Jornal das Primeiras Matemáticas

Número 13
Dezembro, 2019

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

Recursos Didáticos

Da localização espacial às figuras planas e aos sólidos geométricos: explorações no 2.º ano de escolaridade

César Silva, Conceição Cordeniz, Filomena Rainha, Helena Martins, Luísa Silva, Maria de Fátima Areias e Ricardo Cunha Teixeira

EBS da Madalena, EBI Francisco Ferreira Drummond, EBI de Água de Pau, EBI de Angra do Heroísmo e NICA-UAc & FCT-UAc

ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *Este artigo apresenta propostas de tarefas com vista à exploração de temas chave de Geometria do 2.º ano de escolaridade, centrados na localização espacial, nas figuras planas e nos sólidos geométricos, tendo por base o trabalho desenvolvido desde o ano letivo de 2016/2017 no âmbito da implementação do Projeto Prof DA do Programa "ProSucesso – Açores pela Educação" e da oficina de formação "Matemática Passo a Passo: Estratégias de superação de dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico". A implementação no terreno das tarefas resultou de um trabalho colaborativo entre os Prof DA e os professores titulares de turma.*

Palavras-chave: Projeto Prof DA do Programa "ProSucesso – Açores pela Educação", Oficina "Matemática Passo a Passo: Estratégias de superação de dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico", Localização Espacial, Figuras Planas, Sólidos Geométricos, 2.º ano de escolaridade.

1 O Projeto Prof DA e a Oficina "Matemática Passo a Passo"

O projeto Prof DA surgiu em setembro de 2015, no contexto do Programa "ProSucesso – Açores pela Educação", da Secretaria Regional da Educação e Cultura do Governo dos Açores. As orientações científicas e didáticas que estão na base da ação do Prof **DA** (professor qualificado na deteção e superação de **D**ificuldades de **A**prendizagem) são da responsabilidade da oficina de formação "Matemática Passo a Passo: Estratégias de Superação de Dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico", da Universidade dos Açores.

A ação do Prof DA desenvolve-se em contexto de trabalho colaborativo com os professores titulares de turma e tem por base estudos provenientes das neurociências cognitivas, que fornecem pistas sobre a forma como o cérebro de uma criança aprende Matemática, e alguns casos de sucesso do ensino da Matemática, destacando-se o Método de Singapura, com centenas de pormenores de ordem científica e didática testados com sucesso em vários países. Para mais informações sobre o Projeto Prof DA sugerem-se as publicações [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

No ano letivo de 2018/2019 participaram 58 Prof DA, provenientes das 30 unidades orgânicas que compõem a rede de escolas públicas que ministram o 1.º Ciclo do Ensino Básico da Região Autónoma dos Açores, das 9 ilhas. Participaram também representantes de dois colégios privados. A Equipa de Coordenação do Projeto Prof DA de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico é composta por Ana Maria Lima, Conceição Lima Vaz e Ricardo Cunha Teixeira. Na figura 1, apresenta-se um mosaico com todos os participantes do Projeto Prof DA no ano letivo de 2018/2019.

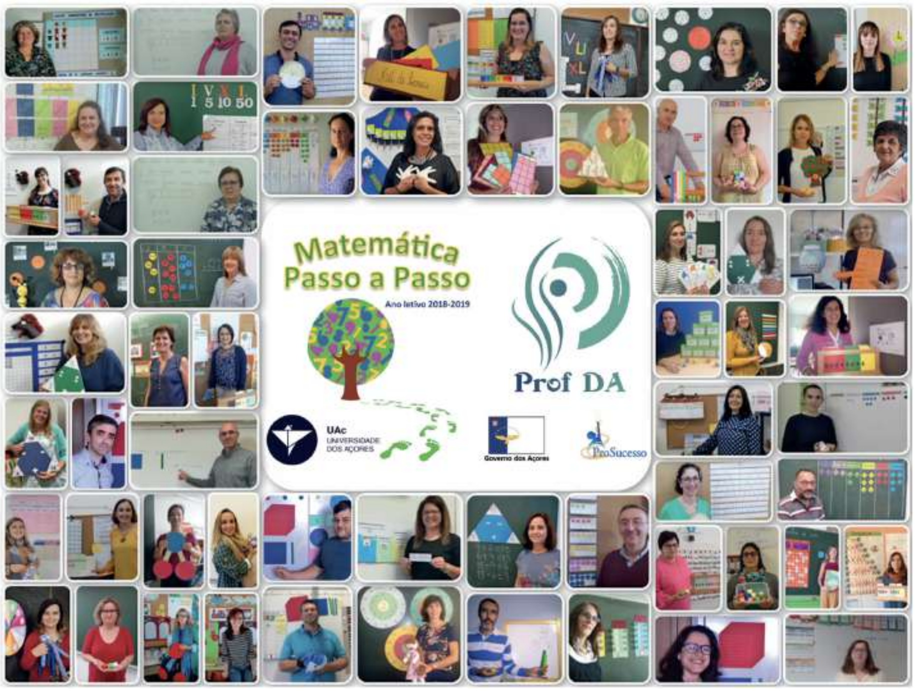

Figura 1: Participantes do Projeto Prof DA no ano letivo de 2018/2019.

Este artigo baseia-se em guiões didáticos elaborados pelos Prof DA César Silva (EBS da Madalena), Conceição Cordeniz (EBI Francisco Ferreira Drummond), Filomena Rainha (EBI de Água de Pau), Helena Martins, Luísa Silva e Maria de Fátima Areias (EBI de Angra do do Heroísmo). Como vem sendo apanágio do Projeto Prof DA, as tarefas desenvolvidas acabam por recolher o feedback da generalidade dos Prof DA, de professores titulares e da Equipa de Coordenação.

2 Localização espacial com itinerários

Comece por recordar os conceitos de “volta inteira”, “meia volta”, “virar para a esquerda” e “virar para a direita”, trabalhados no 1.º ano de escolaridade. Introduza o conceito de “quarto de volta”. Estas expressões de localização espacial deverão ser empregues na descrição de percursos/itinerários a serem explorados pelos alunos.

Sugere-se uma articulação entre a Matemática e a Expressão Físico-Motora, sendo possível trabalhar as noções de “volta inteira”, “meia volta” e “quarto de volta” (para a esquerda ou para a direita) em contextos variados, incluindo a possibilidade de exploração de percursos na Natureza. Nos momentos de Expressão Musical ou Dramática, pode-se convidar a turma a explorar algumas canções que envolvam expressões de localização espacial como, por exemplo, a canção “Ciranda, Cirandinha”[1], cuja letra pode ser modificada para incluir as expressões “um quarto de volta para a esquerda” e “um quarto de volta para a direita”.

Sugere-se também a realização da seguinte tarefa:

- Depois de esperar pela sua vez, um aluno coloca-se no centro da circunferência definida por um arco (ver figura 2), de modo a ficar voltado para o círculo de cor verde.
- É apresentada uma instrução de mudança de direção (e.g., “meia volta para a direita”, “um quarto de volta para a esquerda”, “uma volta inteira para a direita”, ...) e o aluno terá de identificar a cor do círculo para o qual fica virado, ganhando 1 ponto se o movimento estiver correto.

Figura 2: Tarefa para explorar expressões de localização espacial ligadas aos conceitos de “volta inteira”, “meia volta”, “quarto de volta”, “virar para a esquerda” e “virar para a direita”.

- Os pontos são registados no quadro e ganha o aluno que obtiver mais pontos.
- Deve-se pedir a colaboração dos restantes alunos da turma no sentido de identificarem se cada um dos movimentos realizados pelos colegas está correto.

[1]`https://youtu.be/Yfa_uSIZE7A`.

Deixe que sejam os alunos a chegarem à conclusão de que, partindo de uma mesma posição inicial, "meia volta para a esquerda"/"meia volta para a direita" e "uma volta inteira para a esquerda"/"uma volta inteira para a direita" conduzem sempre à mesma posição final.

Em seguida, pretende-se que os alunos realizem e descrevam itinerários (percursos) em grelhas quadriculadas, através de diferentes desafios propostos. Também pode ser explorada a identificação de objetos equidistantes de um dado objeto. Pode-se construir uma grelha quadriculada em papel de cenário, desenhá-la no chão ou utilizar o pavimento de azulejos quadrangulares existente em algumas escolas.

Proponha uma caça ao tesouro! Apresente aos alunos o material que será usado, incluindo o espaço em que decorrerá o jogo (grelha quadriculada), alguns baús vazios e o tesouro (por exemplo, caramelos). Os cartões com as instruções são exemplificados na figura 3 e pressupõem a existência de um ponto de partida.

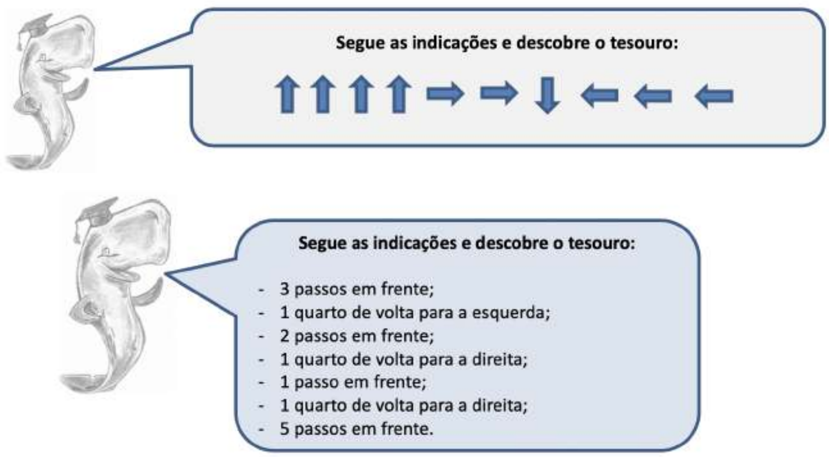

Figura 3: Exemplificação de cartões com instruções para a caça ao tesouro.

Informe os alunos que apenas um dos baús terá o tesouro e que, para o encontrarem, deverão seguir as instruções e realizar corretamente os percursos. Nas turmas com um maior número de alunos, esta atividade pode realizar-se a pares (um aluno lê as instruções e o outro realiza o percurso).

Cada aluno inicia o percurso no ponto de partida indicado e tem que ter em atenção a direção e orientação da seta apresentada. Tendo por base a leitura em voz alta das instruções, o aluno deverá realizar o percurso até chegar a um baú. Pode-se recorrer a duas tipologias de cartões exemplificadas na figura 3. Os cartões com setas a indicar as direções e o número de quadrículas a percorrer implicam uma maior capacidade de comunicação entre os alunos (quando o jogo for realizado a pares). Aconselha-se, nesta fase, que os alunos realizem o percurso dentro das quadrículas, por ser mais intuitivo ao se assemelhar ao procedimento usado com peças em jogos de tabuleiro. Veja-se a figura 4.

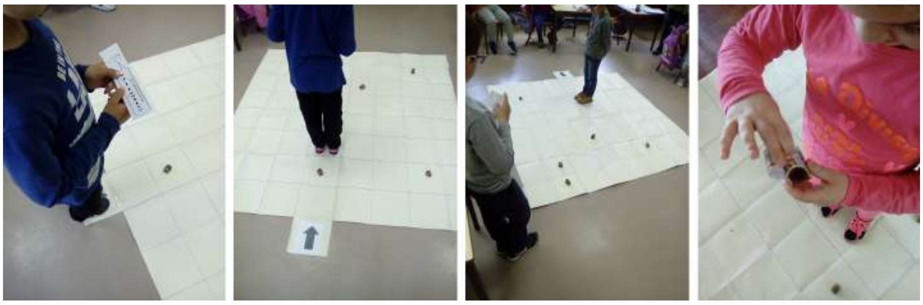

Figura 4: Caça ao tesouro!

Informe os alunos que, na próxima tarefa, deverão identificar os percursos a realizar numa folha de papel quadriculado, dando as respetivas indicações aos colegas. Apresente aos alunos o material que inclui os peões e a folha de papel quadriculado (como se demonstra na figura 5).

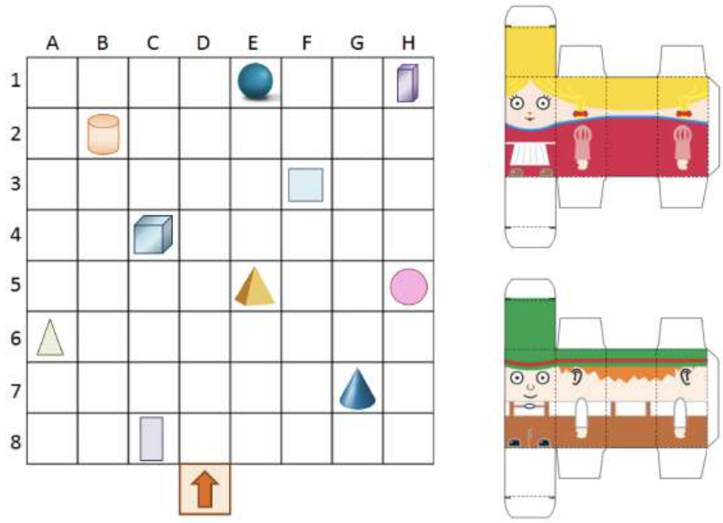

Figura 5: Percursos em papel quadriculado.

A versão que se exemplifica constituiu uma oportunidade para os alunos recordarem a classificação das figuras planas e dos sólidos geométricos explorados no 1.º ano de escolaridade: o professor dá as indicações que os alunos devem seguir de modo a que consigam descobrir a figura plana/o sólido geométrico que ocupa a quadrícula final. Os peões são prismas quadrangulares cujas bases devem coincidir com as quadrículas do papel quadriculado. Encontram-se disponíveis na Web peões com este formato[2]. Os peões também podem ser pirâmides quadrangulares, desde que a sua base coincida com as quadrículas do papel quadriculado.

Numa segunda fase, são os alunos a indicarem outros percursos à escolha de modo a que os colegas os passam acompanhar e descobrir a figura plana/o

[2]Os peões da figura 5 foram adaptados de `http://digitprop.com/cubicity/`.

sólido geométrico da quadrícula final. Veja-se a figura 6. É possível trabalhar percursos curtos e longos. Este é um material versátil que permite outras explorações, nomeadamente uma iniciação ao conceito de coordenadas (e.g., “A pirâmide está a ocupar a posição E5.”). Pode-se também explorar figuras e sólidos equidistantes do peão (na horizontal ou na vertical). Por exemplo, se o peão ocupar a posição E3, a esfera e a pirâmide são sólidos equidistantes do peão.

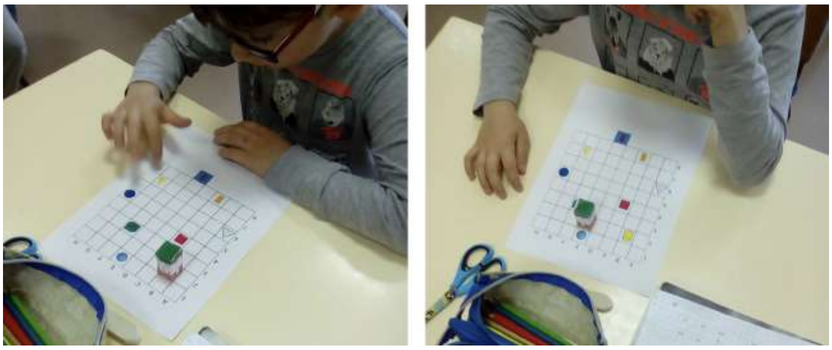

Figura 6: Percursos em papel quadriculado.

Com o intuito de promover o trabalho autónomo, entregue aos alunos uma folha com dois desafios: um com um percurso traçado para os alunos descreverem oralmente e fazerem a respetiva legenda, outro com a legenda para os alunos traçarem o percurso (documentos que se exemplificam na figura 7). Circule pela sala, acompanhando o trabalho dos alunos e apoiando-os quando necessário. Consoante as dificuldades identificadas, poderá ser necessário repetir algumas das tarefas anteriores, individualmente ou em pequeno grupo.

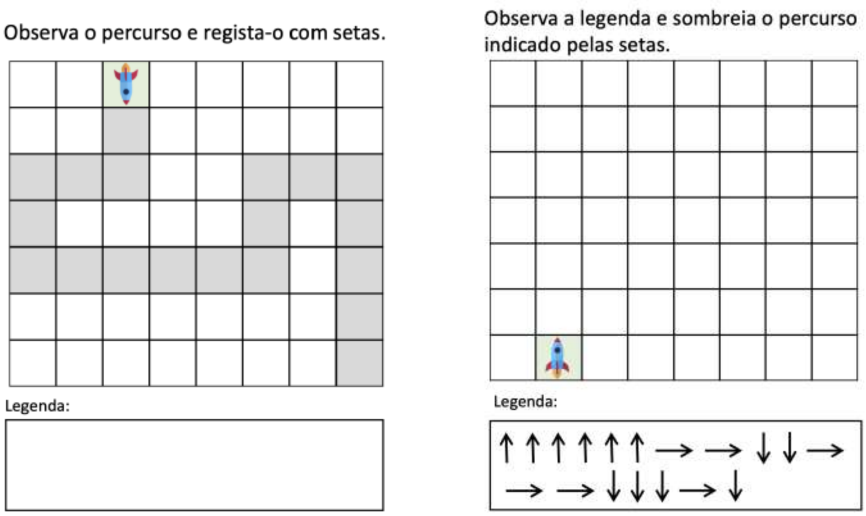

Figura 7: Trabalho autónomo.

Quando questionados sobre os suas aprendizagens, alguns alunos apresentaram os seguintes comentários: “É fácil seguir indicações.”; “Os percursos são caminhos.”; “Se eu disser aos meus colegas para onde eles devem virar e quantos passos têm de dar, eles conseguem-me acompanhar.”; “A gente aprende a brincar.”.

A certa altura devem-se explorar percursos em segmentos de reta. Para isso, é importante que os alunos identifiquem objetos alinhados, bem como dois objetos a igual distância de um terceiro. Apresente peças de roupa num estendal, com a corda esticada, e explique que as peças de roupa estão alinhadas. Veja-se a figura 8. Explore as posições das peças de roupa usando expressões como “à mesma distância”, “mais próximo/próxima”, “mais distante” e “entre” (e.g., a peça C está à mesma distância das peças B e D; a peça C está mais próxima da peça B do que da peça A; a peça C está mais distante da peça A do que da peça B; a peça C está entre as peças B e D, mas também está entre as peças A e D; ...).

Figura 8: Roupa alinhada no estendal.

Explore outras situações de alinhamento de objetos/seres. Por exemplo, chame 3 alunos e coloque-os de forma alinhada, atrás uns dos outros, formando uma fila (figura 9). A turma deve explorar as expressões anteriores. Em seguida, alinhe 3 alunos, lado a lado, e promova explorações análogas.

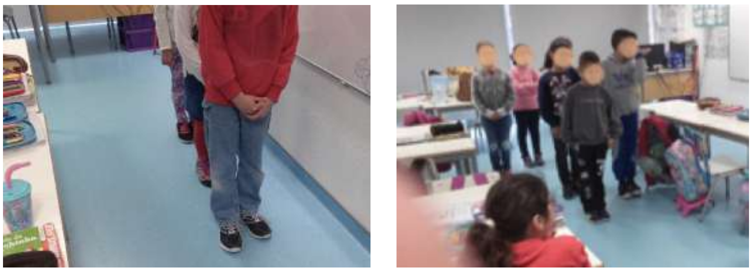

Figura 9: Alunos alinhados e não alinhados.

Chame outros 5 alunos e coloque 3 alunos alinhados e 2 não alinhados com os 3 anteriores (figura 9), de forma a estimular a oralidade. Faça o registo no quadro, através de uma representação pictórica, explicando que cada aluno pode ser representado por um ponto (comparar com as formigas que ao longe parecem pontos, o que também acontece com seres ou objetos vistos de longas distâncias). Trace a reta que passa pelos três pontos alinhados, alertando que essa reta não passa por outros pontos que não estejam alinhados com esses pontos. Saliente que, quando os pontos estão alinhados, conseguimos traçar uma única reta que passa por todos esses pontos: essa reta determina a direção segundo a qual esses pontos estão alinhados. Quando os pontos não estão alinhados, para qualquer reta que se trace, ficam sempre pontos de fora, ou seja, nunca é possível traçar uma reta que passe por todos esses pontos (exemplifique com os vértices de um triângulo, como exemplo de 3 pontos não alinhados).

Coloque em cima de uma mesa três objetos, com diferentes distâncias entre si. Os alunos devem comparar as distâncias entres os pares de objetos, utilizando outros objetos rígidos como, por exemplo, lápis, paus de gelado ou ramos ("direitinhos"), aplicando as expressões "mais próximo/próxima" e "mais distante". Veja-se a figura 10.

Figura 10: "Mais distante" e "mais próximo/próxima".

Numa fase posterior, coloque dois objetos à mesma distância em relação a um terceiro objeto. Os alunos devem comparar as distâncias e aplicar as expressões "à mesma distância"/"igualmente próximos"/"equidistantes". Faça também a representação pictórica no quadro da última situação explorada: trace os dois segmentos de reta, com um ponto em comum (recordar a noção de segmento de reta e de extremos do segmento), e concluir que os segmentos de reta traçados têm o mesmo comprimento (são *geometricamente iguais*), pois o ponto em comum está à mesma distância dos outros extremos dos dois segmentos de reta. Veja-se a figura 11.

Figura 11: "À mesma distância"/"igualmente próximos"/"equidistantes".

Apresente uma malha de pontos no quadro interativo e trace um segmento de reta entre dois pontos A e B. Os alunos devem desenhar segmentos de reta com o mesmo comprimento do segmento traçado e segmentos com comprimentos diferentes.

Mostre aos alunos o geoplano e relembre a sua utilização. Proponha aos alunos que representem segmentos de reta no geoplano e, de seguida, que comparem os seus comprimentos, verificando se há segmentos geometricamente iguais. Veja-se a figura 12.

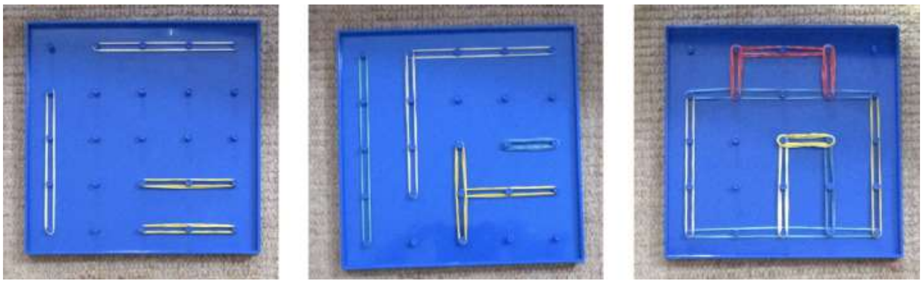

Figura 12: Explorações no geoplano.

Em seguida, proponha aos alunos que desenhem segmentos de reta com o mesmo comprimento ou com comprimentos diferentes, em papel ponteado. Lembre que terão de colocar letras maiúsculas para identificar os pontos que são os extremos de cada segmento de reta. Promova a comparação dos segmentos quanto ao seu comprimento. Veja-se a figura 13.

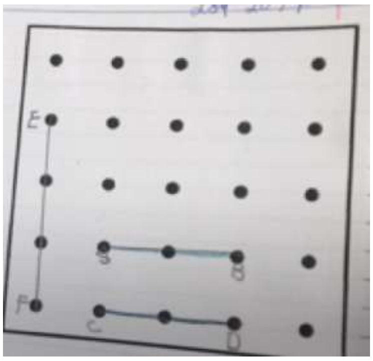

Figura 13: Explorações no papel ponteado.

Nas duas fases da tarefa, peça para os alunos representarem segmentos de reta apenas na horizontal e na vertical (quer no geoplano como no papel ponteado). De notar também que se podem "cruzar" as duas fases da tarefa, especificamente os alunos podem fazer uma construção no geoplano, representando-a de seguida no papel ponteado, ou vice-versa.

Para explorar o conceito de pontos equidistantes em percursos/itinerários envolvendo pontos e segmentos de reta, é preciso ter em conta que a distância entre dois pontos mede-se pelo comprimento do segmento de reta que os une (esse segmento de reta pode ser composto por vários segmentos mais pequenos, mas todos com uma mesma direção). Nesta primeira fase de aprendizagem, a medição deve ser feita na horizontal e/ou na vertical.

Na figura 14, ilustram-se diferentes situações envolvendo dois pontos marcados a azul que são equidistantes do ponto marcado a laranja.

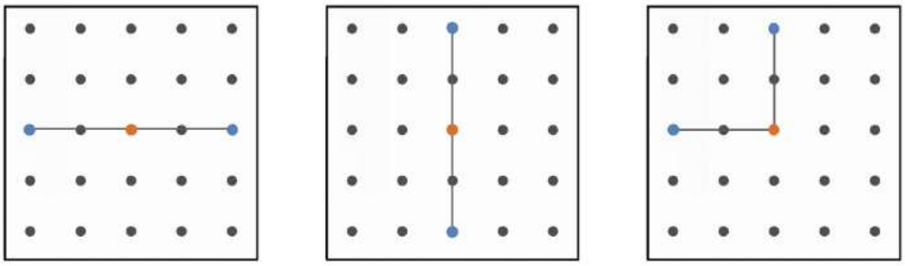

Figura 14: O conceito de pontos equidistantes em percursos/itinerários envolvendo pontos e segmentos de reta.

Proponha aos alunos que explorem itinerários envolvendo pontos e segmentos de reta. Saliente que, se observarmos objetos e seres a partir de um avião em voo, conseguimos ver apenas o topo deles (vista de topo), e que a uma distância maior, deixamos de identificar as suas características e observamos apenas pontos (e estes devem ser representados por letras maiúsculas). Alguns exemplos estão ilustrados nas figuras 15 a 20, numa caminhada progressiva rumo à abstração. Para além da descrição de um itinerário por intermédio de setas, é importante que os alunos façam a descrição recorrendo à terminologia "dar um quarto de volta para a esquerda", "dar um quarto de volta para a direita" e "dar um determinado número de passos em frente".

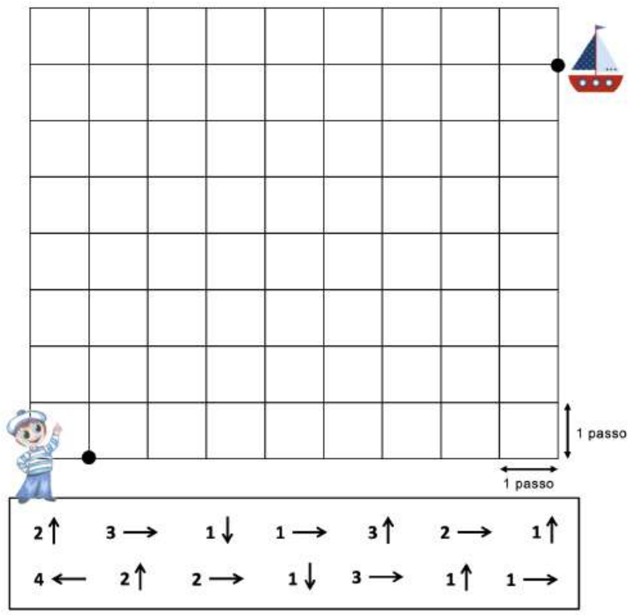

Figura 15: Itinerário da autoria de Conceição Duarte, Joana Silveira e Nélia Mattos (EBI da Horta): "O marinheiro Tozé foi à marina para buscar o seu barco e partir em novas aventuras. Desenha o percurso que ele fez até ao barco, seguindo as instruções apresentadas.".

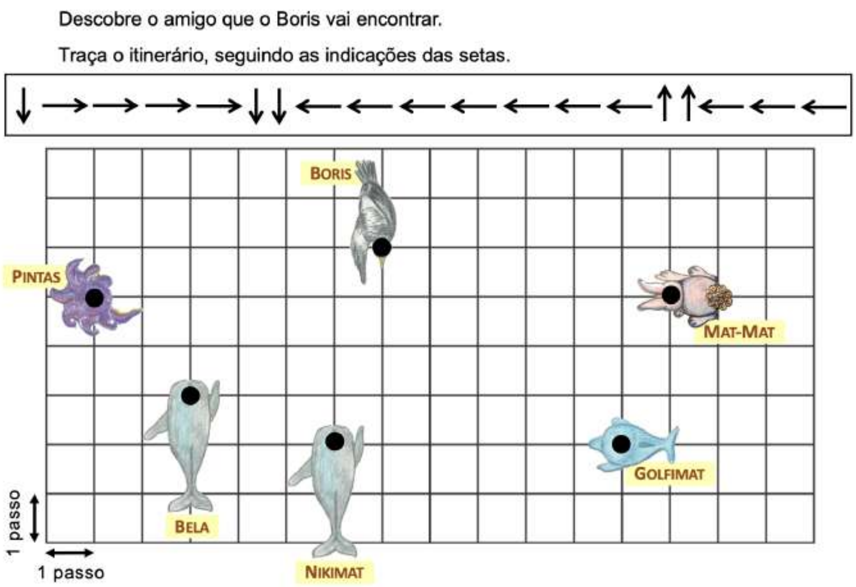

Figura 16: Itinerário da autoria de Elsa Marques (EBI Canto da Maia) e Paula Sousa (EBS de Santa Maria).

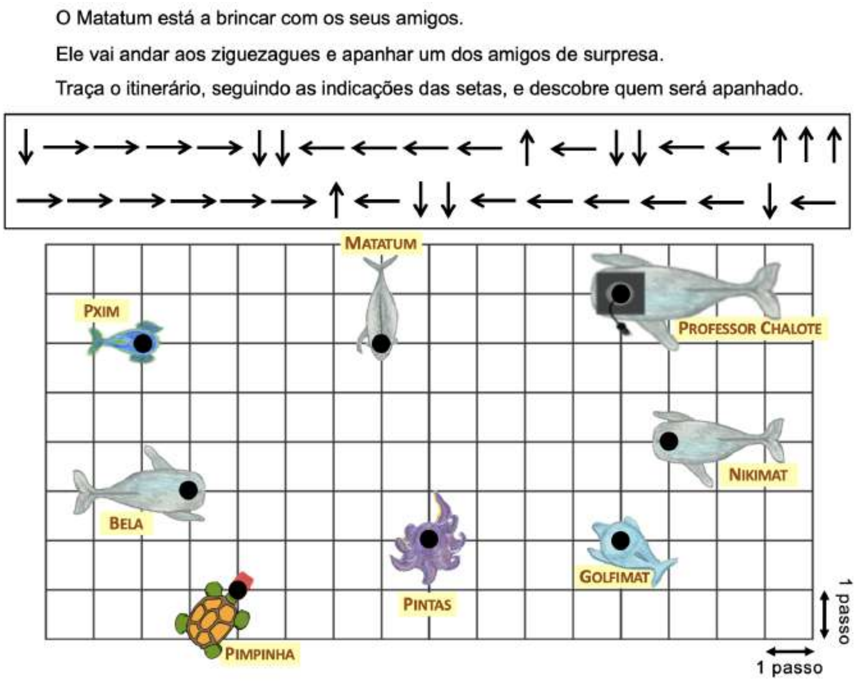

Figura 17: Itinerário da autoria de Ana Almada (EBS da Calheta) e Elsa Marques (EBI Canto da Maia).

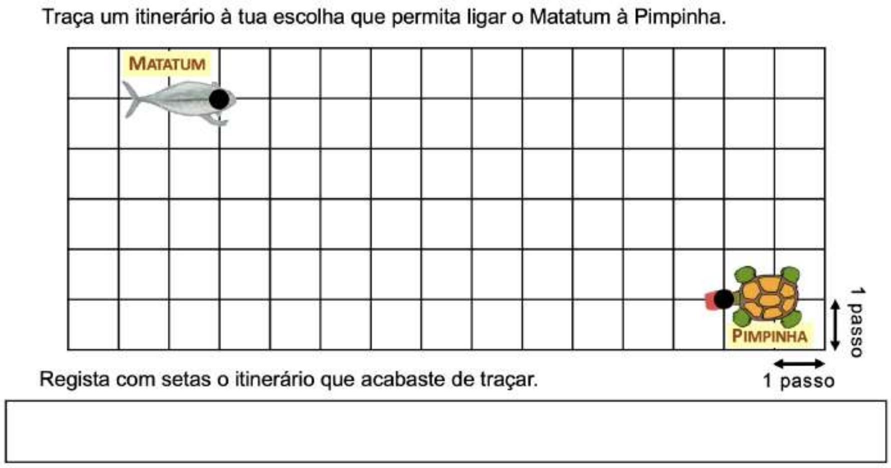

Figura 18: Itinerário da autoria de Ana Almada (EBS da Calheta) e Elsa Marques (EBI Canto da Maia).

Figura 19: Itinerário da autoria de Paula Silva (EBI da Vila do Topo).

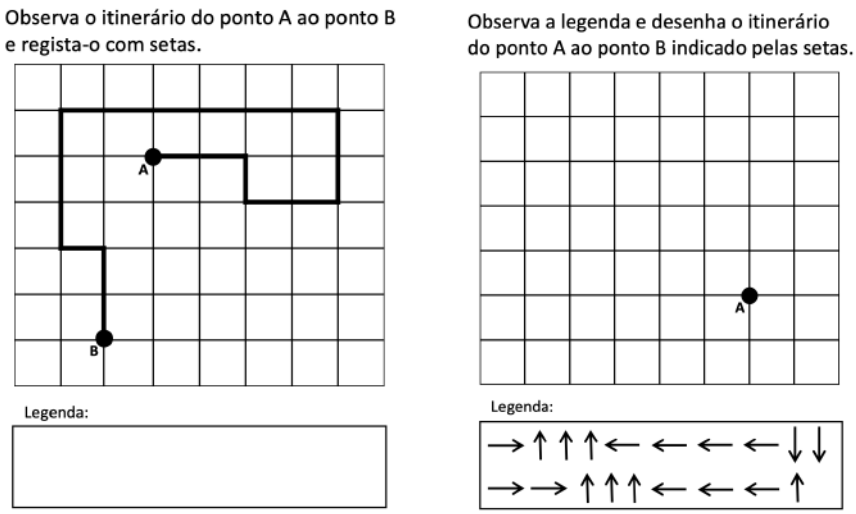

Figura 20: Um percurso traçado para os alunos descreverem oralmente e fazerem a respetiva legenda, outro com a legenda para os alunos traçarem o percurso.

3 À descoberta de figuras planas

Recorde as noções de pontos alinhados e não alinhados e de segmento de reta. Explique aos alunos que vão aprender a distinguir linhas e figuras poligonais de linhas e figuras não poligonais. Solicite aos alunos que se sentem em círculo no chão da sala por forma a participarem mais ativamente nas tarefas que serão propostas (veja-se a figura 21). Coloque duas cordas no chão, uma esticada e outra ondulada. Coloque uma terceira corda com as duas pontas juntas. Estimule a oralidade de modo a que os alunos possam distinguir linha reta de linha curva e linha curva aberta de linha curva fechada.

Figura 21: À esquerda: comparação linha reta/curva. À direita: acrescentou-se uma terceira corda para comparação linha curva aberta/fechada.

Numa linha fechada, qualquer que seja o ponto de partida que se considere, o ponto de chegada coincide sempre com esse ponto de partida, o que pode ser verificado pelos alunos pois, ao identificarem um ponto de partida com uma mão e ao percorrerem toda a corda com a outra mão, chegam sempre ao mesmo ponto de partida. Já no caso da corda aberta, os alunos partem de uma das pontas (ponto de partida) e chegavam à outra ponta (ponto de chegada), sendo esse o motivo que as distingue (linha aberta/linha fechada). Faça no quadro uma representação pictórica dos tipos de linhas explorados. Veja-se a figura 22.

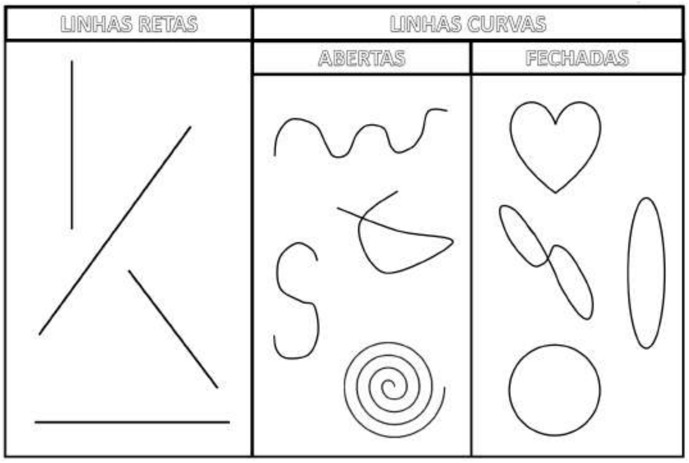

Figura 22: Linhas retas e linhas curvas abertas e fechadas.

Chame a atenção que, em termos abstratos, podemos considerar linhas abertas infinitas e que, nesses casos, as linhas não têm princípio nem fim (logo, não têm ponto de partida nem de chegada). No caso das linhas retas, consoante tenham ou não ponto de partida e/ou de chegada, podemos considerar retas, semirretas e segmentos de reta. Para uma exploração mais detalhada, veja-se, por exemplo, a abordagem da figura 23, da autoria de Ana Maria Lima e Conceição Lima Vaz (Equipa de Coordenação).

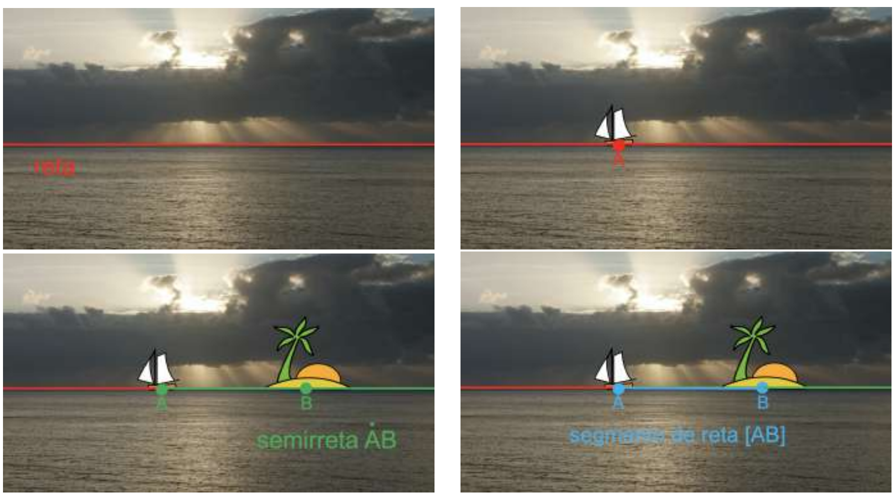

Figura 23: Explorar a linha do horizonte e identificar retas, semirretas e segmentos de reta.

Num momento seguinte, peça a um aluno para se colocar dentro de uma corda fechada e a outro para se colocar fora. Peça a um terceiro que coloque os pés em cima da corda. Explique que o aluno que está dentro encontra-se na *parte interna* determinada pela corda, o que está fora encontra-se na *parte externa* e o que se encontra em cima da corda está na *fronteira*, a linha que separa a parte interna da parte externa (figura 24). Proceda à representação pictórica no quadro das diferentes situações exploradas (figura 25).

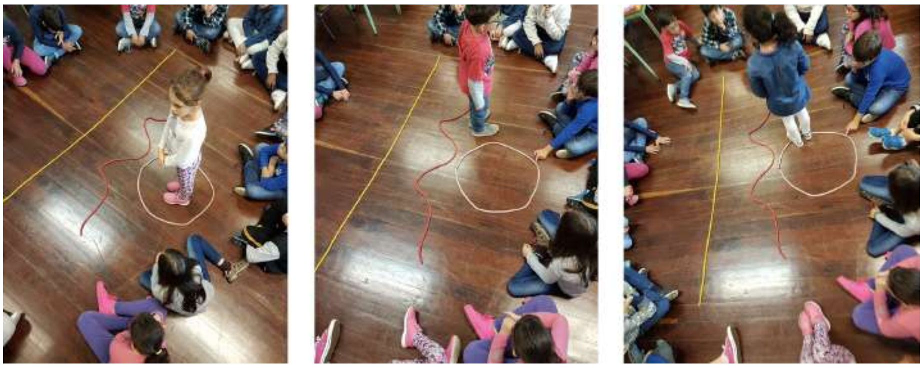

Figura 24: À esquerda: aluna na parte interna definida pela linha fechada. Ao centro: aluno na parte externa. À direita: aluna em cima da corda, ou seja, na fronteira definida pela linha fechada.

Figura 25: Parte interna, parte externa e fronteira determinadas por uma linha fechada (uma linha fechada pode ser formada por partes curvas e/ou por segmentos de reta).

Em seguida, solicite a dois alunos que se levantem e segurem uma corda pelas extremidades. Afirme que a corda representa um segmento de reta e que os alunos representam os extremos desse segmento de reta. Chame mais um aluno e coloque-o numa posição não alinhada com os outros dois; entregue mais uma corda e peça ao aluno para dar uma das extremidades a um dos dois colegas e segurar a corda pela outra extremidade (ver figura 26).

Chame a atenção que, agora, já não se tem um segmento de reta, mas sim dois segmentos de reta e que estes constituem uma *linha poligonal aberta* porque, para qualquer ponto de partida que se considere, o ponto de chegada não coincide com o ponto de partida (na verdade, os dois segmentos de reta têm um dos extremos em comum; os outros dois extremos são os pontos de partida e de chegada que, portanto, não coincidem).

Saliente que os dois segmentos de reta têm um extremo em comum e que não estão alinhados, ou seja, têm direções diferentes, pelo que não existe uma reta que contenha simultaneamente os dois segmentos de reta.

Figura 26: Representação de linhas poligonais (abertas) com cordas coloridas.

Os exercícios com cordas são realizados normalmente com entusiasmo. Neste caso concreto, a utilização de cordas constitui uma mais valia na construção do conceito de linha poligonal (aberta e fechada), ajudando por conseguinte na distinção de linha não poligonal trabalhada anteriormente pela constatação e diferenciação dos respetivos atributos geométricos.

Dê continuidade à exploração com cordas. Chame um quarto aluno, entregue mais duas cordas e proceda como está ilustrado na figura 27. Chame a atenção que se continua a ter uma linha poligonal, mas formada por quatro segmentos de reta, e que é uma linha fechada (qualquer que seja o ponto de partida que se considere, o ponto de chegada coincide sempre com esse ponto de partida), por isso se chama *linha poligonal fechada*. Proceda de igual forma para construir outras linhas poligonais, abertas e fechadas. Varie o número de cordas utilizadas.

Figura 27: Representação de uma linha poligonal (fechada) com cordas coloridas.

Aproveite também para explorar linhas poligonais abertas/fechadas que *se cruzam* e que *não se cruzam* (ver figura 28). É importante explorar linhas poligonais construídas com cordas de diferentes tamanhos. Aliás a transição entre os dois exemplos da direita da figura 28 só é possível partindo de um retângulo não quadrado.

Na figura 29, ilustra-se uma representação pictórica dos tipos de linhas poligonais explorados.

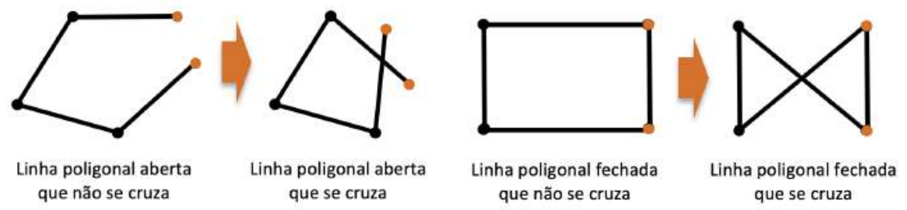

Figura 28: Representação de linhas poligonais abertas/fechadas que se cruzam e que não se cruzam.

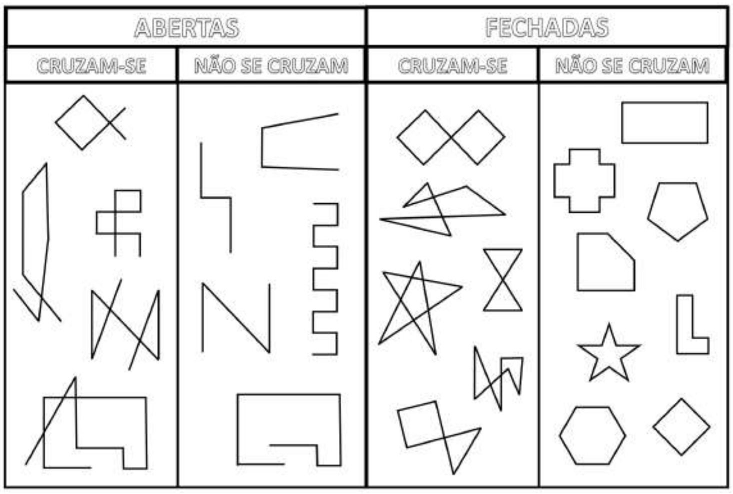

Figura 29: Diferentes tipos de linhas poligonais.

É chegado o momento de definir polígono. Os *polígonos* são as figuras planas limitadas por linhas poligonais fechadas que não se cruzam. É importante salientar que um polígono é constituído pelos pontos da linha poligonal e também pelos pontos da parte interna definida por essa linha (aliás este pormenor será importante para, no futuro, se falar em área de um polígono). Exemplifique construindo um retângulo não quadrado (ou um quadrado) com cordas: reforce que o retângulo não quadrado é constituído pelas cordas, que formam uma linha poligonal fechada que não se cruza, e pela parte interna definida por essa linha.

Por fim, refira que, sendo os polígonos limitados por linhas poligonais, chamam-se *lados do polígono* aos segmentos de reta que formam a linha poligonal fechada e chamam-se *vértices do polígono* aos extremos desses segmentos de reta. Saliente que para figuras planas que não sejam polígonos não faz sentido falar em lados e vértices, pois não são figuras limitadas por linhas poligonais fechadas que não se cruzam (e.g., não faz sentido falar em lados e vértices de círculos ou mesmo de setores circulares – "fatias de piza").

Afixe no quadro diferentes figuras planas limitadas por linhas fechadas que não se cruzam, separando os polígonos das figuras planas que não são polígonos. Dialogue sobre as diferenças entre ambas de modo a se distinguir polígonos de figuras planas não poligonais (ver figuras 30 e 31).

Figura 30: Afixação de polígonos e de figuras não polígonais no quadro. Participação ativa dos alunos na descoberta dos diferentes atributos geométricos e na separação das figuras planas em dois grupos.

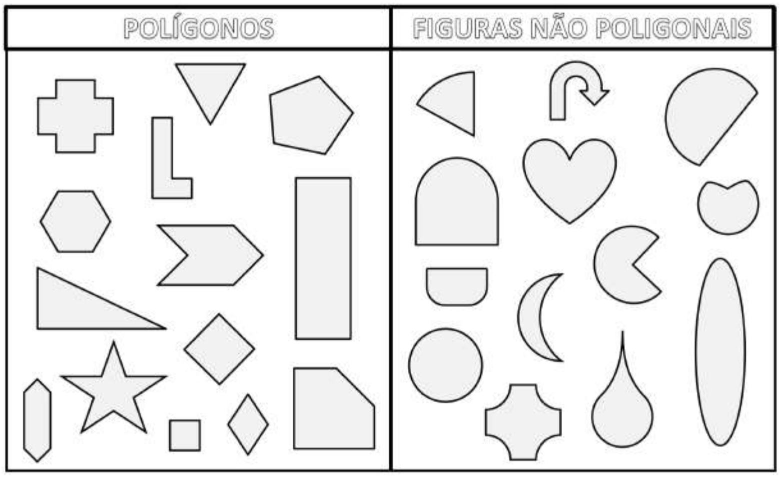

Figura 31: Figuras planas limitadas por linhas fechadas que não se cruzam: polígonos e figuras não poligonais.

Num momento posterior, sugere-se a implementação da tarefa que se segue. Explique que vão ser projetadas diferentes pinturas cubistas para que sejam exploradas à luz dos conhecimentos trabalhados[3]. Explique, também, que vão ser distribuídos geoplanos e elásticos coloridos e que vão ser dadas indicações que deverão ser tidas em conta.

Chame a atenção dos alunos para a observação atenta de diferentes pinturas cubistas, apresentando-as uma a uma no quadro interativo. Comece por promover uma exploração livre das figuras e depois uma exploração orientada, procurando que os alunos se entusiasmem e apliquem os conceitos trabalhados. Veja-se a figura 32.

[3] Encontrará várias exemplos ao pesquisar, por exemplo, no Google por “pinturas cubistas”.

Figura 32: Observação e exploração de diferentes pinturas cubistas. Aplicação dos conceitos trabalhados: identificação de polígonos e de figuras não poligonais.

Distribua geoplanos e elásticos coloridos, para que os alunos possam representar figuras planas (polígonos e figuras não poligonais). Veja-se a figura 33.

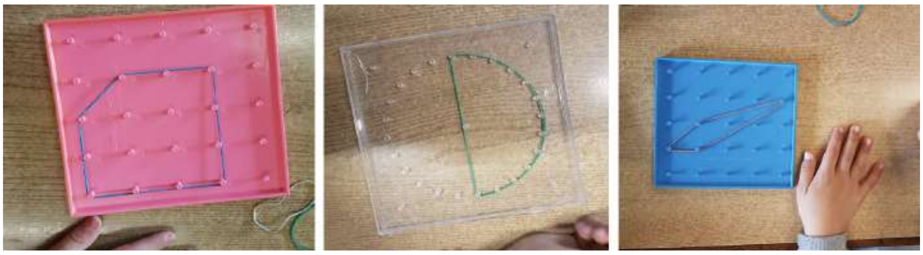

Figura 33: Representação de figuras planas (polígonos e figuras não poligonais) no geoplano com elásticos coloridos.

Recapitule com a turma os conceitos explorados. Um polígono é uma figura plana limitada por uma linha poligonal fechada que não se cruza. Saliente que um polígono inclui sempre os pontos da linha poligonal, bem como os pontos da parte interna definida por essa linha. Relembre que os lados de um polígono são os segmentos de reta da linha poligonal que o define e que os vértices são os extremos desses segmentos de reta.

Aproveite para colocar a seguinte questão à turma: "Qual é o menor número de lados que um polígono pode ter?". A resposta é 3 e a razão prende-se com o facto de que só conseguimos construir uma linha poligonal fechada se esta tiver pelo menos 3 segmentos de reta (exemplificar com cordas, palhinhas ou espátulas).

Refira que os polígonos classificam-se quanto ao número de lados, dando como exemplo os polígonos de 3 lados (*triângulos*), de 4 lados (*quadriláteros*), de 5 lados (*pentágonos*) e de 6 lados (*hexágonos*). Apresente um leque variado de polígonos com um número de lados a variar entre 3 e 6 e peça para que os alunos agrupem os polígonos de acordo com o número de lados, identificando os triângulos, os quadriláteros, os pentágonos e os hexágonos.

Refira que os polígonos com um mesmo número de lados distinguem-se entre si consoante os seus lados sejam iguais ou diferentes (ou seja, consoante os segmentos de reta que constituem os seus lados apresentem o mesmo comprimento ou comprimentos diferentes). Proponha exemplos variados a serem explorados pela turma, começando por hexágonos. Mostre alguns exemplos de *hexágonos regulares* (com os lados todos iguais) e *não regulares* (em que existem pelo menos dois lados diferentes). Veja-se a figura 34.

Figura 34: Hexágonos regulares e hexágonos não regulares.

Mostre exemplos de *pentágonos regulares* (com os lados todos iguais) e *não regulares* (em que existem pelo menos dois lados diferentes) e promova um debate na turma. Veja-se a figura 35.

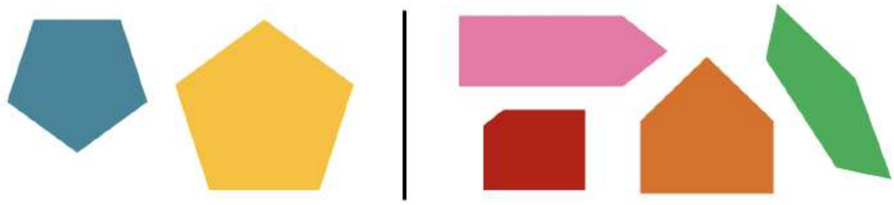

Figura 35: Pentágonos regulares e pentágonos não regulares.

Em seguida, mostre exemplos variados de quadriláteros (figura 36).

Figura 36: Exemplos de quadriláteros. A vermelho e a verde estão representados dois quadrados. A azul está representado um retângulo não quadrado e a laranja está representado um losango não quadrado.

Refira que podemos comparar os quadriláteros quando aos seus lados e também quando os seus cantos (noção intuitiva de ângulo). Recorde que os *retângulos* são quadriláteros com os quatro cantos iguais e com pares de lados opostos iguais. Relembre que os *quadrados* são retângulos especiais que têm os quatro lados todos iguais. Assim, há dois tipos de retângulos: os quadrados e os que não são quadrados.

Refira que os *losangos* são quadriláteros com os quatro lados iguais e com pares de cantos opostos iguais. Reforce que os *quadrados* são losangos especiais que têm os quatro cantos todos iguais. Assim, há dois tipos de losangos: os quadrados e os que não são quadrados.

Mostre exemplos variados de triângulos. Peça para os alunos separarem os triângulos em dois grupos: os que têm os lados todos diferentes e os que têm pelo menos dois lados iguais. Terminada a tarefa, refira que os triângulos com os lados todos diferentes chamam-se *triângulos escalenos* e os triângulos que têm pelo menos dois lados iguais chamam-se *triângulos isósceles*. Peça para os alunos separarem os triângulos isósceles em dois grupos: os que têm os três lados iguais e os que têm apenas dois lados iguais. Terminada a tarefa, refira que os triângulos que têm os três lados iguais chamam-se *triângulos equiláteros*. Assim, há dois tipos de triângulos isósceles: os equiláteros e os que não são equiláteros (figura 37).

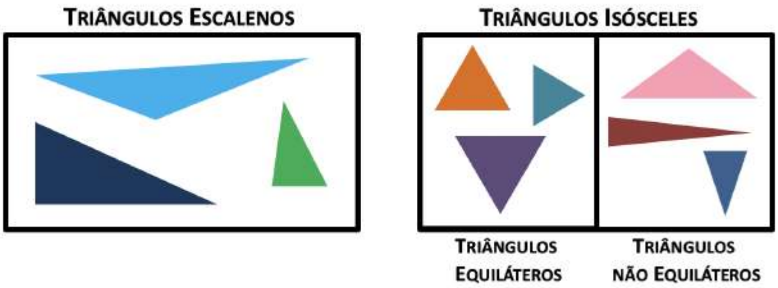

Figura 37: Classificação dos triângulos quanto às medidas de comprimento dos seus lados.

As próximas tarefas permitem consolidar estas classificações dos polígonos.

Distribua, numa mesa central, vários modelos de polígonos feitos em cartão (com diferentes tamanhos e características, incluindo diferentes tipos de triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos). Os alunos devem observar os polígonos e, seguidamente, devem afixá-los numa tabela, de acordo com o número de lados (a tabela deve ser feita em cartolina ou em papel de cenário para depois se poder afixar na sala). Dialogue com os alunos de modo a que estes tenham a oportunidade de explicar as suas escolhas. Chame a atenção que o número de vértices de cada polígono coincide com o número de lados. Terminada a tarefa de agrupamento, a turma deve proceder à classificação dos diferentes polígonos em triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos. Focar a atenção dos alunos nos diferentes tipos de triângulos e de quadriláteros (em particular, os quadrados, os retângulos não quadrados e os losangos não quadrados). Veja-se a figura 38.

Figura 38: Classificação de polígonos quanto ao número de lados.

Outras explorações possíveis passam por solicitar aos alunos a construção de polígonos com diferente número de lados usando, por exemplo, o geoplano com elásticos (figura 39) ou, em alternativa, palhinhas/espátulas (figura 40). Deve, contudo, ficar claro que um polígono inclui sempre os pontos da linha poligonal, bem como os pontos da parte interna definida por essa linha.

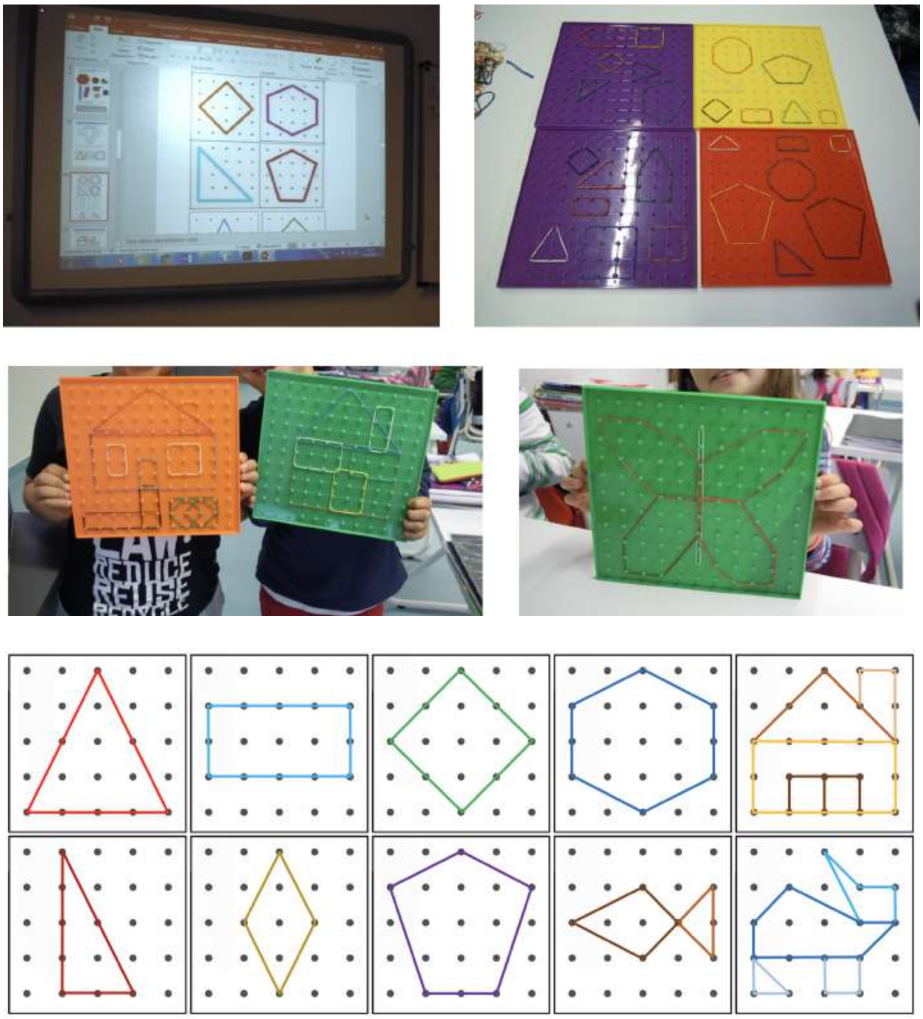

Figura 39: Polígonos construídos usando o geoplano com elásticos.

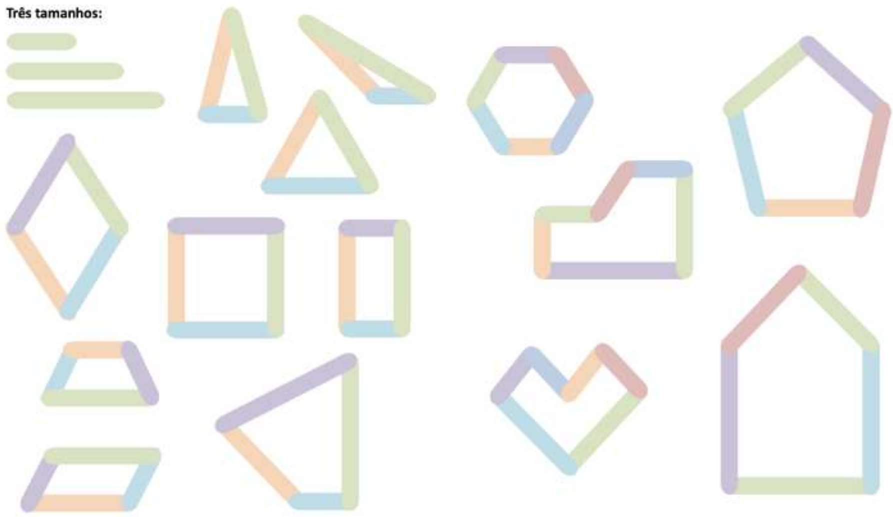

Figura 40: Polígonos construídos usando espátulas de três tamanhos.

Outra possibilidade passa por promover uma exploração do Tangram clássico e de construções que podem ser feitas com as suas peças (cinco triângulos isósceles não equiláteros de diferentes tamanhos, um quadrado e um quadrilátero que não é um retângulo nem um losango – embora esta definição não necessite de ser introduzida, trata-se de um paralelogramo). Veja-se a figura 41.

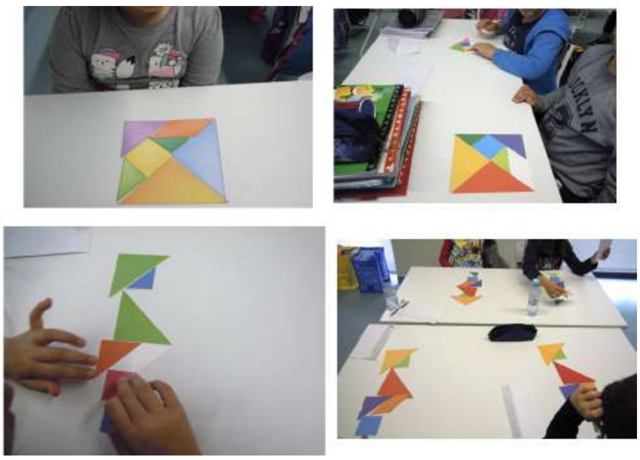

Figura 41: Explorações com o Tangram clássico.

Para a classificação dos triângulos (triângulos equiláteros, triângulos isósceles não equiláteros e triângulos escalenos) e de alguns quadriláteros (em particular, dos quadrados, retângulos não quadrados e losangos não quadrados) é necessário comparar os lados do polígono em análise. Dizemos que os lados são iguais ou diferentes consoante tenham o mesmo comprimento ou não. Numa fase em que ainda não tenham sido introduzidas (ou exploradas com alguma profundidade) as unidades de medida de comprimento convencionais (o metro como unidade principal e as subunidades decímetro, centímetro e milímetro), é prematuro utilizar a régua graduada para medir o comprimento dos segmentos de reta que constituem os lados do polígono em análise. Por isso, a medição do comprimento dos lados dos polígonos pode ser feita, nesta fase, de forma não convencional, por comparação direta, recorrendo-se a fio de lã ou a cordel (escolher um tipo de fio, de preferência, com pouca elasticidade para não interferir na medição). Na figura 42, exemplifica-se uma possível exploração envolvendo a classificação dos triângulos. Igual procedimento pode ser adotado, se necessário, no contexto da classificação de alguns quadriláteros.

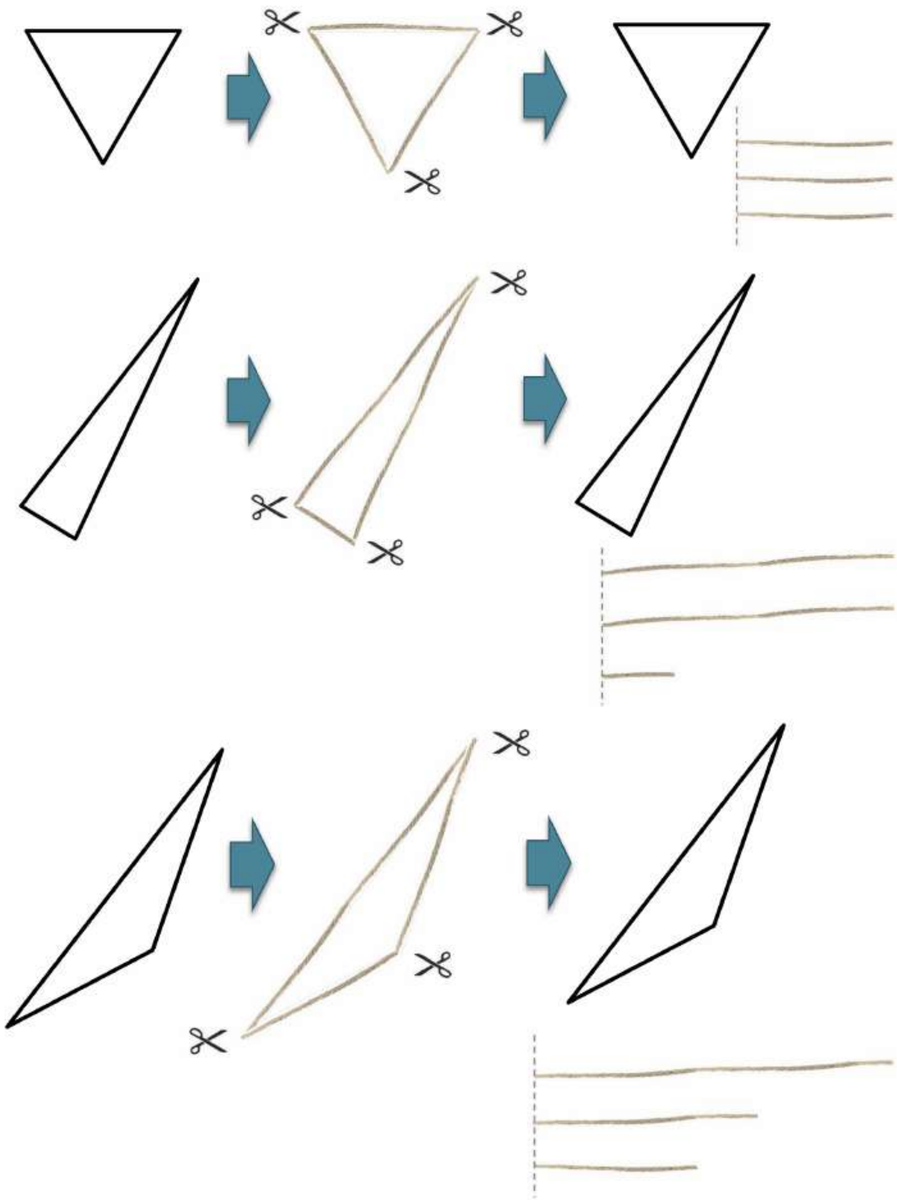

Figura 42: Explorar, com fio de lã ou cordel, a classificação dos triângulos quanto às medidas de comprimento dos seus lados.

Nas figuras 43 e 44, ilustra-se a utilização de um dispositivo que visa explorar o quadrado como caso particular de um retângulo. Uma partilha de Maria Liseta Amaral e Graça Camboia (EBI da Maia). Na figura 45, ilustra-se um dispositivo análogo, que permite explorar o quadrado como caso particular de um losango. Uma partilha de Paula Silva (EBI da Vila do Topo).

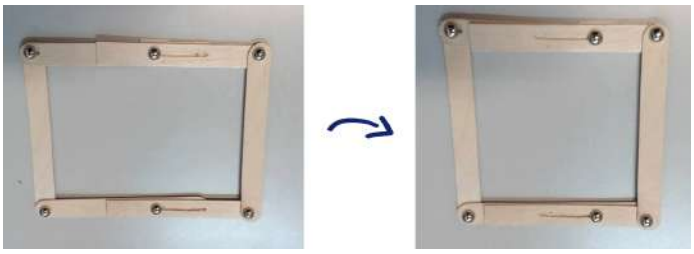

Figura 43: Abordagem: *retângulo* $\rightarrow$ *quadrado como um retângulo especial que tem os lados todos iguais.* Apresenta-se um retângulo não quadrado; de seguida, varia-se o comprimento dos dois lados maiores até obter um quadrado, ficando todos os quatro lados com o mesmo comprimento.

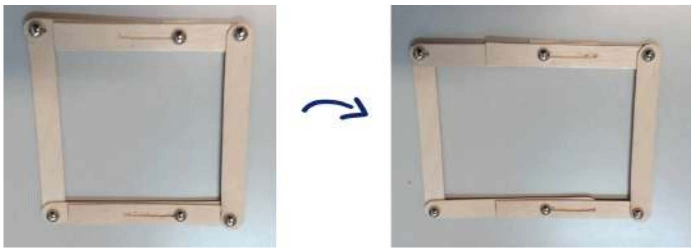

Figura 44: Faz-se o movimento em sentido contrário, reforçando os conceitos: “Esta figura plana é um retângulo com os lados todos iguais; este retângulo especial chama-se quadrado.” $\rightarrow$ “Esta figura plana já não é um quadrado pois tem dois lados maiores do que os outros dois; este retângulo já não é um quadrado; dizemos que é um retângulo não quadrado.”. Assim, os retângulos podem ser quadrados ou retângulos não quadrados.

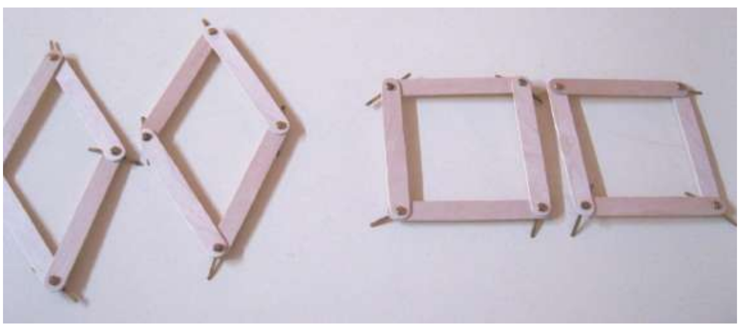

Figura 45: Dispositivo que permite explorar a relação entre os quadrados e os losangos não quadrados.

Já o dispositivo ilustrado na figura 46 permite realizar uma exploração conjunta retângulo-quadrado-losango.

Figura 46: Num único dispositivo, explora-se a relação entre os quadrados e os retângulos não quadrados e entre os quadrados e os losangos não quadrados.

Sugerem-se também explorações sensoriais das figuras planas. Por exemplo, um aluno desenha com o indicador nas costas de um colega um determinado tipo de polígono, para que o colega tente descobrir que polígono é esse. Num recinto adequado, os alunos podem representar segmentos de reta com o próprio corpo e, com isso, construir linhas poligonais fechadas que não se cruzem, formando, portanto, "polígonos humanos".

4 Construir e desmontar sólidos geométricos

Dê início à aula fazendo um levantamento oral do que os alunos se recordam relativamente às figuras geométricas 3D mais conhecidas, habitualmente designadas por *sólidos geométricos*. Para isso, incentive a participação dos alunos levantando questões como "Onde podemos encontrar na sala de aula objetos parecidos com os sólidos geométricos que já conhecem?". Direcione a conversa para os objetos da sala que se assemelham a sólidos geométricos conhecidos (e.g., caixas, latas, tijolos, armários, . . .): "As latas que estão a usar para colocar os vossos apara-lápis são parecidas com que sólido? O estojo do teu colega tem uma forma semelhante a um cilindro? Pode-se identificar o caixote do lixo com que sólido geométrico?". Ao colocar estas questões, incentivará as crianças a compararem os objetos da sala de aula com os sólidos geométricos estudados no ano transato.

Num segundo momento, disponha os alunos em grupos. Forneça a cada grupo um conjunto de sólidos geométricos, de modo a que os alunos possam observar, manipular, explorar e relembrar em diálogo com os colegas o que já aprenderam sobre os sólidos geométricos. No quadro, registe os conceitos chave transmitidos pelos alunos no decorrer do *Brainstorming* (Chuva de ideias). Por exemplo, o nome dos sólidos, quais os sólidos que rolam e os que deslizam e que sólidos têm superfícies planas e/ou superfícies curvas (ver figura 47).

Figura 47: Identificação de alguns objetos da sala de aula que se assemelham a sólidos conhecidos. Chuva de ideias sobre sólidos geométricos.

Lance uma série de desafios. Em primeiro lugar, os alunos devem reproduzir construções utilizando sólidos, partindo de imagens projetadas. É importante que, em cada grupo, os alunos dialoguem sobre como pode ser feita cada construção e que cuidados se deve ter nomeadamente com as esferas, os cones e os cilindros (uma vez que estes sólidos rolam). Seguidamente, solicite aos alunos que explorem as propriedades dos sólidos, agrupando os sólidos de acordo com determinadas características, nomeadamente separando os sólidos que rolam dos que apenas deslizam. Para os alunos que forem manifestando alguma insegurança na distinção entre "rola" e "desliza", proponha a utilização do caderno de matemática (ou outro) inclinado, de modo a fazer deslizar e/ou rolar os sólidos. Terminada esta exploração, pretende-se que os alunos cheguem à conclusão de que os sólidos que só deslizam são constituídos apenas por superfícies planas e que os que apenas rolam (ou que rolam e deslizam) são constituídos por superfícies só curvas (ou por superfícies curvas e planas). Surge naturalmente a noção de *poliedro* como sendo todo o sólido que apenas apresenta superfícies planas e que, por isso, apenas desliza. Veja-se a figura 48.

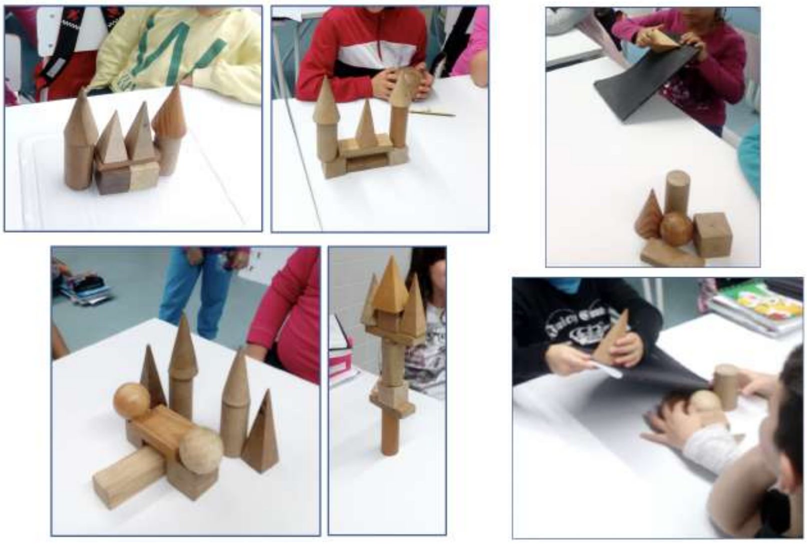

Figura 48: Construções com sólidos geométricos. Explorar os sólidos que rolam e/ou que deslizam.

Num momento seguinte, desafie os alunos a construirem poliedros, a partir de palitos e gomas (ou, em alternativa, de palhinhas e plasticina), com o objetivo de identificarem faces, arestas e vértices dos poliedros construídos. Disponha os alunos em grupos e distribua um conjunto de palitos e gomas a cada grupo. A partir da observação de cada poliedro estudado (recorrendo aos modelos em madeira), os alunos devem unir palitos com a ajuda de pedaços de gomas, como se pode ver na figura 49, começando por construir uma das faces até obter todo o poliedro.

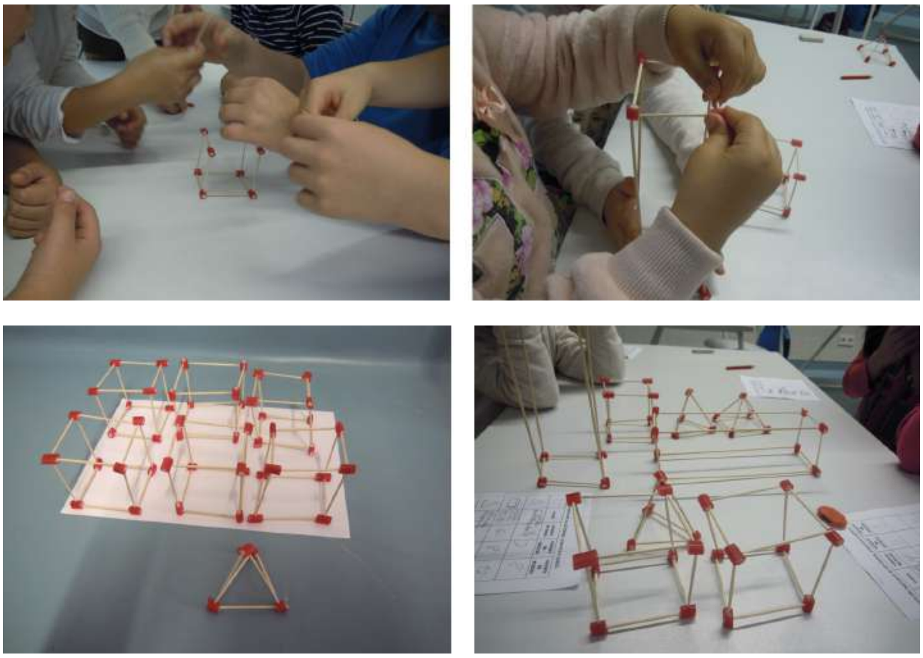

Figura 49: Construção de poliedros com palitos e gomas, seguindo-se um debate com vista à identificação das faces, arestas e vértices dos diferentes poliedros construídos.

O primeiro poliedro deve ser construído sob orientação do professor, ou seja, em cada grupo os alunos vão construindo o primeiro poliedro à medida que observam os diferentes passos de construção executados pelo professor. A partir daí, os alunos construirão os restantes poliedros sob supervisão do professor. Os alunos que apresentarem maior destreza nesta tarefa também podem percorrer os grupos de forma a apoiarem os colegas com mais dificuldades.

Quando todos os grupos tiverem concluído as suas construções, explore com a turma os conceitos de *face*, de *aresta* e de *vértice*. Para cada construção, incentive a identificação e contagem das faces, arestas e vértices (figura 50). Incentive a descoberta de algumas regularidades, por exemplo, que qualquer paralelepípedo retângulo (quer seja cubo ou não) tem sempre o mesmo número de faces, arestas e vértices. Explique que um cubo é um caso particular de um paralelepípedo retângulo com as faces todas iguais (que são quadrados).

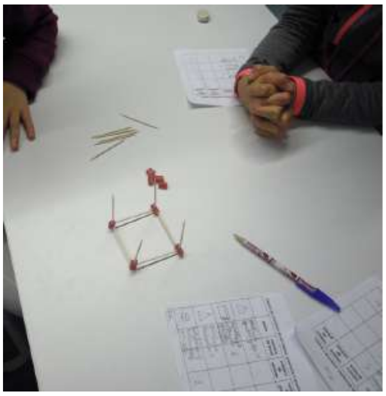
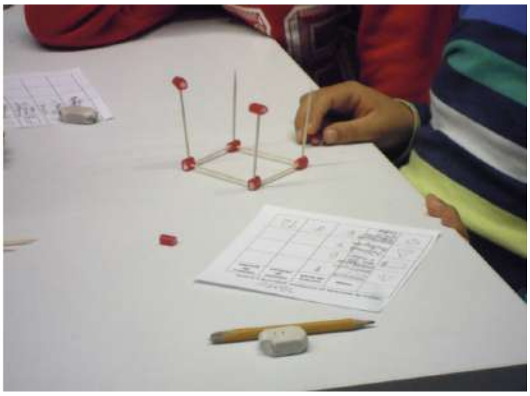

Figura 50: Registo do número de faces, arestas e vértices de cada poliedro construído. Para facilitar a contagem das arestas e dos vértices, os alunos podem ser convidados a efetuar a contagem à medida que desmontam as construções feitas.

Proponha uma nova tarefa com vista a que os alunos "desmontem" figuras geométricas 3D (sólidos geométricos) e identifiquem as figuras geométricas 2D (figuras planas) que compõem a sua superfície. Antes de iniciar a tarefa, disponha os alunos em grupos e distribua sólidos geométricos transparentes a cada grupo (conforme se ilustra na figura 51, todas os sólidos desta tarefa são poliedros, podendo ser pirâmides ou prismas, em particular, paralelepípedos retângulos).

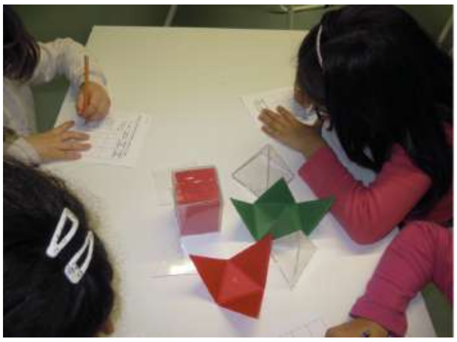


Figura 51: Exploração oral e registo escrito do número de faces de diferentes poliedros e da identificação da forma dessas faces (os sólidos transparentes utilizados contêm no seu interior a planificação do respetivo poliedro).

Em seguida, coloque questões como "Será que podemos desmontar estas figuras 3D? Que figuras planas (figuras 2D) poderemos encontrar, por exemplo, se desmontarmos um paralelepípedo retângulo que não é um cubo? Quantas figuras planas? Têm todas a mesma forma e tamanho? E se for um paralelepípedo retângulo que é um cubo? As figuras planas que o compõem são iguais às do paralelepípedo retângulo visto anteriormente? E se desmontarmos uma pirâmide? Que figuras planas iremos encontrar?". Os alunos vão respondendo às questões, ao mesmo tempo que manipulam e exploram as figuras 3D (sólidos), desmontando essas figuras e analisando as figuras 2D (figuras planas) que conseguem observar. Aproveite para explorar o conceito de face dos poliedros explorados e a identificação da forma dessas faces. Dê algum tempo para que os elementos de cada grupo possam explorar e dialogar acerca das propriedades estudadas.

Num próximo momento, desafie os alunos a construírem um "Robot Geométrico" com a ajuda dos pais, encarregados de educação ou outros familiares, utilizando materiais recicláveis como caixotes, rolos de papel, tampas, entre outros, que se identifiquem com os sólidos geométricos mais conhecidos. Posteriormente, os robots podem ficar em exposição na entrada da escola, para serem votados pelos colegas de outras turmas e, assim, serem eleitos os melhores robots. Com esta tarefa, pode-se concretizar uma série de objetivos:

- Interligar os conteúdos abordados em Matemática com o Estudo do Meio e a Expressão Plástica (e.g., reciclagem de materiais/objetos; manusear objetos que necessitam de especial atenção como cola quente, tesouras, tintas; aplicar técnicas da Expressão Plástica; ...);

- Envolver as famílias na aprendizagem de conteúdos matemáticos;

- Partilhar aprendizagens com outros anos de escolaridade e ciclos de ensino (exposição dos robots na entrada da escola e votação para o melhor robot);

- Relacionar novas aprendizagens com conteúdos previamente explorados (depois da votação efetuada, pode-se proceder à contagem de votos através de um esquema de contagem – *tally chart*, de uma tabela de frequências absolutas e de um gráfico de pontos);

- Motivar os alunos para construções com diferentes temáticas (e.g., animais, casas, maquetas, ...), como forma de continuar a explorar os sólidos geométricos mais conhecidos.

Depois de recolhidos os robots construídos em casa com ajuda da família, os alunos do 2.º ano podem preparar a exposição na entrada da escola, com a supervisão do(s) professor(es). Cada robot deve estar associado a um número que identifique o seu construtor.

As turmas dos restantes anos de escolaridade, acompanhadas pelos respetivos docentes, devem ser convidadas a apreciar a exposição e cada aluno votará no seu robot preferido, registando o número do robot num papel, que deve ser inserido na urna de votação.

Concluída a fase de votação, os alunos do 2.º ano devem proceder à contagem dos votos utilizando um esquema de contagem (*tally chart*), uma tabela de frequências absolutas e um gráfico de pontos. No final, é aclamado o vencedor que recebe um prémio simbólico (o prémio pode mesmo ter sido previamente elaborado pelos alunos do 2.º ano). Veja-se a figura 52.

Figura 52: Recolha e exposição dos robots na entrada da escola, para serem sujeitos a votação. Atribuição do primeiro lugar.

Encoraje os alunos a pensarem sobre aquilo que aprenderam. Terminamos com alguns testemunhos recolhidos:

- "A Matemática está realmente à minha volta e nunca dei conta!"
- "Afinal estou dentro de um paralelepípedo retângulo que não é um cubo!" (O aluno refere-se à sala de aula.)
- "Posso praticar a Matemática em casa, porque todos os materiais que usamos na escola consigo também fazer em casa."
- "Vou pedir à minha mãe para comprar palitos e gomas e vou construir mais poliedros. É divertido!"
- "Há muitos mais sólidos que gostava de conhecer!"
- "Este ano fiquei a conhecer melhor as figuras 3D."
- "Estou a pensar em ser arquiteto, pois como conheço as figuras posso facilmente desenhar casas!"
- "No mês passado construímos uma maqueta em Estudo do Meio. Usamos materiais recicláveis. Afinal também era Matemática!"
- "Poderíamos também fazer outras construções com materiais para fazermos animais, mais maquetas, ..."

Referências

[1] Alves, A., Viveiros, A., Carvalho, A. *CartoMat: Vamos Jogar e Dar Cartas em Matemática*. Coordenação científica: R. C. Teixeira. Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2019.

[2] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C. P., Teixeira, R. C. A multiplicação e a divisão em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade. *Jornal das Primeiras Matemáticas* 11, 5-32, 2018.

[3] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C. P., Teixeira, R. C. A introdução do conceito de fração em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade. *Jornal das Primeiras Matemáticas* 12, 5-28, 2019.

[4] D' Arruda, A. I., Pacheco, C., Marques, E. *A Estrela Alegria... e os seus 10 Amigos*. Coordenação científica: R. C. Teixeira. Ilustração: E. Marques. Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2019.

[5] Furtado, A. R., Duarte, J., Medeiros, M. P., Faria, Z., Silva, L., Fonseca, M. H., Sousa, P., Teixeira, R. C. Recursos didáticos promotores do sentido de número no 1.º Ciclo do Ensino Básico. *Jornal das Primeiras Matemáticas* 11, 33-63, 2018.

[6] Lima, A. M., Santos, C. P., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. A resolução de problemas no 2.º ano de escolaridade: uma sequência de aprendizagem do modelo de barras. *Jornal das Primeiras Matemáticas* 8, 23 - 82, 2017.

[7] Lima, M., Santos, E. *À descoberta das figuras mistério*. Coordenação científica: R. C. Teixeira. Design das figuras: E. Marques, M. E. Teves. Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2017.

[8] Ministério da Educação e Ciência. *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*, Lisboa: MEC – Direção Geral de Educação, 2013.