Jornal das Primeiras MATEMÁTICAS

Número 13
Dezembro, 2019

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR
Ludus

Recursos Didáticos

Os Princípios Orientadores do Método de Singapura e a Aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico

Raquel Dinis, Ricardo Cunha Teixeira, Sónia Pacheco
FCSH-UAc & NICA-UAc, FCT-UAc & NICA-UAc, FCSH-UAc
raquel.jj.dinis@uac.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt, sonita_melo@hotmail.com

Resumo: *Neste artigo, analisamos o potencial científico-pedagógico evidenciado por um conjunto de experiências de aprendizagem desenvolvidas no decorrer de um Estágio Pedagógico no 1.º Ciclo do Ensino Básico, no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico da Universidade dos Açores. As experiências de aprendizagem dinamizadas demonstram o elevado potencial da abordagem concreto-pictórico-abstrato no ensino da Matemática, em articulação com as demais teorias edificadoras do currículo de Singapura, com destaque para o papel central que deve ser atribuído à Resolução de Problemas. Esta abordagem revelou-se motivadora para as crianças, favorecendo o estabelecimento de conexões e a mobilização de conhecimentos, condições fundamentais à compreensão relacional de conceitos, procedimentos e processos matemáticos, ao desenvolvimento de atitudes positivas face à Matemática e ao investimento na metacognição ao incutir nos alunos o hábito de pensarem sobre aquilo que aprenderam e, de uma maneira geral, sobre os seus próprios processos de pensamento.*

Palavras-chave: Experiências de aprendizagem, Ensino da Matemática, Método de Singapura, Abordagem concreto-pictórico-abstrato, Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

1 Singapura e o ensino da Matemática

Singapura é uma cidade-estado localizada na ponta sul da Península Malaia, no Sudeste Asiático. Esta antiga colónia do Reino Unido é constituída por cerca de 60 ilhas, estando separada da Malásia pelo Estreito de Johor, a norte, e das Ilhas Riau (Indonésia) pelo Estreito de Singapura, a sul.

O Ministério da Educação de Singapura rege-se pela máxima "*Thinking School, Learning Nation*", ou seja, "Escola que pensa, Nação que aprende", cujo objetivo é o de "preparar uma geração de cidadãos empenhados que saibam pensar e que sejam capazes de contribuir para o contínuo crescimento e prosperidade de Singapura" [23]. Segundo Silva [19], o "currículo de Singapura tem sido objeto de estudo aturado, tendo mesmo algumas regiões nos Estados Unidos adotado esse currículo (ou pelo menos uma parte)" (p. 36). Atualmente, é notória a difusão deste método pelo mundo ocidental, desde o Reino Unido[1] a Espanha[2]. Em Portugal, destaca-se o trabalho desenvolvido há vários anos pelo Colégio de São Tomás[3], em Lisboa, bem como o Projeto Prof DA do Programa *ProSucesso – Açores pela Educação*, da Secretaria Regional da Educação e Cultura do Governo dos Açores, e a Oficina *Matemática Passo a Passo*, da Universidade dos Açores [1, 6, 7, 8, 11, 15, 16].

Por que motivo o Método de Singapura desperta tanto interesse à volta do mundo? Na verdade, Singapura ocupa sistematicamente os lugares cimeiros do TIMSS [24, 25, 26, 27]. O TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) avalia o desempenho dos alunos do 4.º ano e do 8.º ano em Matemática e em Ciências. Este estudo internacional realiza-se de 4 em 4 anos e tem a finalidade de gerar informação de qualidade sobre os resultados do desempenho dos alunos e sobre os contextos em que estes aprendem. E que razões estão na base deste sucesso a Matemática? Segundo Silva [19],

> os bons resultados são em parte devidos a diferenças culturais entre os países do Ocidente e do Oriente; na realidade apenas entre o Ocidente e os países orientais de tradição Confuciana (...). Nos países onde os ensinamentos de Confúcio deixaram raízes, as famílias encaram o conhecimento de outro modo, havendo por exemplo muitos jogos tradicionais de raciocínio, que envolvem miúdos e graúdos. (p. 36)

Contudo, o sucesso do sistema de ensino de Singapura deve-se a diversos fatores de natureza distinta. Segundo Ben Jensen, que publicou em 2012 o relatório *Catching up: Learning from the best school systems in East Asia*, não são as diferenças culturais os fatores decisivos. O alto desempenho nos sistemas de educação da Ásia Oriental é uma consequência direta de um investimento em estratégias de ensino eficazes que se concentram na elaboração meticulosa e respetiva implementação de programas que visam uma melhoria contínua do ensino-aprendizagem da Matemática [14]. E são precisamente as inúmeras ferramentas didáticas do Método de Singapura, que não dependem de fatores culturais, que têm sido alvo de inspiração internacional.

[1]Veja-se, a título de exemplo, os manuais *Maths, No Problem* adotados em larga escola por escolas no Reino Unido. Mais informações estão disponíveis em: `https://mathsnoproblem.com`.

[2]Veja-se, a título de exemplo, o programa *El Método Singapur: Aprender Matemáticas Sin Memorizar* desenvolvido em Espanha. Mais informações estão disponíveis em: `https://www.bloghoptoys.es/el-metodo-singapur-aprender-matematicas-sin-memorizar/`.

[3]Que se traduziu recentemente na publicação dos livros *Viva a Matemática!*, destinados ao 1.º Ciclo do Ensino Básico, da autoria de Alda Carvalho, Carlos Pereira dos Santos e Isabel Pestana. Mais informações estão disponíveis em: `https://www.principia.pt/viva-a-matematica/`.

Ao consultarmos o programa oficial de Matemática de Singapura [18] apercebemo-nos de um leque de dinâmicas próprias no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática. Silvestre [20] destaca o impacto da política educativa de Singapura na "orientação do desenvolvimento curricular, nos diferentes programas oferecidos, na investigação educacional, na formação inicial e contínua dos professores, nos materiais didáticos e, sobretudo, nas medidas de acompanhamento individualizado aos alunos durante o ensino obrigatório (entre os 6 e os 15 anos)" (p. 19). O currículo de Matemática em Singapura é normalmente revisto de 6 em 6 anos, sendo realizados pequenos afinamentos mediante o feedback dos docentes e o trabalho desenvolvido em contexto de sala de aula.

O currículo de Singapura elege a Resolução de Problemas como motor de toda a aprendizagem em Matemática, desde as mudanças curriculares que se registaram a partir de 1992 [19]. O capítulo 2 do programa de Matemática de Singapura [18] apresenta em detalhe o Modelo Pentagonal do Currículo de Matemática de Singapura. A figura 1 ilustra este modelo onde a Resolução de Problemas ocupa um papel de destaque.

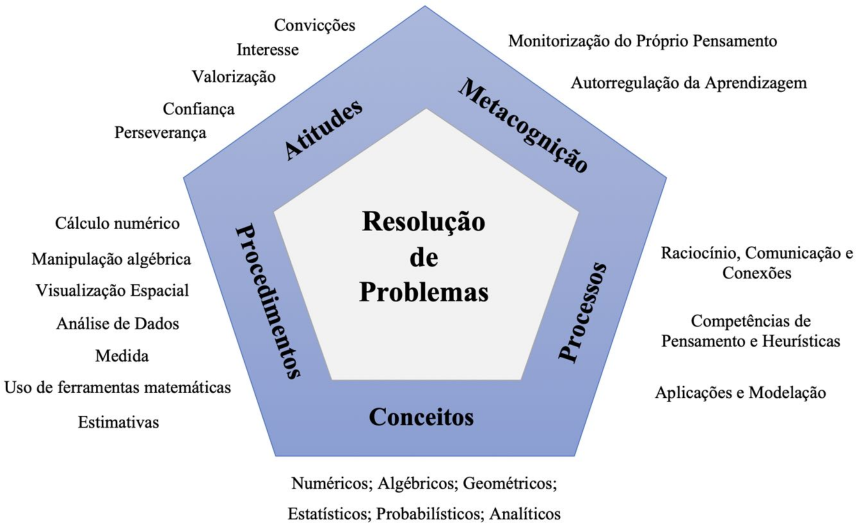


Figura 1: Modelo Pentagonal do Currículo do Ensino de Matemáca [18].

Ao analisarmos este modelo pentagonal identificamos cinco grandes componentes que estão interligadas e dependem umas das outras: Conceitos, Procedimentos, Processos, Atitudes e Metacognição. Façamos uma breve descrição de cada uma delas [18]. Para que possam desenvolver uma compreensão profunda dos *conceitos matemáticos* e entender várias ideias matemáticas, bem como as suas conexões e aplicações, os alunos devem ser expostos a uma variedade de experiências de aprendizagem, incluindo atividades práticas de manipulação de objetos e o uso de recursos tecnológicos, de modo a que sejam capazes de relacionar conceitos abstratos com experiências concretas. Para desenvolver *procedimentos matemáticos* fundamentais, os alunos devem ter a oportunidade de usar e praticar esses procedimentos (como, por exemplo, os algoritmos), numa perspetiva de compreensão dos princípios matemáticos subjacentes e não meramente como um conjunto de regras sem significado. Por seu turno, os *processos matemáticos* referem-se às competências envolvidas no ato de aquisição e aplicação de conhecimentos matemáticos. Destacam-se alguns processos matemáticos: o raciocínio matemático diz respeito à capacidade de analisar situações matemáticas e construir argumentos lógicos; a comunicação matemática refere-se à capacidade de usar linguagem matemática para expressar ideias e argumentos matemáticos de forma precisa, concisa e lógica; as conexões matemáticas referem-se à capacidade de ver e estabelecer ligações entre ideias matemáticas, entre a Matemática e outras áreas e entre a Matemática e o mundo real. De observar que a *Resolução de Problemas* também é um processo matemático, por constituir um meio por excelência de aquisição e aplicação de conhecimentos matemáticos. Atendendo ao papel relevante que o currículo de Matemática de Singapura atribui à Resolução de Problemas, este processo matemático ocupa uma posição central no Modelo Pentagonal. Por sua vez, as *atitudes* referem-se aos aspetos afetivos da aprendizagem de Matemática, como sejam: as crenças sobre a Matemática e a sua utilidade; o interesse e o prazer em aprender Matemática; a apreciação da beleza e do poder da Matemática; a confiança no uso da Matemática; e a perseverança na resolução de um determinado problema. Por fim, destaca-se a importância atribuída à *metacognição*, ou seja, à capacidade de controlarmos os nossos processos de pensamento [22], como, por exemplo, na seleção e aplicação de estratégias na Resolução de Problemas. A metacognição inclui, portanto, a monitorização do próprio pensamento e a autorregulação da aprendizagem.

Em relação à metacognição, é possível desenvolver esta capacidade de reflexão nos alunos de diversas formas, tento em conta a faixa etária em que se encontram. Esta capacidade de monitorização e autorregulação acerca das suas próprias aprendizagens pode ser feita através de uma reflexão oral, em grande ou pequeno grupo, de um desenho ou esquema ou da utilização de fichas de registo da reflexão.

Em seguida, analisamos alguns dos princípios orientadores do Método de Singapura. Esses princípios estão espelhados no livro *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book* [28], um livro de referência sobre o Método de Singapura que conta com Lee Peng Yee e Lee Ngan Hoe como editores. No capítulo 3 deste livro, Douglas Edge [10] apresenta uma síntese de um conjunto de princípios estruturantes deste método. O autor começa por apresentar o modelo de ensino aplicado em larga escala nas escolas de Singapura (veja-se a figura 2), referindo ser uma adaptação de um modelo de Ashlock, Johnson, Jones e Wilson [2].

Este modelo está dividido em três fases, que se interligam com a posição central – a *avaliação*, entendida no sentido de avaliação contínua ou formativa. A primeira fase consiste na *compreensão*, especificamente no trinómio: iniciar--abstrair-esquematizar. Introduz-se à criança um determinado conceito (iniciar), estimula-se que esta desenvolva uma compreensão geral desse conceito (abstrair) e que encontre padrões ou relações aplicando esse conceito (esquematizar). Por sua vez, a *consolidação* visa que a criança recorde rapidamente e com precisão o conceito em causa, nomeadamente através de jogos e rotinas. Por fim, a

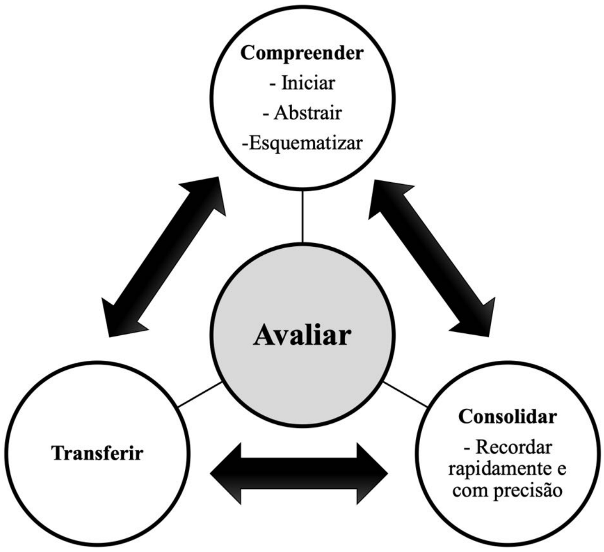


Figura 2: Modelo de Ensino de Singapura (adaptado de [10]).

transferência ocorre quando a criança, que apresenta um bom conhecimento do conceito e que o recorda com facilidade, consegue aplicar esse conceito em novas situações, incluindo a introdução de novos conceitos (repetindo-se todo o esquema novamente). A Resolução de Problemas é, por excelência, um processo matemático a ter em conta nesta etapa. A *avaliação* surge com o papel de monitorizar a evolução da aprendizagem da criança, podendo assumir um carácter mais ou menos formal. A avaliação imprime, igualmente, dinâmica a este modelo, podendo a qualquer momento reverter-se o sentido das setas. Por exemplo, se na etapa da consolidação o professor se aperceber que a criança apresenta dificuldades concetuais, este deve promover o regresso à etapa da compreensão de modo a que a criança possa colmatar essas falhas [10].

Edge [10] apresenta-nos também algumas ideias-chave que estão na base do Método de Singapura. Destas ideias-chave destacam-se três teorias edificadoras do currículo, provenientes de autores ocidentais, que marcam definitivamente os alicerces deste método, ideia que também é defendida por Silvestre [20]. Veja-se a figura 3.

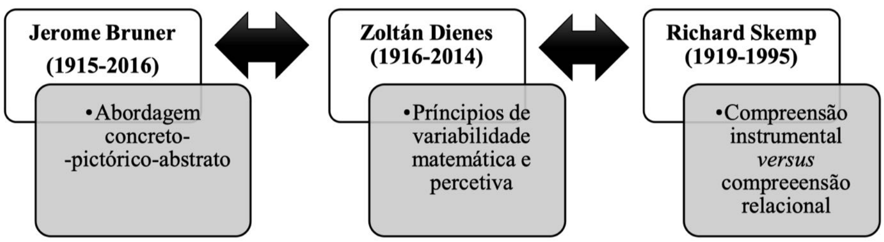


Figura 3: Três teorias edificadoras do currículo de Singapura [10, 20].

O psicólogo inglês Richard Skemp [21] distingue dois tipos de compreensão: a *compreensão instrumental* (ou *compreensão procedimental*), em que a criança conhece uma determinada regra ou algoritmo que executa de memória, sem ter uma perceção do motivo pelo qual está a executar essa regra ou algoritmo, e a *compreensão relacional* (ou *compreensão concetual*), em que a criança não só conhece a regra ou algoritmo mas também consegue explicar por que razão se pode aplicar essa regra ou algoritmo. Embora a primeira possa produzir a curto prazo resultados positivos, um conhecimento duradouro só poderá ser alcançado com um forte investimento na segunda, por promover o estabelecimento de conexões matemáticas.

Edge [10] apresenta a seguinte metáfora: suponhamos que nos são dadas indicações para irmos de um determinado local para outro; por exemplo, vire à esquerda, avance três quarteirões, vire novamente à esquerda, avance mais dois quarteirões, depois vire à direita, ...; dias depois provavelmente já não nos lembramos de todas as indicações, pelo que teremos que improvisar e encontrar um atalho; a destreza em encontrar um atalho dependerá do tipo de compreensão que temos do percurso em causa. Skemp [21] destaca precisamente esta vantagem de apostarmos numa compreensão relacional: uma compreensão relacional consiste em construir uma estrutura concetual ("*schema*") a partir da qual podemos produzir um número ilimitado de planos para partirmos de um determinado ponto e chegarmos a outro (sendo que alguns serão mais fáceis de construir do que outros). O autor destaca algumas vantagens do investimento numa compreensão relacional: permite uma melhor adaptação a novas tarefas, é mais fácil de lembrar (apesar de requerer um maior investimento inicial no estabelecimento de conexões, o resultado a longo prazo é mais duradouro) e constitui, por si só, um fator de motivação para os alunos (uma criança satisfeita por ter alcançado a compreensão relacional de um determinado conceito irá tendencialmente procurar de forma ativa compreender concetualmente novos temas). Edge [10] alerta ainda que a preocupação por parte do professor em estimular uma compreensão relacional deve estar presente nas diferentes etapas da fase de compreensão do modelo de ensino de Singapura (ver figura 2).

O educador húngaro Zoltán Dienes [9] é conhecido por ser o criador dos blocos lógicos. Contudo, o seu contributo para a educação matemática é muito mais vasto. Edge [10] aponta os princípios de variabilidade percetiva e matemática de Dienes como outro pilar edificador do currículo de Singapura. O *princípio de variabilidade percetiva* pode contribuir para estimular a compreensão relacional dos conceitos, referida acima, e consiste na utilização de diferentes materiais e de diferentes perspetivas para explorar um determinado conceito [10]. Para Dienes [9], "a essência da abstração é retirar propriedades comuns de diferentes tipos de situações" (p. 190). Deve-se variar as situações exploradas e "as propriedades comuns assim obtidas serão, então, as abstrações que devem ser aprendidas" (p. 190). Por exemplo, ao explorar as decomposições dos números, deve-se procurar diferentes abordagens com grupos de crianças, com lápis, com cubos de encaixe, com barras cuisenaire, com personagens de uma história, entre outras possibilidades [10]. Por seu turno, o *princípio de variabilidade matemática* estabelece que, quando se usa uma determinada abordagem ou material, deve-se focar os atributos matemáticos necessários para a compreensão do conceito, variando tudo o resto [10]. Assim "o aspecto constante será, de facto, o conceito matemático geral, livre de qualquer mancha e particularização" ([9], p. 190). Por exemplo, ao explorar o conceito de triângulo é importante apresentar exemplos de triângulos em diferentes posições, variando os comprimentos dos seus lados e as amplitudes dos seus ângulos; os únicos aspetos que devem ser constantes nos diferentes exemplos são aqueles que caracterizam o conceito de triângulo como sendo um polígno de três lados [10].

Dienes [9] destaca ainda alguns aspetos fundamentais para que se promova uma aprendizagem eficaz da Matemática. O professor deve ter consciência de todo o edifício matemático que caracteriza o percurso escolar do aluno ao longo dos anos e dos processos matemáticos envolvidos. Deve também procurar promover uma grande diversidade de experiências matemáticas "a partir das quais os conceitos matemáticos possam ser construídos pelas próprias crianças" (p. 29). Além disso, o professor "deve estar consciente da dinâmica geral do processo de aprendizagem" (p. 29). O autor aponta para a necessidade de o professor assumir um papel de mediador das aprendizagens, em detrimento da clássica postura do professor ocupando uma posição central de poder na sala de aula. Dienes [9] defende que o principal motivo para a aprendizagem da Matemática "deve ser a emoção da descoberta" (p. 21). Para tornar a aprendizagem tão construtiva quanto possível é necessária a utilização de "uma quantidade considerável de material concreto" (p. 43), pois a manipulação desse material "conduzirá as crianças através de experiências apropriadas, levando-as de conceito em conceito e ajudando-as a construir a estrutura conceptual da Matemática em seus cérebros" (p. 43).

Abordamos, em seguida, a terceira teoria edificadora do currículo de Singapura apontada por Edge [10]. A aprendizagem de conceitos basilares em Matemática deverá ser feita através de uma caminhada progressiva do concreto para o abstrato [10]. O currículo de Singapura denomina esta caminhada por *abordagem concreto-pictórico-abstrato* (abordagem CPA), que remonta aos trabalhos do psicólogo norte-americano Jerome Bruner [4, 5]. Este autor defende que a aprendizagem é um processo ativo, pelo que para adquirir uma compreensão concetual dos temas, a criança deve experienciar três estádios: ativo, icónico e simbólico. Os autores do Método de Singapura renomearam estes estádios para concreto, pictórico e abstrato.

A abordagem CPA carateriza-se essencialmente pela progressiva representação do conhecimento: inicia-se pela manipulação de materiais concretos com vista à exploração de um determinado conceito, passa pela representação desse conceito através de imagens e esquemas e culmina na sua representação formal em linguagem matemática. No Programa de Matemática de Singapura [18] pode ler-se "*The learning experiences for the Primary Mathematics syllabus should provide opportunities for students to enhance conceptual understanding through use of the Concrete-Pictorial-Abstract approach and various mathematical tools*" (p. 33).

Note-se que o caminho do concreto ao abstrato deve ser um processo contínuo, pautando-se por um progressivo faseamento [3]. Apresenta-se um exemplo de aplicação da abordagem CPA na aprendizagem do número 3, num nível adequado à Educação Pré-Escolar (figura 4). Ao nível do 1.º Ciclo do Ensino

Básico, ilustra-se um exemplo no contexto da aprendizagem das frações (figura 5). Em ambos os casos o concreto é representado por fotografias de frutos, num claro apelo à sua manipulação.

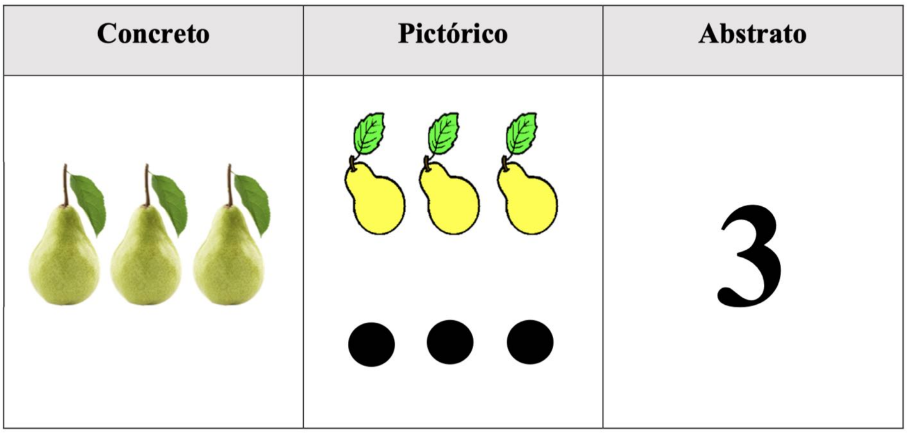


Figura 4: Exploração do número 3, segundo uma abordagem CPA.

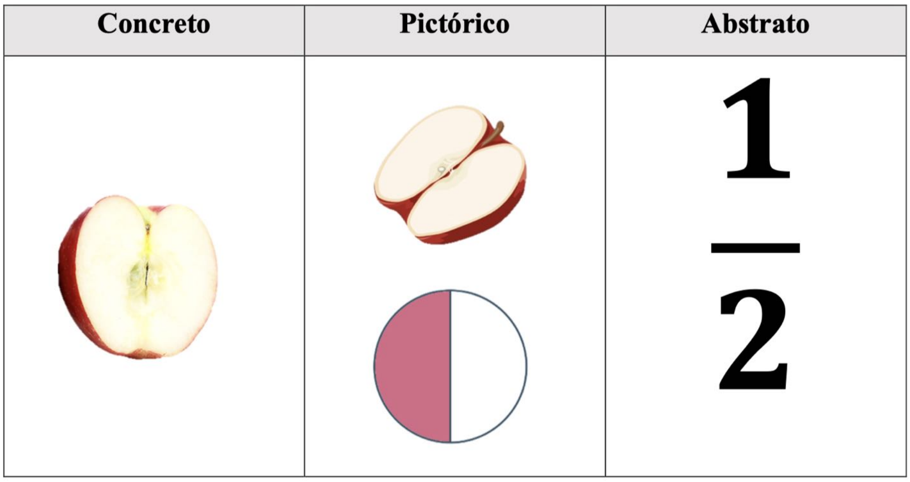


Figura 5: Exploração de um meio, segundo uma abordagem CPA.

É necessário referir também que este método promove uma abordagem em espiral de conceitos, procedimentos e processos, em que se estabelecem de forma progressiva relações matemáticas mais complexas para que todas essas aprendizagens sejam profundas e duradouras [23]. Esta ideia advém de Bruner [5], designada por "currículo em espiral", em que se deve respeitar a forma como a criança pensa ao longo do seu crescimento, tendo especial atenção na forma como traduz as tarefas que experiencia para o modo como aprende e compreende. Assim, desde cedo é possível apresentar as noções e métodos que no futuro serão a base para compreender e auxiliar em conhecimentos superiores. Segundo Bruner [5], é possível ensinar qualquer noção básica desde que esta seja apresentada aos alunos de forma acessível e faseada, recorrendo a experiências ativas de aprendizagem, nomeadamente envolvendo materiais que eles possam manusear.

Em seguida, analisamos em maior detalhe o que Bruner [4] entende por abordagem ativo-icónico-simbólico e a sua articulação com a atual abordagem CPA do Método de Singapura. No Programa de Matemática de Singapura [18], defende-se uma aprendizagem baseada em atividades, salientando-se que:

> *This [activity-based] approach is about learning by doing. It is particularly effective for teaching mathematical concepts and skills at primary and lower secondary levels, but is also effective at higher levels. Students engage in activities to explore and learn mathematical concepts and skills, individually or in groups. They could use manipulatives or other resources to construct meanings and understandings. From concrete manipulatives and experiences, students are guided to uncover abstract mathematical concepts or results.* (p. 23)

Leong Hoong, Ho Kin e Cheng Pien [13] investigaram a articulação entre a abordagem CPA de Singapura e a abordagem de Bruner [4], tendo contactado Kho Tek Hong, consultor da Unidade de Matemática da Divisão de Currículo, Planeamento e Desenvolvimento, do Ministério da Educação de Singapura. Kho Tek Hong supervisionou as reformulações do currículo de Matemática de Singapura desde o final da década de 1970, tendo ainda um papel consultivo nas recentes revisões curriculares. Os autores obtiveram a confirmação por parte de Kho Tek Hong de que a abordagem CPA de Singapura constitui uma inspiração direta da abordagem ativo-icónico-simbólico de Bruner [4].

Na sua obra, Bruner [4] esclarece:

> *Any domain of knowledge (...) can be represented in three ways: by a set of actions appropriate for achieving a certain result (enactive representation); by a set of summary images or graphics that stand for a concept without defining it fully (iconic representation); and by a set of symbolic or logical propositions drawn from a symbolic system that is governed by rules or laws forming and transforming propositions (symbolic representation).* (pp. 44-45)

Bruner defende que o conhecimento pode ser incorporado em qualquer uma destas formas: ação, imagem visual ou linguagem simbólica. Além disso, o objetivo de começar com o estádio "ativo" não é permanecer apenas nesse modo; é, em última análise, levar os alunos à fluência no modo "simbólico" [13]. Nesse processo, os professores devem ajudar os alunos a "se demarcarem da realização perceptiva fomentando o uso da notação simbólica"[4] ([4], p. 63).

O equilíbrio é delicado, devendo-se evitar dois extremos opostos: ser complacente apenas com o conforto dos alunos nos modos ativo ou icónico de uma extremidade; ou prosseguir demasiado rápido pelos estádios anteriores para chegar ao modo simbólico da outra extremidade [13]. Contudo, Bruner [4] alerta para o modo "simbólico" como meta clara a atingir, não devendo a

[4] "*Wean themselves from the perceptual embodiment to the symbolic notation.*"

criança ficar limitada apenas aos dois primeiros modos, independentemente das dificuldades que possa apresentar. O autor acrescenta ainda que "quando o aluno tem um sistema simbólico bem desenvolvido, pode ser possível ignorar os dois primeiros estádios. Contudo, pode dar-se o risco de o aluno não possuir as imagens mentais necessárias para recorrer quando os seus cálculos simbólicos falharem na resolução de um dado problema"[5] (p. 49).

Desta forma, Leong Hoong, Ho Kin e Cheng Pien [13] concluem que existe claramente uma correspondência um-a-um entre a abordagem CPA de Singapura e a abordagem ativo-icónico-simbólico de Bruner. A mudança nas designações de cada um dos modos parece mais uma tentativa de simplificação da linguagem do que de revisão consciente em termos teóricos. Saliente-se que o programa de Matemática de Singapura [18] deixa clara que a interpretação do "concreto" não se encontra restrita a "objetos concretos", mas também a "experiências concretas". Esta é uma visão próxima da de Bruner (1966), centrando-se num conhecimento matemático incorporado na ação. A referência ao modo "pictórico" de Singapura como associado a "representações" também se alinha com o modo "icónico" de Bruner [4].

A abordagem ativo-icónico-simbólico de Bruner [4] e a sua versão adaptada em Singapura (abordagem CPA) constituem uma ferramenta razoável para aplicação no ensino, por reconhecerem as diferenças entre os alunos e por estabelecerem uma sequência de estádios/níveis/fases que constitui uma boa orientação para o professor estruturar a exploração de conceitos matemáticos [13]. Uma vez que as suas suposições teóricas são sólidas e que podem ser facilmente interpretadas para exploração em contexto de sala de aula, entendemos que a abordagem CPA continua a ser uma heurística de referência para os professores. Neste contexto, são claras as potencialidades da abordagem CPA para a construção e gestão de experiências de aprendizagem contextuais e integradas, assentes na construção do conhecimento pela observação, participação e interação das crianças com os seus saberes.

Em 2018 foi criado o Grupo de Trabalho de Matemática (GTM) pelo Ministério da Educação (Despacho n.º 12 530/2018, de 28 de dezembro), ao qual foi atribuída a missão de elaborar um conjunto de recomendações sobre o ensino, a aprendizagem e a avaliação na disciplina de Matemática. No dia 30 de junho de 2019, foi tornada pública a versão preliminar de um relatório elaborado pelo GTM com 24 recomendações sobre o ensino, a aprendizagem e a avaliação da disciplina [12]. Das recomendações apresentadas destacamos três:

> *Recomendação 5: Um currículo de Matemática com conteúdos relevantes e baseado na compreensão matemática.* Um currículo de Matemática deve valorizar a compreensão matemática, base fundamental para a aprendizagem por todos os alunos. (...)
> *Recomendação 6: Um currículo de Matemática com orientações metodológicas tendo como foco a experiência matemática.* (...) É

[5] "*For when the learner has a well-developed symbolic system, it may be possible to by-pass the first two stages. But one does so with the risk that the learner may not possess the imagery to fall back on when his symbolic transformations fail to achieve a goal in problem solving.*"

> essencial a diversificação de experiências matemáticas, baseadas em tarefas de natureza diversa, bem como uma dinâmica de aula que implique o aluno, sendo indispensável a realização frequente de práticas de ensino exploratório da Matemática, que proporcionem uma aprendizagem dialógica a partir da discussão de produções matemáticas dos alunos, onde se explorem e conectem representações matemáticas múltiplas. (...)
> *Recomendação 7: Um currículo de Matemática com recursos diversos e eficientes.* (...) Devem também considerar-se materiais manipuláveis que favoreçam a compreensão de conhecimentos matemáticos e a conexão entre diferentes representações matemáticas. (pp. 262-263)

Estas recomendações apresentam características comuns com os princípios orientadores de Singapura. Não é certamente por acaso que o relatório preliminar do GTM dedica mais de 10 páginas ao Programa de Matemática em vigor em Singapura [12].

2 Experiências de aprendizagem fundamentadas nos princípios orientadores do Método de Singapura no 1.º Ciclo do Ensino Básico

Neste tópico, expomos as práticas desenvolvidas numa turma do 2.º ano de escolaridade, aprofundando a descrição, análise e reflexão sobre as experiências de aprendizagem promovidas tendo como fundamento os princípios orientadores do Método de Singapura.

O trabalho desenvolvido no Estágio Pedagógico iniciou-se com a abordagem aos operadores multiplicativos e partitivos e ao sentido combinatório da multiplicação. Para explorar os operadores multiplicativos e partitivos recorremos ao "tabuleiro da multiplicação e da divisão", material elaborado com base num tipo de recurso idealizado no âmbito do Projeto Prof DA [11], tendo sido construído usando pacotes de leite de dois tamanhos e palhinhas da mesma cor. Esta abordagem permitiu a participação ativa dos alunos, que começaram a sentir maior interesse do que era o habitual por atividades de natureza matemática. Foram exploradas situações problemáticas diversas, algumas decorrentes de conversas entre crianças da turma, como por exemplo: "A criança A tem duas bonecas LOL e a criança B tem o dobro. Quantas bonecas tem a criança B?". Os alunos eram convidados a ir ao quadro manipular o recurso didático, devendo primeiramente colocar no quadro o número adequado de pacotes de leite de menores dimensões (que correspondia ao número de grupos/cópias) e, em segundo lugar, colocar em cada pacote de leite a quantidade de palhinhas correspondente ao número de elementos existentes em cada grupo. Para finalizar, os alunos reuniam todas as palhinhas dos pacotes menores, colocando-as no pacote de leite de maiores dimensões (que representava o todo), contabilizando-as e escrevendo no quadro a expressão matemática adequada à situação problemática. Veja-se a figura 6.

Figura 6: Exploração dos operadores multiplicativos com recurso ao "tabuleiro da multiplicação e da divisão" construído com pacotes de leite e palhinhas. De cima para baixo, nas duas primeiras fotos faz-se uma exploração no quadro da sala de aula do *triplo* de 2 ($3 \times 2 = 6$) e nas últimas quatro fotos faz-se uma exploração nas mesas dos alunos do *dobro* de 7 ($2 \times 7 = 14$).

Observámos que a turma manifestou particular empenho na exploração de situações problemáticas que envolviam assuntos do seu interesse, com motivação nas suas experiências do quotidiano. O grupo foi envolvido na construção do recurso, tendo contribuído com pacotes de leite do lanche usados. Nesta exploração, estiveram em evidência as componentes concreta (manipulação dos pacotes e das palhinhas), pictórica (desenho no caderno dos pacotes e das palhinhas) e abstrata (escrita das expressões matemáticas) da abordagem CPA. Consideramos que a componente concreta auxiliou na aquisição dos conceitos abordados e facilitou a escrita adequada da expressão matemática, ao se promover um faseamento no percurso até à abstração.

A introdução do sentido combinatório da multiplicação foi abordada recorrendo a uma tabela de dupla entrada [6], de grandes dimensões, que permitia realizar diversas combinações colando cartões com velcro. Neste ponto, voltámos a integrar questões e temáticas do quotidiano dos alunos para a criação de situações problemáticas. Estas cativavam muito a atenção e motivavam a participação e empenho do grupo. Os alunos eram convidados a ir ao quadro manipular o recurso, fazendo diversas combinações, com cartões com velcro ilustrando peças de vestuário e sandes com diversas opções de recheio. Observe-se a figura 7.

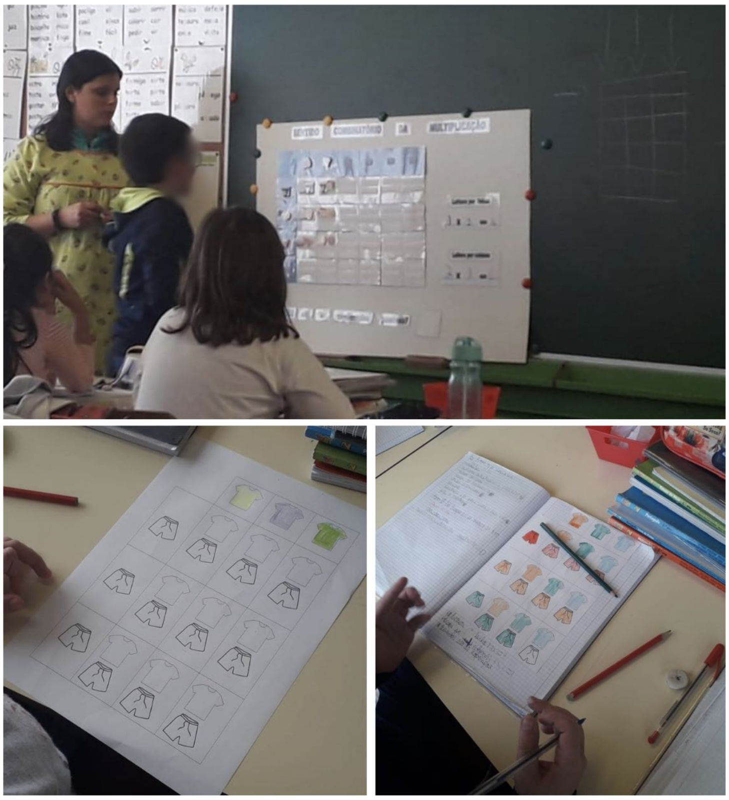


Figura 7: Exploração do sentido combinatório da multiplicação. Pode-se fazer uma leitura por linhas ("tenho 3 calções; para cada calção que escolha, há 3 t-shirts possíveis; logo, tenho $3 \times 3 = 3 + 3 + 3 = 9$ combinações calção-t-shirt") ou uma leitura por colunas ("tenho 3 t-shirts; para cada t-shirt que escolha, há 3 calções possíveis; logo, tenho $3 \times 3 = 3 + 3 + 3 = 9$ combinações t-shirt-calção"). Numa segunda fase, pode-se retirar ou acrescentar calções/t-shirts. Por exemplo, com 2 calções e 3 t-shirts, teríamos a seguinte exploração: leitura por linhas ("tenho 2 calções; para cada calção que escolha, há 3 t-shirts possíveis; logo, tenho $2 \times 3 = 3 + 3 = 6$ combinações calção-t-shirt") ou leitura por colunas ("tenho 3 t-shirts; para cada t-shirt que escolha, há 2 calções possíveis; logo, tenho $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$ combinações t-shirt-calção").

Em cada situação, os alunos realizavam as combinações e faziam a respetiva leitura por linhas e por colunas. No final, eram questionados: "De quantas maneiras possíveis podemos combinar?". Após algum debate, era escrita a resposta no quadro, abaixo das expressões matemáticas. Cada aluno efetuou um registo no seu caderno diário, numa tabela de dupla entrada contendo imagens de peças de vestuário com possibilidade de combinação de blusas e de calções, em diferentes quantidades. Os alunos coloriam as imagens para melhor visualizarem as diversas combinações. Observámos que o recurso se revelou adequado aos objetivos visados e o grupo mostrou-se bastante participativo. Sentimos que deveríamos ter organizado ainda mais cartões com outros exemplos para a realização de combinações diferentes, para que se pudesse tirar mais partido do recurso, dado o entusiasmo do grupo.

Neste trabalho, estiveram em destaque: a componente concreta, através do apelo a uma situação do quotidiano e da manipulação de materiais; a componente pictórica, através da organização esquemática, nos cadernos dos alunos, das imagens na tabela de dupla entrada segundo a disposição de uma malha retangular; e a componente abstrata, que culminou com a escrita das expressões matemáticas relativas à interpretação da informação da tabela, aplicando uma leitura por linhas e uma leitura por colunas. Esta caminhada faseada promoveu a compreensão do sentido combinatório da multiplicação.

Seguiu-se um novo momento de intervenção que teve como temática o Tempo. Em primeiro lugar, foi apresentado um esquema com espaços em branco a serem completados pelos alunos, em resposta às questões colocadas pela estagiária. Depois, foi apresentado e explorado um recurso baseado no relógio analógico, como forma de recapitular a relação com as frações (colocando em evidência que, por exemplo, os quartos de hora correspondem a quinze minutos) e de fazer as leituras do tempo em horas e minutos. Observe-se a figura 8.

Figura 8: Exploração de relógios analógicos: leitura, com registo, das horas e minutos de um relógio ou, reciprocamente, perante a indicação apresentada num cartão, os alunos tinham que representar as respetivas horas e minutos, movendo os ponteiros do relógio analógico.

Explorou-se ainda a evolução dos instrumentos de medição do tempo ao longo da nossa história, através da apresentação de alguns diapositivos. Em seguida, a turma mostrou curiosidade em explorar a pulseira inteligente da estagiária que permitia, para além da visualização das horas, obter a contagem de passos e dos batimentos cardíacos, entre outras possibilidades. Os alunos foram, então, convidados a refletirem sobre a evolução dos relógios ao longo do tempo. No diálogo realizado, exemplificaram-se também alguns tipos específicos de relógios utilizados por certos profissionais, nomeadamente, por enfermeiros, por mergulhadores e por desportistas. Foram explorados com os alunos instrumentos reais de medição do tempo, tais como: os relógios analógico e digital, um temporizador e uma ampulheta.

Nesta exploração, estiveram em destaque as componentes concreta e pictórica da abordagem CPA. A componente concreta desta experiência de aprendizagem permitiu que os alunos tivessem contacto com objetos do seu quotidiano e a componente pictórica, de registo no caderno (nomeadamente de leituras de horas e minutos em relógios analógicos), funcionou como uma ponte "visual" entre uma parte concreta introdutória do conceito e a sua representação abstrata. De destacar, igualmente, a exploração de múltiplas representações das horas e minutos através do recurso a diferentes instrumentos de medição do tempo.

Os alunos foram desafiados a consolidarem as suas aprendizagens sobre o tempo através da realização de uma sequência de tarefas determinada por um percurso com diferentes estações. Os participantes agruparam-se livremente, formando três grupos de cinco elementos e receberam um conjunto de cartões/tabuleiros de registo/jogo plastificados. O percurso era composto por três estações, cada uma com duas tarefas. Na primeira estação, os alunos retiravam de uma cesta um cartão contendo registada uma determinada hora, que deveriam representar em recursos manipuláveis tridimensionais, concretamente num relógio analógico e noutro digital. Numa segunda tarefa, tinham que retirar novamente um cartão contendo registada uma determinada hora e esboçar a sua representação na imagem de um relógio analógico, presente num cartão plastificado, desenhando os ponteiros das horas e dos minutos.

Na segunda estação existia um saco com vários cartões elucidativos de ações do quotidiano como, por exemplo, lavar os dentes, comer uma peça de fruta, treinar futebol ou um instrumento musical, entre outros. O objetivo desta tarefa era que os alunos agrupassem essas ações colocando-as em caixas conforme a respetiva legenda referente à duração de aproximadamente uma hora ou de aproximadamente um minuto. Pretendia-se que os alunos ganhassem alguma perceção sobre a duração de um minuto e de uma hora. A outra tarefa consistia no preenchimento (com caneta-apagador) de uma diversidade de ficheiros que implicavam a correspondência entre as horas representadas em imagens de relógios analógicos e a sua leitura.

Na última estação privilegiava-se a manipulação de uma diversidade de imagens de relógios analógicos, com ponteiros manipuláveis. Aqui, os alunos retiravam (de uma cesta) um cartão contendo registada uma determinada hora devendo, em seguida, efetuar a sua representação num relógio analógico plastificado, através da manipulação dos seus ponteiros. A outra tarefa era sobre a ordenação de acontecimentos utilizando também ficheiros plastificados e canetas, com a possibilidade de se apagar o registo efetuado, de modo a que o recurso pudesse ser reutilizado.

Em cada estação os alunos tinham 10 minutos (5 minutos para cada tarefa), havendo um sinal dado pela estagiária para a troca de tarefas e de estações.

Finalizado o tempo, os alunos avançavam para a estação seguinte, sendo necessária a validação do seu cartão de jogo através de um furo com um furador específico em cada estação (ver imagens do lado direito da figura 8).

Para explorar a Resolução de Problemas foi desenvolvida uma experiência de aprendizagem intitulada "Resolve-me sem problemas!". Havíamos detetado a necessidade de criar dinâmicas para motivar a turma e criar o gosto/entusiasmo pela Resolução de Problemas. Assim, iniciámos a nossa abordagem com um momento de diálogo em grande grupo. O diálogo versou uma série de tópicos – representando fases/passos da Resolução de Problemas – que a estagiária havia escrito no quadro. As fases/passos haviam sido registadas por ordem aleatória no quadro e foi solicitada ajuda ao grupo para colocar essas fases pela ordem correta. Neste diálogo procurámos reduzir a nossa intervenção ao mínimo, tecendo comentários ou colocando questões breves, necessárias à orientação da tarefa. A turma conseguiu chegar à ordenação correta das fases/passos da Resolução de Problemas, ganhando cada aluno um marcador de livros com esse registo. Observe-se a figura 9.

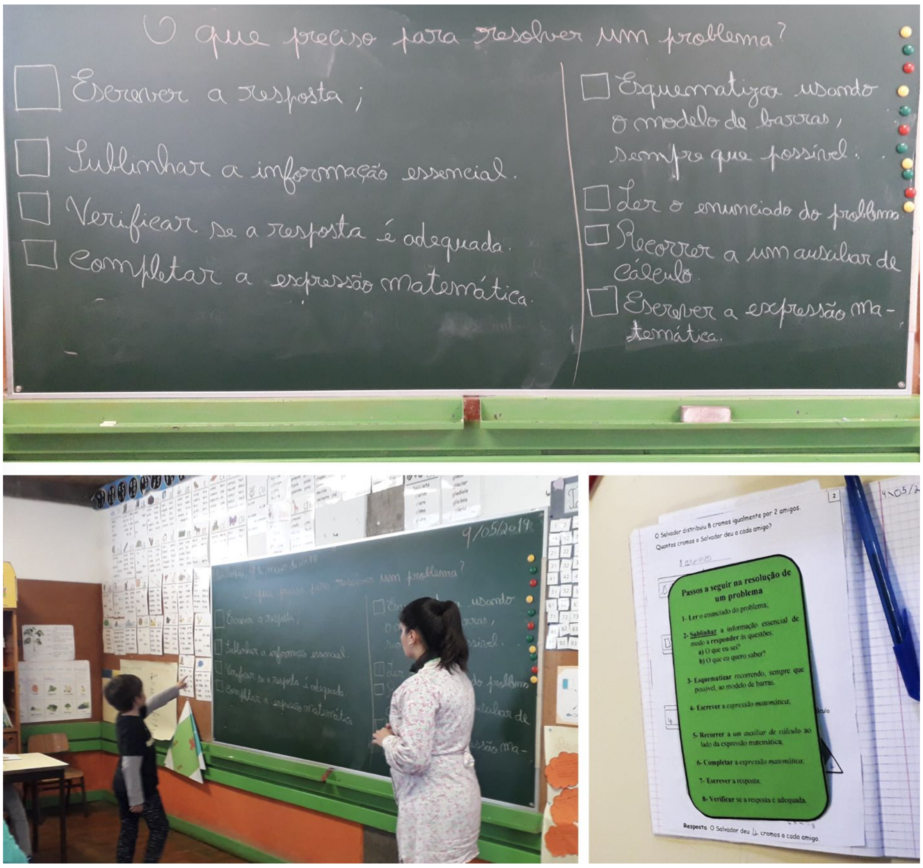


Figura 9: Ordenando as diferentes fases da Resolução de Problemas.

Com o objetivo de reforçar o trabalho com os operadores multiplicativos e partitivos, procedeu-se à exploração do tabuleiro da multiplicação e da divisão, dispositivo utilizado numa das intervenções anteriores. Os alunos formaram equipas de dois elementos e escolheram um nome para a sua equipa, registando-o num cartão de controlo fornecido pela estagiária. A exploração deste material foi inicialmente realizada em coletivo e só, posteriormente, de forma individual.

Posteriormente, passou-se à resolução de problemas envolvendo operadores multiplicativos e partitivos. Os alunos começavam por ler atentamente o enunciado de cada problema. Em seguida, traduziam a informação do enunciado num esquema de barras (componente esquemática ou pictórica), chegando à expressão matemática, envolvendo um operador multiplicativo ou partitivo (dobro, triplo, quádruplo, quíntuplo, metade, terça parte, quarta parte ou quinta parte).

Para obter o resultado dessa expressão, os alunos recorriam à manipulação do tabuleiro da multiplicação e da divisão, tendo que resolver uma multiplicação ou uma divisão com o apoio da concretização oferecida pela exploração do material manipulável. Por fim, a equipa dava a resposta à questão colocada no enunciado. Vejam-se as figuras 10 e 11.

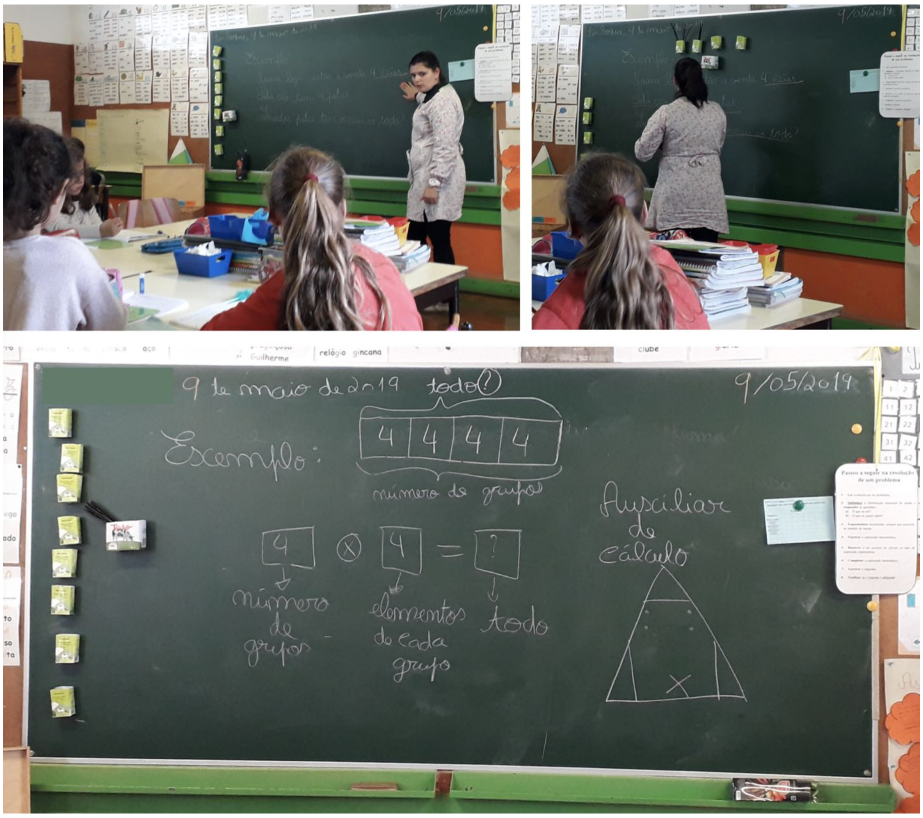


Figura 10: Resolução de problemas envolvendo operadores multiplicativos e partitivos, com recurso ao modelo de barras e ao tabuleiro da multiplicação e da divisão.

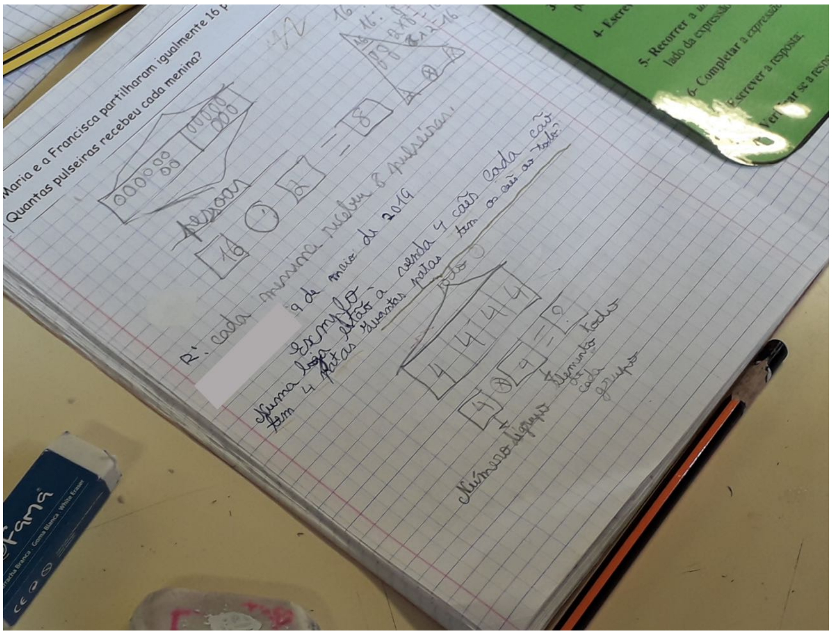


Figura 11: Registo no caderno da resolução de dois problemas.

Neste trabalho, estiveram em destaque todas as componentes da abordagem CPA, com ênfase na manipulação do material didático, na representação pictórica das barras e na escrita das expressões matemáticas adequadas. De realçar que a componente concreta surge de apoio à esquematização com vista a se alcançar um pensamento abstrato associado à expressão matemática. A certa altura, um aluno que se sinta à vontade em chegar à solução expressa pela expressão matemática poderá dispensar o recurso à concretização e ao material manipulável.

No processo de reflexão realizado com a turma, destaca-se o facto de os alunos referirem que tinham aprendido a resolver os problemas "por ordem", isto é, seguindo uma ordem de procedimentos/passos. Referiram que anteriormente não tinham tão presente o que fazer na resolução de um problema. Todas as estratégias adotadas e os materiais utilizados foram eficientes e cativantes, favorecendo a aprendizagem significativa dos alunos. Observe-se a figura 12.

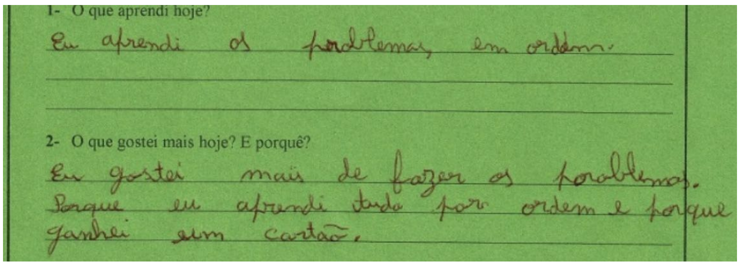

1- O que aprendi hoje?
Eu aprendi os porblemas em ordem.
2- O que gostei mais hoje? E porquê?
Eu gostei mais de fazer os porblemas.
Porque eu aprendi tudo por ordem e porque ganhei um cartão.

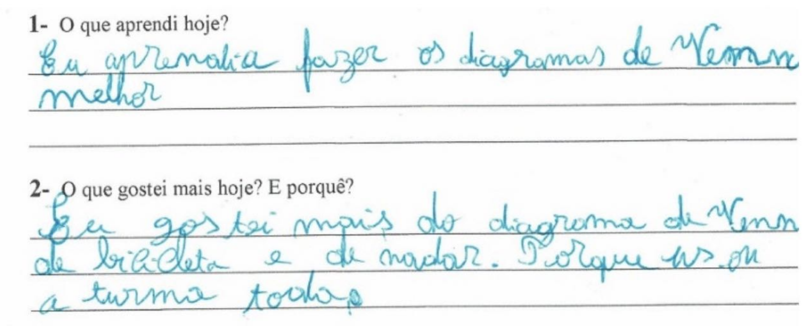
Figura 12: Registo escrito da reflexão de um aluno.

Num novo momento de intervenção, promoveu-se uma exploração dos diagramas de Venn, o que constituiu também uma oportunidade para reforçar o conceito de polígono e a classificação de polígonos. Num primeiro momento foram abordados os vários tipos de polígonos e as suas denominações consoante o número de lados. Em particular, relembrou-se que os quadrados são casos particulares de retângulos e de losangos, o que constituiu uma oportunidade para representar um diagrama de Venn que retratasse essa situação. Em seguida, os alunos realizaram um registo do diagrama de Venn no caderno diário através da colagens de figuras.

Para reforçar o conceito de diagrama de Venn, foi necessário recapitular algumas noções básicas de teoria dos conjuntos, como sejam a representação de um conjunto, a reunião de conjuntos, a interseção de conjuntos e o cardinal de um conjunto. A maioria dos alunos já não as recordava. Com os blocos lógicos foi possível a exploração dos quatro tipos de critérios: a cor, a forma, o tamanho e a espessura. Em coletivo os alunos propuseram dois critérios a explorar em cada um dos diagramas de Venn representados no quadro da sala. Assim, os alunos foram convidados a retirar da caixa os blocos lógicos que correspondiam aos critérios estabelecidos, colocando-os corretamente no diagrama esquematizado. Finalizada a construção do diagrama passou-se à análise e registo de algumas informações, nomeadamente o cardinal de cada conjunto, o cardinal da reunião e o da interseção. Também foi realizado um diagrama de Venn com dados da turma (por exemplo, quem sabia nadar e/ou andar de bicicleta) com registos no quadro e no caderno diário de cada um. Observou-se que a turma achou interessante a construção e exploração destes diagramas, pois os dados envolviam a própria turma. Observe-se a figura 13.

Figura 13: Explorações com diagramas de Venn.

Neste trabalho, estiveram em destaque: a componente concreta da abordagem CPA, por intermédio da manipulação dos blocos lógicas ou da mobilização de informação envolvendo os alunos; a componente pictórica, através dos diagramas esquematizados no quadro; e a componente abstrata, por se estimular a abstração de conceitos associados à teoria de conjuntos, com particular ênfase para a interseção de conjuntos. Este faseamento determinado pela abordagem CPA, com características associadas aos princípios de variabilidade de Dienes [9], tornou a experiência de aprendizagem mais apelativa e significativa para os alunos. Na figura 14 ilustra-se a reflexão escrita por um aluno, num apelo à metacognição.


1- O que aprendi hoje?

Eu aprendia a fazer os diagramas de Venn melhor

2- O que gostei mais hoje? E porquê?

Eu gostei mais do diagrama de Venn de bicicleta e de nadar. Porque eu a turma toda

Figura 14: Registo escrito da reflexão de um aluno.

Deu-se continuidade ao momento de Resolução de Problemas promovido anteriormente, que passou a assumir a designação de "Hora dos Problemas". Utilizaram-se desenhos e o modelo de barras como estratégias de índole esquemática. Notou-se alguma evolução na aprendizagem dos alunos, pois muitos já tinham adquirido o hábito de sublinhar os dados, de esquematizar o seu modelo de barras, de escrever a expressão matemática e de dar uma resposta adequada ao enunciado do problema.

Contudo, notou-se que alguns alunos tinham ainda dificuldade em determinar onde colocar, no esquema de barras, o ponto de interrogação que servia para identificar o que se pretendia descobrir. Havia também alguma confusão na identificação de quando se pretendia a referência ao número de grupos ou ao número de elementos de cada grupo, o que está associado aos dois sentidos da divisão previstos no programa e metas [17], a divisão por partilha equitativa e a divisão por agrupamento. Estas dificuldades condicionavam a escrita de uma expressão matemática adequada ao enunciado do problema. Nessas situações, promoveu-se nova concretização com recurso ao tabuleiro da multiplicação e da divisão.

Na intervenção que se seguiu, deu-se destaque à exploração de medidas (volume, capacidade e massa) e da resolução de problemas de dois passos de adição, de subtração e de comparação. Neste sentido, deu-se continuidade ao trabalho desenvolvido em sessões anteriores na "Hora dos Problemas", introduzindo-se os problemas de dois passos com utilização de quadros de resolução de problemas (quadros plastificados em formato A3, com caneta-apagador, que os alunos podiam utilizar para apresentar a resolução completa de um problema).

Iniciámos o trabalho com a exploração da resolução de problemas de dois passos em grande grupo, no quadro da sala (ver figura 15). Em seguida, os alunos agruparam-se aos pares e exploraram os problemas contidos num recurso que designámos por "Mala dos Problemas" (ver figura 16), usando os quadros de resolução de problemas (ver figura 17). Nesta fase, observou-se uma evolução na maior parte dos alunos, porque já tinham memorizado a sequência de passos a efetuar, que se encontrava disponível no marcador do seu caderno diário. O registo nos quadros de resolução de problemas permitia aos alunos sublinhar os dados apresentados nos enunciados (sem os inutilizar), uma vez que os enunciados eram vinhetas de papel colocadas no interior de uma bolsa de plástico (que servia também para guardar a caneta-apagador) afixada no quadro. Para além do quadro de resolução de problemas em tamanho A3, os alunos possuíam um outro quadro semelhante, de menores dimensões, para a realização de cálculos auxiliares. No final da sessão, os alunos ganharam uma medalha pelo excelente desempenho na "Hora dos Problemas".

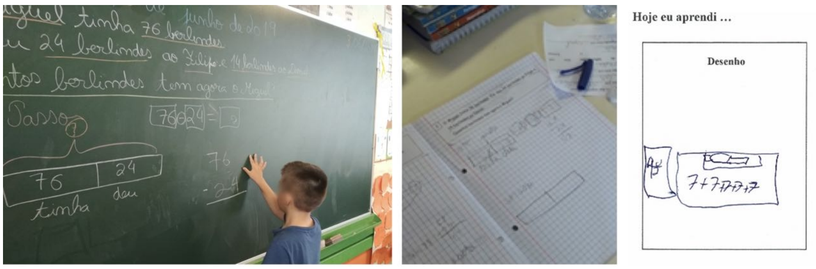


Figura 15: Resolução de problemas no quadro da sala, registo no caderno diário e reflexão apresentada por um aluno através de um desenho.

Figura 16: A "Mala dos Problemas" introduziu algum mistério, uma vez que os problemas a resolver eram selecionados a partir dos cartões disponíveis na mala.

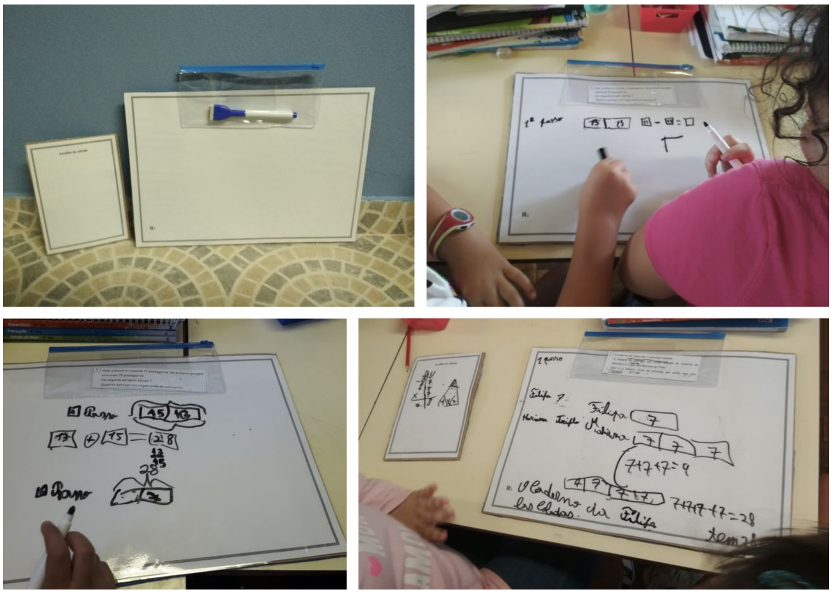


Figura 17: Os quadros de resolução de problemas foram muito apreciados pelos alunos, no trabalho que desenvolveram a pares.

Nos momentos que se seguiram, deu-se lugar à exploração de medidas (volume, capacidade e massa). Para o conceito de volume, estruturámos uma experiência de aprendizagem em que os alunos manipularam cubos para realizarem construções, especificamente representações de poliedros. Assim, cada par de alunos recebeu uma mesma quantidade de cubos para realizar uma construção definida numa ficha de trabalho fornecida. Analisando as construções, a turma constatou que todas elas tinham o mesmo volume, apesar de a posição dos cubos variar, chegando ao conceito de *poliedros equidecomponíveis.* Seguidamente foi realizado o jogo "Descobre o meu volume", com recurso à aplicação *Plickers*[6]. Esse momento foi muito apreciado pelo grupo. Houve a possibilidade de observar quais eram os alunos que conseguiam visualizar mentalmente os cubos das construções ilustradas nas imagens 2D que não estavam visíveis. Aqueles que apresentaram dificuldade em interpretar o registo pictórico 2D eram convidados a exemplificar essa construção 3D com os cubos que tinham sido fornecidos, no fundo, eram convidados a concretizar. Observe-se a figura 18.

A exploração das medidas de capacidade foi realizada através de uma tarefa de correspondência (no quadro da sala) com objetos que podiam ser utilizados em atividades da higiene pessoal e da alimentação. Os alunos compararam situações ilustradas em cartões, indicando o recipiente que continha mais líquido e ordenando (por ordem crescente) a capacidade dos recipientes das imagens. Posteriormente foram realizadas algumas experiências concretas usando copos como unidades de medida não convencionais. Realizaram-se medições das capacidades dos recipientes com registo numa ficha de trabalho. Assim, os

[6]O *Plickers* (`https://get.plickers.com`) é uma aplicação disponível para telemóvel, para computador e para outros dispositivos móveis, que permite ao professor recolher as respostas dos alunos a determinadas questões e conhecer o ponto de situação da turma acerca de determinados conceitos.

Figura 18: Construções com cubos e exploração do conceito de volume.

alunos chegaram à conclusão que quanto maior for a capacidade de um recipiente, maior tem que ser o número de copos pequenos utilizados na sua medição.

Neste trabalho, esteve em destaque a componente concreta da abordagem CPA. Esta favoreceu a compreensão do conceito de capacidade e de unidade de medida (não convencional), através da utilização de copos para medir a capacidade de alguns recipientes.

Numa segunda parte do trabalho sobre este conteúdo, os alunos foram questionados se já tinham auxiliando algum familiar na confeção de um bolo, ao que responderam afirmativamente na sua maioria. Sobre o que fazer na confeção de um bolo, a aluna A disse "Temos que ver na receita as quantidades das coisas que temos que pôr, por exemplo, se leva um litro de leite, quantas chávenas de farinha e açúcar e essas coisas". Foi explorada em grupo a representação simbólica do litro (l ou L), sendo este introduzido como unidade de medida de capacidade convencional. Para explorar o significado de um litro, de meio litro e de um quarto de litro, a turma foi convidada a ir para a zona de lanche onde os alunos realizaram estimativas sobre o que entendiam ser um litro, meio litro ou um quarto de litro de água. Cada par de alunos enchia o seu recipiente com a quantidade de água que estimava ser um litro, meio litro e um quarto de litro. Depois, cada quantidade era despejada num copo medidor para comparar qual das estimativas estava mais próxima da quantidade correta. A turma sentiu nas suas mãos a noção de litro, meio litro e quarto de litro, com uma forte componente concreta. Foi construído um resumo pictórico destas noções em que, por exemplo, duas garrafas de meio litro representavam a mesma capacidade do que uma garrafa de um litro. Com este faseamento, procurou-se que as crianças alcançassem a abstração ao relacionarem mentalmente o litro com o meio litro e com o quarto de litro. Observe-se a figura 19.

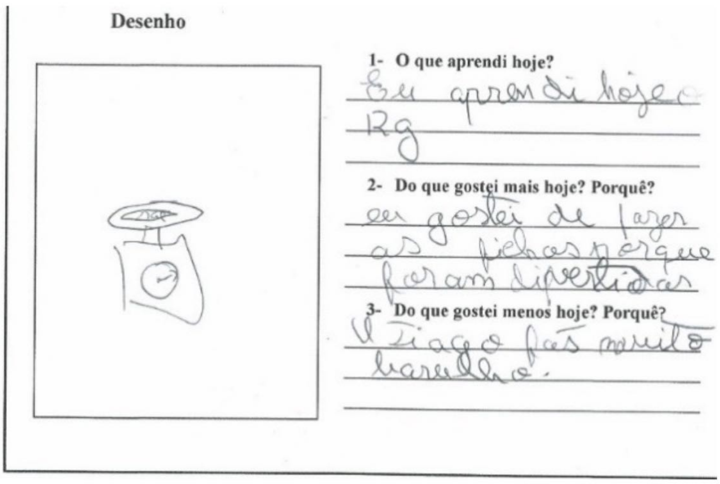
Figura 19: Exploração do conceito de capacidade, com unidades de medida não convencionais (copos pequenos) e convencionais (litro). Relação entre um litro, meio litro e um quarto de litro.

Ainda nesta intervenção, exploraram-se as medidas de massa partindo da utilização de diversos instrumentos utilizados para a sua medição. Os alunos foram capazes de enumerar alguns desses instrumentos, designadamente: a balança digital, a balança de cozinha e a balança de dois pratos. A seguir, foram explorados diversos objetos da sala de aula (por exemplo, um dicionário e um sólido geométrico), tendo-se procedido à medição da sua massa numa balança de dois pratos, usando cubos como unidades de medida não convencionais. Nesta tarefa foram usadas as expressões "mais leve", "mais pesado" e "mede cerca de" nas várias situações concretizadas.

Seguidamente, explorou-se com os alunos uma balança de cozinha, verificando-se a massa de um pacote de sal. Os alunos sentiram nas suas mãos o quilograma correspondente à massa do pacote de sal e enumeraram mais alimentos do nosso quotidiano disponibilizados em embalagens de um quilograma (por exemplo, um pacote de açúcar e um pacote de farinha). A cada aluno foi entregue uma tabela com imagens de vários objetos, na qual tinham que colocar uma cruz na coluna correta, consoante achassem que o objeto em questão apresentava um valor de massa igual, menor ou maior do que um quilograma. O único caso que trouxe alguma dificuldade foi o de um par de sapatilhas que alguns alunos acharam que apresentava mais do que um quilograma de massa. Veja-se a figura 20.

Tornou-se evidente que a componente concreta auxiliou os alunos na aquisição e compreensão do conceito de massa e do ato de a medir com unidades não convencionais (como cubos) ou com unidades convencionais (o quilograma). Na figura 21 ilustra-se a reflexão escrita por um aluno.

Figura 20: Exploração do conceito de massa, com unidades de medida não convencionais (balança de pratos com cubos) e convencionais (balança de cozinha com leitura de um quilograma). Realização de estimativas de objetos com um valor de massa igual, menor ou maior do que um quilograma.


Desenho

1- O que aprendi hoje?

Eu aprendi hoje o 1kg

2- Do que gostei mais hoje? Porquê?

eu gostei de fazer as fichas porque foram divertidas

3- Do que gostei menos hoje? Porquê?

O Tiago fas muito barulho.

Figura 21: Registo escrito da reflexão de um aluno.

Com o objetivo de cumprir um dos descritores do Programa e Metas de Matemática [17], concretamente “Comparar volumes de objetos imergindo-os em líquido contido num recipiente, por comparação dos níveis atingidos pelo líquido.", procedeu-se a uma exploração concreta que estabeleceu uma conexão entre a Matemática e o Estudo do Meio. Entendemos que a concretização que se promoveu foi fundamental para que os alunos adquirissem uma compreensão relacional e não meramente procedimental. Observe-se a figura 22.

Figura 22: Exploração do descritor "Comparar volumes de objetos imergindo-os em líquido contido num recipiente, por comparação dos níveis atingidos pelo líquido.".

Num contexto diferenciado, em Educação Física, foi dinamizado um jogo de correspondência sobre as tabuadas (um conteúdo em que a turma revelava dificuldades). Para realizar o jogo, os alunos organizaram-se livremente em duas equipas. No ponto de partida, havia um arco com copos e no seu topo cartões com produtos (por exemplo, 30). Num ponto mais distante das equipas havia um conjunto de arcos que no seu interior continham cartões com os fatores (por exemplo, 5×6). O objetivo consistia em emparelhar os fatores com os respetivos produtos. No final cada equipa tinha de se certificar que as correspondências estavam corretas. O jogo foi desenvolvido com entusiasmo e interesse pelas crianças. Ao promovermos o estabelecimento de ligações entre produtos e fatores, estimulámos não só a memorização das tabuadas, como também a habilidade de relacionar as diferentes tabuadas, novamente procurando estimular uma compreensão relacional.

Numa nova intervenção, voltou a ser realizada a "Hora dos Problemas", desta vez explorando-se problemas com medidas. Observámos que os alunos se mostraram bastante participativos na resolução das situações problemáticas. Foram eles mesmos a explicar oralmente como se deveria resolver cada situação problemática, registando no quadro o modelo de barras, como modelo esquemático, e a expressão matemática, como representação simbólica.

A estagiária verificou que as alunas A e K já conseguiam resolver os problemas usando somente expressões matemáticas (representação simbólica), não necessitando de recorrer à componente pictórica nem à manipulação de objetos (concreto). Já os alunos G, H e O apresentavam uma maior dificuldade na resolução de problemas, particularmente na compreensão do enunciado e na esquematização do modelo de barras. Por este motivo foi-lhes solicitado que exemplificassem as situações problemáticas com material concreto para melhor perceberem o esquema de barras e a consequente construção da expressão matemática. Observe-se a figura 23.

Figura 23: Dinamização da "Hora dos Problemas", envolvendo problemas com medidas.

Observámos que a dinamização semanal da "Hora dos Problemas" tinha auxiliado os alunos, contribuindo para estes colmatarem as suas dificuldades. As dinâmicas desenvolvidas cativavam a turma.

A última intervenção decorreu perto do final do ano letivo, tendo-se aproveitado a oportunidade para reforçar as aprendizagens desenvolvidas ao longo do ano. Centramo-nos na fase "consolidar" do Modelo de Ensino de Singapura (ver figura 2). Utilizou-se a aplicação *Plickers* numa experiência de aprendizagem intitulada "Testa os teus conhecimentos!". Os principais conteúdos abordados foram as tabuadas, o cálculo mental, os números ímpares/pares, o valor posicional dos algarismos, os operadores multiplicativos/partitivos, o dinheiro e as expressões com lacunas. Observámos que a turma apreciou o facto de se utilizar um recurso didático ligado às novas tecnologias.

Num momento posterior, cada dupla de alunos registou o "bilhete de identidade" de alguns sólidos geométricos, recorrendo sempre que necessário à manipulação de modelos geométricos (concreto) ou à visualização de imagens 2D de sólidos (pictórico). Ainda no âmbito do estímulo à concretização, questionou-se os alunos sobre que objetos do quotidiano apresentavam uma forma semelhante aos sólidos mais conhecidos. No final, cada par fez uma breve apresentação oral aos colegas sobre as suas descobertas. Esta abordagem versou a identificação dos poliedros e não poliedros e das faces, arestas e vértices de um poliedro.

A "Hora dos Problemas" ocorreu como rotina semanal, incidindo nas quatro operações aritméticas e em situações problemáticas de um ou de dois passos. Observámos que os alunos já identificavam/sublinhavam os dados do problema, esquematizavam o modelo de barras (representação pictórica) e escreviam a expressão matemática adequada (representação simbólica). Contudo, notámos que persistia ainda, por parte dos alunos, alguma dificuldade na escolha da operação aritmética mais adequada para a resolução de um determinado problema. Nessas situações, foi benéfico introduzir alguma concretização, apelando à manipulação de materiais ou aludindo a situações concretas do quotidiano das crianças.

Uma outra experiência de aprendizagem dinamizada foi a "Diversão na Matemática!" que incluía três estações com diversas tarefas baseadas nas dificuldades que ainda persistiam na turma. Os alunos organizaram-se em pequenos grupos. Nesse momento explorou-se uma diversidade de conteúdos, nomeadamente as tabuadas, o tempo, o dinheiro, as frações e as expressões com lacunas. Nas fichas de registo de reflexão sobre as experiências de aprendizagem vivenciadas, a turma selecionou o jogo de memória das horas, o sapo saltitão das frações, a exploração das tabuadas e a manipulação de dinheiro como as atividades preferidas. No final, cada aluno ganhou uma medalha como recompensa pelo seu bom desempenho. Vejam-se as figuras 24 e 25 .

Figura 24: Experiências de aprendizagem realizadas na última intervenção.

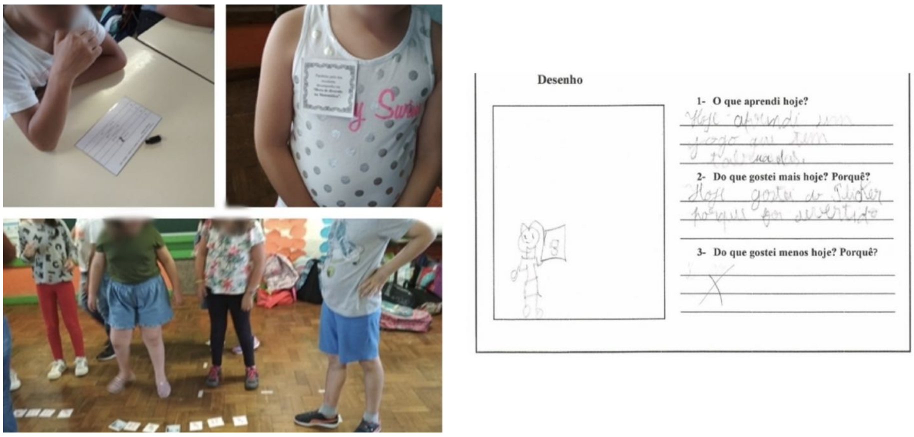


Figura 25: Experiências de aprendizagem realizadas na última intervenção.

3 Considerações finais

Na sua globalidade, as intervenções pedagógicas tiveram em consideração a caminhada progressiva do concreto para o abstrato [4, 10]. Articulando o Modelo de Ensino de Singapura (ver figura 2) com a abordagem CPA, tivemos que recorrer ao pictórico e, essencialmente, ao concreto sempre que percebíamos que um aluno estava a ter dificuldade em se abstrair/em esquematizar e, com isso, em consolidar um determinado conceito ou procedimento. Apercebemo-nos que o trinómio iniciar-abstrair-esquematizar, da fase "compreender", requer uma maior atenção do que à primeira vista se poderia pensar, registando-se uma articulação muito eficaz com a abordagem CPA, bem como com os princípios de variabilidade de Dienes [9]. A nosso ver, o investimento nesta linha de ação conduz, a médio e longo prazo, a uma compreensão relacional/concetual da Matemática [21].

O trabalho desenvolvido no 1.º Ciclo do Ensino Básico também nos possibilitou perceber com maior profundidade as implicações do Modelo Pentagonal do Currículo de Matemática de Singapura (ver figura 1), num entrecruzar entre conceitos, procedimentos, processos, atitudes e metacognição. Na sequência do trabalho realizado na "Hora dos Problemas", e atendendo à forma como os alunos aderiram a esta dinâmica e às aprendizagens que desenvolveram, percebemos, também, a pertinência da posição central ocupada pela Resolução de Problemas neste modelo, pois este processo matemático pode desempenhar o papel de motor do ensino e aprendizagem da Matemática.

Terminamos esta caminhada com a plena convicção de que contribuímos para o desenvolvimento de atitudes positivas dos alunos face a esta área do saber. Em relação à nossa aposta na promoção da metacognição, registamos ao longo do estágio uma evolução positiva, nomeadamente porque o momento de reflexão entrou com naturalidade nas rotinas dos alunos. Contudo, percebemos que a capacidade de refletir sobre aquilo que aprendemos requer uma continuidade sistemática de investimento ao longo do tempo para que, aos poucos, possa ganhar alguma profundidade.

Ainda em relação ao momento semanal de Resolução de Problemas dinamizado na turma, observamos que a maioria dos alunos evoluiu bastante, pelo que foram ganhando progressivamente mais confiança e segurança. Os materiais construídos, nomeadamente, a "Mala dos Problemas" e os quadros de resolução de problemas em A3, contribuíram significativamente para este resultado. As estratégias de trabalho a pares, a criação de nomes para as equipas e a explicação conjunta dos problemas por cada par no quadro contribuíram também para o sucesso deste momento semanal. A esquematização das barras desempenhou igual papel relevante, nomeadamente por facilitar a escrita da expressão matemática. Além disso, a visualização das barras articula-se igualmente bem com uma exemplificação da situação problemática com recurso a materiais concretos, numa verdadeira ponte entre o concreto e o abstrato. A utilização do modelo de barras tem o propósito, de acordo com Lima, Santos, Vaz e Teixeira [15], "de melhorar a capacidade de resolução de problemas dos alunos ao fornecer uma representação pictórica que [ajuda] na visualização das diferentes relações matemáticas e que [leva] os alunos a habituarem-se a estabelecer um plano durante o processo de resolução" (p. 26).

No balanço global do nosso trabalho, destacamos o empenho, entusiasmo e motivação com que os alunos participaram e se envolveram nas experiências de aprendizagem propostas. Para este facto terá contribuído, sem dúvida, o caráter ativo, concreto e lúdico das experiências de aprendizagem, baseadas nos princípios orientadores do Método de Singapura.

Agradecimentos

O trabalho exposto neste artigo baseia-se numa parte do relatório de estágio "Experiências de aprendizagem fundamentadas na Abordagem Concreto-Pictórico-Abstrato no ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico", desenvolvido no contexto do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico da Universidade dos Açores. Agradece-se aos intervenientes no estágio pedagógico que decorreu no 1.º Ciclo do Ensino Básico, nomeadamente aos alunos e à professora da turma do 2.º ano de escolaridade em que se realizou o estágio.

Referências

[1] Alves, A., Viveiros, A., Carvalho, A. *CartoMat: Vamos Jogar e Dar Cartas em Matemática*. Coordenação científica: R. C. Teixeira. Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2019.

[2] Ashlock, R. B., Johnson, M. L., Jones, W. L., Wilson, J. W. *Guiding each child's learning of mathematics*. Columbus, OH: Charles E. Merrill Publishing Company, 1983.

[3] Bisk, R. *Concrete Pictorial Abstract: Singapores Approach to Math Instruction*, Presentation at 2015 NCTM Conference in Boston, 2015.

Obtido em novembro de 2019, de https://sites.google.com/site/singmathproject/.

[4] Bruner, J. S. *Para uma Teoria da Educação.* (Trad. M. Vaz). Lisboa: Relógio D'Água Editores, 1966.

[5] Bruner, J. S. *O Processo da Educação.* Lisboa: Nova Biblioteca 70, 1998.

[6] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C. P., Teixeira, R. C. A multiplicação e a divisão em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade. *Jornal das Primeiras Matemáticas* 11, 5-32, 2018.

[7] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C. P., Teixeira, R. C. A introdução do conceito de fração em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade. *Jornal das Primeiras Matemáticas* 12, 5-28, 2019.

[8] D' Arruda, A. I., Pacheco, C., Marques, E. *A Estrela Alegria... e os seus 10 Amigos.* Coordenação científica: R. C. Teixeira. Ilustração: E. Marques. Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2019.

[9] Dienes, Z. *Aprendizado Moderno de Matemática.* (Trad. J. E. Fortes). Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

[10] Edge, D. Teaching and Learning. In L. P. Yee, L. N. Hoe, *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book*, 2nd Edition (pp. 35-53), Singapore: McGraw-Hill, 2009.

[11] Furtado, A. R., Duarte, J., Medeiros, M. P., Faria, Z., Silva, L., Fonseca, M. H., Sousa, P., Teixeira, R. C. Recursos didáticos promotores do sentido de número no 1.º Ciclo do Ensino Básico. *Jornal das Primeiras Matemáticas* 11, 33-63, 2018.

[12] Grupo de Trabalho de Matemática. *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática.* Lisboa: Ministério da Educação, 2019. Obtido em novembro de 2019, de https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/recomendacoes_para_a_melhoria_das_aprendizagens_dos_alunos_em_matematica.pdf.

[13] Hoong, L. Y., Kin, H. W., Pien, C. L. Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its Origins and Charting its Future, *The Mathematics Educator* 16 (1), 1-18, 2015.

[14] Jensen, B. *Catching up: learning from the best school systems in East Asia*, 2012. Obtido em novembro de 2019, de http://grattan.edu.au/report/catching-up-learning-from-the-best-school-systems-in-east-asia.

[15] Lima, A. M., Santos, C. P., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. A resolução de problemas no 2.º ano de escolaridade: uma sequência de aprendizagem do modelo de barras. *Jornal das Primeiras Matemáticas* 8, 23 - 82, 2017.

[16] Lima, M., Santos, E. *À descoberta das figuras mistério.* Coordenação científica: R. C. Teixeira. Design das figuras: E. Marques, M. E. Teves. Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2017.

[17] Ministério da Educação e Ciência. *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*, Lisboa: MEC – Direção-Geral da Educação, 2013.

[18] Ministry of Education of Singapore. *Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus*, Singapore: Ministry of Education of Singapore, 2012. Obtido em novembro de 2019, de `http://www.dphu.org/uploads/attachements/books/books_130_0.pdf`

[19] Silva, J. C. O Ensino da Matemática em Singapura. *Educação e Matemática* 123, 33-36, 2014.

[20] Silvestre, A. A Matemática nos Primeiros Anos de Escolaridade em Singapura: Reflexão. *Educação e Matemática* 132, 19-22, 2015.

[21] Skemp, R. *Mathematics in the Primary School*. London: Routledge, 1989.

[22] Sousa, D. A. *How the Brain Learns Mathematics* (2nd edition). Thousand Oaks, CA: Corwin, 2014.

[23] Teixeira, R. *Ensino da Matemática: O Método de Singapura*. Atlântico Expresso, p. 17, 2015. Obtido em novembro de 2019, de `https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/3489/1/Atl%c3%a2ntico_Expresso_RT23A.pdf`.

[24] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2003 International Mathematics Report*, 2003. Obtido em novembro de 2019, de `http://timss.bc.edu/PDF/t03_download/T03INTLMATRPT.pdf`.

[25] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2007 International Mathematics Report*, 2007. Obtido em novembro de 2019, de `http://timss.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_InternationalMathematicsReport.pdf`.

[26] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*, 2011. Obtido em novembro de 2019, de `http://timss.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf`.

[27] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*, 2015. Obtido em novembro de 2019, de `http://timss2015.org/timss-2015/mathematics/student-achievement/`.

[28] Yee, L. P., Hoe, L. N. (Eds.) *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book*, 2nd Edition, Singapore: McGraw-Hill, 2009.