vezes associados e articulados entre si. Eles são igualmente importantes.

Quantas direções independentes é que existem num espaço a 3 dimensões?

Como o nome indica são 3.

Qualquer grandeza física que pode ter valores diferentes segundo direções diferentes é um vetor. As que assumem o mesmo valor independentemente da direção considerada são grandezas escalares.

Grandezas vetoriais são por exemplo, forças, deslocamentos, velocidades e rotações.

Grandezas escalares são por exemplo a densidade, a energia, a potência etc.

Se se tiver um cubo em que cada aresta é paralela a um eixo, x, y, ou z, ou Norte, Este e para cima, então as grandezas vetoriais como a rotação podem ter valores diferentes em qualquer eixo. A rotação em torno do eixo dos x, é completamente diferente da rotação em torno do eixo dos y, ou da que é efetuada em torno do eixo vertical.

Então o que é uma grandeza vetorial?

Para a Mecânica uma grandeza vetorial é toda a quantidade que só consegue ser perfeitamente caraterizada se para além do seu valor, tiver também uma direção e um sentido definido. Se for dito que um objeto se deslocou 3 metros, continuamos sem saber para onde ele foi. Pode ter-se deslocado para cima, para baixo ou para a esquerda ou direita. Para eliminar esta incerteza é que as grandezas são vetoriais e têm uma direção e sentido associados.

Os vetores são entidades que não podem ser trabalhadas como números reais. As operações matemáticas que se podem executar sobre vetores são completamente diferentes daquelas que se executam sobre números reais. Então não faz qualquer sentido estudar grandezas vetoriais sem saber cálculo vetorial. Da mesma forma que não se consegue trabalhar com números sem saber somá-los ou multiplica-los, não se consegue também trabalhar com vetores sem saber algumas operações vetoriais.

As operações entre vetores não são matéria da disciplina de Mecânica, mas antes uma ferramenta matemática indispensável para aprender Mecânica.

O capítulo da matemática que estuda operações sobre vetores chama-se cálculo vetorial.

Sabendo que muitos dos alunos que frequentam a disciplina não conhecem o cálculo vetorial, far-se-á uma revisão sobre os seus conceitos mais importantes.

Índice

1. Revisões e conceitos básicos de cálculo vetorial

Considere-se um vetor $\vec{A}$ e $\vec{B}$ tal que:

$$\vec{A} = A_x\overrightarrow{e_x} + A_y\,\overrightarrow{e_y} + A_z\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{A} = 1\overrightarrow{e_x} - 2\,\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{B} = B_x\overrightarrow{e_x} + B_y\,\overrightarrow{e_y} + B_z\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{B} = 4\overrightarrow{e_x} + 5\,\overrightarrow{e_y} + 6\overrightarrow{e_z}$$

Módulo de um vetor

O conceito de módulo de um vetor é o de quanto é que ele vale. Ou seja se houver um deslocamento de 3 m ao longo de uma aresta de um cubo adicionado a outro de 4 m segundo uma aresta perpendicular à primeira, a que distância ficou o objeto da sua posição inicial? Quantos metros andou o objeto? Se se aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo resultante dos dois deslocamentos, facilmente se percebe que o objeto se deslocou 5 m. Ou seja 5 m é o valor da hipotenusa do triângulo retângulo de arestas 3 m e 4 m.

Mas se a essa posição se somar um outro deslocamento de 2 m segundo um eixo perpendicular aos 3 e aos 4 m percorridos atrás, a que distância fica o objeto do ponto de partida? Agora a distância de 5 m é perpendicular aos 2 m do deslocamento seguinte e portanto o ponto final pode ser encontrado pela hipotenusa do cateto anterior de 5 m com o novo cateto de 2m.

Ou seja o valor do deslocamento final será a $\sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{((\sqrt{3^2+4^2})^2 + 2^2)} = \sqrt{29}$

O módulo de um vetor, o que ele vale, é sempre igual à Raiz quadrada da soma das suas componentes ao quadrado. (Qualquer valor ao quadrado é sempre positivo, pelo que não há módulos menores do que zero, nem há módulos iguais a números complexos, (raízes quadradas de números negativos). Ou seja para um vetor do tipo

$$\vec{A} = A_x\overrightarrow{e_x} + A_y\,\overrightarrow{e_y} + A_z\overrightarrow{e_z}$$

O módulo A será igual:

$$|A| = \sqrt{({A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2)}$$

Um vetor tem o mesmo módulo do seu simétrico, ou seja aquele do mesmo tamanho, que aponta em sentido contrário.

As unidades do módulo são sempre as unidades do vetor.

Em termos gráficos o módulo é igual à distância da diagonal interna (d) do paralelepípedo, cujas arestas têm cumprimentos, A_x, A_y e A_z, como esquematicamente representado na Figura 1.

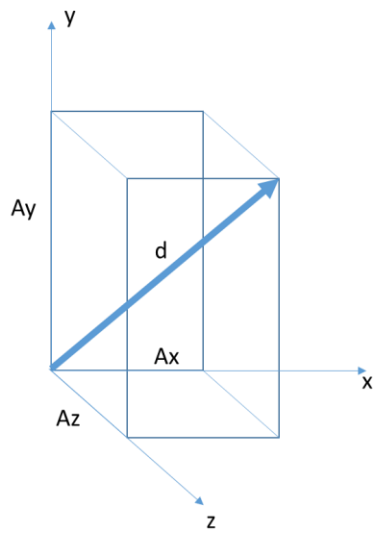


Figura 1 - Representação esquemática do módulo de um vetor.

Versores de uma direção e sentido

Os versores são sempre um vetor adimensional e de módulo unitário.

Esse vetor unitário é obtido dividindo o vetor inicial pelo seu módulo.

O módulo de cada uma das componentes de um versor dá a percentagem do valor do vetor que foi conseguida ao longo desse eixo, e o seu sinal, positivo ou negativo, indica se esse valor foi conseguido com um valor da componente segundo esse eixo, positivo ou negativo.

$$\vec{A} = 1\overrightarrow{e_x} - 2\,\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(1^2 + 2^{\,2} + 3^{\,2})}$$

$$\overrightarrow{\lambda_A} = \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{e_x} - \frac{2}{\sqrt{14}}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{3}{\sqrt{14}}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\lambda_A} = 0{,}267\overrightarrow{e_x} - 0{,}535\,\overrightarrow{e_y} + 0{,}802\overrightarrow{e_z}$$

Os vetores assentam sempre sobre uma linha reta e apontam sempre um sentido ao longo dessa linha reta.

Qualquer que seja o vetor $\vec{A}$ ao longo de uma linha reta, que aponte um sentido qualquer, tem sempre a mesma percentagem de deslocamento ao longo dos 3 eixos X, Y e Z do que outro vetor $\vec{B}$ também sobre essa linha reta. Pode-se definir que ao longo duma mesma linha reta, qualquer deslocamento que se faça, tem a mesma percentagem de deslocamento segundo o eixo dos X, Y, ou Z. Essa percentagem segundo cada eixo, é sempre o módulo da componente do versor segundo esse eixo. Se o valor percorrido pelo vetor ao longo do eixo for no sentido positivo de um eixo coordenado, o versor terá também uma componente positiva segundo esse eixo coordenado. Em caso contrário, a componente do versor será negativa.

Operações com vetores

As operações que se podem definir entre os vetores $\vec{A}\ e\ \vec{B}$ são completamente diferentes das que existem entre números reais. Por exemplo não existe nem a operação multiplicação nem a divisão entre dois vetores. Também não existe a raiz quadrada de um vetor ou a sua potenciação.

Neste curso vão-se apenas utilizar 4 operações vetoriais.

1) **Soma ou subtração de dois vetores.**
   A soma de vetores pode ser obtida graficamente através da regra do paralelogramo (ver figura 2 a) ou através da regra do triângulo (ver figura 2 b).

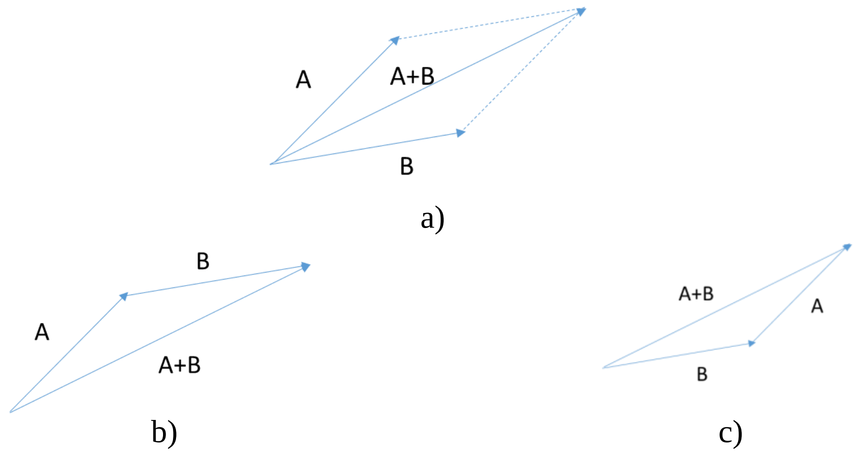


Figura 2 – a) soma de vetores pela regra do paralelogramo, b) e c) pela regra do triângulo.

A soma ou subtração de dois vetores também pode ser calculada fazendo, para cada componente, a soma ou a subtração algébrica de cada uma das componentes homólogas dos vetores a somar (Figura 2, para um exemplo de vetores no plano). Por exemplo (ver os vetores A e B referidos atrás)

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{e_x} + (A_y + B_y)\,\vec{e_y} + (A_z + B_z)\vec{e_z} = \;5\vec{e_x} + 7\,\vec{e_y} + 9\vec{e_z}$$

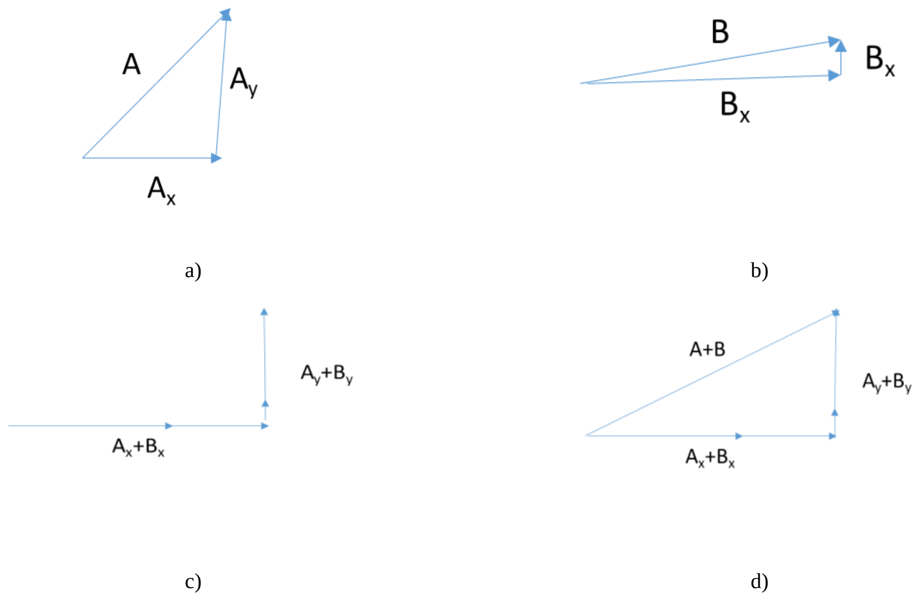


Figura 2 - Representação esquemática da soma de dois vetores no plano. A) Decomposição do vetor A nas suas componentes ortonormadas; B) Decomposição do

vetor B nas suas componentes ortonormadas; C) Soma das componentes ortonormadas dos vetores A e B; D) Cálculo do vetor soma pelo método dos triângulos.

2) Multiplicação de um vetor por um escalar

A multiplicação de um vetor por um escalar (K) obtém-se multiplicando cada uma das componentes do vetor pelo escalar em causa.

$$\mathrm{K}\vec{A} = KA_x\overrightarrow{e_x} + KA_y\,\overrightarrow{e_y} + KA_z\overrightarrow{e_z}$$

Se K=3,Então vem:

$$\mathrm{K}\vec{A} = 3\overrightarrow{e_x} - 6\,\overrightarrow{e_y} + 9\overrightarrow{e_z}$$

3) **Produto interno entre dois vetores**

O produto interno entre dois vetores é o somatório dos produtos entre as componentes homólogas entre os dois vetores. Representa-se por A.B ou A/B

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_xB_x)\overrightarrow{e_x} + (A_yB_y)\,\overrightarrow{e_y} + (A_zB_z)\overrightarrow{e_z} = 1\mathrm{x}4 - 2\mathrm{x}5 + 3\mathrm{x}6 = 12$$

O produto interno também é igual ao módulo do vetor A multiplicado pelo módulo do vetor B e pelo cosseno do ângulo entre os dois vetores (α).

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

Esta igualdade é utilizada em problemas da mecânica. Ela permite saber o ângulo entre dois vetores, bem como calcular a projeção de um vetor sobre outro.

Qual o ângulo α entre os vetores A e B referidos atrás?

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{(1\mathrm{x}4 - 2\mathrm{x}5 + 3\mathrm{x}6)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2} \times \sqrt{4^2+5^2+6^2}}$$

Qual a projeção do vetor A sobre a direção do vetor B?

A projeção do vetor A sobre a direção de B, $P_{A//B}$, é sempre positiva e é dada pelo módulo, do módulo de A multiplicado pelo cosseno do angulo entre o vetor A e a direção B (ver figura 3).

$$Proj\ A//B = \left||\vec{A}|\cos\alpha\right| = \left||\vec{A}||\overrightarrow{\lambda_B}|\cos\alpha\right| = |\vec{A}.\overrightarrow{\lambda_B}| = \left|\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}\right|$$

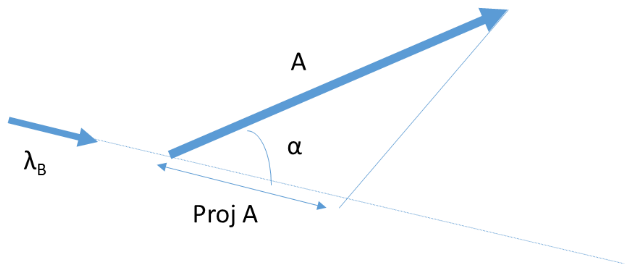


Figura 3 - Projeção de um vetor segundo uma direção.

Relativamente aos vetores referidos atrás e que servem de exemplo, os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, os cálculos seriam os seguintes:

$$Proj\ A//B = \left|\frac{(1x4 - 2x5 + 3x6)}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2}}\right|$$

O produto interno também costuma ser muito utilizado para verificar a perpendicularidade entre dois vetores.

$$\text{Se } \vec{A}.\vec{B} = 0\ e\ |\vec{A}| > 0\ e\ |\vec{B}| > 0, \text{então } \cos\alpha = 0, \alpha = 90º$$

4) **Produto externo entre dois vetores.**

A operação vetorial produto externo é uma operação entre dois vetores (exemplo $\vec{A}$ e $\vec{B}$), cujo resultado é um vetor cuja direção é perpendicular ao plano formado pelos vetores que foram o objeto da operação ($\vec{A}$ e $\vec{B}$) (Figura 4) Se os vetores A e B se posicionarem no plano XY do referencial ortonormado até aqui considerado, o sentido do vetor produto externo, vetor que estará segundo o eixo dos Z, pode ser definido como positivo se a rotação do primeiro vetor, (neste caso o vetor $\vec{A}$), rodado para a direção do segundo vetor, (neste caso o vetor $\vec{B}$), for no sentido anti-horário. Em caso contrário, se a rotação de A para B for no sentido horário, o resultado do produto externo será um vetor negativo, também segundo o eixo dos Z.

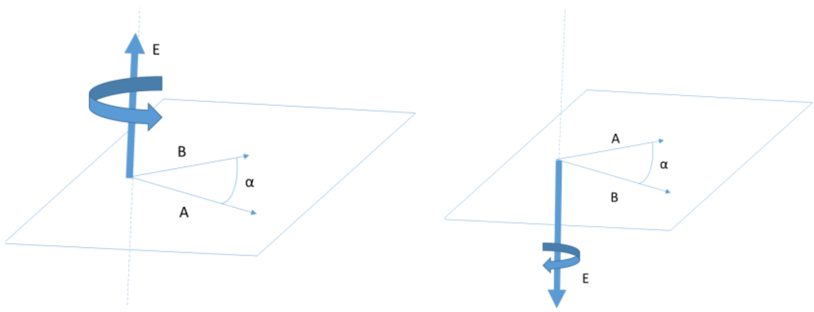
Pode-se concluir que esta operação, o produto externo, não goza da propriedade comutativa.

$$\vec{E} = \vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$$

O módulo do vetor $\vec{E}$ é dado por:

$$|\vec{E}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \alpha$$

Em que α é o angulo entre as direções de $\vec{A}$ e de $\vec{B}$.



$\vec{E} = \vec{A} \times \vec{B}$ $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{A}$

Figura 4 -Representação esquemática do produto externo$\vec{E}$ entre o vetor $\vec{A}$ e o vertor $\vec{B}$.

O produto externo goza da propriedade associativa, isto é:

$$\vec{E} = \vec{S} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{S} \times \vec{A} + \vec{S} \times \vec{B})$$

O produto externo entre dois vetores $\vec{A} \times \vec{B}$, aqui considerado de vetor $\vec{E}$,é calculado pelo determinante da matriz que se obtém colocando na primeira linha os versores $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$, na segunda linha o primeiro vetor do produto, neste caso o vetor $\vec{A}$, e na terceira linha o segundo vetor ($\vec{B}$).

$$\vec{E} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \overrightarrow{e_x} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \overrightarrow{e_y} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \overrightarrow{e_z}$$

Note-se que o determinante da matriz de dois por dois que multiplica cada um dos versores, é o determinante da matriz que fica se se eliminar à matriz inicial, a linha aonde está esse versor, (sempre a primeira), e também a sua coluna.

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\overrightarrow{e_x} - (A_x B_z - A_z B_x)\,\overrightarrow{e_y} + (A_x B_y - A_y B_x)\overrightarrow{e_z}$$

Para o cálculo da componente $\overrightarrow{e_y}$ aparecerá sempre o sinal negativo. Os alunos aprenderão nas disciplinas de matemática a razão deste sinal, que tem a ver com o facto de $(-1)^{(i+j)}$, em que i é o número da linha e j o número da coluna do elemento $\overrightarrow{e_y}$, ser igual a -1. (para o elemento $\overrightarrow{e_y}$ o i = 1 e o j = 2, $(-1)^{(1+2)} = -1$)

Para terminar convém ainda referir que:

1) As unidades dos resultados das operações vetoriais são as adquiridas pelos vetores que deram origem a esses resultados.
   Ex:
   a) $\vec{A} + \vec{B}$, as unidades vetor A são iguais às do vetor B, uma vez que não se podem somar vetores de quantidades distintas (exemplo: Newton com metro)
   b) $\vec{A}.\vec{B}$ em geral um dos vetores é adimensional, (Não tem unidades), ficando então o resultado final com as unidades do vetor com unidades. Se ambos os vetores forem adimensionais então o resultado final será também adimensional.
   c) $\vec{A} \times \vec{B}$ O vetor resultante terá as unidades do vetor $\vec{A}$ multiplicadas pelas unidades do vetor $\vec{B}$. Por ex, se $\vec{A}$ for dado em metros, e $\vec{B}$ for dado em Newton, as unidades de $\vec{A} \times \vec{B}$ serão Nm.

2) Existem mais operações vetoriais de que a física faz uso. O Rotacional, o Gradiente e o Divergente entre dois vetores podem ser exemplos disso. Elas

não serão utilizadas no decorrer desta disciplina pelo que não serão também aqui explicadas.

Em fim de revisão vetorial, faça-se então outra vez a chamada de atenção de que **não existe multiplicação entre vetores**. Existe apenas o produto interno e o produto externo entre dois vetores.

O resultado do **produto interno é sempre um número Real**. O resultado do **produto externo, é sempre um vetor**.

2. Ponto Material no Espaço.

2.1. Decomposição vetorial das forças no plano

Considere a força de intensidade **F** dada na Figura 5 em que são conhecidos os ângulos entre o vetor força e os eixos ortonormados.

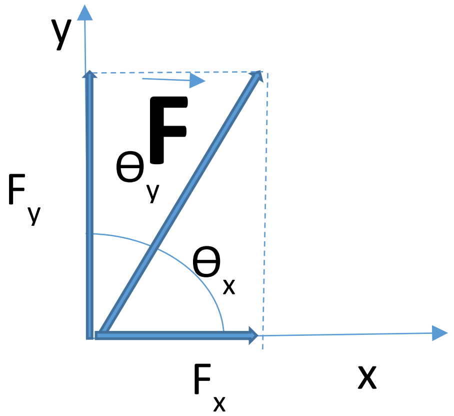


Figura 5 - Representação esquemática das componentes de uma força no plano.

A projeção da força segundo a direção x é dada por (Figura 5).

$$F_x = \mathrm{F} \cos \Theta_x$$

Sendo a projeção da força segundo a direção y dada por (ver Figura 5):

$$F_y = F \cos \Theta_y$$

Pelo que a força pode ser escrita vectorialmente da seguinte forma:

$$\vec{F} = F \cos \Theta x \ \overrightarrow{e_x} + \mathrm{F} \cos \Theta y \ \overrightarrow{e_y}$$

$$\vec{F} = F \left(\cos \Theta x \ \overrightarrow{e_x} + \cos \Theta y \ \overrightarrow{e_y}\right)$$

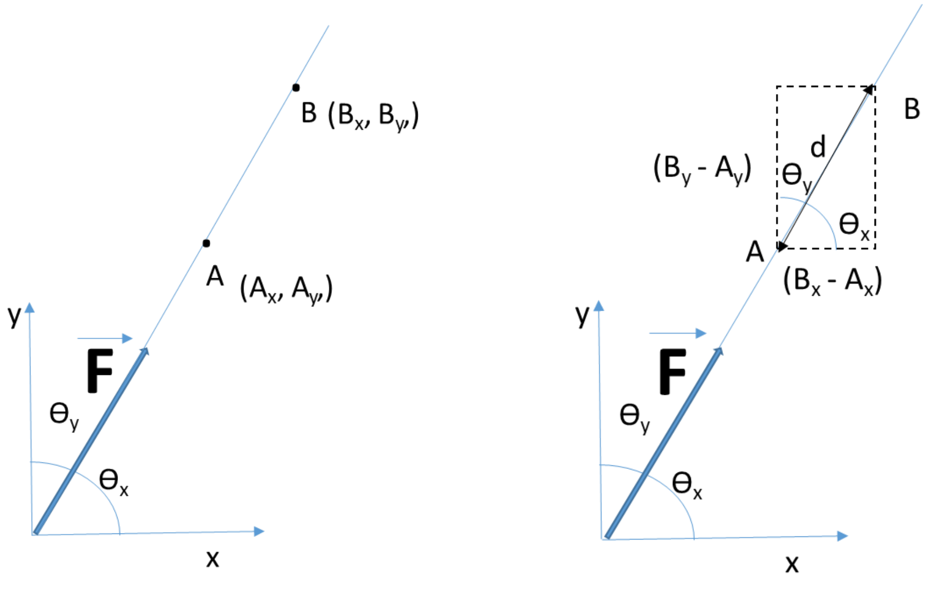
$$\vec{F} = F \vec{\lambda}$$

Em que $\vec{\lambda}$ é o versor dado por:

$$\vec{\lambda} = \cos \Theta x \ \overrightarrow{e_x} + \cos \Theta_y \ \overrightarrow{e_y}$$

O versor caracteriza a direção e sentido da força e as suas componentes, os cossenos nele presente, são denominados cossenos diretores daquela direção e sentido.

Considere a força dada na Figura 6 a) em que são conhecidos dois pontos sobre a linha de ação da força: o ponto A de coordenadas (A_x,A_y) e o ponto B de coordenadas (B_x,B_y).



a) b)

Figura 6 - Representação esquemática duma força no plano em que são conhecidos dois pontos sobre a linha de ação da força.

Tendo em conta a representação da Figura 6 b) é possível determinar que:

$$\cos\theta_x = \frac{B_x - A_x}{AB}$$

$$\cos\theta_y = \frac{B_y - A_y}{AB}$$

Sendo d a distância entre os pontos A e B, dada pela seguinte equação:

$$AB = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + \left(\mathrm{B_y} - \mathrm{A_y}\right)^2}$$

Como $\vec{\lambda}$ é definido por:

$$\vec{\lambda} = \cos\Theta x \ \overrightarrow{e_x} + \cos\Theta y \ \overrightarrow{e_y} = \frac{B_x - A_x}{AB} \overrightarrow{e_x} + \frac{B_y - A_y}{AB} \overrightarrow{e_y}$$

Pelo que:

$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

Em que, A e B representam as coordenadas do ponto A e B.

2.2. Decomposição vetorial das forças no espaço

Considere a força de intensidade **F** no espaço dada na Figura 7 em que são conhecidos os ângulos entre o vetor força e os eixos ortonormados.

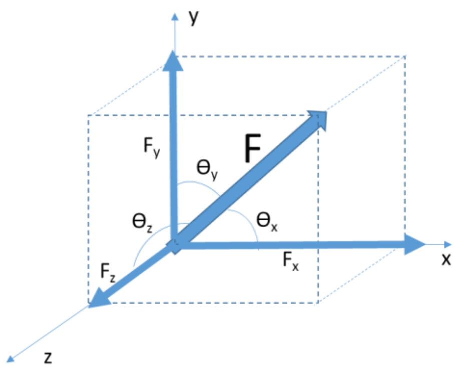


Figura 7 - Representação esquemática das componentes de uma força no espaço.

A projeção da força segundo a direção x, y e z são dadas respetivamente por F_x, F_y e F_z de acordo com as seguintes equações (ver Figura 7)

$$F_x = \cos \Theta_x$$

$$F_y = \cos \Theta_y$$

$$F_z = \cos \Theta_z$$

Pelo que a força pode ser escrita vectorialmente no espaço da seguinte forma:

$$\vec{F} = F \cos \Theta x \ \overrightarrow{e_x} \ + \mathrm{F} \cos \Theta y \ \overrightarrow{e_y} + + \mathrm{F} \cos \Theta z \ \overrightarrow{e_z}$$

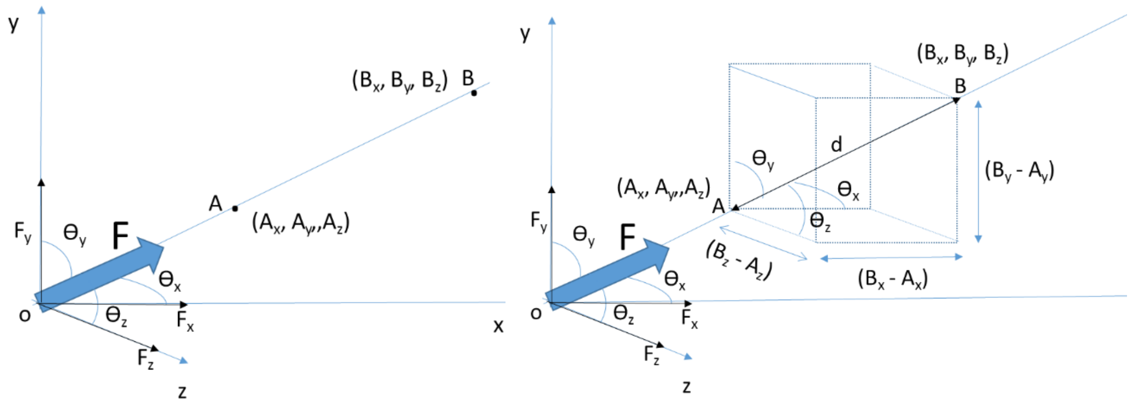
$$\vec{F} = F \ (\cos \Theta x \ \overrightarrow{e_x} \ + \cos \Theta y \ \overrightarrow{e_y} + \ \cos \Theta z \ \overrightarrow{e_z})$$

$$\vec{F} = F \ \vec{\lambda}$$

Em que $\vec{\lambda}$ é o versor dado por:

$$\vec{\lambda} = \cos\Theta x \ \overrightarrow{e_x} + \cos\Theta y \ \overrightarrow{e_y} + \cos\Theta z \ \overrightarrow{e_z}$$

Considere a força dada na Figura 8 a) em que são conhecidos dois pontos sobre a linha de ação da força, o ponto A de coordenadas (A_x,A_y,A_z) e o ponto B de coordenadas (B_x,B_y,B_z). Não se conhecem os valores dos ângulos entre o vetor força e os eixos coordenados para se poder decompor a força segundo os eixos coordenados.



a) b)

Figura 8 – Representação esquemática duma força no espaço em que são conhecidos dois pontos sobre a linha de ação da força.

Através da análise da Figura 8 obtém-se as seguintes expressões para o cálculo dos cossenos diretores:

$$\cos\theta_x = \frac{B_x - A_x}{AB}$$

$$\cos\theta_y = \frac{B_y - A_y}{AB}$$

$$\cos\theta_z = \frac{B_z - A_z}{AB}$$

Sendo d a distância entre os pontos A e B, a qual é dada pela seguinte expressão:

$$AB = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + \left(B_y - A_y\right)^2 + (B_z - A_z)^2}$$

Como $\vec{\lambda}$ é definido por:

$$\vec{\lambda} = \cos \Theta x \ \overrightarrow{e_x} + \cos \Theta y \ \overrightarrow{e_y} + \cos \Theta_z \ \overrightarrow{e_z} = \frac{B_x - A_x}{AB} \overrightarrow{e_x} + \frac{B_y - A_y}{AB} \overrightarrow{e_y} + \frac{B_z - A_z}{AB} \overrightarrow{e_y}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

Em que A e B representam as coordenadas do ponto A e do ponto B. e AB é o módulo do vetor B-A.

2.3. Resultante de forças aplicadas a um ponto material

Considere várias forças concorrentes F_1, F_2 e F_3 aplicadas num ponto material A, como o representado esquematicamente na Figura 9 a). Estas forças podem ser substituídas por uma única força denominada resultante **R** como se pode observar na Figura 9 b) a qual é calculada através da soma vetorial das forças F_1, F_2 e F_3.

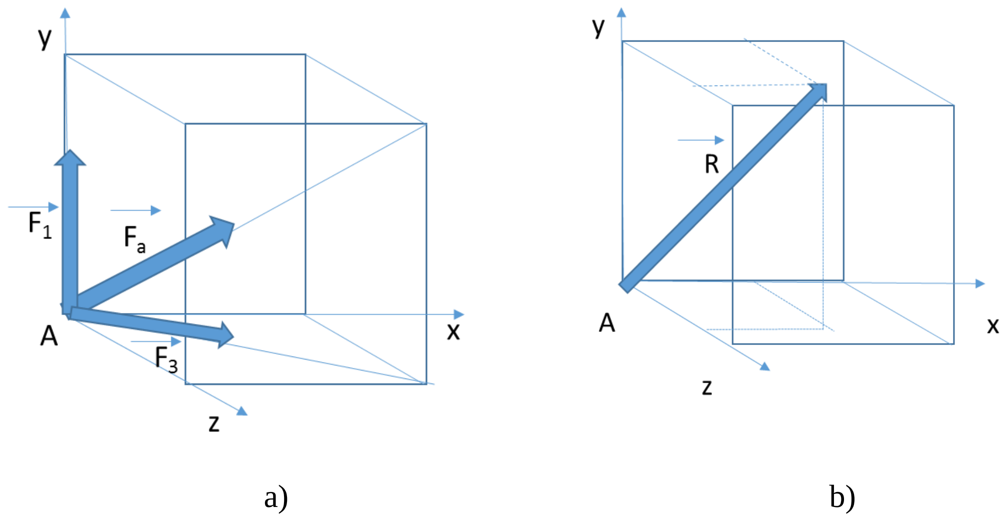


Figura 9 - Resultante das forças aplicadas num ponto material.

De forma genérica, a resultante de todas as forças aplicadas no ponto material, é dada pela soma vetorial de todas as forças de acordo com:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \cdots \overrightarrow{F_n}$$

$$\overrightarrow{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}$$

$$\overrightarrow{F_1} = F_{1x}\,\overrightarrow{e_x} + F_{1y}\,\overrightarrow{e_y} + F_{1z}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{F_2} = F_{2x}\,\overrightarrow{e_x} + F_{2y}\,\overrightarrow{e_y} + F_{2z}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{F_3} = F_{3x}\,\overrightarrow{e_x} + F_{3y}\,\overrightarrow{e_y} + F_{3z}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\vdots$$

$$+\quad \overrightarrow{F_n} = F_{nx}\,\overrightarrow{e_x} + F_{ny}\,\overrightarrow{e_y} + F_{nz}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{R} = R_x\,\overrightarrow{e_x} + R_Y\,\overrightarrow{e_y} + R_z\,\overrightarrow{e_z}$$

As componentes da força resultante Rx, Ry e Rz são dadas por:

$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$R_z = \sum F_z$$

Após o cálculo das componentes da resultante pode-se determinar a sua intensidade e o valor dos ângulos que a resultante faz com os eixos coordenados, de forma a caracterizar a sua direção e sentido. (ver Figura 10).

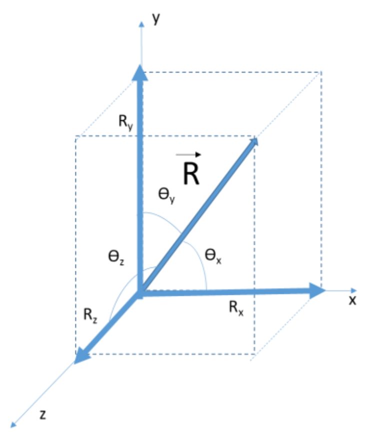


Figura 10 - Resultante das forças

A intensidade da força resultante é determinada pelo seu módulo.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Os ângulos que a resultante faz com os eixos coordenados podem ser determinados pelo seu versor.

$$\cos \Theta_x = \frac{R_x}{R}$$

$$\cos \Theta_y = \frac{R_y}{R}$$

$$\cos \Theta_z = \frac{R_z}{R}$$

2.4. Equilíbrio do Ponto Material

Diz-se que um ponto material está em equilíbrio estático se a resultante das forças nele aplicadas for igual a zero.

$$\overrightarrow{R} = \sum \vec{F} = \vec{0}$$

Esta equação vetorial estabelece que todas as componentes o vetor R têm de ser iguais a zero. Se o sistema de forças estiver no plano, apenas com duas dimensões, a equação vetorial anterior origina duas equações escalares.

$$R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0$$

Este sistema de equações permite o cálculo, a descoberta de duas incógnitas, valores não conhecidos nas equações.

Já se a equação vetorial, incidir sobre um sistema de forças a 3 dimensões, X, Y e Z, ela dará origem a 3 equações escalares.

$$R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0$$

$$R_z = \sum F_z = 0$$

Estas 3 equações permitem a resolução de problemas com 3 incógnitas.

3. Corpo Rígido

3.1. Princípio de transmissibilidade das forças no corpo rígido

As forças são vetores livres. Isto significa que qualquer que seja o ponto de aplicação de uma força ao longo da reta que a contém, o seu efeito é sempre igual em qualquer ponto do espaço.

3.2. Momento de uma força relativamente a um ponto

O momento de uma força relativamente a um ponto mede a tendência de uma força fazer rodar o corpo em torno desse ponto.

O momento relativamente a um ponto é definido como o produto externo entre o vetor posição $\overrightarrow{\mathrm{r_{OA}}}$ e a força $\vec{\mathrm{F}}$ da seguinte forma (ver

Figura 11 a), b) e C)

$$\overrightarrow{M_o} = (\overrightarrow{\mathrm{r_{OA}}} \mathrm{X} \vec{\mathrm{F}})$$

O vetor posição é um vetor que parte do ponto no qual se está a calcular o momento e termina noutro ponto qualquer da linha de ação da força. Como tal, são possíveis infinitos vetores posição para calcular o momento num ponto. (ver

Figura 11 d). Por exemplo:

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{\mathrm{r_{OA}}} \,\mathrm{X}\, \overrightarrow{\mathrm{F}} = \overrightarrow{\mathrm{r_{OB}}} \,\mathrm{X}\, \vec{\mathrm{F}} = \overrightarrow{\mathrm{r_{OC}}} \,\mathrm{X}\, \overrightarrow{\mathrm{F}}$$

A intensidade do vetor momento, M, é dada por:

$$M = r_{OA}\, F\, \sin \alpha$$

Em que α é o angulo entre a direção do vetor força e a direção do vetor posição. r_{OA} é o modulo do vetor posição e F é o modulo do vetor força.

Porque um corpo, submetido à ação de uma força, não tem qualquer tendência a rodar em torno de um ponto que contenha a linha de ação dessa força, e/ou porque o produto externo entre dois vetores com a mesma linha de ação, ou paralelos, é zero, dever-se-á ter sempre presente que **o momento de uma força em relação a qualquer ponto sobre a sua linha de ação é sempre nulo.**

A direção do vetor momento é perpendicular ao plano formado pelo vetor posição e o vetor força (ver

Figura 11 C e D). O seu sentido pode ser determinado usando a regra da mão direita. O vetor momento, também terá 3 componentes no espaço que poderão ser positivas ou negativas consoante for o sentido positivo atribuído a cada um dos eixos coordenados.

A regra da mão direita determina que se pusermos os 4 dedos da mão direita a rodar de acordo com o movimento de rotação que a força pode provocar no ponto, então esticando o dedo polegar, o quinto dedo, na direção perpendicular ao movimento dos outros 4, ele vai apontar no sentido do vetor momento e do vetor rotação.

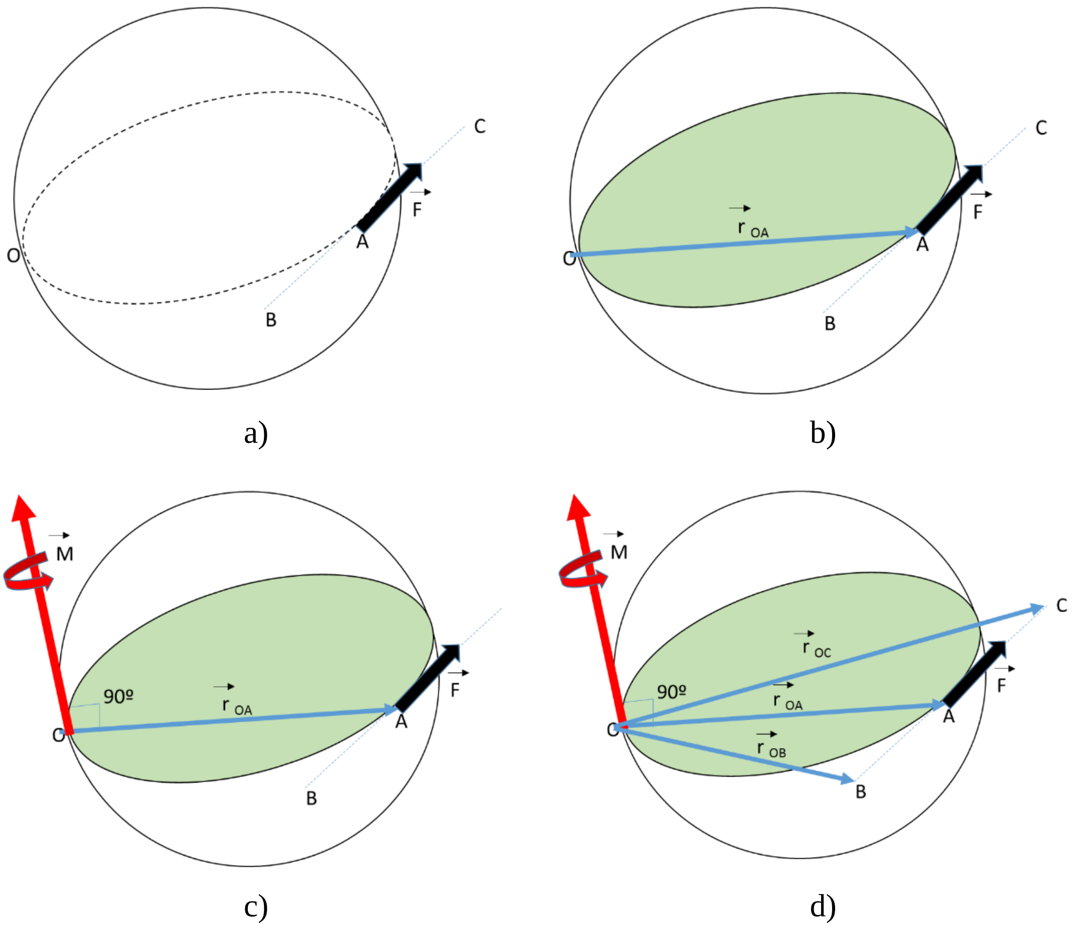


Figura 11 - Momento relativamente a um ponto O.

Por analise da Figura 12 verifica-se que $r_{OA} \sin \alpha$ é a distância d ente a linha de ação da força e o ponto O. A intensidade do momento pode ser dada por:

$$M = F.d$$

Sendo *d* dado por:

$$d = r_{OA} \sin \alpha$$

Esta última expressão é muito utlizada na resolução de problemas a duas dimensões.

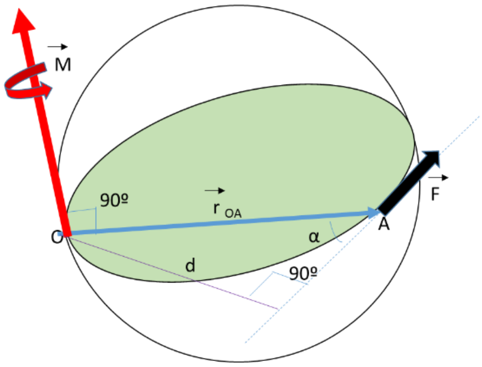


Figura 12 - Momento relativamente a um ponto O.

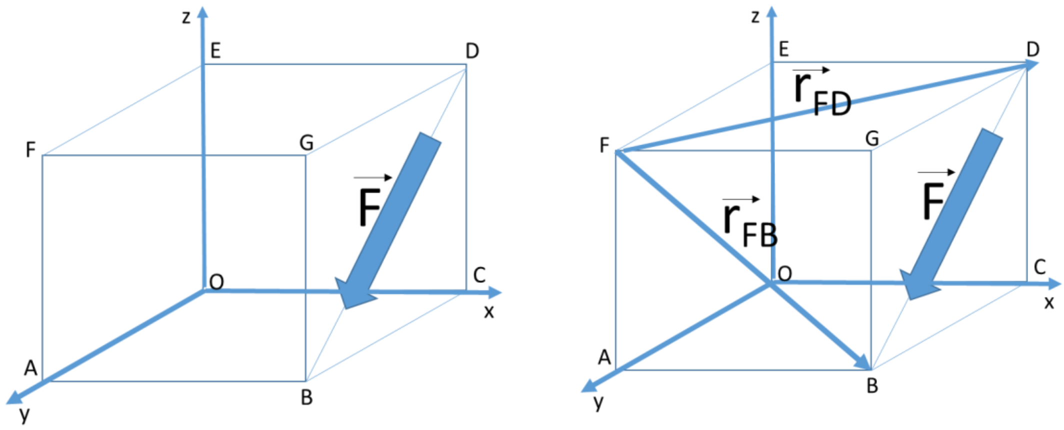
Considere o problema em que é pedido para se determinar o momento da Força $\vec{F}$ relativamente ao ponto F (Figura 13) e são dados os valores das coordenadas dos vértices do paralelepípedo representado na figura. Para se determinar o momento tem de ser realizar o produto externo entre o vetor que posiciona a linha de ação da força relativamente ao ponto F e o vetor $\vec{F}$. Existem então 2 formas distintas para obter a resolução.

$$\overrightarrow{M_F} = (\overrightarrow{r_{FD}} \, X \, \vec{F})$$

$$\overrightarrow{M_F} = (\overrightarrow{r_{FB}} \, X \, \vec{F})$$

Em que $\vec{F}$ e dada por:

$$\vec{F} = F\vec{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{DB}}{DB}$$



a) b)

Figura 13 - a) Representação esquemática do problema, b) Representação dos vários vetores que podem ser considerados na resolução do problema.

3.3. Momento relativamente a um eixo

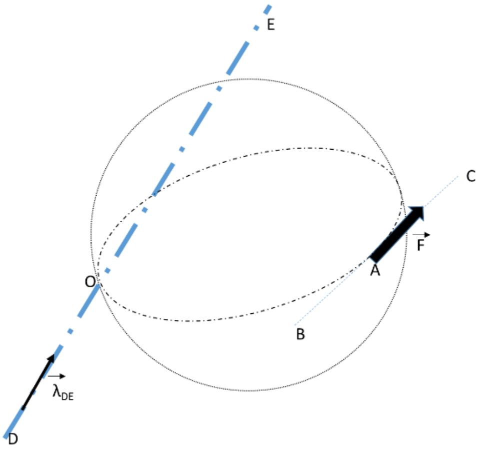
O momento relativamente a um eixo mede a tendência de uma força fazer girar o copo em torno desse eixo. Para determinar o momento relativamente a um eixo (ver Figura 14 a), tem-se que em primeiro lugar determinar o momento da força relativamente a qualquer ponto sobre o eixo (Figura 14 b))

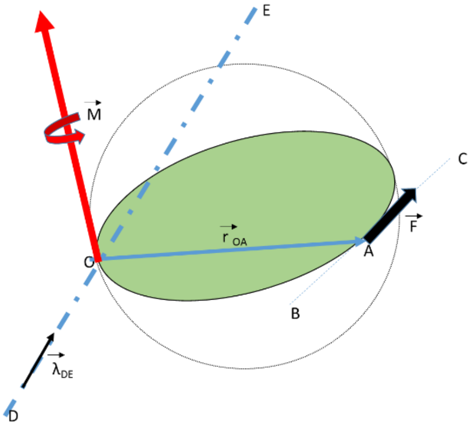
$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r_{OA}} \, X \, \vec{F}$$

Em seguida tem que se projetar o vetor momento anteriormente calculado sobre o eixo. (Figura 14 c):

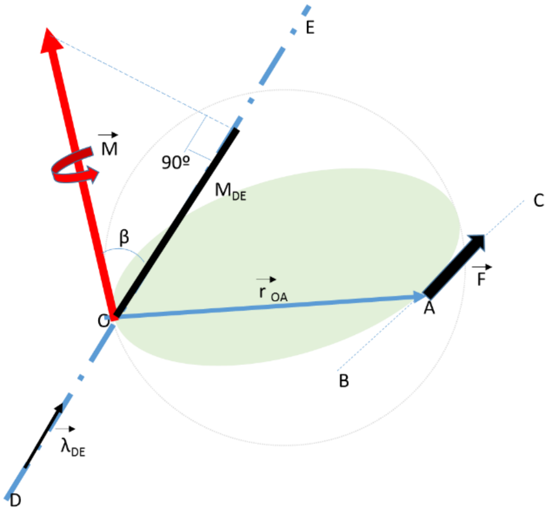
$$M_{OE} = |\overrightarrow{M_o} \, . \overrightarrow{\lambda_{DE}}|$$

Para se realizar essa projeção é conveniente conhecer o versor que define a direção e sentido do eixo, o versor $\overrightarrow{\lambda_{DE}}$.





a) **b)**



c)

Figura 14 - Momento relativamente a um eixo.

Considere o problema em que é pedido para determinar o momento da Força $\vec{F}$ relativamente ao eixo AF (ver Figura 15 a) e em que são dados os valores das coordenadas dos vértices do paralelepípedo representado na figura. Para se determinar o momento relativamente ao eixo tem que se calcular em primeiro lugar, o momento da Força $\vec{F}$ relativamente a qualquer ponto sobre o eixo. Numa fase posterior ter-se-á que projetar o valor do momento calculado sobre a direção do próprio eixo. Como no problema são dadas duas coordenadas sobre o eixo AF, e também são conhecidas duas coordenadas sobre a linha de ação de F, existem 4 caminhos diferentes para obter o mesmo resultado Figura 15 b):

$$\overrightarrow{M_F} = \overrightarrow{\mathrm{r_{FD}}} \times \vec{\mathrm{F}}$$

$$\overrightarrow{M_F} = \overrightarrow{\mathrm{r_{FB}}} \times \vec{\mathrm{F}}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{\mathrm{r_{AB}}} \times \vec{\mathrm{F}}$$

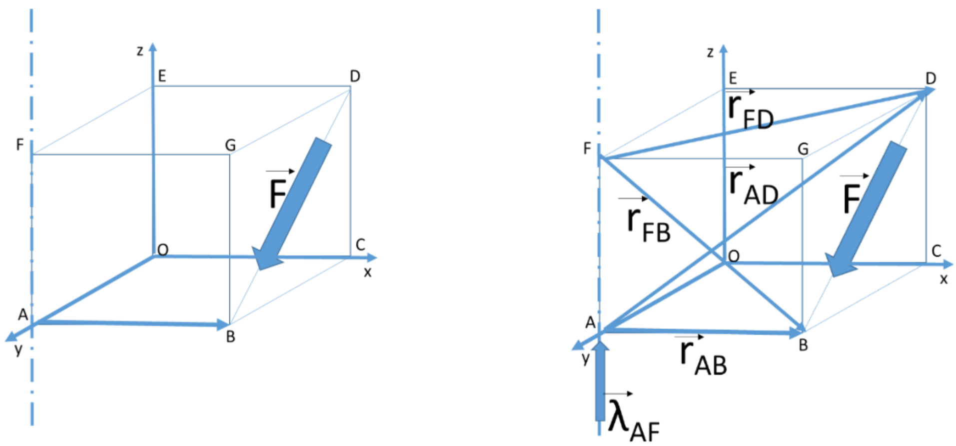
$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{\mathrm{r_{AB}}} \times \vec{\mathrm{F}}$$

Por fim, ter-se-á que projetar o vetor momento calculado no ponto A, ou no ponto F, sobre o eixo AF.

$$\mathrm{M_{AF}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{M_F}} \cdot \overrightarrow{\lambda_{\mathrm{AF}}}\right|$$

ou

$$\mathrm{M_{AF}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{M_A}} \cdot \overrightarrow{\lambda_{\mathrm{AF}}}\right|$$



a) b)

Figura 15 - Representação esquemática do problema, B representação dos vários vetores que podem ser considerados na resolução do problema.

3.4. Momento de um binário

Um binário é constituído por 2 forças de igual intensidade, paralelas e de sentido oposto como se ilustra na Figura 16 a). Pode-se determinar o momento do binário através do cálculo do momento total em relação a um ponto qualquer do espaço. Neste caso foi escolhido o ponto C (ver Figura 16b). O momento será igual á soma do momento da força

$\overrightarrow{F_1}$ no ponto C, designado por $\overrightarrow{M_1}$, com o momento da força $\overrightarrow{F_2}$ no ponto C designado por $\overrightarrow{M_2}$ (ver Figura 16 b)

$$\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} = (\overrightarrow{r_{CB}} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_{CA}} \times \overrightarrow{F_2})$$

Como

$$\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$$

Substituindo, obtém-se

$$\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{r_{CB}} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r_{CA}} \times (-\overrightarrow{F_1})$$

$$\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{(r_{CB}} - \overrightarrow{r_{CA})} \times \overrightarrow{F_1}$$

Conclui-se que qualquer que seja o ponto C do espaço:

$$\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{r_{BA}} \times \overrightarrow{F_1}$$

Mas também se pode concluir que:

$$\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{-r_{BA}} \times \overrightarrow{-F_1}$$

$$\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{r_{AB}} \times \overrightarrow{F_2}$$

Ou seja, o momento de um binário é sempre igual, qualquer que seja o ponto do espaço onde seja calculado.

$\overrightarrow{r_{BA}}$ é o vetor que posiciona a força $\overrightarrow{F_1}$ em relação a $\overrightarrow{F_2}$.

$\overrightarrow{r_{AB}}$ é o vetor que posiciona a força $\overrightarrow{F_2}$ em relação a $\overrightarrow{F_1}$.

Como representado na Figura 16 d) a intensidade do momento do binário é dado pelo produto da distância entre a linha de ação das duas forças (d) e a intensidade das forças (F e -F).

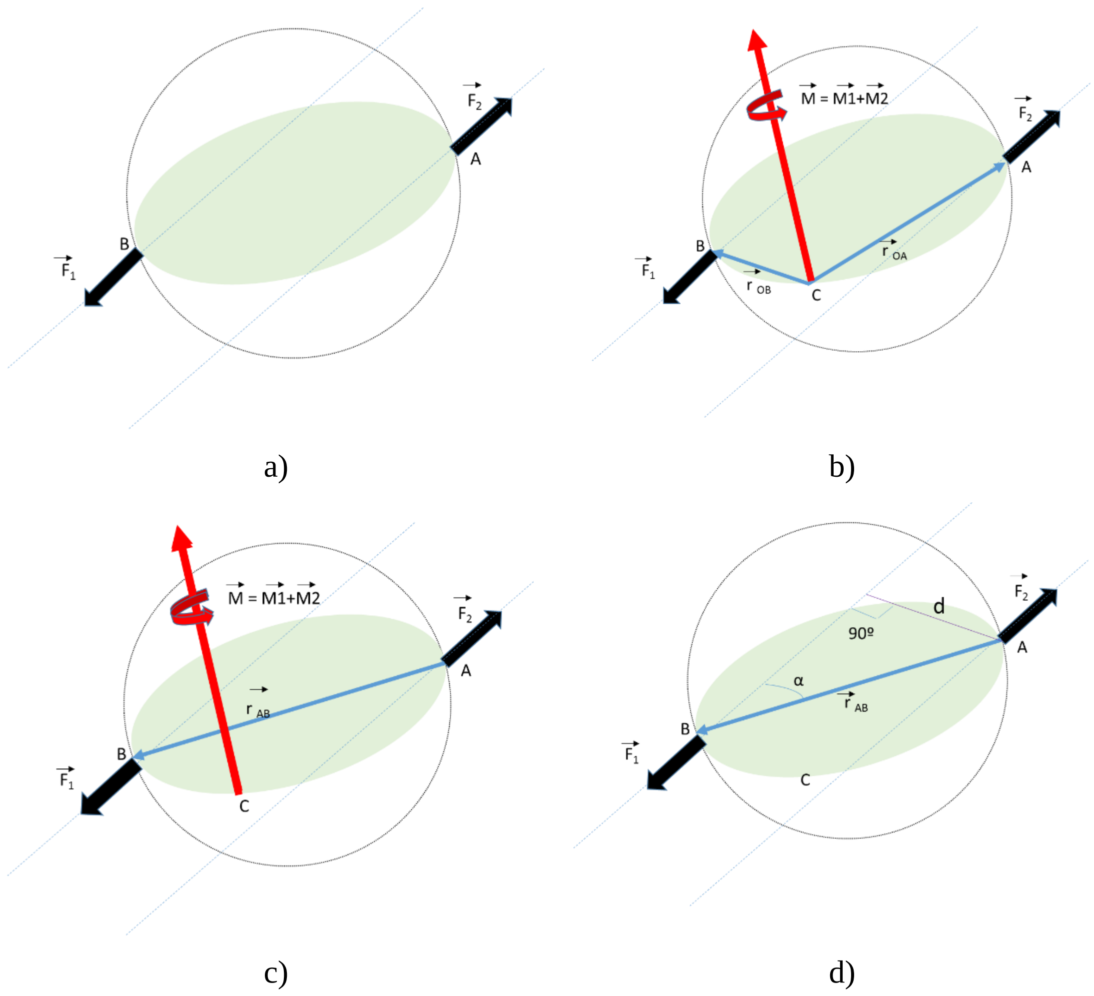


Figura 16 - Momento de um binário.

Considere o problema em que se pretende determinar o momento do binário formado pelas Força $\overrightarrow{F1}$ e $\overrightarrow{F2}$ (ver Figura 17) e são dados os valores das coordenadas dos vértices do paralelepípedo representado na figura. Existem pelo menos 8 alternativas para obter o mesmo cálculo (ver Figura 17 b e c),

$$\vec{M} = \overrightarrow{\mathrm{r_{AB}}}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{\mathrm{F_1}}$$

$$\vec{M} = \overrightarrow{\mathrm{r_{AD}}}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{\mathrm{F_1}}$$

$$\vec{M} = \overrightarrow{\mathrm{r_{ED}}}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{\mathrm{F_1}}$$

$$\vec{M} = \overrightarrow{\mathrm{r_{EB}}}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{\mathrm{F_1}}$$

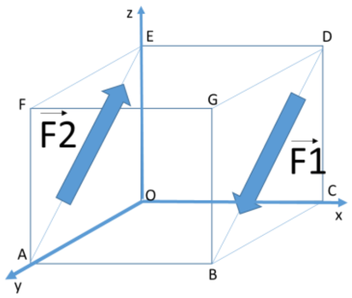
$$\vec{M} = \overrightarrow{\mathrm{r_{BA}}}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{\mathrm{F_2}}$$

$$\vec{M} = \overrightarrow{r_{DA}} \ \text{X} \ \overrightarrow{F_2}$$

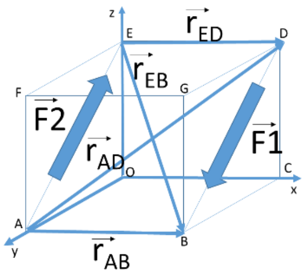
$$\vec{M} = \overrightarrow{r_{DE}} \ \text{X} \ \overrightarrow{F_2}$$

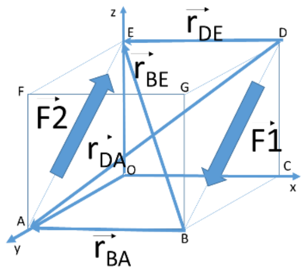
$$\vec{M} = \overrightarrow{r_{BE}} \ \text{X} \ \overrightarrow{F_1}$$

Também se poder-se-ia calcular o momento das duas forças em qualquer vértice do cubo e depois soma-los:



a)





b) **c)**

Figura 17 - a) Representação esquemática do problema, B e C representação dos vários vetores posição que podem ser utlizados na resolução do problema.

3.5. Translação da linha de ação da força

Para se realizar a translação da linha de ação de uma força F, por exemplo do ponto A para o ponto B, (ver Figura 18 a) tem que se adicionar ao ponto B as forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ de forma ao sistema ser equivalente (ver Figura 18 b). Como tal, o sistema será igual à força posicionada no ponto B (ver Figura 18 c) mais um momento do binário formado por $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ como se pode observar na Figura 18 d). Pelo que se pode realizar a translação de uma força de um ponto para o outro se se adicionar ao sistema o momento que a força aplicada no ponto A produz relativamente ao ponto B (Figura 18 e) ou seja:

$$\overrightarrow{M_B} = (\overrightarrow{\mathrm{r_{BA}}} \, \mathrm{X} \, \vec{\mathrm{F}} \,)$$

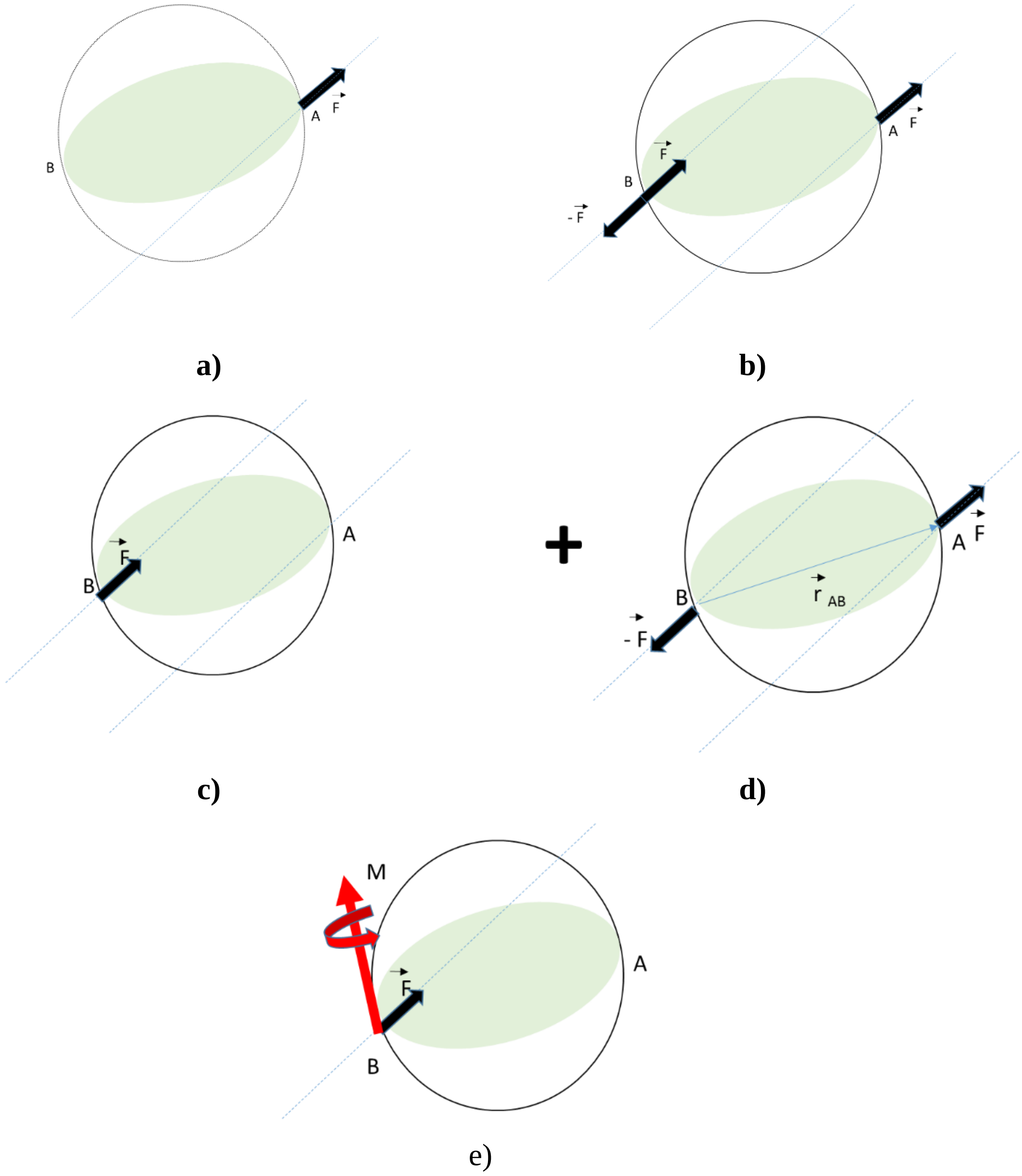


Figura 18 - Translação da linha de ação de uma força.

3.6 Sistemas equivalentes de forças

No corpo rígido a soma das forças só é possível se estas forem concorrentes, pelo que para se obter o valor da resultante no corpo rígido é necessário realizar a translação de todas as forças para um determinado ponto. Para tal tem que se adicionar ao sistema o momento total correspondente. Na Figura 19 está representado um sistema de forças constituído pelas forças $\overrightarrow{\mathrm{F}_1}$; $\overrightarrow{\mathrm{F}_2}$ e $\overrightarrow{\mathrm{F}_3}$ aplicadas nos pontos A, B e C respetivamente. Para a obtenção do sistema de forças no ponto D é necessário adicionar o momento de todas as forças no ponto D de acordo com (Figura 19 b-e):

$$\vec{M}_{Total} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_2 = \overrightarrow{r_{DA}} X \vec{F}_1 + \overrightarrow{r_{DB}} X \vec{F}_2 + \overrightarrow{r_{DC}} X \vec{F}_3$$

Sendo a resultante dada por:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

De forma genérica:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$\vec{M}_{Total} = \sum \vec{M}$$

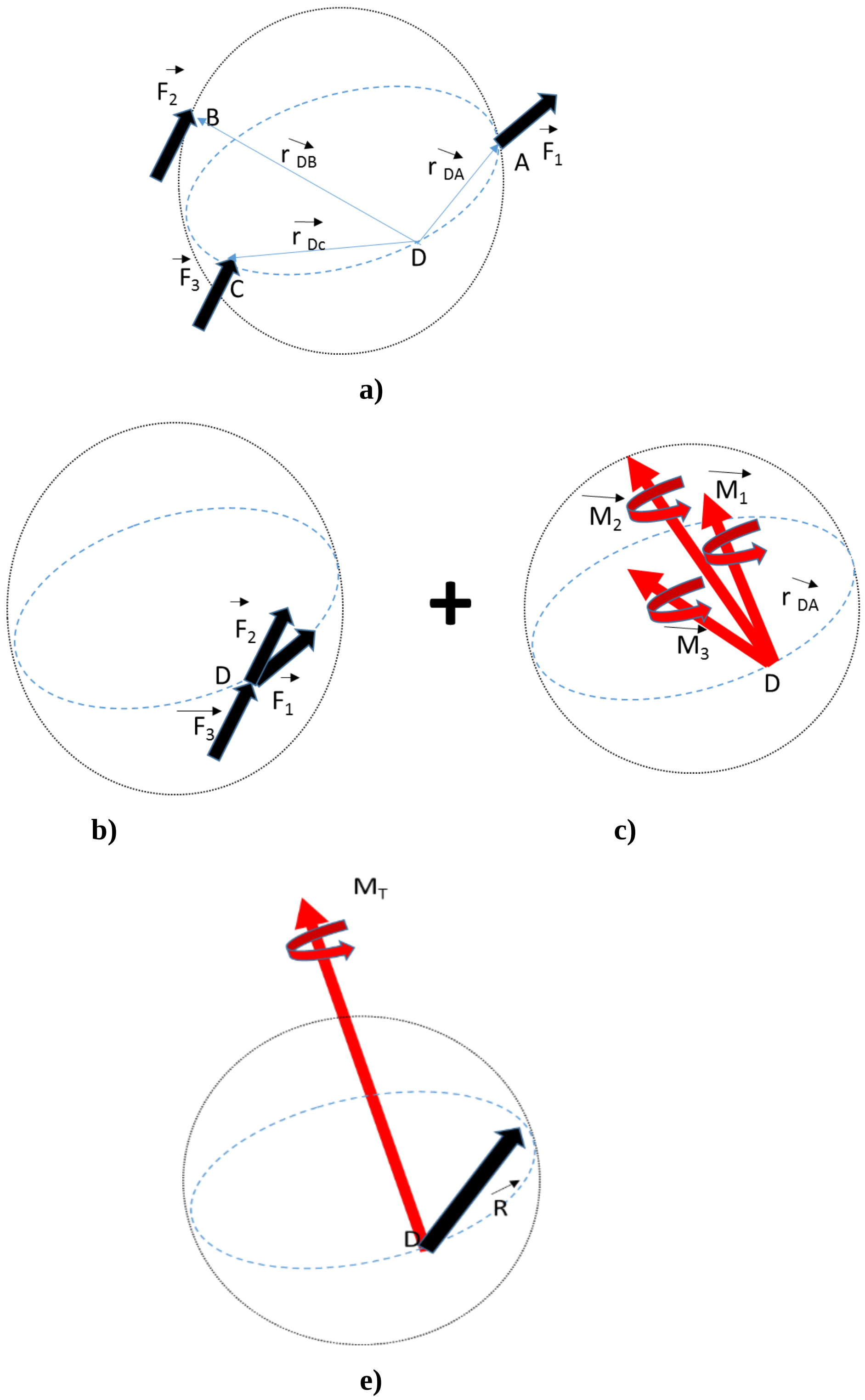


Figura 19 - Sistemas equivalentes de forças.

3.7. Equilíbrio do corpo rígido

Considera-se que um corpo rígido está em equilíbrio estático quando a resultante das forças que sobre ele atua for nula. Ou seja a força resultante terá de ser igual a zero, e o momento resultante também terá de ser igual a zero. Pelo que se pode escrever:

$$\overrightarrow{R} = \sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{Total} = \sum \vec{M} = \vec{0}$$

Mas se o momento resultante pode variar de ponto para ponto, em que ponto do espaço é que deverá ser zero o momento resultante para que o corpo esteja em equilíbrio estático?

Para responder à pergunta anterior pode-se fazer ainda uma outra pergunta. Se se tiver um sistema de forças sem nenhuma força aplicada e sem nenhum momento aplicado, um sistema de forças nulo, ou equivalente a zero, qual é a resultante desse sistema de forças num outro ponto qualquer do espaço? A resposta é simples e é a de que ele é nulo em qualquer outro ponto do espaço. Somando todas as forças, todos os momentos, e ainda o momento que cada uma das forças produz no ponto, então como não há qualquer vetor no sistema, todos estes somatórios dão nulos.

Considere-se agora a propriedade transitiva da igualdade ou da equivalência.

Se A=B e se B=C, então A=C.

Considere-se então um sistema de forças A com n forças e m momentos, e que se determinou a resultante desse sistema de forças em B. O resultado em B foi um vetor força resultante igual a zero e um vetor momento resultante igual a zero. Se o resultado foi nulo em B, quando se calcula a resultante das forças em B, para outro ponto qualquer C do espaço, o resultado também terá de dar igualmente nulo. Mas se A equivalente a B, e B equivalente a 0 em qualquer outro ponto do espaço, então A também é equivalente a zero em qualquer ponto do espaço.

Para garantir o equilíbrio estático de um sistema de forças em qualquer ponto do espaço, basta garantir o seu equilíbrio estático num ponto qualquer.

Tendo em conta as equações acima apresentadas, em problemas a 3D as equações da estática permitem a determinação de no máximo 6 incógnitas.

$$R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0$$

$$R_z = \sum F_z = 0$$

$$M_{Rx} = \sum M_x = 0$$

$$M_{Ry} = \sum M_y = 0$$

$$M_{Rz} = \sum M_z = 0$$

Para a resolução dos problemas em geral é de grande utilidade executar o diagrama de corpo livre. O diagrama de corpo livre é a representação esquemática de todas as forças constituintes de um sistema de forças, bem como das suas orientações, e localizações. É necessário então um esquema com todas as distâncias, ângulos e forças envolvidas.

Apoios estruturais

Como o próprio nome indica, um apoio de uma estrutura é um aparelho onde a estrutura se apoia para não se movimentar.

Para cada situação de carga que a estrutura possa sofrer, o apoio introduz na estrutura as forças que ela necessita para se manter em equilíbrio estático. Essas forças que o apoio introduz são as reações do apoio à estrutura, ou simplesmente reações do apoio.

Consoante o tipo de reações que os apoios possam exercer sobre as estruturas, eles são denominados de apoios móveis, apoios fixos ou encastramentos.

Imagine-se um estrado que se coloca debaixo de um frigorífico. Esse estrado impede o frigorífico de cair sobre o pavimento e por isso é um apoio do frigorífico.

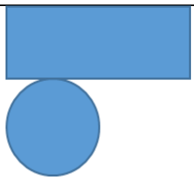
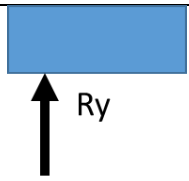
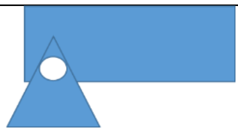
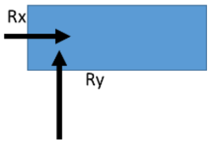
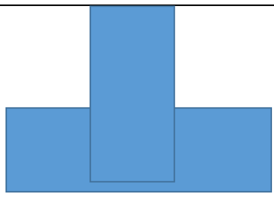
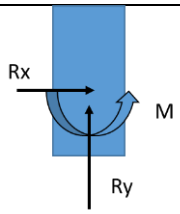
Imagine-se que o estrado tem umas rodinhas e permite que esse frigorífico se desloque na horizontal. Então esse estrado é um apoio móvel do frigorífico. Permite que o frigorífico se desloque. Imagine-se agora que se travam as rodas do estrado. O frigorífico deixa de se poder deslocar e por isso o estrado passa a um apoio fixo.

Notem que no encastramento a estrutura não pode rodar quando se deforma. Então para que ela não rode é necessário exercer sobre ela um momento, que impeça a sua rotação.

Na Tabela 1, estão representados vários tipos de apoios e as reações que eles exercem sobre as estruturas.

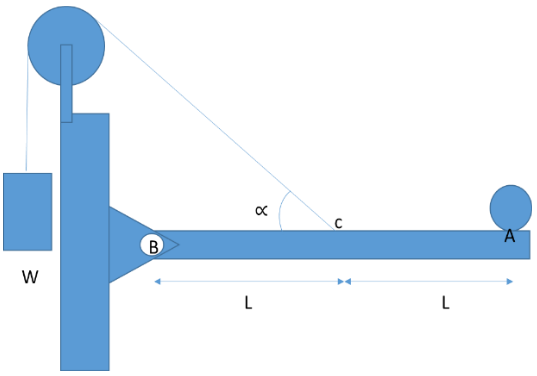
Os cabos apenas conseguem suportar uma força segundo o eixo do cabo. Então a reação de apoio que pode existir quando se apoia a estrutura com um cabo, tem sempre a direção do cabo.

Tabela 1 - Reações em apoios a duas dimensões

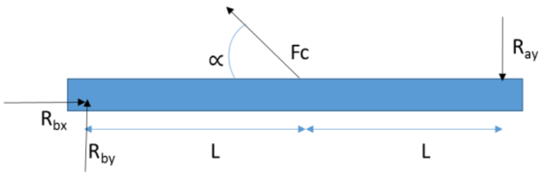
Apoio Móvel		
Apoio Fixo		
Encastramento		
Cabo		

Na Figura 20 apresenta-se o diagrama de corpo livre de um problema simples em que é pedido que se determinem as reações nos apoios A e B de uma estrutura em equilíbrio estático, sendo que A é um apoio móvel e B um apoio fixo. Neste problema a barra horizontal tem espessura e peso desprezáveis.

Para a realização do diagrama de corpo livre da barra horizontal, foi necessário destacá-la de tudo o resto, representando apenas todas as forças sobre ela exercidas, assim como as distâncias e os ângulos que vão possibilitar o cálculo dos momentos dessas forças num ponto.



a)



b)

Figura 20 - Exemplo de um diagrama de corpo livre.

Neste exemplo (Figura 20b) o sistema de equações é dado por:

$$R_x = \sum F_x = R_{bx} - F_C \cos\alpha = 0$$

$$R_y = \sum F_y = R_{by} + F_C \sin\alpha - R_{Ay} = 0$$

$$(M_z)_{B(Total)} = \sum (M_z)_B = LF_C \sin\alpha - 2LR_{Ay} = 0$$

Neste problema existem 3 equações escalares e também 3 incógnitas. Escolheu-se o ponto B para fazer a resultante do sistema de forças e obrigou-se a que essa resultante fosse nula. No entanto, como se viu atrás, se se tivesse escolhido o ponto A para igualar a 0 a resultante em A, os resultados finais viriam exatamente iguais. Como já se referiu se um sistema de forças tiver uma resultante nula num ponto A qualquer do espaço, então terá também uma resultante nula noutro ponto B ou C ou D do espaço, mesmo que os pontos C ou D sejam completamente exteriores à estrutura. A estrutura poderia estar em Setúbal, e o ponto C ou D, utilizado para igualar a resultante do sistema de forças a zero, estar em Nova Iorque. Os resultados teriam de dar exatamente iguais.

4. Atrito

O atrito, na física, é uma força que se pode gerar entre duas superfícies em contato, e que se opõe ao movimento relativo entre ambas. Os problemas que envolvem atrito são em geral muito difíceis de resolver, não só porque muitas vezes envolvem variáveis estatísticas, como também transpõem o efeito do comportamento de todos os pontos de contacto entre as duas superfícies, átomo a átomo, para a sua resultante. Conceber a rótula mais eficiente, em termos de atrito, a implantar num joelho de um paciente é um problema muito complexo, não só porque esse paciente vai fazer no futuro uma infinidade de diferentes movimentos, mas também porque para cada movimento vão existir muitos milhões de pontos de contacto entre essa rótula e o corpo do paciente.

O modelo de atrito que se leciona nesta disciplina é simples, e é o modelo de atrito seco de Coulomb.

Este modelo diz que na superfície de contacto entre dois corpos, vai existir uma força de atrito paralela à superfície, sempre que um corpo tiver tendência a escorregar, ou escorregar sobre o outro. Esta foça opõe-se sempre ao movimento de um corpo sobre o outro, e tem um valor máximo que não pode ser ultrapassado. Esse valor máximo é dado por um coeficiente de atrito multiplicado pelo valor da força normal à superfície existente entre os dois corpos.

Considera-se a existência de dois coeficientes de atrito diferentes. Um é o coeficiente de atrito estático. Ele é utilizado para obter a força de atrito quando os corpos estão quase a escorregar um em relação ao outro, ou seja o movimento entre eles é iminente. O outro é o coeficiente de atrito cinético, que é utilizado sempre que já existe escorregamento entre os corpos.

O coeficiente de atrito cinético, é sempre menor do que o coeficiente de atrito estático.

Na resolução destes problemas bidimensionais dever-se-á considerar o referencial X, Y, com o eixo dos X paralelo à superfície onde existe ou pode existir escorregamento, e com o eixo dos Y perpendicular a essa superfície.

A Tabela 2 representa várias situações de contacto entre as superfícies de uma caixa e de uma mesa.

Na primeira linha Tabela 2 a caixa está sobre a mesa sem nenhuma força horizontal aplicada, pelo que não há razão para a ocorrência de qualquer força de atrito.

Na segunda linha da Tabela 2 já existe uma força horizontal aplicada, pelo que para que haja equilíbrio estático é necessário que apareça uma força de atrito a contrariar a força F.

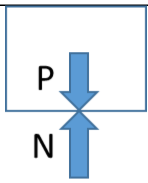
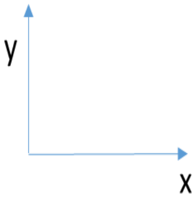
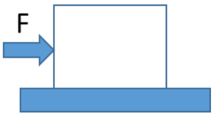
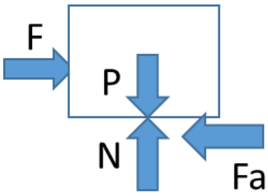
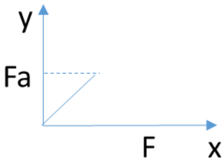
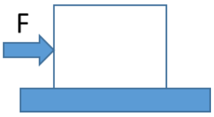
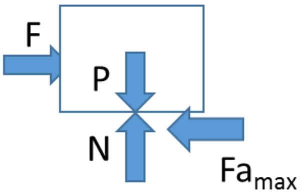
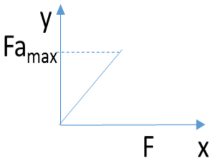
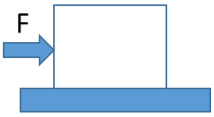
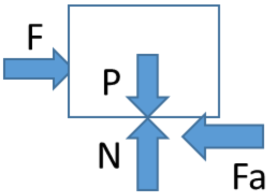
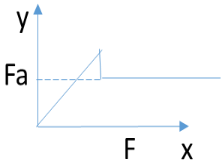
Na terceira linha da Tabela 2 continua a ser aplicada uma força horizontal, só que desta vez, essa força é igual ao máximo valor da força de atrito que pode existir entre a caixa e o plano de escorregamento.

$$F = Fa_{max} = \mu_e N$$

Nestas condições diz-se que o movimento é eminente. Ou seja, com um pequeníssimo acréscimo ao valor de F ele acontece, e a caixa começa a escorregar.

Na quarta linha, Tabela 2, a força F excedeu o valor da força de atrito máxima. Começa a escorregar e quando isso acontece, o coeficiente de atrito entre as duas superfícies também baixa. O coeficiente de atrito a utilizar deixa de ser igual ao coeficiente de atrito estático e passa a ser o coeficiente de atrito cinético.

Tabela 2 - Representação esquemática de várias situações de um bloco sobre um plano.

	Representação esquemática	Diagram de corpo livre	Valor da força	Equações de equilíbrio
1ª				$\sum F_x = 0 \leftrightarrow 0 = 0$ $\sum F_y = 0 \leftrightarrow N = P$
2ª				$\sum F_x = 0 \leftrightarrow F = Fa$ $\sum F_y = 0 \leftrightarrow N = P$
3ª				$\sum F_x = 0 \leftrightarrow F = Fa_{max}$ $\sum F_y = 0 \leftrightarrow N = P$ $Fa_{max} = \mu_e N$
4ª				$\sum F_x = ma \leftrightarrow F - Fa = ma$ $\sum F_y = 0 \leftrightarrow N = P$ $Fa = \mu_d N$

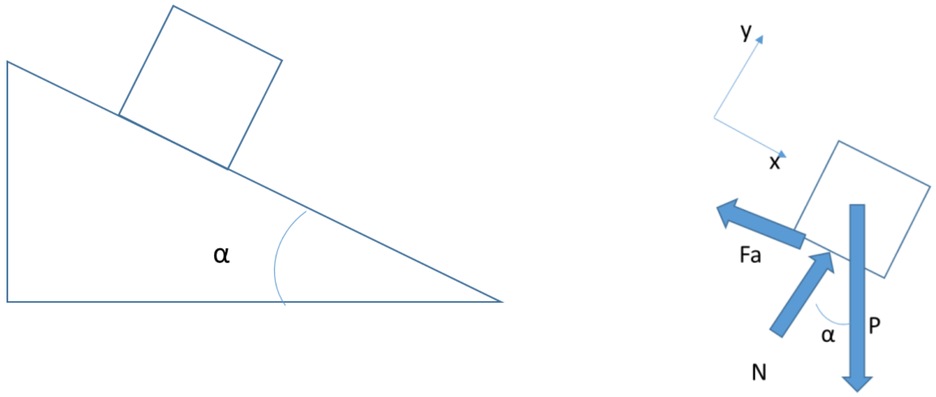
Na Figura 21 coloca-se a caixa sobre um plano inclinado. Os eixos X e Y, devem ser também trocados para as direções paralela e perpendicular ao plano inclinado. Faz-se a determinação do maior ângulo de inclinação α da superfície, por forma a que a caixa se mantenha em equilíbrio estático.

$$\sum F_x = 0 \leftrightarrow Fa = P \sin \alpha$$

$$\sum F_y = 0 \leftrightarrow N = P \cos \alpha$$

$$Fa_{max} = \mu_e N \leftrightarrow P \sin \alpha = \mu_e P \cos \alpha \leftrightarrow \mu_e = \tan \alpha$$

O maior ângulo α possível em situação de equilíbrio estático pode ser obtido através da equação $\mu_e = \tan \alpha \leftrightarrow \alpha = arctan\, \mu_e$



a) b)

Figura 21 - Representação esquemática do problema, b) Diagrama de corpo livre.

Considere uma caixa sobre no plano inclinado e com uma força F aplicada de acordo com o representado esquematicamente na

Figura **22**. Neste problema podem existir 3 situações:

1) A força F é muito grande, e a caixa escorrega para cima. Ela sobe pelo plano inclinado;
2) A força F é muito pequena e a caixa escorrega para baixo;
3) A força F nem é tão grande que provoque o escorregamento da caixa para cima, nem tão pequena que permita o escorregamento da caixa para baixo. Ou seja ela está no intervalo entre a força máxima, a que provoca escorregamento para cima, e a força mínima, a que impede que o deslocamento da caixa seja para baixo. Nestas condições, nesse intervalo de valores de F, a caixa está em equilíbrio estático.

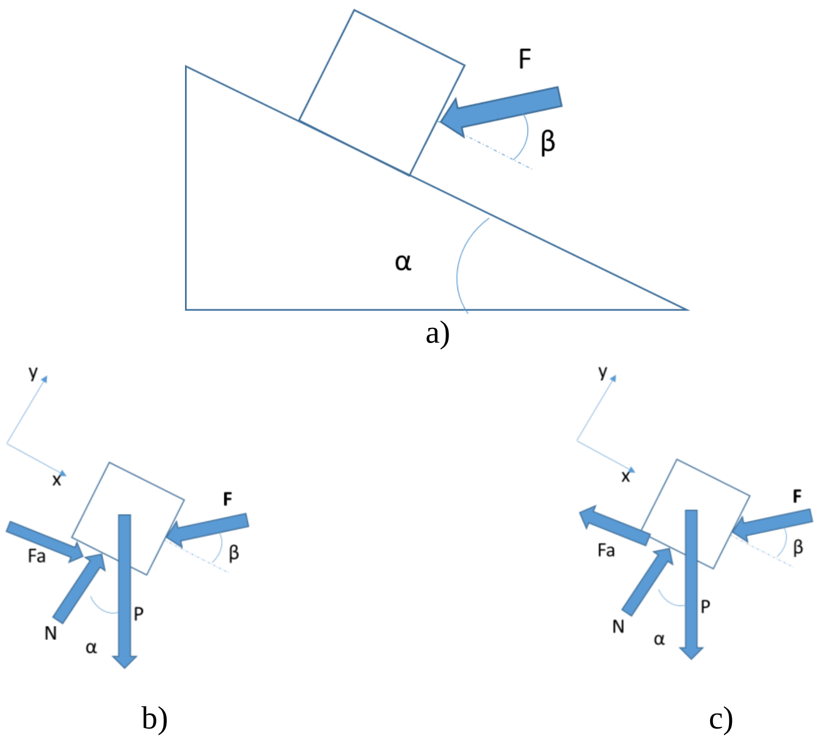


Figura 22 - A) Representação esquemática do problema, B) Diagrama de corpo livre para movimento eminente ascendente e c) diagrama de corpo livre para movimento eminente descendente.

Movimento eminente ascendente, permite o calculo da força maxima de acordo com as seguintes equações:

$$\sum F_x = 0 \leftrightarrow P \sin\alpha - F\cos\beta + Fa = 0 \leftrightarrow Fa = -P\sin\alpha + F\cos\beta$$

$$\sum F_y = 0 \leftrightarrow N - P\cos\alpha - F\sin\beta = 0 \leftrightarrow N = P\ \cos\alpha + F\sin\beta$$

$$Fa_{max} = \mu_e N \leftrightarrow -P\sin\alpha + F\cos\beta = \mu_e(P\ \cos\alpha + F\sin\beta)$$

$$F_{máximo} = \mathrm{P}\frac{(\sin\alpha + \mu_e\ \cos\alpha)}{(\cos\beta - \mu_e \sin\beta)}$$

Movimento eminente descendente as equações para o cálculo são as seguintes:

$$\sum F_x = 0 \leftrightarrow P\sin\alpha - F\cos\beta - Fa = 0 \leftrightarrow Fa = P\sin\alpha - F\cos\beta$$

$$\sum F_y = 0 \leftrightarrow N - P\cos\alpha - F\sin\beta = 0 \leftrightarrow N = P\ \cos\alpha + F\sin\beta$$

$$Fa_{max} = \mu_e N \leftrightarrow P \sin\alpha - F\cos\beta = \mu_e(P\ \cos\alpha + F\sin\beta)$$

$$F_{minimo} = \mathrm{P}\frac{(\sin\alpha - \mu_e\ \cos\alpha)}{(\ \cos\beta + \mu_e \sin\beta)}$$

5. Centros Geométricos de Figuras Planas e de Linhas, e Centros de Gravidade ou Centros de Massa.

5.1. Centros geométricos de figuras planas

A determinação e explicação, de uma forma generalista, do conceito de centro geométrico, exige o prévio conhecimento de cálculo integral, o que não se verifica no 1º semestre dos alunos de Engenharia da ESTSetúbal para quem se escrevem estas folhas.

Apesar disso explicar-se-á o conceito de centro geométrico, não da sua forma mais genérica, mas aplicado a problemas resolúveis com o auxílio de tabelas onde constem o o resultado desses integrais.

Da mesma forma que se pode definir o momento de uma força em relação a um eixo, também se pode definir o momento de uma área em relação a um eixo.

O momento de uma força em relação a um eixo é dado pelo produto da força pela distância entre o eixo e a linha de ação da força. Ele pode ser positivo ou negativo, consoante o referencial que estivermos a utilizar.

O momento de uma área em relação a um eixo também é o produto dessa área, pela distância entre o centro geométrico dessa área e o eixo, e poderá ser igualmente positivo ou negativo.

O momento de uma área em relação a um eixo chama-se momento estático dessa área em relação ao eixo. Se se tiver a trabalhar em metros, as unidades do momento estático serão m^3. (Unidades da área multiplicadas pelas unidades da distância)

Num referencial plano X,Y o momento estático de uma área em relação ao eixo dos X, M_{Ax} , é dado pelo produto da área pela ordenada Y_i do centro geométrico dessa área. (A ordenada Y do centro geométrico pode ser positiva ou negativa, mas o seu módulo é a distância desse centro geométrico, ao eixo dos X) (Figura 23)

$$M_{Ax}=Y_iA_i$$

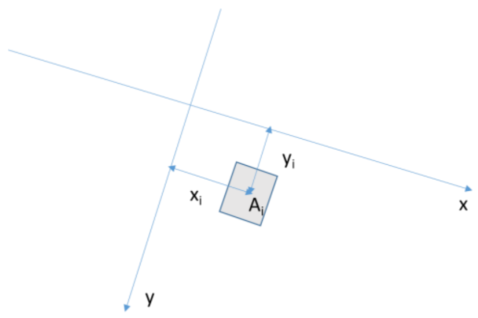


Figura 23 - Representação de um elemento da localização de um elemento de área.

O momento estático de uma área em relação ao eixo dos Y, M_{Ay}, é dado pelo produto da área pela coordenada X do centro geométrico dessa área. Pode ser igualmente positivo ou negativo.

$$M_{Ay}=X_i\ A_i$$

Pode-se definir centro geométrico de uma área, também chamado de centroide, como sendo o ponto onde passam todos os eixos, em relação aos quais a área produz um momento estático nulo. Dizendo de outra forma, se um eixo AA" passar no centro geométrico de uma área, então o momento dessa área em relação ao eixo AA" será nulo.

Outra forma de dizer a mesma coisa do que foi dito acima, é que o centro geométrico de uma figura plana $(\bar{x}, \bar{y})$ é o ponto aonde se poderia colocar toda a área da figura (A_t), por forma a que o momento dessa área ali colocada, em relação a outro eixo qualquer, fosse igual ao somatório dos momentos que cada uma das áreas elementares (A_i) constituintes da figura total, produziriam nesse eixo.

Pode-se escrever as seguintes relações:

$$\bar{x}A_t = \sum x_i\, A_i$$

$$\bar{y}A_t = \sum y_i\, A_i$$

$$A_t = \sum A_i$$

Então:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i\, A_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

Imagine-se um retângulo com 2 m^2. Esse retângulo é constituído por infinitas áreas elementares, áreas que tendem para zero, mas que todas somadas perfazem os 2 m^2. (São infinitos pequenos pontos, cuja área tende para zero, e que todos juntos constituem a figura original. Este somatório de um número infinito de parcelas que tendem para zero, é o que mais tarde os alunos irão chamar de integral. Como, neste caso, as parcelas são áreas elementares chamar-se-á integral de área)

Podemos dizer que o centro geométrico desse retângulo de 2 m^2 é o ponto onde poderíamos concentrar a totalidade da área, os 2 m^2, por forma a que o momento desses 2 m^2 concentrados nesse único ponto e em relação a qualquer eixo, fosse igual ao somatório dos momentos que cada uma das infinitas áreas que constituem o retângulo, produzem em relação a esse eixo.

Como facilmente se consegue perceber, **qualquer eixo de simetria de uma figura plana contém o seu centro geométrico.**

Considere-se então, a título de exemplo, uma figura constituída por um retângulo e por um círculo (Figura 24).

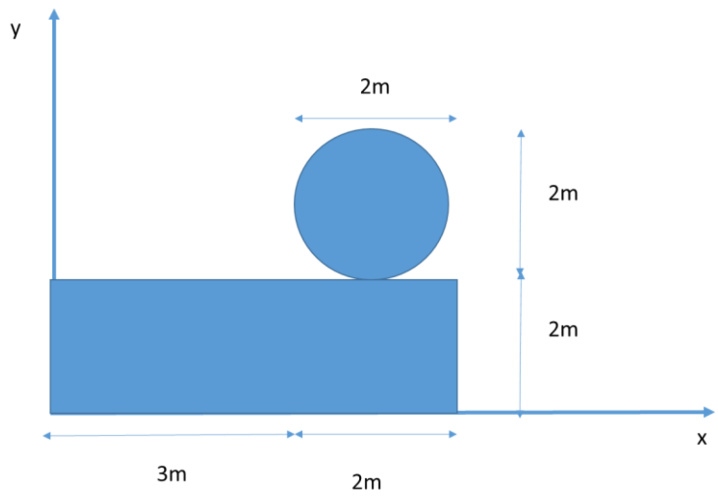


Figura 24 - Exemplo de uma figura plana simples.

Com base no que foi dito atrás poder-se-á calcular o centro geométrico dessa área.

O objetivo é calcular as coordenadas do ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ aonde se poderia colocar a área total da figura, para que o momento estático dessa área total concentrada nesse ponto, e em relação a qualquer eixo, fosse igual ao momento estático produzido pelo retângulo adicionado ao momento estático produzido pelo circulo em relação a esse eixo escolhido.

Como a interseção de dois eixos já define um ponto, não é necessário garantir esta condição, igualdade do momento estático, aos infinitos eixos existentes no plano. Se se garantir esta igualdade em relação a dois eixos não paralelos, a interseção desses dois eixos, vai imediatamente definir o centro geométrico da área em questão. Costuma-se calcular o centro geométrico com a igualdade do momento estático em relação ao eixo dos X e em relação ao eixo dos Y.

Atenda-se então à tabela apresentada, aonde é resumido o cálculo das coordenadas do centroide da figura acima.

Tabela 3 - Resultados do centro geométrico da Figura 24 ($Sx=x_iA_i$ e $Sy=y_iA_i$)

		Área	Xc	Yc	Sx	Sy
	Figura 1	10,000	4,000	1,000	10,000	40,000
	Figura 2	3,142	3,000	3,000	9,425	9,425
	Total	13,142			19,425	49,425
Xc (fig Total)=		3,761				
Yc (fig Total)=		1,478				

Considere-se agora que se tem a seguinte figura, que é um retângulo a que se retirou um círculo (Figura 25).

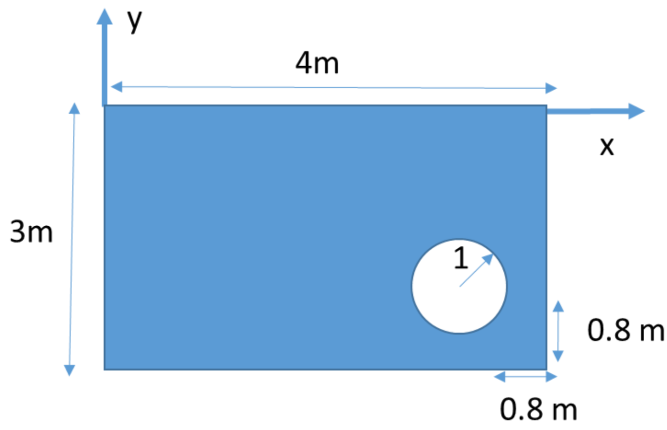


Figura 25 - Exemplo de uma figura plana simples.

O problema é basicamente o mesmo do formulado anteriormente, considerando que se retira o círculo ao invés de se acrescentar. Ou seja, é como se se acrescentasse uma área negativa por cima da que lá está, para que o resultado final seja o vazio.

Então se se considerar a área do círculo com o sinal negativo, o problema resolver-se-á exatamente da forma como foi resolvido o problema anterior.

Atenda-se à Tabela 4 resumo da resolução do problema:

Tabela 4 -Resultados do cálculo do centro geométrico da Figura 25 ($Sx=x_iA_i$ e $Sy=y_iA_i$)

		Área	Xc	Yc	Sx	Sy
	Figura 1	12,000	2,000	-1,500	-18,000	24,000
	Figura 2	-0,785	3,200	-2,200	1,728	-2,513
	Total	11,215			-16,272	21,487
Xc (fig Total)=		1,916				
Yc (fig Total)=		-1,451				

5.3. Centros geométricos de linhas

Também sem se usar o cálculo integral, far-se-á a explanação do centro geométrico de uma linha da mesma forma que se utilizou no ponto anterior para a explanação do centro geométrico de uma área. A explicação é em tudo análoga e por isso não se fará com tanto detalhe.

Considera-se momento linear de uma linha em relação a um eixo, ao produto do comprimento dessa linha pela distância do seu centro geométrico ao eixo. Ele pode ser positivo ou negativo, consoante for a orientação dos eixos.

O centro geométrico de uma linha, é assim o ponto em que poderíamos concentrar todo o comprimento da linha, por forma a que todo esse comprimento concentrado no ponto, produzisse o mesmo momento linear em relação a qualquer eixo, que os infinitos comprimentos elementares em que se pode subdividir a linha original, produziriam.

Esta soma de um número infinito de parcelas que tendem para zero, o momento linear de cada um dos segmentos elementares da linha, é um integral de linha, uma vez que estas parcelas estão ao longo de uma linha.

Dada a limitação provocada pelo desconhecimento do cálculo integral, far-se-á apenas alusão às linhas compostas pela adição de linhas simples em que se conheçam os centros lineares. Estes podem ser, neste caso de linhas simples, retirados das tabelas de centros lineares de linhas simples.

Qualquer eixo que passe no centro geométrico de uma linha, tem nulo o momento linear, provocado por essa linha.

Qualquer eixo de simetria de uma linha contém o seu centro geométrico.

O momento linear de uma linha em relação ao eixo dos X é dado pelo comprimento da linha pela coordenada Y do seu centro geométrico.

O momento linear de uma linha em relação ao eixo dos Y é dado pelo comprimento da linha pela coordenada X do seu centro geométrico.

$$M_{LX=} L*Y$$

$$M_{LY} = L*X$$

Como foi referido atrás para a determinação dos centros geométricos de áreas, a interseção de dois eixos já define um ponto, não é necessário garantir esta condição, igualdade do momento linear, aos infinitos eixos existentes no plano. Se se garantir esta igualdade em relação a dois eixos não paralelos, a interseção desses dois eixos, vai imediatamente definir o centro geométrico da linha em questão. Costuma-se calcular o centro geométrico das linhas com a igualdade do momento linear em relação ao eixo dos X e em relação ao eixo dos Y.

O centro linear de um segmento de reta é no ponto médio desse segmento.

Considere-se então o seguinte exemplo mostrado na Figura 26, em que se pretende conhecer o centro geométrico da linha representada.

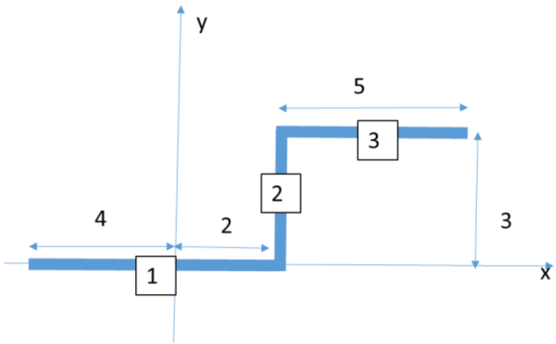


Figura 26 - Exemplo de uma linha

A linha representada (Figura 26) é constituída por 3 segmentos de reta. O centro geométrico de cada um deles está ao meio do segmento.

O problema consiste então em determinar a localização do ponto, aonde se pode colocar todo o comprimento da linha, por forma a que o momento linear provocado por esse comprimento total ali aplicado, seja igual ao somatório dos momentos lineares provocados pelas linhas 1, 2 e 3.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \, L_i}{\sum L_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \, L_i}{\sum L_i}$$

Atenda-se à Tabela 5 que em resumo fornece a resolução do problema.

Tabela 5 - Resultado do centro geométrico da Figura 26.

		Comprimento	Xc	Yc	MLX	MLY
	Linha 1	6,000	-1,000	0,000	0,000	-6,000
	Linha 2	3,000	2,000	1,500	4,500	6,000
	Linha 3	5,000	4,500	3,000	15,000	22,500
	Total	14,000			19,500	22,500
Xc (fig Total)=		1,607				
Yc (fig Total)=		1,393				

5.3. Centros de gravidade ou centros de massa

Considera-se o centro de gravidade de um corpo o ponto do espaço aonde se poderia colocar todo o peso do corpo, para que o momento em relação a qualquer eixo desse peso total colocado nesse ponto, fosse igual à soma dos momentos que as infinitésimas partes desse corpo, produziriam nesse eixo.

Somar esses momentos produzidos pelos infinitésimos volumes que formam o corpo é resolver um integral volúmico.

Como nos pontos anteriores, vai-se passar por cima desses integrais, e explicar o conceito para o caso em que temos um corpo constituído por vários volumes, em que cada um deles tem o centro gravítico conhecido.

Se a aceleração da gravidade tiver o mesmo valor em qualquer ponto do corpo, então o centro de massa coincidirá sempre com o centro de gravidade.

Se o volume do corpo tiver uma face plana de espessura constante, e se a sua densidade não variar de ponto para ponto, então as coordenadas do seu centro de gravidade, no plano dessa face, vão coincidir com as coordenadas do centroide da área que delimita essa face existente nesse plano.

No âmbito desta disciplina far-se-á apenas a explicação do cálculo das coordenadas no plano X,Y do centro gravítico de um corpo, que se possa subdividir noutros que tenham espessura constante ao longo desse plano X,Y, e também densidade constante.

Para melhor se perceber o problema, imagine-se o tampo de uma mesa plana que contenha o eixo dos X e o dos Y. Sobre essa mesa posicionam-se e ligam-se diferentes chapas, cada uma delas com espessura constante. Cada uma das chapas terá um peso. O que se vai fazer é calcular as coordenadas X,Y do ponto aonde deveríamos colocar o peso total dessas chapas, para que o momento desse peso total em relação a qualquer eixo, seja igual à soma dos momentos que cada um dos pesos das várias chapas produz nesse eixo.

Neste capítulo não se fará a determinação da coordenada Z do centro de gravidade de um corpo, embora o raciocínio que lhe está subjacente, seja o mesmo que permite encontrar as suas coordenadas X e Y.

Considere-se então um sólido com uma face igual à área representada na Figura 24, Um sólido que é assim constituído por um paralelepípedo e por um cilindro.

A espessura do paralelepípedo é de 10 mm e a espessura do cilindro é de 15 mm.

O paralelepípedo tem uma densidade de 7600 Kg por m^3 e o cilindro tem uma densidade de 2800 Kg por m^3.

Como se faz então para calcular as coordenas do centro de gravidade do sólido acima definido?

Uma vez que são conhecidas as coordenadas X,Y do centro de gravidade do paralelepípedo e do cilindro, ter-se-á que calcular primeiro o momento que cada um desses pesos produz em relação ao eixo dos X e em relação ao eixo dos Y. Posteriormente terá de se calcular o ponto aonde se deveria colocar o peso total do sólido, para que os momentos desse peso total em relação ao eixo dos X e ao eixo dos Y, sejam iguais à soma dos momentos de cada um dos pesos que o constituem. (paralelepípedo e cilindro)

$$\bar{x}_m = \frac{\sum x_i \, m_i}{\sum m_i}$$

$$\bar{y}_m = \frac{\sum y_i \, m_i}{\sum m_i}$$

Analise-se a tabela resumo da resolução deste problema.

Considerou-se que g, a aceleração da gravidade é de 9,81m/s2

(Deve-se também ter atenção às unidades para não misturar no mesmo cálculo unidades diferentes. Por exemplo m com cm ou mm.) (ver Tabela 6).

Tabela 6 - Resultados do problema.

	Área	espessura	Volume	Densidade	Massa	Peso	Xc	Yc	Mx	My
Volume 1	10,000	0,010	0,100	7600,000	760,000	7455,600	4,000	1,000	-7455,600	29822,400
Volume 2	3,142	0,015	0,047	2800,000	131,947	1294,399	3,000	3,000	-3883,197	3883,197
Total						8749,999			-11338,797	33705,597
		Xg (Total peso)=	1,296							
		Yg (Total peso)=	3,852							

6. Cinemática

A cinemática é a parte da mecânica que estuda o movimento dos corpos. Qualquer que seja o movimento, fora de uma escala macroscópica ou atómica, ele pode ser perfeitamente definido com o recurso a três equações de movimento. Elas são as equações da posição do corpo ao longo do tempo, da velocidade e da aceleração do corpo também ao longo do tempo. O estudo do movimento dos aviões, das naves espaciais, ou de uma simples pedra que se atira, é resumido à determinação precisa destas 3 equações de movimento.

6.1.Velocidade e aceleração

Como é se relacionam as equações de posição com as da velocidade ou da aceleração?

Todos conhecem o conceito de velocidade média entre dois pontos. Se um automóvel percorrer 300 km em 3 horas determina-se a sua velocidade média como sendo o quociente entre o espaço percorrido e o tempo gasto em o percorrer. Neste caso a velocidade média seria de 100 Km/h.

$$v_m = \frac{x_{1-}x_o}{t_{1-}t_o} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Ora o conceito de velocidade instantânea, é o mesmo conceito do da velocidade média, só que desta vez é a velocidade média entre dois instantes consecutivos. O segundo instante da medição é imediatamente a seguir ao primeiro e a diferença entre os dois instantes tem de ser tão pequena quanto aquilo que se quiser, ou seja tem de tender para zero.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Este limite é, por definição, igual ao valor da derivada da função que dá a posição do corpo no instante t. Ou seja a velocidade é a derivada da função que define a posição do corpo ao longo do tempo.

Da mesma forma que se definiu a velocidade média poderemos definir agora o conceito de aceleração média. Ou seja a aceleração média entre dois instantes é a diferença de velocidades conseguida entre os dois instantes, dividida pelo intervalo de tempo decorrido entre os dois instantes.

$$a_m = \frac{v_{1-}v_o}{t_{1-}t_o} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Da mesma forma do que se fez para a velocidade, define-se aceleração instantânea como a aceleração média entre dois instantes consecutivos, e em que a diferença entre eles possa ser tão pequena quanto se quiser.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Ou seja, este quociente é por definição o valor da derivada da função velocidade no instante t.

A aceleração é assim a segunda derivada da função posição do corpo em ordem a t.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Sendo o movimento dos corpos um movimento no espaço, não a uma dimensão segundo X, mas a três dimensões, segundo X, Y e Z, ter-se-á forçosamente que definir a posição do corpo, não apenas segundo um eixo, mas, no caso geral, a 3 eixos.

Ou seja vão existir 3 funções para definir a posição do corpo, uma segundo cada eixo, 3 funções para definir a velocidade do corpo, e 3 funções para definir a aceleração do corpo.

A derivada de um vetor é, nos casos que vai-se estudar, o vetor que resulta da derivada de cada uma das funções das componentes do vetor inicial.

Ou seja se chamarmos o vetor que dá a posição em X, Y e Z de vetor

$$\vec{r} = r_x\overrightarrow{e_x} + r_y\,\overrightarrow{e_y} + r_z\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{v} = v_x\overrightarrow{e_x} + v_y\,\overrightarrow{e_y} + v_z\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\overrightarrow{e_x} + \frac{dr_y}{dt}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{dr_z}{dt}\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{a} = a_x\overrightarrow{e_x} + a_y\,\overrightarrow{e_y} + a_z\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\overrightarrow{e_x} + \frac{dv_y}{dt}\overrightarrow{e_y} + \frac{dv_z}{dt}\overrightarrow{e_z}$$

Quando o módulo da velocidade aumenta durante o movimento de um ponto material, o movimento diz-se acelerado em caso contrário é designado por retardado, ou desacelerado.

Já se referiu, que, se se tiver um vetor que dá a posição de um projétil em função de t, poder-se sempre derivar em ordem a t, cada uma das componentes desse vetor e obter o vetor velocidade. Se se derivar o vetor velocidade outra vez em ordem a t, obtém-se s o vetor aceleração. Com base nos vetores posição, velocidade e aceleração, conseguimos sempre responder a qualquer pergunta de qualquer enunciado.

Ora, mas se for dado o vetor aceleração e se se pretender determinar o vetor velocidade e depois o vetor posição, como é que isso se faz? O procedimento nesta situação já não é bem igual, pois terão de se resolver equações diferenciais.

As equações diferenciais, são equações em ordem às diferenças. Todas as pessoas conseguem resolver algumas e desde tenra idade. No entanto esta é uma matéria que vai ser lecionada aos alunos nas disciplinas de matemática. No período de lecionação desta disciplina de mecânica, 1º semestre do 1º ano, os estudantes nunca abordaram essa temática e por isso, far-se-á apenas uma abordagem muito sumária ao tema, que será aprofundado nas matemáticas.

Exemplo de equações diferenciais, equações em ordem às diferenças.

Um jovem recebe um saco de rebuçados e come 3 por dia. Quantos rebuçados tem ao fim de 2 dias?

Isto é uma equação diferencial, pois o que se sabe é que a diferença no número de rebuçados em cada dia é de 3.

Ao fim de dois dias há menos 6 rebuçados, mas não se pode dizer quantos existem. Entretanto aparece uma condição nova, chamada de condição de fronteira quando resolverem equações diferenciais, e essa informação é que o saco quando foi aberto tinha 100 rebuçados. Ora, se foram comidos 6 então existem 94. Com isto fica resolvida a equação diferencial.

Na cinemática os problemas são muito similares.

Imagine-se então que temos um objeto que se desloca a 3m/s segundo o sentido positivo do eixo dos X. Ao fim de 2 segundos quantos metros andou o objeto e aonde é que ele está?

Consegue-se dizer quantos metros andou. Ele andou 6 m, mas não se consegue dizer aonde é que ele está pois não existe nenhuma localização inicial. Imagine-se que é dito que no instante t=0, no início do movimento, o objeto estava a 100 m e segundo o sentido positivo do eixo dos X. Então o problema torna-se fácil, e conseguir-se-á logo determinar que ao fim de 2 seg. o objeto se encontra a 106 m segundo o sentido positivo do eixo dos X.

Então notem que se partirem de uma situação em que conhecem a posição do objeto em função de t, conseguem rapidamente, e por derivação, obter a velocidade. Se partirem da velocidade e quiserem obter a posição, estão a resolver uma equação diferencial, e para obterem a solução precisam de um ponto de passagem da função, também conhecido como condição de fronteira. (Em geral utiliza-se o ponto em que t=0, ou seja o instante inicial, mas não é forçoso que assim seja).

Outra forma de analisar.

A primitiva é o inverso da função derivada. Ou seja se a velocidade é a derivada do vetor posição, então a posição é uma primitiva do vetor velocidade. Na realidade não existe apenas uma primitiva de uma função mas uma série de primitivas para a mesma função. Qual a derivada em ordem a t de 2t+1? e de 2t +2, ou 2t + 3? Estas derivadas são todas iguais a 2. Então qual é a primitiva de 2? É 2t+1, 2t+2 ou 2t+ Cte?

Todas estas funções são primitivas de 2, e por isso, mais uma vez, para se determinar a função solução, teremos de conhecer um ponto da sua passagem. Uma condição de fronteira.

Qual a primitiva de 2 que no instante t=0, vale 1? É a função 2t +1.

Qual a primitiva de 2 que no instante t=1, vale 4? É a função 2t +2.

Nesta disciplina, e atendendo a que os estudantes ainda não aprenderam a fazer primitivas, nem equações diferenciais, vai-se apenas exigir que eles saibam que:

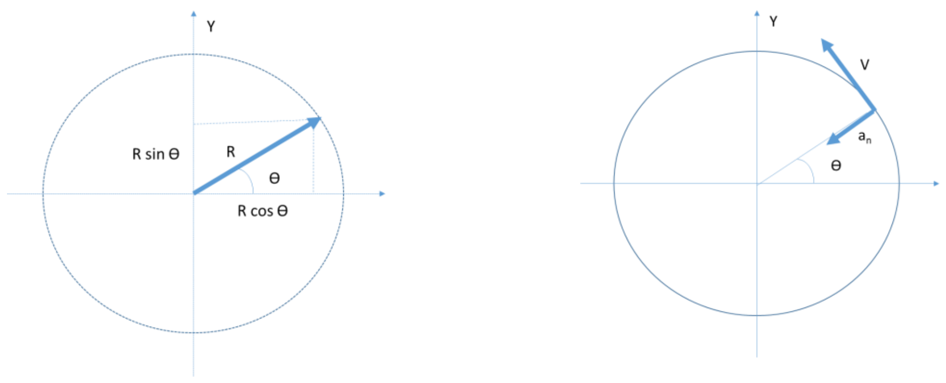
1) $P(A+B) = P(A)+P(B)$
2) $P(Kt^n) = K\,P(t^n) = K\,t^{(n+1)}/(n+1) + C^{te}$, Ex $P\,3t = 3t^2/2 + C^{te}$; $P\,4t^5 = 4t^6/6 + C^{te}$; $P(4+3t) = 4t + 3t^2/2 + C^{te}$.

Com base nos conhecimentos adquiridos atrás sobre primitivas, conseguir-se-ão fazer todos os problemas de primitivas exigíveis nesta disciplina de mecânica.

6.3. Movimento circular

Considera-se que um movimento é circular se, ao longo do tempo, a sua posição se mantiver sobre uma circunferência de raio R (ver Figura 27).

Considera-se velocidade angular, a velocidade com que o ângulo ϴ vai avançando. Ou seja, por exemplo, uma velocidade de 30º/s ou (Pi/6)/s significa que em cada segundo o angulo ϴ aumenta Pi/6.



a) b)

Figura 27 - Movimento circular, a) representação do vetor R, b) representação do vetor v e do vetor a_n

Vai-se considerar neste capítulo os movimentos circulares com velocidade angular constante. O incremento do angulo ϴ em cada segundo é sempre o mesmo ao longo de todo o movimento (Exemplo, movimento do vértice de um ponteiro de relógio).

$$\theta = Wt \text{ e W é constante.}$$

O vetor que dá a posição do ponto em movimento circular é:

$$\vec{r} = R\cos\theta\overrightarrow{e_x} + R\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\vec{r} = R\cos Wt\overrightarrow{e_x} + R\sin Wt\,\overrightarrow{e_y}$$

O vetor velocidade do ponto pode ser obtido derivando o vetor posição em ordem a t

Se W for constante,

$$\vec{v} = -WR\sin Wt\,\overrightarrow{e_x} + WR\cos Wt\overrightarrow{e_y}$$

O vetor aceleração do ponto pode ser obtido derivando o vetor velocidade em ordem a t

$$\vec{a} = -W^2R\cos Wt\overrightarrow{e_x} - W^2R\sin Wt\,\overrightarrow{e_y}$$

Como

$$cos^2Wt + sin^2Wt = 1$$

$$|\vec{v}| = RW$$

e

$$|\vec{a}| = RW^2 = \frac{WR\,WR}{R} = \frac{v^2}{R}$$

Pode-se verificar que o produto interno do vetor velocidade pelo vetor posição é zero. Ou seja a velocidade é perpendicular à trajetória em cada ponto.

A aceleração em cada instante, é igual ao vetor posição, multiplicado por $-W^2$. Ou seja é colinear com o vetor posição mas aponta para dentro do círculo, ao contrário do vetor posição que aponta para fora.

As equações acima, são as que mais se utilizam no estudo dos movimentos circulares, abordados no âmbito desta disciplina, e permitirão resolver os diversos problemas nela enunciados.

De realçar que sendo o vetor aceleração sempre perpendicular ao vetor velocidade, então o módulo da velocidade será sempre o mesmo. A aceleração vai provocar uma alteração à direção da velocidade, e não uma alteração do seu valor. Se o movimento alterasse o módulo da velocidade de ponto para ponto, para além da aceleração normal, que produzia a alteração à direção da velocidade, teria também uma aceleração tangencial que, essa sim, produziria uma alteração do módulo da velocidade. Nestas condições a velocidade angular não seria constante mas iria variar podendo-se também calcular uma aceleração angular.

No movimento circular existe a aceleração centrípeta a atuar sobre o corpo. Devido às forças de inércia, aquelas que se geram pelo facto do corpo estar em movimento, existe também uma aceleração centrífuga igual e de sinal contrário à aceleração centípeda. A força centípeda puxa o corpo para dentro do círculo e obriga a que a sua trajetória seja circular. A força centrífuga, sendo uma força de inércia, opõem-se à mudança do estado de movimento do corpo, e por isso empurra o corpo para fora da trajetória.

Esta situação é similar à que acontece quando uma massa dentro de um comboio, é empurrada para a frente quando o comboio trava.

Quando um automóvel vira para a esquerda, tem tendência a escorregar para a direita, e se a força de atrito entre os pneus do carro e a estrada não for suficiente o automóvel sai da curva e da estrada. É a força centrífuga que o faz sair da estrada, mas é a força centípeda que o empurra para dentro e o obriga a dar a curva.

Quando um carrinho faz um looping numa montanha russa, ele não cai, no cimo dessa trajetória desse looping, porque a força centrífuga, no ponto mais alto da trajetória, é superior ao seu peso, e empurra-o para cima.

$$\text{Se} \quad |\overrightarrow{an}| > g, \quad \frac{v^2}{R} > g$$

A resultante das forças que incidem sobre o carrinho é para cima, e então o carrinho não cai.

6.4. Movimento de um projétil sujeito à aceleração gravítica.

Imagine-se que se atira uma bola como representado esquematicamente na figura 28 com uma velocidade inicial V_0, fazendo um ângulo α com a direção horizontal. Essa bola parte da origem do referencial. Se o efeito do atrito com o ar for desprezado, a única força que atua na bola é a força gravítica (Figura 28).

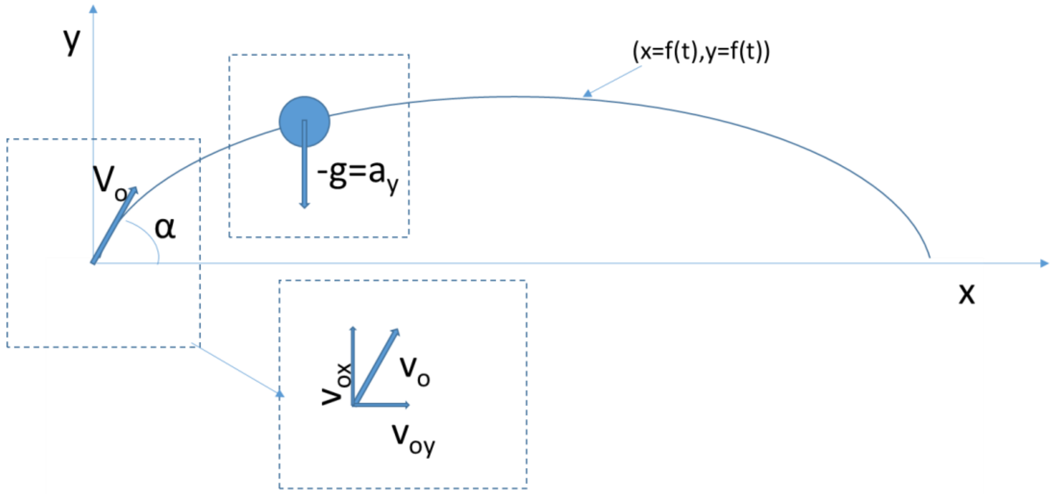


Figura 28 - Movimento de um projétil.

Tem-se então um problema em que o vetor aceleração é constante e igual a

$$\vec{a} = 0\,\overrightarrow{e_x} - g\,\overrightarrow{e_y}$$

Em que g é a aceleração gravítica.

Como se viu atrás, fazendo agora a primitiva do vetor aceleração, obtém-se o vetor velocidade. Ele é igual a:

$$\vec{v} = \mathrm{v}_{ox}\,\overrightarrow{e_x} + (\mathrm{v}_{oy} - gt\,)\overrightarrow{e_y}$$

Fazendo a primitiva ao vetor velocidade obteremos o vetor posição igual a:

$$\vec{r} = (x_o + \mathrm{v}_{ox}t)\,\overrightarrow{e_x} + (y_o + \mathrm{v}_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2\,)\overrightarrow{e_y}$$

Neste caso em concreto, o valor de x_oe de y_o são nulos pois no instante t=0 a bola parte do início do referencial, ou seja, as coordenadas X e Y iniciais são nulas.

Como se referiu antes, o valor de cada uma destas equações para cada valor de t especificado, determinam os vários valores das componentes do vetor posição, velocidade e aceleração.

Considere-se que a bola tem uma velocidade inicial de 20m/s, e que o ângulo α que a bola faz com a horizontal é de 30º.

Então v_{ox} = Vo cos α e v_{oy}= Vo sen α

Atenda-se à tabela junta com os valores dos vetores aceleração, velocidade e posição da bola ao longo do tempo (ver Tabela 7)

Tabela 7 - Valores dos vetores aceleração, velocidade e posição da bola ao longo do tempo

t=	ax=	ay=	Vx=	Vy=	rx=	ry=
0	0	-9,81	17,321	10,000	0	0
1	0	-9,81	17,321	0,19	17,321	5,095
2	0	-9,81	17,321	-9,62	34,641	0,380
3	0	-9,81	17,321	-19,43	51,962	-14,145

Considere-se agora que se queria saber a altura máxima atingida pelo projétil e também a sua velocidade segundo y quando colidia com o solo, cota Y=0.

Note-se que quando o projétil se encontra a subir, ele tem uma velocidade segundo y positiva, e quando chega à sua altura máxima ele começa a descer, passando a ter uma velocidade segundo y negativa. Ora, isso significa que no ponto de altura máxima a velocidade segundo y deixa de ser positiva e passa a ser negativa (ver Figura 29) . Nesse exato momento a velocidade segundo y é zero. Então o que se terá de fazer é calcular o instante t em que V_y =0 e depois, com esse instante t já determinado, calcular a cota y do projétil nesse instante.

$$v_{oy} - gt = 0$$

Depois substitui-se t na equação:

$$y = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

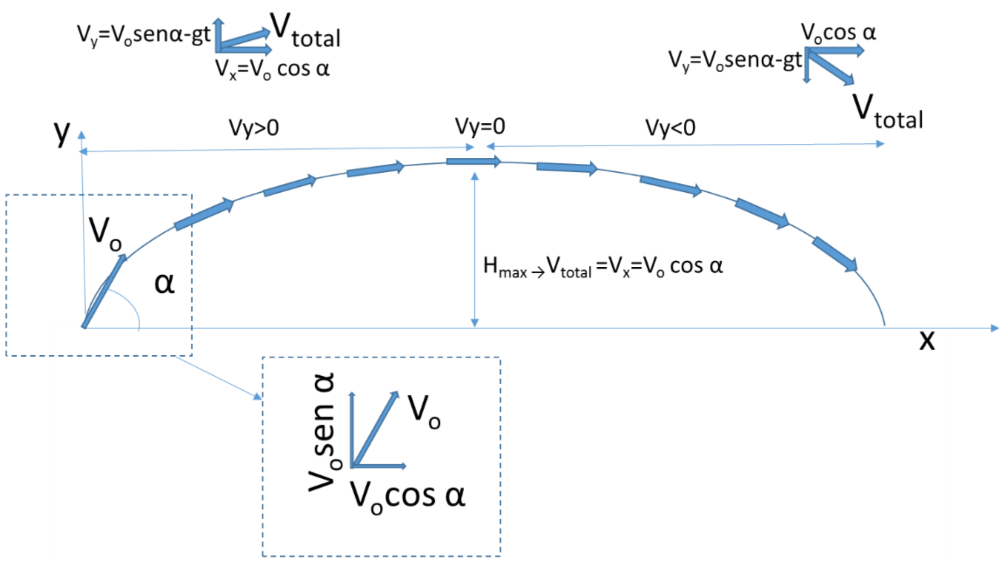


Figura 29 - Representação esquemática do vetor velocidade durante a trajetória descrita por um projétil.

Para responder à segunda questão o problema é de raciocínio idêntico. Primeiro calcula-se o instante t em que a cota y = 0, depois só se terá de substituir esse valor de t nas equações de movimento e responder ao que for pedido. Ter-se-á que resolver a equação abaixo, encontrar t, e depois fazer a substituição.

$$(y_o + \mathrm{v}_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2\,) = 0$$

E depois usa-se a equação

$$x = x_o + \mathrm{v}_{ox}t$$

Atenda-se à Tabela 8.

Tabela 8 - Solução do problema.

	t=	ax=	ay=	Vx=	Vy=	rx=	ry=
Vy=0	1,019	0	-9,81	17,321	0	17,656	5,097
ry=0	2,039	0	-9,81	17,321	-10	35,312	0,000

Determine-se também a posição do projétil quando a sua trajetória faz uma inclinação de 10º com a horizontal, no movimento ascendente do corpo.

Como se viu, o vetor velocidade é sempre tangente à trajetória, e por isso o que é preciso determinar, é o instante t em que o vetor velocidade faz um ângulo de 10º com a horizontal. Depois disso só se terá de determinar os diferentes valores pedidos no enunciado para esse instante.

$$\tan 10^{o} = \frac{V_y}{V_x} \leftrightarrow \tan 10^{o} = (\mathrm{v}_{oy} - gt\,)/\,\mathrm{v}_{ox} \leftrightarrow \mathrm{t} = 0{,}708 \text{ s}$$

Tabela 9 - Solução do problema.

	t=	ax=	ay=	Vx=	Vy=	rx=	ry=
Tang V=10º	0,708	0	-9,81	17,321	3,054	12,264	4,621

Da mesma forma com que se resolveu este problema, com a aceleração constante, podem-se resolver quaisquer outros problemas com funções de aceleração diferentes. A sua resolução vai exigir saber fazer integrais, mas o método, o raciocínio a utilizar, é sempre o mesmo, quer as funções sejam polinomiais ou de outro tipo qualquer.

Note-se que no movimento de um projétil sujeito à aceleração gravítica, a aceleração total do projétil é contante e igual a –g. Como o projétil descreve uma trajetória curvilínea a aceleração pode ser decomposta na componente normal ao movimento e na componente tangencial ao movimento.

$$g = \sqrt{(a_N^2 + a_t^2)}$$

A aceleração tangencial será negativa até ao ponto de altura máxima. Nesse ponto será zero, e após esse ponto a aceleração tangencial passa a ser positiva (Ver Figura 30).

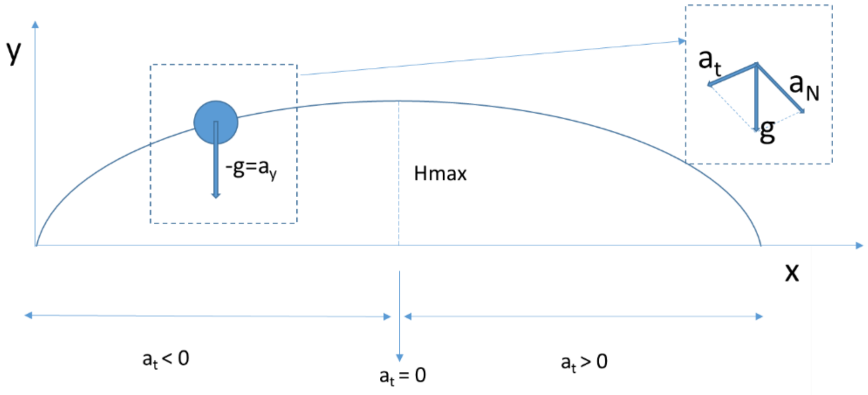


Figura 30 - Variação da aceleração durante o lançamento.

Dado que a trajetória é parabólica o seu raio de curvatura varia de ponto para ponto. Ele pode ser obtido em cada instante, considerando que na vizinhança daquele ponto, uma vizinhança infinitesimal, o movimento se pode aproximar a um movimento circular, como o explanado atrás. Assim, com esta aproximação, poder-se-á utilizar a seguinte relação entre a aceleração normal do projétil e a aceleração gravítica (ver Figura 31a)):

$$a_N = \frac{v_{Total}^2}{R} = g \ \cos\alpha$$

O angulo α pode ser determinado através da seguinte equação (ver Figura 31 b).

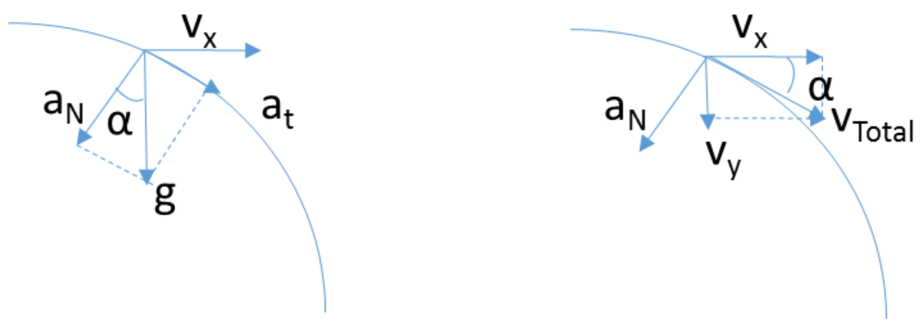
$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v_{Total}}$$

E assim, atendendo a que:

$$a_N = \frac{v_{Total}^2}{R} = g \ \frac{v_x}{v_{Total}}$$

obtém-se que:

$$R = \frac{v_{Total}^3}{g v_x}$$



a) b)

Figura 31- Representação esquemática das componentes do vetor velocidade e aceleração durante o movimento de um projétil.

7. Dinâmica

A Dinâmica é o capítulo da Mecânica que relaciona as forças aplicadas a um corpo, com o estado de movimento desse corpo.

Nesta disciplina abordar-se-á apenas a terceira lei de Newton, em problemas que envolvam corpos sem alteração da sua massa ao longo do tempo.

$$\vec{F} = \mathrm{m}\vec{a}.$$

Conhecendo então a massa e a resultante do sistema de forças aplicada a essa massa poder-se-á conhecer a sua aceleração. Com base na aceleração, poder-se-ão conhecer as equações da velocidade, e da posição do corpo.

Considere uma caixa de massa m a escorregar plano abaixo, como mostra Figura 32 Considere que o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies de escorregamento é igual a $\mu_{c.}$

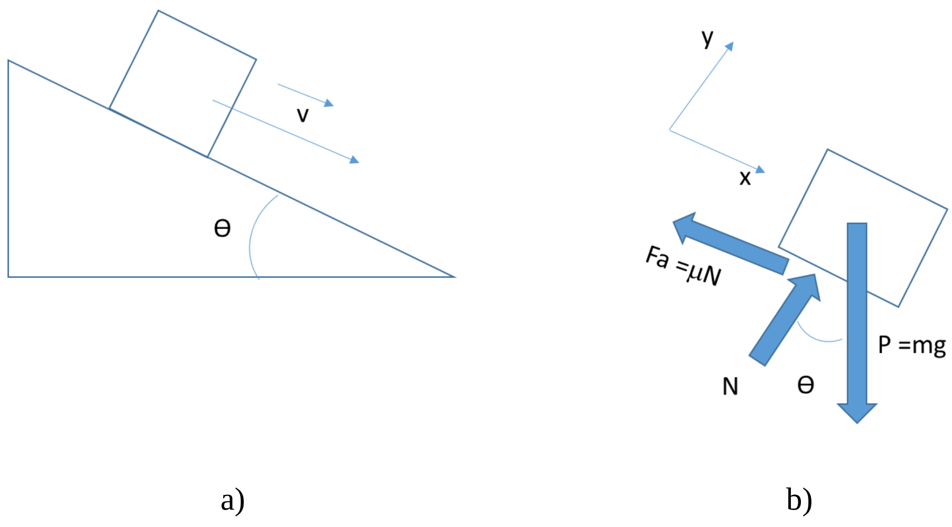


Figura 32 - Representação esquemática do problema b) Diagrama de corpo livre.

Fazendo o diagrama de corpo livre da caixa Figura 32 b) obtém-se o seguinte sistema de forças:

$$\sum F_x = -Fa + mg\ \sin\theta = m\,a$$

$$\sum F_y = N - mg\ \cos\theta = 0$$

$$Fa = \mu_c N$$

Nesta situação a caixa só tem movimento segundo o eixo dos X, e a sua aceleração, a_x , é obtida dividindo o somatório de forças aplicadas segundo x, pela sua massa.

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{(\mathrm{Psin}\Theta - \mu_c\ \mathrm{Pcos}\Theta)}{m} = (\sin\Theta - \mu_c\ \cos\Theta)\mathrm{g}$$

Conhecendo o valor da aceleração poder-se-á também obter a velocidade e o vetor posição.

$$v = v_{0x} + a_x t$$

$$r = r_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t$$

Como se viu atrás, também terão de ser conhecidas a velocidade e a posição iniciais da caixa, ou outras quaisquer condições, para se conseguir completar as equações exatas da velocidade e da posição caixa.

Considere-se agora um sistema com duas massas, A e B, como o representado na figura. A massa A escorrega sobre uma superfície inclinada e existe um coeficiente de atrito cinético entre as superfícies de escorregamento igual a μ_c.

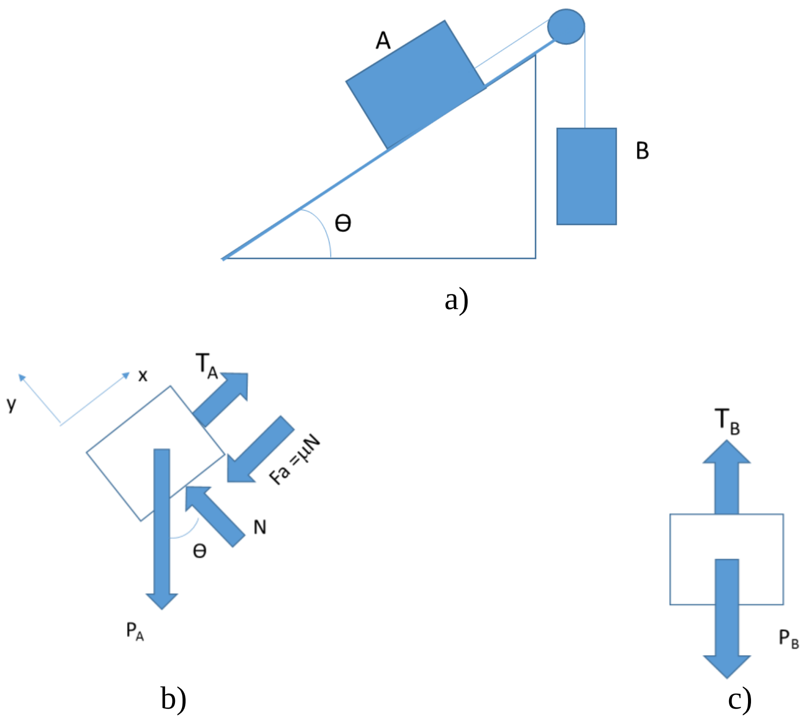


Figura 33 - a) Representação esquemática do problema, b) diagrama de corpo livre da massa A e c) diagrama de corpo livre da massa B.

A massa A encontra-se ligada à massa B, por um cabo que neste problema se considera indeformável. Ou seja, ele mantém sempre o mesmo comprimento. Também se considera que a massa deste cabo é desprezável, ou seja que a força necessária para provocar uma aceleração no cabo é nula.

Considera-se neste exemplo que a massa A terá uma aceleração segundo o eixo dos X representado, e a massa B, terá uma aceleração segundo a vertical e para baixo. Consideram-se estas duas acelerações positivas (Figura 33).

Fazendo as equações de equilíbrio dinâmico para as duas massas obtém-se:

Massa A (ver Figura 33 b)

$$\sum F_y = 0 \leftrightarrow N = P_A \cos \Theta$$

$$\sum F_x = T_A - \mu_c P_A \cos \Theta - P_A \sin \Theta = m_A a_A$$

Massa B (ver Figura 33 c)

$$\sum F_y = P_B - T_B = m_B a_B$$

Considerando o cabo indeformável, o deslocamento da massa A, é para todos os instantes igual ao deslocamento da massa B. Mas se o deslocamento é igual para as duas massas em todos os instantes, as suas velocidades e acelerações também terão forçosamente que ser iguais.

$$a_A = a_B$$

Considerando esta equação nas equações obtidas em cima obtém-se que:

$$T_A = \mu_c P_A \cos \Theta + P_A \sin \Theta + m_A a_A$$

$$T_B = P_B - m_B a_B$$

Por outro lado, se se considerar o cabo com massa desprezável, a força de tração no cabo é constante. Ou seja:

$$T_A = T_B$$

Obtém-se assim que:

$$\mu_c P_A \cos \Theta + P_A \sin \Theta + m_A a_A = P_B - m_B a_A$$

$$a_A = a_B = \frac{P_B - \mu_c P_A \cos \Theta - P_A \sin \Theta}{m_A + m_B}$$