

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO



# **Modelação e Simulação de um Sistema Robótico Multicorpo Interconectado**

**Gonçalo Gil Seixas Rodrigues de Carvalho**

Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Orientador: Prof. Dr. Aníbal Castilho Coimbra de Matos

21 de Fevereiro de 2020



# Resumo

A utilização de sistemas robóticos para os mais variados objectivos tem sido cada vez desejada pela sociedade, quer pelo seu potencial económico, quer pela possibilidade de executar tarefas complicadas ou impossíveis para operadores e utilizadores humanos. Seguindo esta tendência, é desejável uma maior flexibilidade no desenvolvimento de soluções deste tipo de sistema, na qual a utilização de sistemas modulares reconfiguráveis pode garantir uma maior versatilidade, robustez e menores custos de produção. Uma das classes de sistemas robóticos que goza destas vantagens é a classe dos sistemas robóticos multicorpo interconectados. Estes sistemas podem-se resumir a um conjunto de robôs interconectados fisicamente. Esta característica pode então ser aproveitada para obter sistemas com certas propriedades que robôs isoladamente poderiam não possuir, bem como reforçar certas características que se queira que o sistema em questão possua. Nesta dissertação pretende-se modelizar e simular um sistema deste tipo. O sistema consiste em vários *AUV* (Autonomous Underwater Vehicles), cada um com um sistema de *VB* (Variable Buoyancy), interconectados entre si com uma articulação prismática, com configurações variáveis e um único jacto de água com uma direcção fixa. Como um sistema de *VB* apenas permite movimento em profundidade e o jacto de água movimento noutra grau de liberdade, as interconexões permitirão o movimento do sistema noutras direcções. Após a sistematização do tipo de modelação, e a sua subsequente simulação, será então possível avaliar a utilização deste tipo de sistemas e realizar os mesmos, estando a sua base matemática estabelecida.



# Abstract

The use of robotic systems for various purposes has been increasingly desired by society, for its economic potential and the ability to perform tasks that are difficult or impossible for operators and human users. Following this trend, greater flexibility is desirable in developing solutions of this type of system, where the use of reconfigurable modular systems can ensure greater versatility, robustness and lower production costs. One of the classes of robotic systems that enjoys these advantages is the class of interconnected multibody robotic systems. These systems can be summed up as a set of physically interconnected robots. This feature can then be harnessed to obtain systems with certain features that robots alone might not have, as well as reinforce certain features that the system in question may possess. This dissertation aims to model and simulate such a system. The system consists of several Autonomous Underwater Vehicles (AUV), each with a Variable Buoyancy (*VB*) system, interconnected with a prismatic joint, with variable configurations and a single jet of water with a fixed direction. As a *VB* system only allows a variation of depth and the water jet another variation, but in another degree of freedom, the prismatic joint will allow the system movement in other directions. After the systematization of the type of modeling, and its subsequent simulation, it will then be possible to evaluate the use of this type of systems and design them, having their mathematical basis established.



# Agradecimentos

Queria agradecer à minha família por tudo, por todos os momentos, por acreditarem em mim e pelo seu apoio incondicional.

Queria agradecer ao meu orientador Professor Doutor Aníbal Castilho Coimbra de Matos pela orientação dada, pela disponibilidade prestada e pela oportunidade de obter novos conhecimentos e valências.

E por fim queria agradecer a todos os colegas, funcionários, professores e demais convivas da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto por estes anos.

Gonçalo Carvalho





*“The aim of science is not to open the door to infinite wisdom, but to set a limit to infinite error.”*

Bertolt Brecht, *Life of Galileo*



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Enquadramento e Motivação . . . . .	1
1.2	Objectivos . . . . .	2
1.3	Estrutura da Dissertação . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>3</b>
2.1	Introdução . . . . .	3
2.2	Taxonomia de Sistemas Robóticos . . . . .	3
2.2.1	Sistema Robótico . . . . .	3
2.2.2	Sistema Robótico Multicorpo . . . . .	4
2.2.3	Sistema Robótico Multicorpo Interconectado . . . . .	6
2.2.4	Outras Classificações Relevantes . . . . .	14
2.2.4.1	Sistema Robótico Distribuído . . . . .	14
2.2.4.2	Sistema Robótico Modular Reconfigurável . . . . .	14
2.3	Resumo . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Fundamentos Teóricos</b>	<b>15</b>
3.1	Introdução . . . . .	15
3.2	Modelação de Sistemas Multicorpo . . . . .	15
3.2.1	Sistemas Multicorpo . . . . .	15
3.2.2	Cinemática . . . . .	17
3.2.2.1	Centro de Massa em Sistemas de Partículas. Definição de Corpo Rígido . . . . .	19
3.2.2.2	Movimento Rotacional . . . . .	20
3.2.2.3	Rotações de Euler generalizadas e Ângulos de Cardan/Roll, Pitch and Yaw . . . . .	23
3.2.2.4	<i>Euler Angle Rates</i> . . . . .	24
3.2.2.5	Quaterniões . . . . .	24
3.2.2.6	Velocidade Angular . . . . .	25
3.2.2.7	Posições, Velocidades e Acelerações de Pontos no Corpo . . . . .	26
3.2.2.8	Cinemática Especifica para Sistemas de Corpos . . . . .	27
3.2.2.9	Coordenadas Generalizadas . . . . .	28
3.2.3	Restrições . . . . .	29
3.2.3.1	Restrições Holonómicas, Não-Holonómicas, Reonómicas e Escleronómicas . . . . .	30
3.2.3.2	Articulações e Pares Cinemáticos. Restrições Comuns . . . . .	31
3.2.4	Dinâmica . . . . .	31
3.2.4.1	Equações de Movimento de Newton-Euler . . . . .	32

3.2.4.2	Equações de Euler-Lagrange . . . . .	34
3.2.4.3	Formulação de Udwadia-Kalaba . . . . .	36
3.2.5	Elementos de Força . . . . .	38
3.3	Modelação de <i>AUVs</i> . . . . .	39
3.3.1	Cinemática do <i>AUV</i> . . . . .	40
3.3.2	Dinâmica do <i>AUV</i> . . . . .	42
3.4	Resumo . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Modelação do Sistema</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1	Modelação geral de um sistema robótico multicorpo interconectado com interconexões via elementos de força e restrições . . . . .	47
4.2	Modelação de um <i>AUV</i> . . . . .	49
4.2.1	Características geométricas e inerciais . . . . .	49
4.2.2	Características hidrodinâmicas . . . . .	50
4.2.3	Características de actuação . . . . .	51
4.3	Modelação de uma Interconexão entre Corpos . . . . .	51
4.3.1	Articulação Prismática . . . . .	52
4.3.1.1	Mola-Amortecedor em Paralelo . . . . .	52
4.3.2	Restrições de Orientação . . . . .	53
4.3.3	Restrições de Translação . . . . .	54
4.4	Sistema Final . . . . .	57
4.5	Resumo . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Simulação do Modelo Desenvolvido</b> . . . . .	<b>59</b>
5.1	Resolução de Sistemas de Equações Ordinárias . . . . .	60
5.2	Considerações acerca da deriva numérica de representações com recurso a quaterniões . . . . .	60
5.3	Simulador implementado . . . . .	60
5.4	Simulação do Sistema . . . . .	61
5.4.1	Translação de todo o sistema em linha recta, com variação da propulsão de um dos <i>AUVs</i> . . . . .	62
5.4.2	Exemplo 2: Rotação em torno de si próprio . . . . .	65
5.4.3	Exemplo 3: Interconexão . . . . .	67
5.4.4	Exemplo 5: Sistema de Flutuabilidade Variável em conjunção com Jactos de Água . . . . .	68
5.5	Resumo . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Conclusão e Trabalho Futuro</b> . . . . .	<b>73</b>
6.1	Satisfação dos Objectivos . . . . .	73
6.2	Trabalho Futuro . . . . .	73
6.2.1	Comparação ou benchmarking de métodos de modelação . . . . .	74
6.2.2	Implementação ou integração de um ambiente de simulação . . . . .	74
6.2.3	Modelação, análise e estimação de interconexões e influencias inter-robô em sistemas multicorpo interconectados . . . . .	74
6.2.4	Modelos Híbridos para Sistemas Reconfiguráveis . . . . .	74
6.2.5	Controlo Baseado em Modelos. Controlo de Sistemas Robóticos Multicorpo Interconectados . . . . .	74

<b>A</b>	<b>Parâmetros de Simulação</b>	<b>77</b>
A.1	Parâmetros do AUV . . . . .	77
A.2	Parâmetros da Interconexão . . . . .	78
A.3	Condições iniciais . . . . .	78
	<b>Referências</b>	<b>79</b>



# Lista de Figuras

2.1	Exemplos de Sistemas Robóticos Multicorpo nos quais se considera um robô constituído por vários corpos: 2.1a é um MAV [9] no qual uma análise multicorpo foi utilizada, como se pode ver em 2.1b. 2.1c é um manipulador genérico, retirado de [10]. . . . .	5
2.2	Exemplos de Sistemas Robóticos Multicorpo nos quais se considera o sistema constituído por vários robôs: 2.2a é uma bóia (mais concretamente um ASV) e em 2.2b podemos ver uma frota constituída por bóias deste tipo [12]. . . . .	5
2.3	O drone multirrotor DRAGON [13]. . . . .	6
2.4	Constituição do drone multirrotor DRAGON: 2.4a mostra os dois módulos integrados num segmento e 2.4b mostra um sistema deste tipo com 4 segmentos. Retirado de [13]. . . . .	6
2.5	Manobralidade do multirrotor DRAGON: 2.5a mostra uma possível transformação aérea [13] e 2.5b mostra a passagem do sistema por uma fenda. Retirado de [14].	7
2.6	Robôs Multissegmento Subaquáticos: 2.6a é uma figura do robô Mamba em testes, retirado de [17], e 2.6b mostra uma simulação de um manipulador subaquático nadante [18]. . . . .	7
2.7	UVMS desenvolvidos em projectos europeus: 2.7a mostra um UVMS desenvolvido no âmbito do projecto TRIDENT [21]. 2.7b é um dos I-AUV utilizados no projecto PANDORA [20]. . . . .	8
2.8	AUV utilizado no projecto MARIS: 2.8a mostra uma representação do AUV em CAD [23] e 2.8b mostra um protótipo experimental do mesmo [22]. . . . .	8
2.9	Tarefas de manipulação incluídas no projecto MARIS : 2.9a representa uma tarefa de manipulação de um AUV com dois manipuladores embutidos no mesmo [24], enquanto 2.9b representa a manipulação de um objecto com dois AUV, cada um com o seu manipulador [25]. 2.9c e 2.9d são as respectivas simulações das tarefas atrás mencionadas[22]. . . . .	9
2.10	Design conceptual do veículo do projecto ROBUST. Retirado de [23]. . . . .	9
2.11	Projecto DexROV: 2.11a consiste no conceito operacional do projecto[30]. 2.11b Veículo utilizado no projecto DexROV. Retirado de [23]. . . . .	10
2.12	Módulo individual do projecto ANGELS e ligação de três módulos[32]. . . . .	10
2.13	Utilização do AUV AMOUR: 2.13a demonstra o conceito do AUV AMOUR, no qual vários módulos cilíndricos se empilham para constituir um único sistema, com o último módulo a contar de cima para baixo constituindo num sensor[33]. Em 2.13b podem-se ver esses mesmos sensores e em 2.13c vê-se o AUV AMOUR em missão, com os sensores no fundo[34]. . . . .	11
2.14	Várias configurações possíveis de um robô subaquático reconfigurável. Retirado de [35]. . . . .	11
2.15	Figuras conceptuais de cenários de utilização do sistema descrito em [38]. . . . .	12

2.16	Projecto Roboat: em 2.16a pode-se ver as embarcações Roboat no canal de Amsterdão. Em 2.16b pode-se observar um diagrama que ilustra uma interconexão possível de três Roboats. Retirado de [41]. . . . .	12
2.17	Sistemas Modulares Reconfiguráveis Espaciais: 2.17a mostra um processo de reconfiguração de oito naves espaciais de um cubo para uma linha [42]. 2.17b mostra possíveis configurações para um sistema de captação de imagens planetárias via satélite [43]. . . . .	12
2.18	Sistema de Transporte de Cargas via Multirrotores: 2.18a mostra o sistema em acção. Em 2.18b pode-se ver uma simulação do sistema tratado em [44]. . . . .	13
2.19	Outros tipos de sistemas robóticos multicorpo interconectados: 2.19a mostra um sistema atrelado de $N$ robôs móveis [45]. Em 2.19b tem-se um robô multissegmento de inspecção de tubos [46]. Em 2.19c vê-se um sistema de locomoção multi-pernas, neste caso com seis pernas [48]. . . . .	13
3.1	Representação abstracta de um sistema multicorpo com os componentes que o constituem. Retirado de [52]. . . . .	16
3.2	Topologias de Sistemas Multicorpo: 3.2a mostra as três topologias faladas [53]. 3.2b consiste num sistema multicorpo em árvore, com base móvel [9]. . . . .	17
3.3	Dois tipos de referenciais diferentes: um inercial na esquerda e outro fixo, no corpo $i$ . Retirado de [50]. . . . .	18
3.4	Representação da posição de um ponto . . . . .	19
3.5	Representação do centro de massa de um sistema de partículas. Retirado de [55].	20
3.6	Referencial inercial e fixo ao corpo, ambos com os versores e eixos que os constituem. . . . .	21
3.7	Rotação no plano, com um ângulo $\theta$ . Pode também ser considerada uma rotação no espaço, em torno de um eixo $z$ , por exemplo. . . . .	22
3.8	Representação de um ponto num corpo rígido, que não o centro de massa, com um vector fixo ao corpo. . . . .	27
3.9	Representação via grafo de sistemas multicorpo: 3.9a mostra a numeração de um sistema multicorpo [51], que é posteriormente representada como em 3.9b[10]. Em 3.9c vê-se o esquema do robô reconfigurável de [35] e a sua representação em grafo. . . . .	28
3.10	Manipulador com dois graus de liberdade. Retirado de [53]. . . . .	29
3.11	Um sistema que integra tanto restrições holonómicas e não-holonómicas, um UMR ( <i>Underactuated mobile robot</i> ) com uma restrição não-holonómica, no sentido em que a roda do robô tem que rolar sem deslizar e restrições holonómicas nas articulações que ligam os seus dois segmentos. Retirado de [62] . . . . .	30
3.12	Articulações básicas utilizadas na modelação de sistemas multicorpo. (a) é uma articulação esférica, (b) uma rotativa, (c) uma prismática/translacional e (d) uma articulação. Pode-se ainda ver em cada articulação os seus graus de liberdade representados. Retirado de [52]. . . . .	31
3.13	Elementos de força, com os pontos de ligação $P_j^n$ e $P_i^n$ exemplificados no actuador	38
3.14	Dois corpos ligados por uma "pseudo-articulação". Retirado de [67]. . . . .	39
3.15	Esquema de um AUV com as coordenadas, forças e direcções convencionadas pela SNAME. Note-se ainda o referencial inercial NED. Retirado de [72] . . . . .	41
4.1	Uma nave espacial multicorpo constituída por dois corpos rígidos (satélites) interconectados por um paralelo mola-amortecedor, com liberdade de translação e rotação descrita pelo vector que os liga. Retirado de [83]. . . . .	52



4.2	Dois <i>AUVs</i> com uma restrição de translação no eixo $d_{ij}$ . Note-se que $d_{ij}$ é perpendicular aos versores $n_e$ e $n_d$ do veículo $j$ . . . . .	55
4.3	Sistema de dois <i>AUVs</i> interconectados por uma articulação prismática com um paralelo mola-amortecedor na sua direcção livre. . . . .	57
5.1	Simulador implementado para simular o sistema modelado. . . . .	61
5.2	Magnitude das forças aplicadas pelos jactos. . . . .	62
5.3	Variação temporal da coordenadas $n$ e $e$ para cada veículo. . . . .	62
5.4	Trajectória dos dois <i>AUVs</i> no plano <i>NE</i> . . . . .	63
5.5	Comprimento da mola ao longo do tempo da simulação. . . . .	63
5.6	Erros das velocidades angulares dos <i>AUVs</i> . . . . .	64
5.7	Erros das restrições de translação. . . . .	65
5.8	Movimento de dois robôs interligados, com a trajectória de um robô a azul e outra laranja. . . . .	66
5.9	Trajectórias em <i>North</i> e <i>East</i> . . . . .	66
5.10	Variação da distância absoluta entre <i>AUVs</i> . . . . .	67
5.11	Comportamento do par mola-amortecedor para diferentes parâmetros do amortecedor. . . . .	67
5.12	Trajectória dos <i>AUVs</i> no espaço. . . . .	68
5.13	Trajectória do sistema em profundidade. . . . .	69
5.14	Trajectória do sistema na direcção <i>East</i> . . . . .	70
5.15	Trajectória do sistema na direcção <i>North</i> . . . . .	70
5.16	Comprimento da mola ao longo da trajectória do <i>AUV</i> . . . . .	71



# Abreviaturas e Símbolos

AGV	Autonomous Ground Vehicle
AUV	Autonomous Underwater Vehicle
CFD	Computacional Fluid Dynamics
DAE	Differential Algebraic Equation
I-AUV	Intervention Autonomous Underwater Vehicle
I&D	Investigação e Desenvolvimento
IMR	Inspection Maintenance & Repairing
MAV	Micro Aerial Vehicle
NED	North-East-Down
ODE	Ordinary Differential Equation
ROV	Remote Operated Vehicle
SNAME	Society of Naval Architects and Marine Engineers
VB	Variable Buoyancy



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Enquadramento e Motivação

O crescimento vertiginoso do sector da robótica é uma inevitabilidade nos tempos que correm, tanto no sector industrial, no qual a utilização de manipuladores e AGVs já está bem presente com fortes tendências para um aumento do numero de equipamentos no geral [1], bem como uma maior integração com operadores humanos, no que se tem vindo a designar por robótica colaborativa, integrada no espectro mais generalizado dos sistemas ciber-físicos [2], como noutros sectores como na agricultura, construção, apoio ao cliente, medicina e cirurgia, robótica doméstica e robótica de campo, na qual se podem incluir várias categorias como busca e salvamento, exploração espacial, inspecção, manutenção e reparação, exploração de ambientes de risco e monitorização e vigilância, entre outras aplicações. Apesar desta tendência se verificar, ainda se apresentam alguns entraves a uma maior utilização e massificação de robôs e de sistemas robóticos. O principal entrave consiste em custos iniciais elevados, bem como custos elevados de I&D [3]. Adicionalmente, o facto de se conceberem soluções para usos muito particulares faz com que este entrave se repita, ficando assim o uso de soluções robóticas muito limitado. Uma possível solução para este problema seria a reutilização de soluções previamente concebidas, para casos muito gerais. Assim, conforme a situação ou a aplicação necessária a mesma solução tecnológica poderia ser reutilizada. Uma classe de sistemas robóticos que se insere nesta definição é a dos sistemas robóticos modulares reconfiguráveis, no sentido de serem constituídos por módulos ou nós, cada um deles com funções homogéneas ou heterogéneas, em termos de funcionalidade, ou seja, em termos de capacidades de actuação, sensorização, computação e comunicação, podendo mesmo considerar cada módulo como se de um único robô se tratasse [4]. Convirá também dizer que a abrangência desta classe de sistemas é bastante vasta, motivo pelo qual nesta Dissertação pretende-se generalizar alguns conceitos presentes nestes sistemas, para que, no futuro, os conceitos presentes na mesma possam ser aplicados em sistemas deste tipo e noutros, nos quais esses conceitos eventualmente se apliquem. Apesar das diferentes taxonomias de sistemas robóticos que irão ser posteriormente abordadas, no próximo capítulo, convém esclarecer o propósito do título desta Dissertação. Um Sistema Robótico Multicorpo Interconectado consiste, portanto, num sistema robótico constituído por mais

do que um robô, estando estes interconectados fisicamente entre si. A importância desta generalização prende-se na análise do comportamento dinâmico do sistema robótico, que é uma das questões mais importantes para se determinar a viabilidade da utilização do sistema robótico em si, que passa necessariamente por processo de modelação matemática seguida de posterior simulação. Cada módulo neste caso poderá ser tratado como um corpo e a análise do seu comportamento dinâmico, levando então necessariamente a uma análise de um sistema multicorpo.

## 1.2 Objectivos

O objectivo desta dissertação é modelar um tipo de sistema robótico multicorpo interconectado específico e simulá-lo. Como a classe de sistemas robóticos tratada é muito vasta, nesta Dissertação irá ser abordada uma aplicação específica. Essa aplicação será um sistema de *AUVs* interconectado fisicamente, cada um dotado de um sistema de *VB*, de modo a possuir movimentação em profundidade, e de jactos de água. Primeiramente, define-se o que é um sistema robótico multicorpo interconectado. De seguida analisa-se que tipo de técnicas se podem utilizar para modelar sistemas multicorpo. Depois, explora-se que modelos de *AUVs* são utilizados, para os integrar nos sistemas multicorpo posteriormente analisados. Logo após estarem estabelecidas as bases matemáticas tanto da modelação do sistema em questão, bem como dos seus integrantes, modela-se o sistema em particular. Para concluir simula-se o sistema previamente modelado. Em resumo, são os objectivos desta Dissertação:

- Estabelecer a definição de sistema robótico multicorpo interconectado;
- Analisar formulações para sistemas multicorpo;
- Analisar modelos matemáticos para *AUVs*;
- Modelar o sistema robótico multicorpo interconectado;
- Simular o sistema obtido;
- Avaliação das simulações obtidas.

## 1.3 Estrutura da Dissertação

O presente trabalho tem no capítulo 1 a sua introdução. No capítulo 2 é descrita a revisão bibliográfica efectuada, na qual se procurou recolher informação sobre sistemas robóticos de interesse. No capítulo 3 aborda-se fundamentos teóricos utilizados no resto da Dissertação. No capítulo 4, é efectuada a modelação do sistema no seu todo e no capítulo 5 apresenta-se a simulação do sistema desenvolvido. No capítulo 6 avalia-se os resultados obtidos e indica-se possíveis direcções futuras para trabalhar, relativamente aos temas tratados nesta Dissertação.

## Capítulo 2

# Revisão Bibliográfica

Neste capítulo é exposta a revisão bibliográfica incidente sobre os sistemas a tratar, explorando-se numa fase inicial a taxonomia envolvente dos sistemas robóticos multicorpo interconectados e sistemas em concreto.

### 2.1 Introdução

Para se conseguir obter uma representação matemática fiável e precisa de um objecto, sistema ou fenómeno físico, é necessário, inicialmente, obter o máximo de informação possível sobre o mesmo. Neste caso foi conduzida uma pesquisa sobre todo o tipo de sistemas robóticos que pudessem ter características semelhantes ou análogas às do sistema que se pretende modelar. Só após a obtenção dessa informação é que se pode considerar como é que a mesma se pode, ou se deve, traduzir matematicamente. Assim sendo, de seguida dão-se alguns exemplos de sistemas robóticos e das suas designações que possam ser úteis para determinar onde o sistema modelado se insere.

### 2.2 Taxonomia de Sistemas Robóticos

Nesta secção classificam-se vários tipos de sistemas robóticos, segundo as caracterizações dadas aos mesmos na literatura disponível. Isto torna-se de primordial importância para que no futuro se consiga questionar sobre métodos de modelação, que podem ter maior ou menor complexidade conforme a sua classificação.

#### 2.2.1 Sistema Robótico

A definição de sistema robótico é bastante directa, sendo, portanto, um sistema que é robótico. Isto leva-nos por isso a precisar as definições para ambos os termos. Existindo então uma panóplia de definições nas quais nos poderíamos refugiar, em Engenharia e em particular em Engenharia de Sistemas o conceito está bem definido. Segundo [5], um sistema pode ser definido como:

“...an integrated set of elements, subsystems, or assemblies that accomplish a defined objective. These elements include products (hardware, software, firmware), processes, people, information, techniques, facilities, services, and other support elements” [5, INCOSE].

ou alternativamente:

“...combination of interacting elements organized to achieve one or more stated purposes” [5, ISO/IEC/IEEE 15288].

Robótico pode também ter vários significados. Segundo o Dicionário de Inglês de Oxford, um robô ou algo robótico é:

“A machine capable of carrying out a complex series of actions automatically, especially one programmable by a computer.” [6].

Um robô, seguindo uma definição mais geral, pode ser:

“A robot is an autonomous machine capable of sensing its environment, carrying out computations to make decisions, and performing actions in the real world” [7].

No dicionário Merriam-Webster temos definições mais particulares, como:

“a machine that resembles a living creature in being capable of moving independently (as by walking or rolling on wheels) and performing complex actions (such as grasping and moving objects)” [8].

o que nos remete a uma ideia mais animista, ou até mesmo biomimética, da robótica ou ainda:

“a device that automatically performs complicated, often repetitive tasks (as in an industrial assembly line)” [8].

que é um dos conceitos principais na justificação do uso de robôs e outros automatismos, em situações repetitivas, complexas, monótonas e perigosas para humanos.

Auxiliando-nos então das definições anteriores, podemos dizer que um sistema robótico pode ser um conjunto de elementos ou subsistemas, cujo propósito é executar várias tarefas complexas, através do processamento da informação sensorial do ambiente que o rodeia e o seu próprio estado interno. Podemos ainda considerar, segundo a definição de sistema, que um sistema robótico pode ser constituído por um ou mais robôs individuais.

### 2.2.2 Sistema Robótico Multicorpo

Um sistema multicorpo é um sistema constituído por um conjunto de vários corpos rígidos e/ou flexíveis. Estes sistemas normalmente estão de alguma forma interligados e/ou acoplados, por elementos como articulações (*joints* em inglês), molas, amortecedores e actuadores, o que permite a extensão deste formalismo a vários tipos de sistemas, nomeadamente sistemas robóticos.



Contudo, um único robô pode ser analisado como um sistema multicorpo e um sistema robótico pode ser considerado como tendo um ou mais robôs. Pode-se então considerar um sistema robótico multicorpo como um robô constituído por vários corpos, como o MAV das Figuras 2.1a e 2.1b ou como o manipulador da Figura 2.1c,

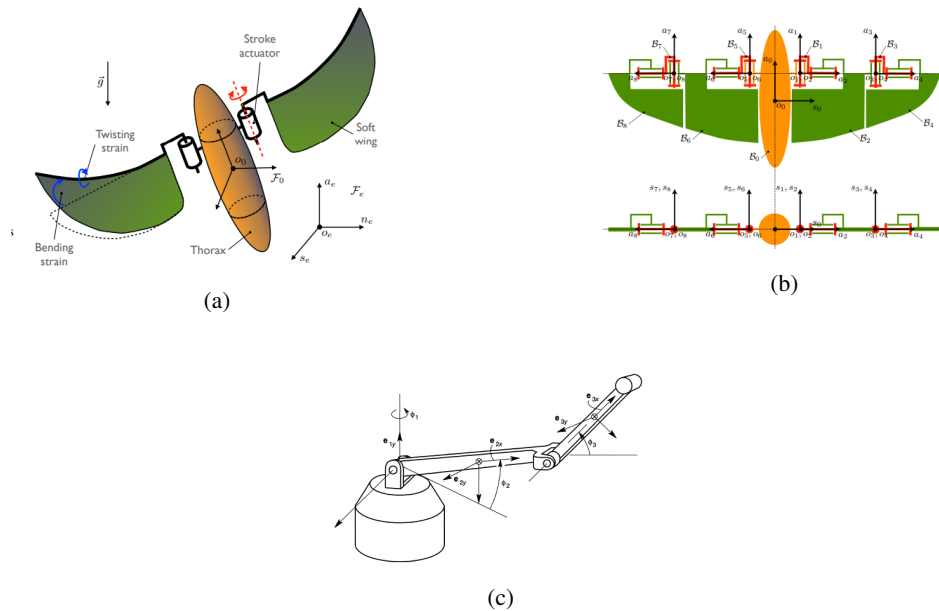


Figura 2.1: Exemplos de Sistemas Robóticos Multicorpo nos quais se considera um robô constituído por vários corpos: 2.1a é um MAV [9] no qual uma análise multicorpo foi utilizada, como se pode ver em 2.1b. 2.1c é um manipulador genérico, retirado de [10].

ou como um sistema robótico com mais que um robô, no qual cada robô é considerado como sendo um corpo, embora seja mais comum designar este tipo de sistemas como sistemas multi-robô [11], como as bóias da Figura 2.2b.



Figura 2.2: Exemplos de Sistemas Robóticos Multicorpo nos quais se considera o sistema constituído por vários robôs: 2.2a é uma bóia (mais concretamente um ASV) e em 2.2b podemos ver uma frota constituída por bóias deste tipo [12].

Assim sendo, no âmbito desta Dissertação, pretende-se utilizar formalismos tipicamente utilizados em sistemas multicorpo para sistemas robóticos, visto o sistema robótico a tratar consistir

em vários robôs com ligações físicas entre si, o que nos leva à definição final introduzida na próxima secção.

### 2.2.3 Sistema Robótico Multicorpo Interconectado

Para se especificar então um sistema robótico multicorpo que possua algum tipo de interconexão ou interligação mecânica entre os robôs que o constituem, a designação de sistema robótico multicorpo interconectado permite a distinção *a priori* entre este tipo de sistema e sistema multicorpo que possuam elementos de força ou articulações a interconectarem os seus corpos constituintes. De notar que esta interconexão é de natureza mecânica, não comunicacional como poderá aparecer em alguns tipos de literatura. Alguns exemplos de sistemas que se podem incluir nesta categoria seguem-se: O drone DRAGON, acrónimo para **D**ual-rotor embedded multilink **R**obot with the **A**bility of multi-de**G**ree-of-freedom aerial transformati**ON**, visível na figura seguinte, é um drone multirrotor com a capacidade de transformação aérea em múltiplos graus de liberdade [13].

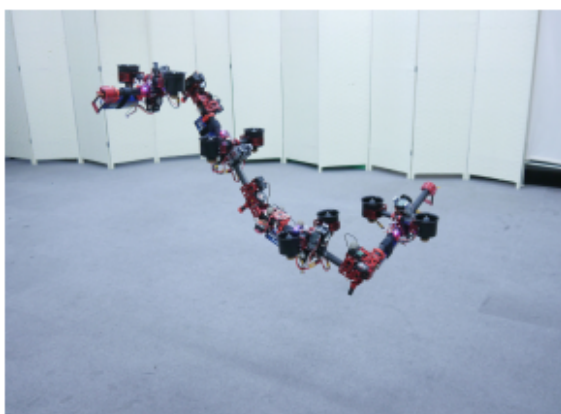


Figura 2.3: O drone multirrotor DRAGON [13].

Este sistema é constituído por vários módulos, com dois tipos de módulos com funções diferentes. Um dos módulos consiste num segmento com actuação incorporada e outro numa articulação com dois graus de liberdade, como se pode ver na seguinte figura.

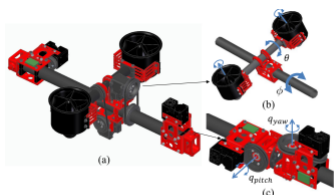
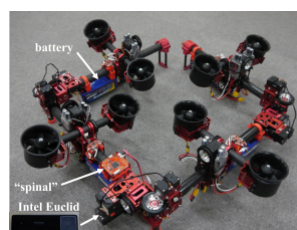


Fig. 2. Mechanical design. (a) Link unit. (b) Dual-rotor gimbal module. (c) Two-DoF joint module.

(a)



(b)

Figura 2.4: Constituição do drone multirrotor DRAGON: 2.4a mostra os dois módulos integrados num segmento e 2.4b mostra um sistema deste tipo com 4 segmentos. Retirado de [13].

Apesar do sistema em si ser considerado como multissegmento, na maior parte dos casos o robô tem a sua pose (configuração dos ângulos das articulações) fixa, pelo que é suposto comportar-se como um único corpo fixo. O propósito deste sistema é permitir uma maior manobrabilidade, obtida através da possibilidade de transformação enquanto o sistema permanece suspenso no ar, como se pode ver na Figura 2.5a, o que permite acções como a passagem por buracos, fendas e outros espaços estreitos [14], ilustrado na Figura 2.5b.

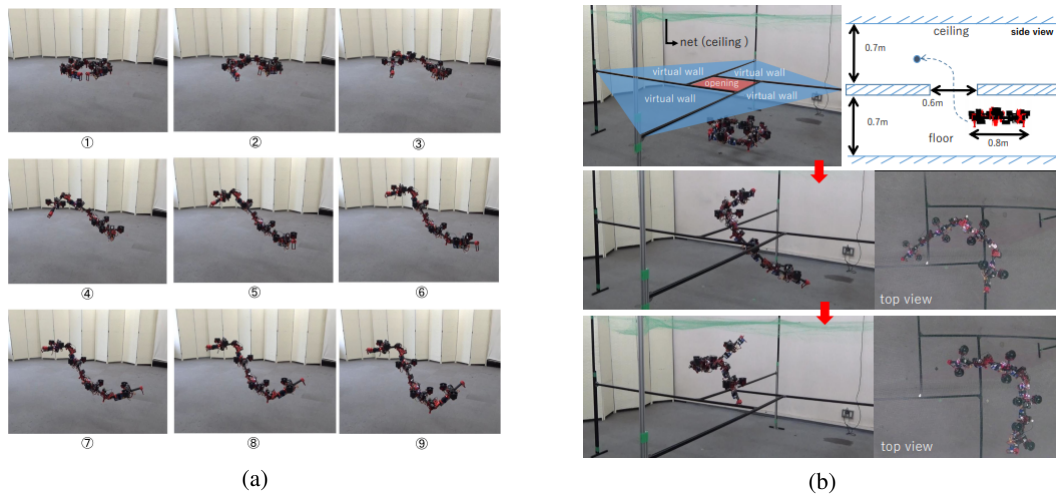


Figura 2.5: Manobrabilidade do multirroto DRAGON: 2.5a mostra uma possível transformação aérea [13] e 2.5b mostra a passagem do sistema por uma fenda. Retirado de [14].

Este sistema permite ainda, teoricamente, manipulação aérea com a composição já existente do robô [15].

Outro tipo de sistemas semelhantes ao multirroto apresentado são robôs subaquáticos biomiméticos que se assemelham a cobras [16][17] e outros robôs que, com uma morfologia semelhante, consistem em manipuladores subaquáticos à semelhança do DRAGON [18], ou seja, manipuladores moveis sem base fixa.

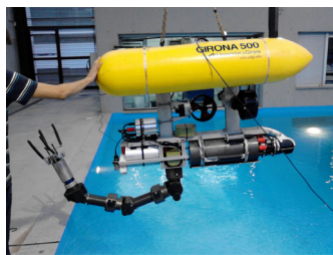


Figura 2.6: Robôs Multissegmento Subaquáticos: 2.6a é uma figura do robô Mamba em testes, retirado de [17], e 2.6b mostra uma simulação de um manipulador subaquático nadante [18].

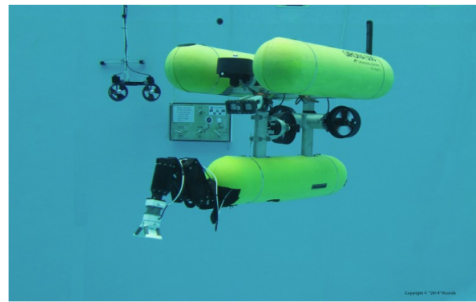
Outro tipo de sistemas que podem ser considerados multicorpo interconectados são os *UVMS*, abreviatura de *Underwater Vehicle Manipulator Systems*. Estes sistemas, tal como o nome indica são veículos subaquáticos que possuem um manipulador incorporado. Existem diversos projectos europeus no qual figuram estes sistemas. O projecto TRIDENT propõe:

“... a new methodology for multipurpose underwater intervention tasks with diverse potential applications like underwater archaeology, oceanography and offshore industries, and goes beyond present-day methods typically based on manned and / or purpose-built systems. Trident is based on new forms of cooperation between an Autonomous Surface Craft and an Intervention Autonomous Underwater Vehicle.” [19].

O projecto PANDORA [20] também figura *I-AUVs*, alguns dos quais *UVMSs* e inclusive com o *AUV* desse mesmo sistema semelhante ao do projecto TRIDENT, neste caso o Girona 500.



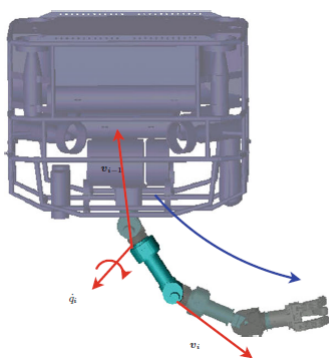
(a)



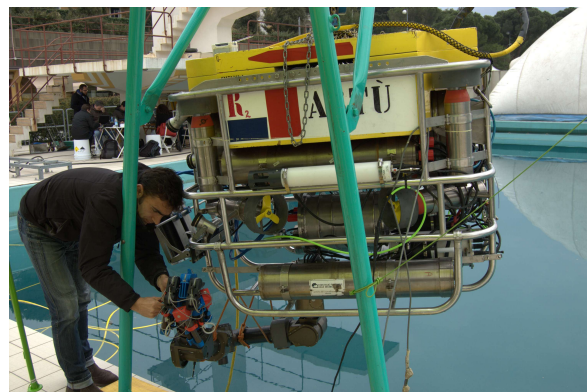
(b)

Figura 2.7: *UVMS* desenvolvidos em projectos europeus: 2.7a mostra um *UVMS* desenvolvido no âmbito do projecto TRIDENT [21]. 2.7b é um dos *I-AUV* utilizados no projecto PANDORA [20].

O projecto MARIS, de **Marine Autonomous Robotics for InterventionS** [22], tem como objectivo desenvolver e promover sistemas robóticos subaquáticos para actividades de manipulação e transporte.



(a)



(b)

Figura 2.8: *AUV* utilizado no projecto MARIS: 2.8a mostra uma representação do *AUV* em CAD [23] e 2.8b mostra um protótipo experimental do mesmo [22].

Entre algumas dessas actividades contam-se manipulação de objectos por um *AUV* com dois manipuladores incorporados e dois *AUVs* com um manipulador cada.

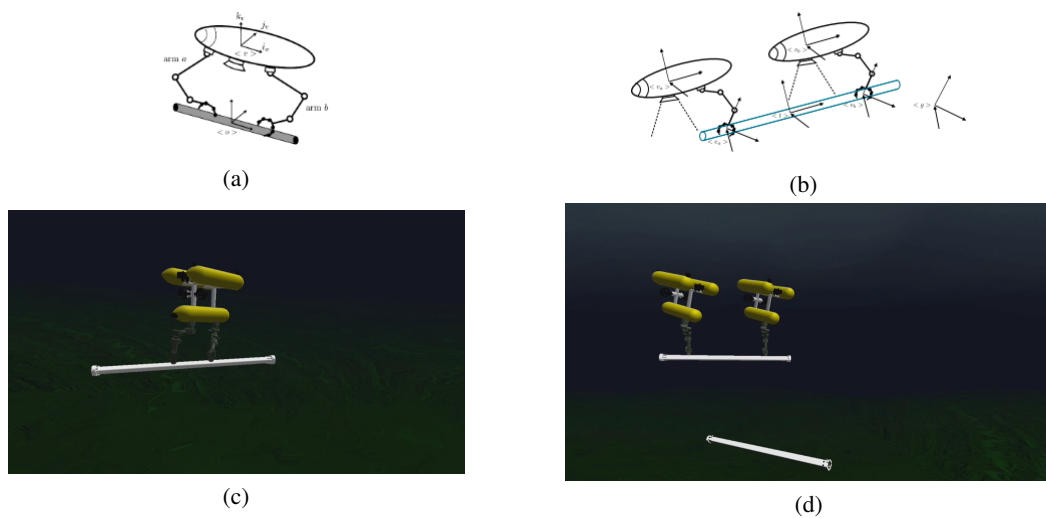


Figura 2.9: Tarefas de manipulação incluídas no projecto MARIS : 2.9a representa uma tarefa de manipulação de um AUV com dois manipuladores embutidos no mesmo [24], enquanto 2.9b representa a manipulação de um objecto com dois AUV, cada um com o seu manipulador [25]. 2.9c e 2.9d são as respectivas simulações das tarefas atrás mencionadas[22].

Outro projecto que figura *UVMS* é o projecto ROBUST [26], no qual se utiliza *AUVs* com ferramentas de espectroscopia para identificação de materiais no leito oceânico. Neste caso um conjunto (denominado de *cluster* em [27]) de três AUV incorporados numa estrutura interna, bem como um manipulador com um sistema de *LIBS* (Laser Induced Breakdown Spectroscopy), fixo nessa mesma estrutura interna.

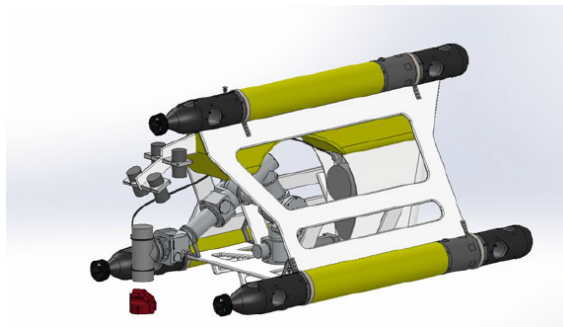


Figura 2.10: Design conceptual do veículo do projecto ROBUST. Retirado de [23].

Apesar de até agora só se ter referido *UVMS* como sendo *AUVs* ou grupos dos mesmos, o projecto DexROV [28][29] integra capacidades de manipulação com ROVs (Remote Operated Vehicles), com o objectivo de ter os operadores em terra, ao invés de em navios de suporte ou estruturas em alto mar/offshore 2.11a. O ROV utilizado neste projecto possui dois manipuladores com seis graus de liberdade 2.11b, controlados por um operador com um exoesqueleto.



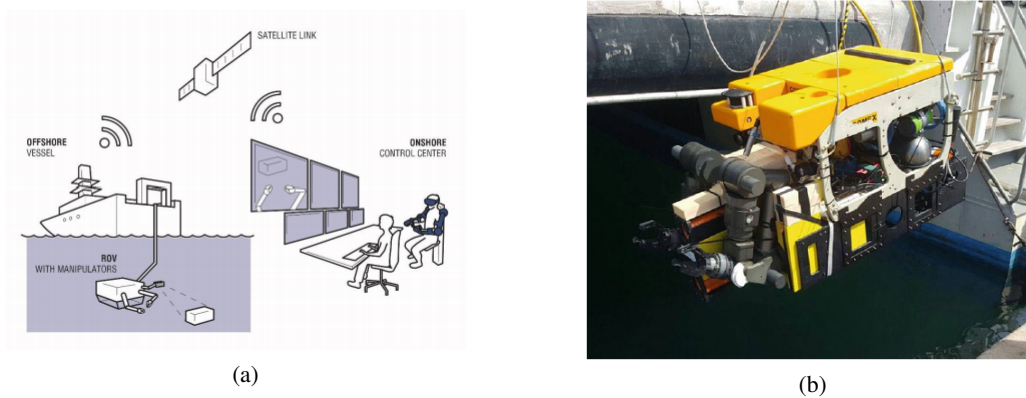


Figura 2.11: Projecto DexROV: 2.11a consiste no conceito operacional do projecto[30]. 2.11b Veículo utilizado no projecto DexROV. Retirado de [23].

Ainda dentro da robótica subaquática, existem alguns sistemas que se podem qualificar como multicorpo interconectados em algumas situações específicas. Alguns destes sistemas são denominados de modulares, reconfiguráveis ou ambos. Em 2.2.4.2 será dada uma definição mais detalhada, enquanto que nesta secção se tratarão estes sistemas em situações específicas em que podem ser considerados sistemas multicorpo interconectado. No campo da robótica submarina há interesse na utilização destas características para diversos motivos. O sistema desenvolvido no âmbito do sistema ANGELS [31] (ANGuilliform Robot with **E**lectric **S**ense) pretende utilizar vários AUVs, considerados módulos, para se locomover de forma ondulatória quando os mesmos estiverem interconectados ou utilizar os módulos individualmente, numa morfologia multi-agente, cada uma com vantagens diferentes [32].



Figura 2.12: Módulo individual do projecto ANGELS e ligação de três módulos[32].

Outro AUV com estas características conceptualmente é o AMOUR [33] (Autonomous Modular Optical Underwater Robot). Mantendo cada módulo seu constituinte com um formato uniforme, este sistema permite a integração de funcionalidades diferentes em cada módulo. O objectivo principal deste sistema seria a capacidade de recolher e largar sensores num corpo de água [34].

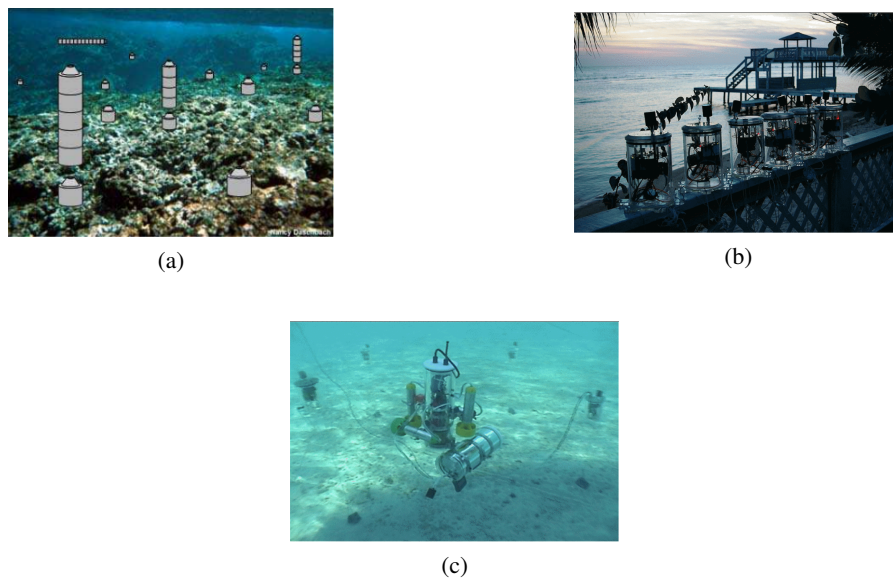


Figura 2.13: Utilização do AUV AMOUR: 2.13a demonstra o conceito do AUV AMOUR, no qual vários módulos cilíndricos se empilham para constituir um único sistema, com o último módulo a contar de cima para baixo constituindo num sensor[33]. Em 2.13b podem-se ver esses mesmos sensores e em 2.13c vê-se o AUV AMOUR em missão, com os sensores no fundo[34].

Outro sistema reconfigurável é o descrito em [35], podendo tomar várias configurações para diferentes tipos de movimento [36][37].

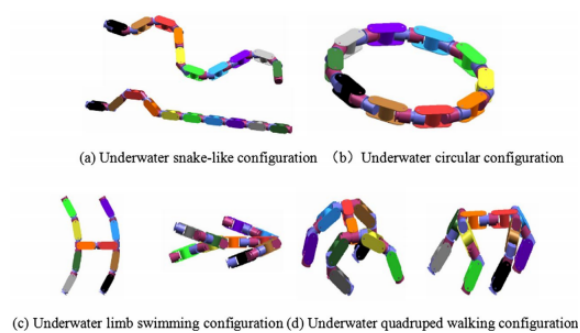


Figura 2.14: Várias configurações possíveis de um robô subaquático reconfigurável. Retirado de [35].

O uso de robôs modulares reconfiguráveis subaquáticos é desejado para operações de *IMR*, na qual a navegação de veículos subaquáticos é limitada devido ao seu tamanho e outras características. Para que tal não seja obstáculo, o projecto REMORA (**RE**configurable **MO**dular **RO**botic system for **A**quatic environment) [38][39] pretende a implementação de sistemas de robôs modulares reconfiguráveis heterógenos, como se pode ver em 2.15.

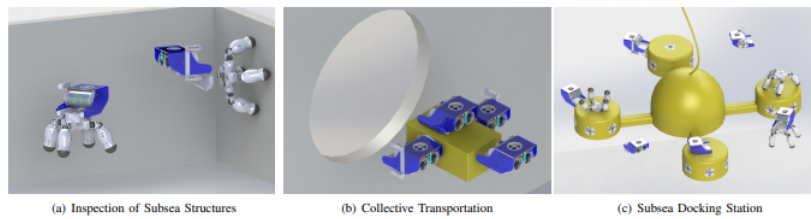


Figura 2.15: Figuras conceptuais de cenários de utilização do sistema descrito em [38].

Passando agora de robótica subaquática para aquática, o projecto Roboat[40] (Robotic Boat) tem como objectivo principal o uso de vários Roboats para a concepção de estruturas flutuantes, como pontes e palcos, assim como de outras embarcações interconectadas, com o intuito de transporte de mercadorias e recolha de lixo, tudo isto nos canais de Amesterdão, Países Baixos[41].

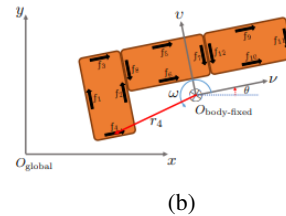
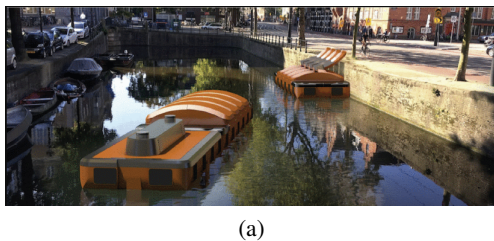


Figura 2.16: Projecto Roboat: em 2.16a pode-se ver as embarcações Roboat no canal de Amesterdão. Em 2.16b pode-se observar um diagrama que ilustra uma interconexão possível de três Roboats. Retirado de [41].

Também na área da robótica espacial há interesse na exploração da modularidade e reconfiguração, tanto de estruturas [42] como de veículos em si mesmo [43].

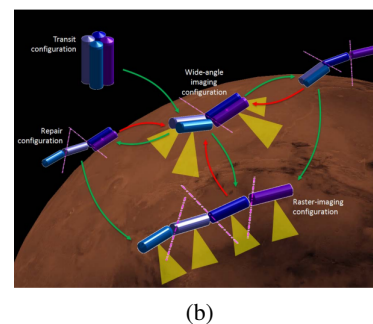
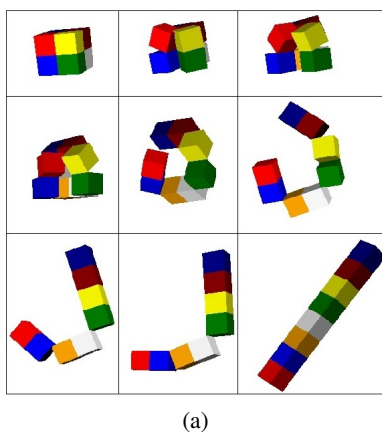


Figura 2.17: Sistemas Modulares Reconfiguráveis Espaciais: 2.17a mostra um processo de reconfiguração de oito naves espaciais de um cubo para uma linha [42]. 2.17b mostra possíveis configurações para um sistema de captação de imagens planetárias via satélite [43].



Um outro sistema que à partida não parece ser um sistema robótico multicorpo interconectado, mas que se pode considerar como tal, é o sistema de transporte via multirrotores descrito em [44]. Se se considerar a carga suspensa e os multirrotores como corpos rígidos, ligados pelos cabos entre os multirrotores e a carga, verificamos que se trata efectivamente de um sistema robótico multicorpo interconectado.

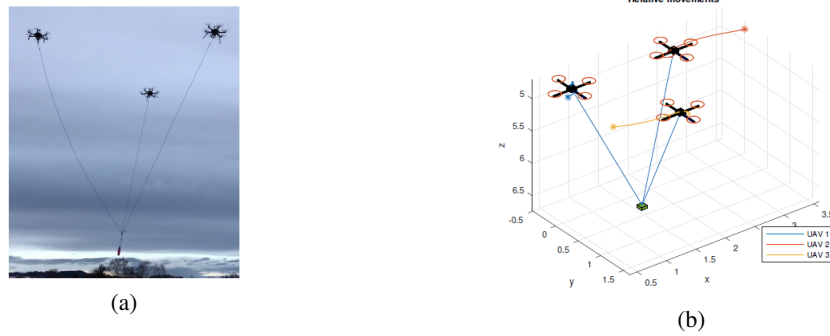


Figura 2.18: Sistema de Transporte de Cargas via Multirrotores: 2.18a mostra o sistema em acção. Em 2.18b pode-se ver uma simulação do sistema tratado em [44].

Por fim, outros sistemas que se podem considerar multicorpo interconectado são robôs móveis atrelados (*trailer*) [45], robôs multissegmento articulados com rodas para inspeção de canos [46] e sistemas robóticos de locomoção multipernas [47].

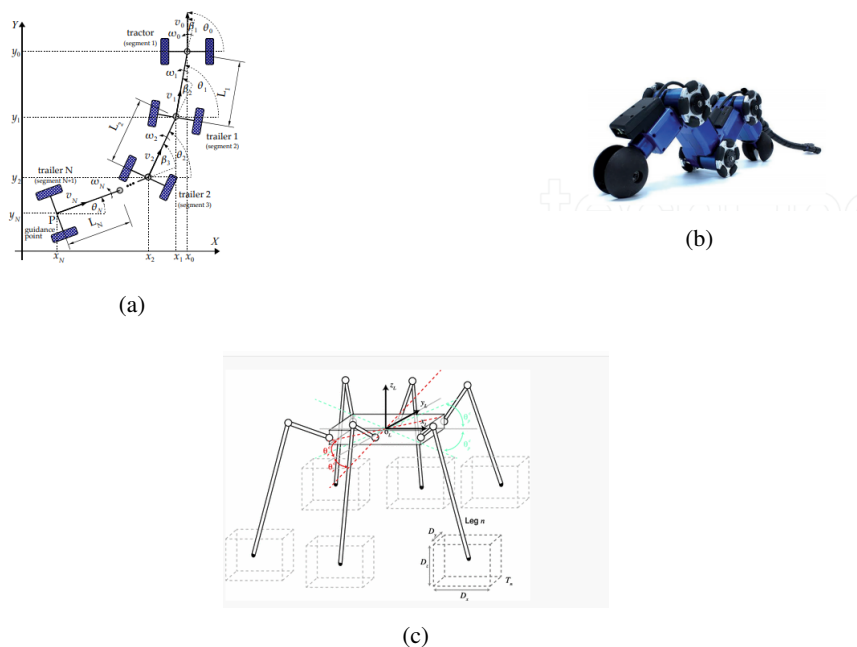


Figura 2.19: Outros tipos de sistemas robóticos multicorpo interconectados: 2.19a mostra um sistema atrelado de  $N$  robôs móveis [45]. Em 2.19b tem-se um robô multissegmento de inspeção de tubos [46]. Em 2.19c vê-se um sistema de locomoção multi-pernas, neste caso com seis pernas [48].

## 2.2.4 Outras Classificações Relevantes

### 2.2.4.1 Sistema Robótico Distribuído

Um sistema robótico pode ser considerado distribuído computacionalmente se for constituído por vários robôs (nós) que comunicam entre si. Logo, um bando de drones e um manipulador industrial, podem ser considerados distribuídos (se, por exemplo, cada articulação for um nó). Segundo [49]:

“A distributed system is a collection of independent computers that appears to its users as a single coherent system ”

. Esta característica é relevante em vários sistemas robóticos multicorpo, como por exemplos os robôs referidos em [12],[25] e [33].

### 2.2.4.2 Sistema Robótico Modular Reconfigurável

Quando se classifica um sistema robótico de modular, esta classificação pode ser feita em termos sistemáticos, ou seja, um único robô pode ser constituído por vários módulos, com funções diferentes como módulo de alimentação, navegação e por aí adiante. Outra classificação relevante para os sistemas tratados nesta Dissertação é um sistema robótico, neste caso com mais de um robô, ser constituído por vários módulos repetidos e neste caso, cada módulo com características de actuação, sensorização e computação, homo ou heterogéneas. Quando combinado com reconfiguração, que consiste em mudanças automáticas ou manuais de interconexões entre módulos, estas características podem conferir vantagens aos sistemas, como versatilidade e robustez adicionais aos sistemas, assim como custos mais baixos dos sistemas em geral [4].

## 2.3 Resumo

Neste capítulo foi efectuada uma revisão bibliográfica, incidente no tipo de sistemas que se pretende estudar. Foram revistas definições sobre sistemas robóticos, bem como sistemas em concreto que poderiam inserir-se nos moldes dos sistemas a modelar. Com esta pesquisa efectuada pode-se então passar para a fundamentação teórica do resto do trabalho a efectuar.

## Capítulo 3

# Fundamentos Teóricos

Neste capítulo são abordados todos os fundamentos teóricos necessários para modelar sistemas multicorpo, em particular sistemas multicorpo com interconexões, cujos seus constituintes são *AUVs*.

### 3.1 Introdução

A análise de sistemas robóticos multicorpo interconectados passa necessariamente pelo uso de todo um formalismo estabelecido em torno dos sistemas multicorpo, tornando assim o trabalho em torno da modelação e simulação de um sistema que se insira na sua definição mais simples em termos sistemáticos. Como um sistema é o conjunto das suas partes, é ainda analisada a modelação dos *AUVs*, constituintes do sistema em questão, como definido em 1.2.

### 3.2 Modelação de Sistemas Multicorpo

#### 3.2.1 Sistemas Multicorpo

A modelação de sistemas multicorpo, é um campo de pesquisa com diversas aplicações práticas, indo estas da robótica, que é o que a esta Dissertação concerne, à dinâmica de máquinas e mecanismos, de veículos no geral, na biomecânica e em sistemas estruturais também. A utilização de técnicas, métodos e formalismos multicorpo, prende-se então numa necessidade de descrever a dinâmica de sistemas mecânicos sujeitos a grandes movimentos translacionais e rotacionais [50]. Isto leva a uma necessidade de se analisarem esses mesmos movimentos, de os simular adequadamente e eventualmente de otimizar estes movimentos dados os objectivos e tarefas do sistema em questão, bem como a obtenção de modelos fiáveis destes sistemas, sendo estes de capital importância para esquemas de controlo baseado em modelos. Estando então estabelecida a importância da modelação de sistemas multicorpo, passemos para a sua definição.

Um sistema multicorpo pode ser considerado como um número finito de corpos, interconectados ou ligados por elementos de força/acoplamentos sem massa e elementos de restrição, neste

caso articulações, que constituam restrições ideais holonómicas, não-holonómicas, esclereonómicas e/ou reonómicas [51].

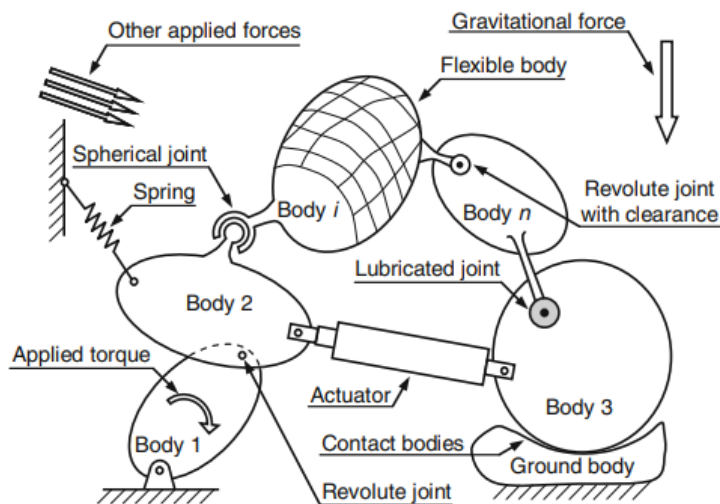


Figura 3.1: Representação abstracta de um sistema multicorpo com os componentes que o constituem. Retirado de [52].

Os corpos constituintes destes sistemas podem tanto ser rígidos, como flexíveis, ou seja, deformáveis. Nesta Dissertação apenas se aplicarão corpos rígidos na análise a efectuar. Sendo então os corpos rígidos, estes representarão as propriedades dos corpos, componentes ou constituintes do sistema em termos de massa e de propriedades inerciais na sua rotação. Os elementos de força nestes sistemas traduzem-se em forças aplicadas nos corpos rígidos, pelo que podem ser utilizados para modelar efeitos físicos específicos do sistema (em termos de elasticidade e amortecimento, por exemplo), bem como constituintes específicos do sistema como molas, amortecedores e actuadores de força. Estes elementos de força introduzem interações entre os corpos constituintes do sistema, mas não restringem o movimento uns dos outros. Os elementos dos sistemas multicorpo que restringem o movimento dos corpos interconectados entre si são denominados de articulações (*joints* em inglês). Estando definidos os elementos constituintes de um sistema multicorpo, importa referir outro aspecto de relevo, que é a topologia do sistema multicorpo, ou seja, como é que os corpos estão interconectados. As três topologias mais comuns são a estrutura em árvore, cadeia ou corrente (*chain* em inglês) e em/com malha cinemática (*kinematic loop* em inglês) [53]. Um sistema multicorpo em corrente é constituído por vários corpos ligados sucessivamente. Um sistema em árvore é constituído por vários corpos ligados sucessivamente tal como um sistema em corrente, com a diferença de que se pode ligar mais que um corpo em sucessivo, criando assim “ramos”. Num sistema em *loop* os “ramos” de um sistema em árvore ou o corpo inicial e final de um sistema em corrente unem-se. Um sistema com *loops* possui ainda restrições relativas ao fecho do *loop*. As seguintes figuras representam os sistemas falados, com a primeira figura com o sistema multicorpo fixo ao chão, enquanto que a segunda figura é referente a um sistema multicorpo móvel.

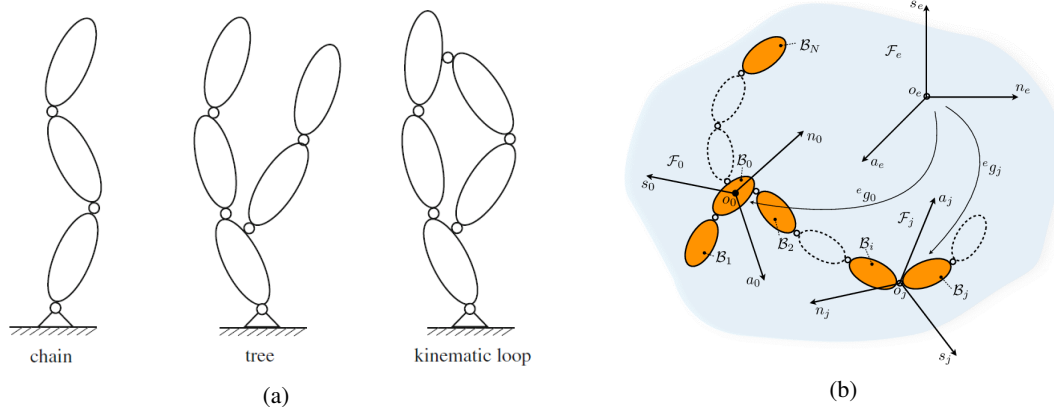


Figura 3.2: Topologias de Sistemas Multicorpo: 3.2a mostra as três topologias faladas [53]. 3.2b consiste num sistema multicorpo em árvore, com base móvel [9].

Feito este resumo conceptual dos sistemas multicorpo passa-se nas seguintes secções a detalhar os constituintes dos sistemas multicorpo e as formas de descrever o seu movimento. A análise do movimento de qualquer sistema mecânico divide-se em duas partes, a cinemática e a dinâmica. Enquanto a primeira trata somente de descrever os movimentos do sistema, a última analisa as forças envolvidas que causam os movimentos em si. Na secção seguinte tratar-se-á então da cinemática dos sistemas a analisar.

### 3.2.2 Cinemática

A cinemática é a descrição do movimento de partículas, corpos e sistemas de corpos. Descreve como é que estes objectos se movem, mas não o seu porquê. Para se poder descrever adequadamente o movimento de um corpo rígido, é necessário descrever quantidades vectoriais como posições, velocidades e acelerações [54]. Estas quantidades têm que ser medidas com respeito a um sistema de coordenadas ou referencial. Um referencial é geralmente constituído por três eixos ortogonais, fixos num ponto de origem. Na análise da dinâmica de sistemas multicorpo é comum utilizar-se (pelo menos) dois tipos de referenciais. Um destes referenciais é fixo posicionalmente no tempo, o chamado referencial global ou inercial [50]. A escolha deste referencial é uma questão importante na área da navegação aeronáutica ou aeroespacial. O outro tipo de referencial é o chamado referencial fixo ao corpo que, tal como o nome indica, movimenta-se com o corpo no qual está fixo. Este referencial é importante para descrever os movimentos rotacionais do corpo rígido e, subsequentemente, para descrever o movimento de todos os pontos do corpo rígido.

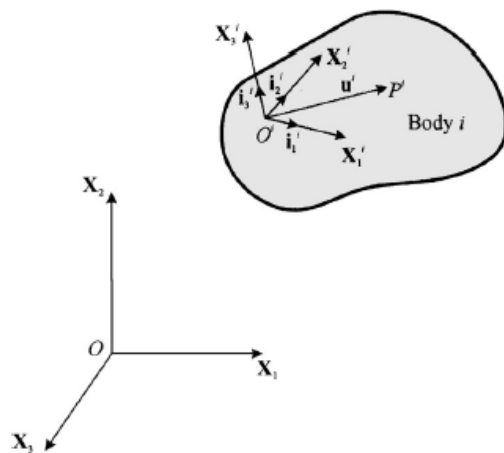


Figura 3.3: Dois tipos de referenciais diferentes: um inercial na esquerda e outro fixo, no corpo  $i$ . Retirado de [50].

De facto, um corpo rígido é completamente descrito pela sua posição e orientação. Começando então pela representação da posição de um corpo rígido, esta consiste no fundo na representação de um ponto, com este normalmente situado no corpo. Esse ponto  $P$ , por exemplo, é representado por vectores  $r \in \mathbb{R}^3$ . Para se poder expressar as componentes de um vector de posição é necessário definir um referencial e expressar o vector no mesmo. Pode-se representar, por exemplo, o vector  $r_{OP}$  num referencial  $n$  via um sobrescrito como  $r_{OP}^n$  ou, para simplificar e tendo em conta que  $O$  é a origem do referencial,  $r_P^n$ . Um referencial pode ser descrito também como  $O_i X_i Y_i Z_i$ , com  $O_i$  a representar a origem do referencial  $i$  e  $X_i Y_i Z_i$  os eixos que o compõe. Por vezes omite-se a origem, ficando só  $X_i Y_i Z_i$ . Os versores  $\{\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z\}$  constituintes do referencial  $n$  constituem uma base ortonormal em  $\mathbb{R}^3$ . A posterior representação de um vector pode ser feita de várias formas, sendo as mais comuns as representações em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. Como na representação de posições de corpos rígidos se costuma utilizar mais frequentemente coordenadas cartesianas, estas serão utilizadas no resto do texto. A representação em coordenadas cartesianas numa base com os versores  $\{\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z\}$  é simplesmente:

$$r_{OP}^n = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z = [x, y, z]^T$$

em que  $x, y, z$  são as coordenadas cartesianas do ponto. De forma semelhante, a velocidade linear de um ponto  $P$  em relação a  $O$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$v_{OP} = \frac{dr_{OP}}{dt} = \dot{r}_{OP}$$

com  $\dot{r}_{OP} \in \mathbb{R}^3$  [54].

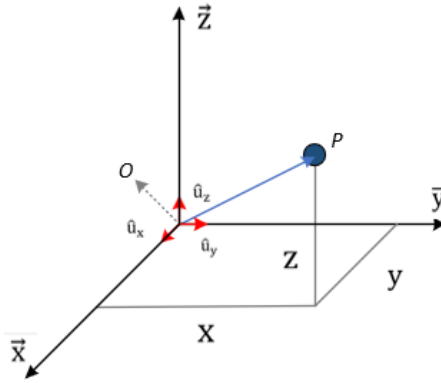


Figura 3.4: Representação da posição de um ponto

### 3.2.2.1 Centro de Massa em Sistemas de Partículas. Definição de Corpo Rígido

Embora seja possível representar a posição de um corpo rígido via um ponto associado ao mesmo, existe um ponto em específico que é utilizado frequentemente e tem certas vantagens, que é o centro de massa. O movimento do centro de massa de massa permite descrever todo o movimento de um sistema de partículas, como se o total das forças externas fosse exercido no centro de massa, com o total da massa do sistema concentrado no mesmo [55]. Considere-se a seguinte expressão em que a segunda lei de Newton é aplicada a uma partícula  $i$ :

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ext,i} = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \quad (3.1)$$

Sendo  $\mathbf{F}_{ext,i}$  o total das forças externas a actuar na partícula e  $\sum_j \mathbf{F}_{ji}$  o somatório das forças internas exercidas na partícula  $i$  ( $\mathbf{F}_{ii} = 0$ ) pelas outras partículas  $j$  que integram o sistema, e se considerarmos a terceira lei de Newton (que implica que  $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ ) e somarmos o total de forças em todas as partículas teremos:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji} + \sum_i \mathbf{F}_{ext,i} \quad (3.2)$$

o que irá equivaler a

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_{ext,i} \quad (3.3)$$

Visto  $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji} = 0$ . O centro de massa de um sistema de partículas é dado então pela seguinte expressão:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (3.4)$$

em que  $m_i$  é a massa da partícula  $i$ ,  $\mathbf{r}_i$  é o vector posição da mesma e  $M$  é o somatório da massa de todas as partículas.

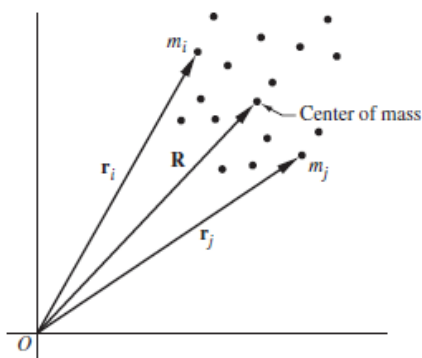


Figura 3.5: Representação do centro de massa de um sistema de partículas. Retirado de [55].

A segunda lei de Newton para o sistema inteiro pode ser descrita então por:

$$M \frac{d\ddot{\mathbf{r}}_{CM}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_{ext,i} \equiv \mathbf{F}_{ext,tot} \quad (3.5)$$

com  $\mathbf{F}_{ext,tot}$  como sendo a força externa total a ser exercida no sistema. Um corpo rígido pode ser considerado como sendo um sistema de partículas onde a distância de uma partícula  $i$  para uma partícula  $j$  permanece constante, ou seja,

$$\|\mathbf{r}_{ij}\| = \mathbf{c}_{ij}, \mathbf{c}_{ij} = cte \quad (3.6)$$

para uma distribuição contínua de massa, pode-se ainda considerar:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV \quad (3.7)$$

em que  $\rho(\mathbf{r})$  é a distribuição de massa relativa a  $\mathbf{r}$ , a origem do referencial fixo ao corpo [39].

### 3.2.2.2 Movimento Rotacional

O referencial fixo ao corpo rígido permite-nos obter a orientação de um corpo rígido, relativamente a um referencial inercial. Considere-se a figura 3.6. Os versores do referencial fixo ao corpo  $[\hat{u}'_x, \hat{u}'_y, \hat{u}'_z]^T$  podem ser obtidos através do referencial inercial através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} \hat{u}'_x &= x'_x \hat{u}_x + x'_y \hat{u}_y + x'_z \hat{u}_z \\ \hat{u}'_y &= y'_x \hat{u}_x + y'_y \hat{u}_y + y'_z \hat{u}_z \\ \hat{u}'_z &= z'_x \hat{u}_x + z'_y \hat{u}_y + z'_z \hat{u}_z \end{aligned} \quad (3.8)$$

com as componentes de cada versor do referencial fixo ao corpo a constituírem os cossenos de direcção dos eixos do mesmo, no referencial inercial. De forma mais compacta, pode-se combinar



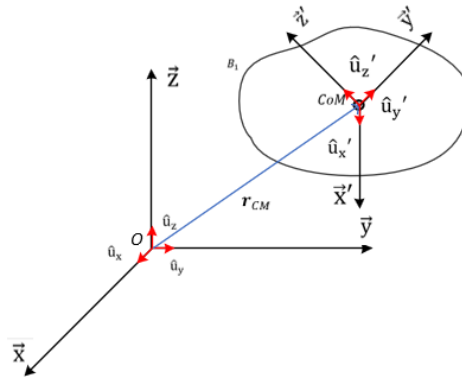


Figura 3.6: Referencial inercial e fixo ao corpo, ambos com os versores e eixos que os constituem.

os três versores que descrevem a orientação do corpo da seguinte forma:

$$R = \begin{bmatrix} \hat{u}'_x & \hat{u}'_y & \hat{u}'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}'_x{}^T \hat{u}_x & \hat{u}'_y{}^T \hat{u}_x & \hat{u}'_z{}^T \hat{u}_x \\ \hat{u}'_x{}^T \hat{u}_y & \hat{u}'_y{}^T \hat{u}_y & \hat{u}'_z{}^T \hat{u}_y \\ \hat{u}'_x{}^T \hat{u}_z & \hat{u}'_y{}^T \hat{u}_z & \hat{u}'_z{}^T \hat{u}_z \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

De uma forma mais geral, seja o vetor  $r_{\text{inercial}} \in \mathbb{R}^n$ , que contém os versores constituintes do referencial inercial. Existe uma matriz  $R$  que transforma estes versores noutros, contidos em  $r_{\text{rodado}}$ , integrando estes assim outro referencial, da seguinte forma [56]:

$$r_{\text{rodado}} = R r_{\text{inercial}} \quad (3.10)$$

A matriz  $R$  pertence ao grupo ortogonal especial  $SO(n)$ . Para matrizes pertencentes a este grupo, tem-se em consideração as seguintes propriedades:

- $R \in SO(n)$
- $R^{-1} \in SO(n)$
- $R^{-1} = R^T$

As colunas de  $R$  são mutuamente ortogonais entre si, o que implica essas mesmas colunas serem versores, o que implica que  $\det R = 1$ . Para  $n = 2$  a rotação dá-se no plano, para  $n = 3$  as rotações dão-se no espaço. Por exemplo, para uma rotação no plano de um ângulo  $\theta$ , exemplificada na seguinte figura, pode ser representada por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Para uma rotação semelhante, mas no espaço, em torno de um eixo  $z$ , por exemplo, pode-se representar da seguinte forma:

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

em que os subscritos  $z, \theta$  representam respectivamente o eixo no qual é efectuada a rotação e  $\theta$  o ângulo. Uma figura de ambas rotações atrás mencionadas é mostrada de seguida.

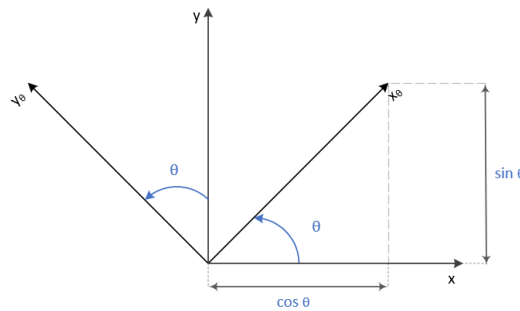


Figura 3.7: Rotação no plano, com um ângulo  $\theta$ . Pode também ser considerada uma rotação no espaço, em torno de um eixo  $z$ , por exemplo.

Esta matriz de rotação pode ser generalizada para um eixo arbitrário e para um ângulo arbitrário também, segundo o teorema de rotação de Euler [55]. A matriz de rotação  $R$  pode também ser resultante de várias rotações, no que se denomina de composição de rotações. Tendo, por exemplo, um ponto  $p$  pode ser representado num referencial  $X_0Y_0Z_0$ , denominado por  $p^0$  ou representado pelo ponto  $p^1$  noutra referencial  $X_1Y_1Z_1$ , a sua representação é dada por:

$$p^0 = R_1^0 p^1 \quad (3.12)$$

que significa que o ponto  $p$  é representado no referencial  $X_0Y_0Z_0$  pelo produto da rotação do referencial  $X_0Y_0Z_0$  para  $X_1Y_1Z_1$  com o ponto  $p$  representado no referencial  $X_1Y_1Z_1$ . Se houver um outro referencial  $X_2Y_2Z_2$ , pode-se descrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} p^1 &= R_2^1 p^2 \\ p^0 &= R_2^0 p^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Podendo então representar a rotação  $R_2^0$  como:

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1 \quad (3.14)$$

O que comumente se denomina de composição de rotações. Convém também ressaltar que com cada rotação, o referencial no qual se efectua a rotação é o referencial pós-rotação. Se se pretender efectuar uma rotação posterior em relação ao primeiro referencial, normalmente definido como

referencial fixo, deve-se pré-multiplicar pela primeira rotação, da seguinte forma:

$$R_2^0 = RR_1^0 \quad (3.15)$$

em que  $R$  é a rotação no referencial fixo [57]. Para representar então a orientação de um corpo rígido, podemos utilizar uma matriz de rotação. Contudo, as matrizes de rotação apenas oferecem uma descrição redundante da orientação do referencial fixo ao corpo, sendo estas caracterizadas por nove elementos não independentes entre si, mas relacionados por seis restrições devido às condições de ortogonalidade das matrizes do grupo  $SO(3)$ . Nove elementos linearmente dependentes e seis restrições implica que três parâmetros independentes são uma representação mínima de uma rotação. Uma representação mínima das matrizes do grupo ortogonal  $SO(n)$  é dada por  $\frac{n(n-1)}{2}$ , verificando-se então que para uma rotação no espaço o número de parâmetros para uma representação mínima é então três e uma rotação no plano pode ser, e geralmente é, dada por um único parâmetro, neste caso um ângulo [56]. Um conjunto de três parâmetros pode ser então descrito por um conjunto de três ângulos, denominados de ângulos de Euler, ângulos esses utilizados para descrever a orientação de um corpo rígido, em relação a um referencial fixo. Sendo esta uma definição muito geral, muitas das representações que aparecem descritas na literatura podem ser consideradas representações baseadas em ângulos de Euler. Algumas representações distinguem inclusive entre ângulos de Euler próprios, ângulos de Tait-Bryan, ângulos de Cardan, ângulos náuticos ou até os ângulos de Roll, Pitch and Yaw [54]. De seguida distinguem-se essas representações.

### 3.2.2.3 Rotações de Euler generalizadas e Ângulos de Cardan/Roll, Pitch and Yaw

Uma sequência de rotação denominada como sendo uma rotação de Euler generalizada consiste numa rotação do primeiro ângulo num eixo, outra rotação do referencial rodado por um eixo ortogonal e uma última rotação no mesmo eixo (no referencial rodado) que a primeira rotação. Uma rotação deste tipo muito utilizada é a transformação ZYZ de ângulos de Euler, que é descrita da seguinte forma:

$$R_{ZYZ} = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

(Nota:  $c\phi = \cos\phi$ ,  $s\phi = \sin\phi$ ,  $t\phi = \tan\phi$ )

Se uma sequência de rotação constituir numa composição de rotações em que todos os eixos são ortogonais entre si tem-se uma rotação definida por ângulos de Cardan ou Roll, Pitch and Yaw.

Um exemplo de tal rotação é:

$$R_{XYZ} = R_{z,\psi} R_{y,\theta} R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

### 3.2.2.4 Euler Angle Rates

Sendo os ângulos de Euler utilizados para definir a orientação de um corpo rígido, é natural que os mesmos sejam utilizados para obter a velocidade angular do corpo rígido no referencial fixo ao corpo ou no referencial inercial. A forma de obter a velocidade angular do corpo é utilizando as derivadas temporais dos ângulos de Euler, denominados de *Euler Angle Rates* e multiplicando as mesmas por uma matriz[58]. Esta matriz é definida, para uma sequência de rotação em Roll, Pitch and Yaw, por:

$$E_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x,\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x,\phi}R_{y,\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Assim sendo o vector de velocidade angular do corpo relativa ao referencial inercial  $\omega_b^n$  pode ser relacionado com o vector de *Euler Angle Rates*  $\eta_{rates}$  da seguinte forma:

$$\omega_b^n = E_{\phi\theta\psi} \eta_{rates} \quad (3.19)$$

Se se quiser calcular os *Euler Angle Rates* via a velocidade angular, pode-se utilizar a matriz inversa de  $E_{\phi\theta\psi}$ , que tem a seguinte forma:

$$E_{\phi\theta\psi}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & \frac{s\phi}{c\theta} & \frac{c\phi}{c\theta} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

De certa forma, pode-se dizer que  $E_{\phi\theta\psi}^{-1}$  ilustra um dos problemas de uma representação em ângulos de Euler, comumente designada de *gimbal lock*. Este problema consiste na perda de um grau de liberdade de rotação, o que acontece quando o o ângulo de Pitch ( $\theta$ ) é múltiplo de  $90^\circ$  graus. Este problema é normalmente resolvido via uma representação em quatérniões.

### 3.2.2.5 Quatérniões

Os quatérniões são uma extensão dos números complexos, em que uma das suas aplicações praticas é descrever rotações no espaço. Um quatérnião  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$  que tenha norma unitária ( $|q| = 1$ ) pode definir uma rotação de um vector  $r$  através da seguinte relação:

$$r_{rodado} = qrq^* \quad (3.21)$$

em que  $*$  representa o transposto hermitiano. Como  $r_{rodado} = Rr$ , a matriz de rotação pode ser exprimida com os parâmetros do quatérnião. Expandindo o produto  $qrq^*$  e colocando  $r$  em

evidencia, a matriz de rotação  $R$  terá a seguinte forma:

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

É possível converter entre ângulos de Euler (neste caso Roll, Pitch and Yaw), podendo-se obter a equivalência entre ângulos de Euler e os parâmetros constituintes dos quatérnios (também chamados de parâmetros de Euler se o quatérnio for unitário) igualando as matrizes de rotação e substituindo os ângulos pelas expressões equivalentes com os parâmetros dos quatérnios. Isto resulta nas seguintes igualdades [58]:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2}(2(q_0q_1 + q_2q_3), q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \\ \text{asin}(2(q_0q_2 - q_3q_1)) \\ \text{atan2}(2(q_0q_3 + q_1q_2), q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

### 3.2.2.6 Velocidade Angular

Havendo já em secções anteriores sido obtidas quantidades físicas e parametrizações que permitem descrever movimentos translacionais e orientações, faltam ainda descrever quantidades envolvidas em movimentos rotacionais. A velocidade angular permite descrever esses movimentos, pelo que vai ser brevemente mencionada.

O teorema de Euler afirma que o deslocamento geral de um corpo rígido com um ponto fixo é a rotação em torno de um eixo, sendo este deslocamento geral uma rotação finita em torno de um eixo único[55]. Considerando a rotação como sendo de um ângulo infinitesimal  $\Delta\theta$  durante um intervalo de tempo  $\Delta t$  então a velocidade de qualquer ponto num corpo rígido, com um ponto fixo, pode ser calculada através do movimento circular instantâneo em torno de um eixo fixo. Podemos, por isso, matematicamente definir o vector  $\omega$ , representativo da velocidade angular, como sendo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}n \quad (3.24)$$

no qual  $n$  é o versor do eixo de rotação mencionado, de tal forma que a velocidade linear  $v$  de qualquer ponto no corpo é dada pelo produto vectorial:

$$v = \omega \times r \quad (3.25)$$

em que  $r$  é o vector do ponto fixo a um ponto em movimento do corpo, ou seja, um vector definido num referencial fixo ao corpo[10]. Numa forma mais geral, a velocidade angular de um referencial fixo ao corpo em relação ao referencial inercial obedece à seguinte relação:

$$\dot{R}(t) = S(\omega(t))R(t) \quad (3.26)$$

em que  $S(\omega(t))$  é a matriz antissimétrica do vector da velocidade angular  $\omega(t)$ ,  $R(t)$  é a matriz de rotação que relaciona o referencial inercial com o referencial fixo ao corpo e  $\dot{R}(t)$  é a derivada temporal da matriz de rotação. Antes de clarificar esta relação, importa definir a matriz antissimétrica  $S$ . Uma matriz  $S$  é antissimétrica se:

$$S + S^T = 0 \quad (3.27)$$

O que implica que os elementos que não estejam na diagonal obedeçam a  $s_{ij} = -s_{ji}$ , para  $i \neq j$ , enquanto que os elementos da diagonal são zero. Uma matriz antissimétrica no espaço com um vector  $\omega$  pode ser descrita da seguinte forma[57]:

$$S(\omega) = -S^T(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Adicionalmente, a matriz antissimétrica pode ser utilizada para representar um produto vectorial da seguinte forma:

$$\omega \times \mathbf{r} = \mathbf{S}(\omega)\mathbf{r} \quad (3.29)$$

Voltando à equação, pode-se ver que existe uma relação entre a derivada temporal de uma matriz de rotação e da velocidade angular. Ou seja, se a orientação instantânea de um referencial fixo ao corpo relativa a um referencial inercial é dada pela matriz de rotação, por sua vez a velocidade angular do referencial fixo ao corpo está directamente relacionada à derivada da mesma matriz.

### 3.2.2.7 Posições, Velocidades e Acelerações de Pontos no Corpo

Previamente referiu-se que era necessário um referencial fixo ao corpo para definir todos os pontos do corpo rígido. Utilizando as expressões já expressas nas secções anteriores estamos finalmente em condições de o fazer. Considere-se um ponto  $r_{OP}$ , que não o centro de massa, no corpo rígido. Esse ponto é dado pela seguinte expressão:

$$r_{OP} = r_{CM} + r_P \quad (3.30)$$

O vector  $r_P$ , estando fixo ao corpo, muda em relação ao referencial inercial se o corpo estiver em rotação, como se pode ver na figura 3.8. Logo, uma forma de representar o vector seria:

$$r_P^n = R_b^n r_P \quad (3.31)$$

O que levaria à expressão do ponto a ficar:

$$r_{OP} = r_{CM} + R_b^n r_P \quad (3.32)$$

Se se quiser representar a velocidade do ponto, tem-se então a seguinte expressão:

$$\dot{r}_{OP} = \dot{r}_{CM} + \omega \times r_P^n = \dot{r}_{CM} + S(\omega)R_b^n r_P \quad (3.33)$$

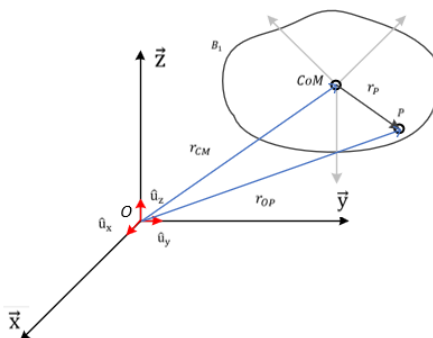


Figura 3.8: Representação de um ponto num corpo rígido, que não o centro de massa, com um vector fixo ao corpo.

E finalmente a aceleração:

$$\ddot{r}_{OP} = \ddot{r}_{CM} + \dot{\omega} \times r_p^n + \omega \times (\omega \times r_p^n) \quad (3.34)$$

Que pode ser desenvolvida como a velocidade, com recurso às técnicas anteriormente expostas[10].

### 3.2.2.8 Cinemática Especifica para Sistemas de Corpos

Um sistema multicorpo poderá ter uma quantidade enorme de corpos, com várias interconexões entre si, pelo que se torna conveniente por motivos conceptuais e mesmo computacionais haver métodos que descrevam estas ligações.

A forma mais comum de descrever de as descrever é através de grafos direccionados.

Considerando o conjunto dos objectos  $\{S_i\}$ , representativos dos corpos do sistema, e os vértices do grafo  $\{u_j\}$  como sendo as interconexões do sistema consegue-se obter uma representação compacta de todo o sistema. Obtido o grafo é possível obter uma representação ainda mais simplificada, que é a matriz de incidência. A matriz de incidência  $S_{ij}$  tem os seus elementos definidos como:

$$s_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{se } u_j \text{ está a sair de } S_i \\ -1, & \text{se } u_j \text{ está a entrar em } S_i \\ 0, & \text{se } u_j \text{ não entra nem sai em } S_i \end{cases} \quad (3.35)$$

E é definida como sendo:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{0j} \\ S \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

em que  $S_{0j}$  denota a ligação a um vértice/nó raiz, normalmente a origem do referencial inercial, e  $S$  é a ligação dos corpos entre si [10][51].

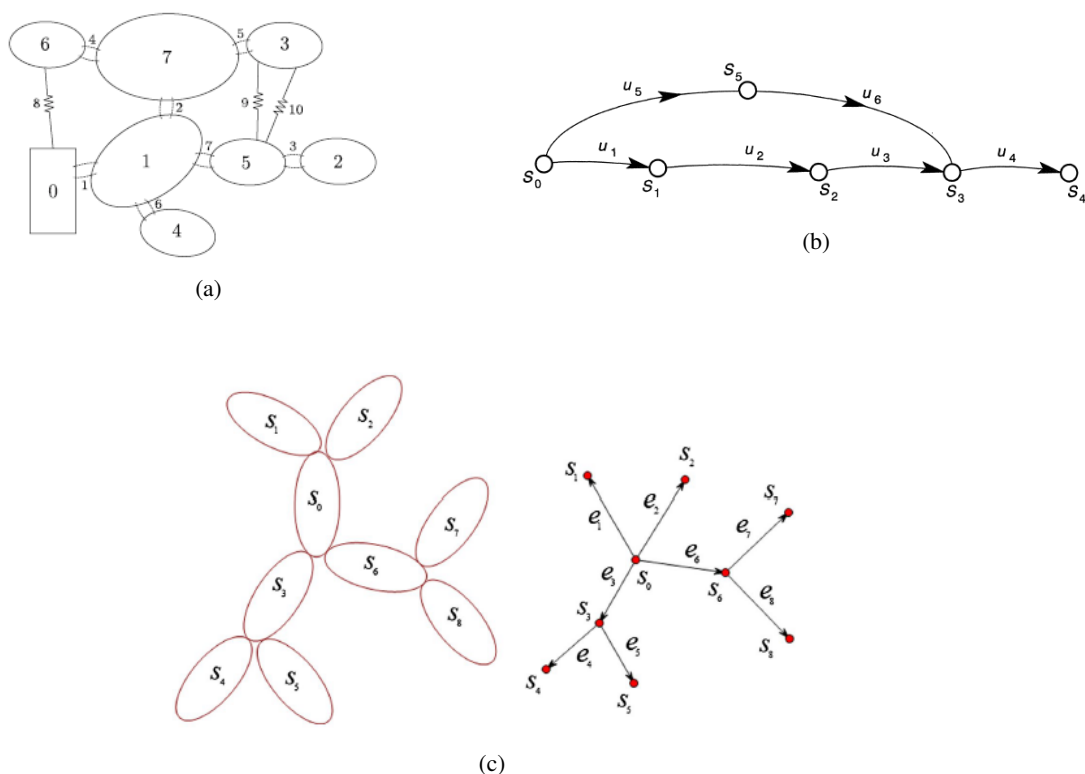


Figura 3.9: Representação via grafo de sistemas multicorpo: 3.9a mostra a numeração de um sistema multicorpo [51], que é posteriormente representada como em 3.9b[10]. Em 3.9c vê-se o esquema do robô reconfigurável de [35] e sua representação em grafo.

### 3.2.2.9 Coordenadas Generalizadas

Tendo já uma representação adequada dos movimentos que um corpo rígido pode efectuar, convém agora abordar a representação dos movimentos no todo. Enquanto que todo o movimento de um corpo rígido pode ser representado por seis variáveis, três representando o seu movimento translacional e outras três para representar o seu movimento rotacional (numa representação do movimento rotacional em quaterniões o movimento rotacional é descrito por quatro parâmetros, passando para sete variáveis para a representação do seu movimento no todo), no caso de um sistema multicorpo com varias interconexões isto já não se verifica, se as interconexões implicarem restrições. Assim sendo, a representação de cada corpo por seis ou sete variáveis implica que irão existir variáveis independentes e dependentes nesse conjunto e terão implicações na resolução das equações de movimento. Contudo, e isso será abordado na secção da Dinâmica, existem variáveis que permitem uma representação mínima do movimento do sistema total. Essas variáveis são designadas de coordenadas generalizadas, que consistem numa representação mínima, independente e completa do movimento do sistema [59]. Essa representação é, portanto, coincidente com os graus de liberdade do sistema total, dado pela seguinte expressão,

$$f = 6N - c \quad (3.37)$$



na qual  $f$  são os graus de liberdade do sistema no total,  $N$  é o número de corpos do sistema e  $c$  é o número de restrições do mesmo. O conjunto das coordenadas generalizadas para um sistema não é único, pelo que vários conjuntos de variáveis podem satisfazer as condições necessárias para serem coordenadas generalizadas. Um exemplo simples pode ser visto na seguinte figura:

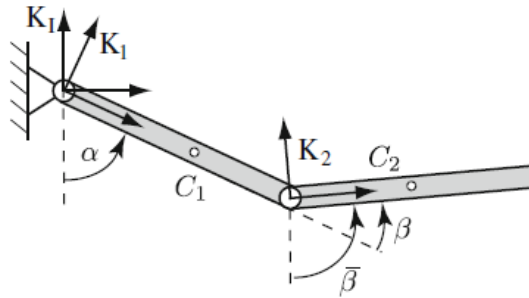


Figura 3.10: Manipulador com dois graus de liberdade. Retirado de [53].

O manipulador tem dois segmentos, representados por  $C_1$  e  $C_2$ , ligados por duas articulações rotativas. Estas apenas permitem rotação no seu eixo, pelo que restringem os restantes graus de liberdade. O número de coordenadas generalizadas é então  $f = 6 \times 2 - 10 = 2$ . As coordenadas mais óbvias para descrever todo o movimento do corpo são então os ângulos das articulações, como se pode ver na figura,  $\alpha$  e  $\beta$ . Alternativamente, um dos ângulos poderia ser o que normalmente se designa de coordenada relativa, ou seja, em vez de um ângulo ser medido relativamente ao referencial inercial pode ser medido em relação ao ângulo do corpo anterior, como se pode ver  $\bar{\beta}$  na figura [53]. Estando então todas as questões relacionadas com a cinemática dos sistemas multicorpo abordadas, passa-se na seguinte secção a tratar das restrições, que influenciam tanto a cinemática como a dinâmica.

### 3.2.3 Restrições

Um sistema multicorpo pode possuir restrições de movimento entre corpos ou restrições inerentes ao corpo em si. As restrições, quando expressas matematicamente, dão origem a forças e torques de reacção. Quando uma equação que exprima uma restrição é utilizada para descrever um sistema matematicamente, implica necessariamente que as coordenadas utilizadas para descrever o movimento não são independentes [60]. Uma forma de descrever uma restrição de movimento é através de uma equação do tipo:

$$\Phi \equiv \Phi(q) = 0 \quad (3.38)$$

onde  $q$  é um vector com as coordenadas do sistema e  $\Phi$  é subsequentemente função destas. Esta equação é também referida como sendo uma restrição de posição. Se consideramos  $\Phi$  como sendo um conjunto de restrições de posição no mesmo vector  $q$  e se derivarmos em função do tempo, vamos obter as restrições de velocidade do sistema, ou restrições cinemáticas, dadas por

$$\Phi(q, \dot{q}) \equiv H(q)\dot{q} = 0 \quad (3.39)$$

Em que  $H$  é uma matriz  $n_c \times n_v$ , onde  $n_c$  é o número de equações de restrição e  $n_v$  o número de variáveis ou coordenadas do sistema. Por fim, se derivarmos as restrições de velocidade em função do tempo iremos obter as restrições de aceleração do sistema, com a seguinte expressão:

$$\ddot{\Phi}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv H(q, \dot{q})\ddot{q} + \dot{H}(q)\dot{q} = 0 \quad (3.40)$$

### 3.2.3.1 Restrições Holonómicas, Não-Holonómicas, Reonómicas e Escleronómicas

As restrições atrás mencionadas possuem classificações posteriores conforme as suas dependências entre variáveis [61]. Para além de restrições posicionais e cinemáticas, existem outras classificações úteis. São denominadas de restrições holonómicas as restrições que imponham uma restrição tanto nas variáveis posicionais e nas suas velocidades respectivas. As restrições holonómicas podem ser dadas por restrições posicionais ou geométricas, ou ainda por restrições cinemáticas integráveis. Se no conjunto das restrições de um sistema houver alguma não integrável, este sistema será um sistema não-holonómico. Uma restrição não-holonómica só impõe restrições ao nível das velocidades.

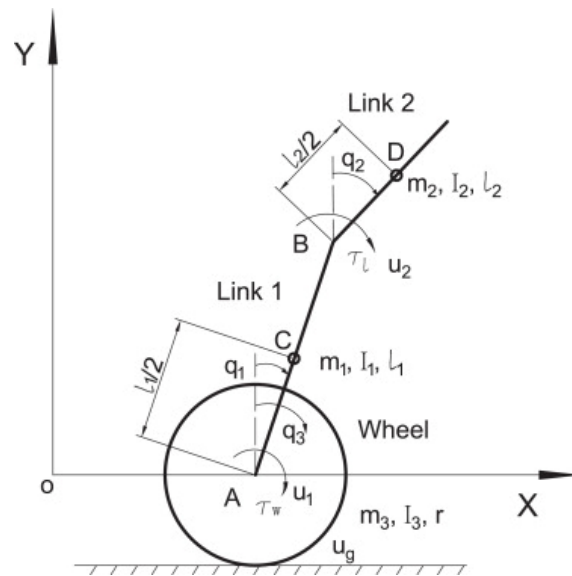


Figura 3.11: Um sistema que integra tanto restrições holonómicas e não-holonómicas, um UMR (*Underactuated mobile robot*) com uma restrição não-holonómica, no sentido em que a roda do robô tem que rolar sem deslizar e restrições holonómicas nas articulações que ligam os seus dois segmentos. Retirado de [62]

Importa também saber se estas restrições são variáveis no tempo. Se forem, são denominadas de reonómicas. Caso contrário, são escleronómicas. Por fim, outra propriedade importante é lateralidade das restrições, ou seja, se uma restrição é unilateral ou bilateral. Uma restrição bilateral implica transmissão de forças reactivas em dois sentidos diferentes, enquanto que uma unilateral implica a transmissão num só sentido, algo que é frequente quando se considera impactos e contactos, algo que não é de muita relevância nesta Dissertação [53].

### 3.2.3.2 Articulações e Pares Cinemáticos. Restrições Comuns

Uma das formas das restrições serem descritas em sistemas multicorpo é através de articulações, podendo estas ser executadas através de pares cinemáticos, ou seja, uma conexão física concreta entre dois corpos que restringe o seu movimento, ou serem apenas consideradas como abstrações matemáticas.

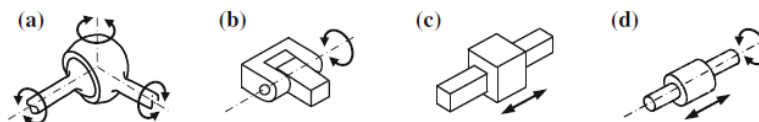


Figura 3.12: Articulações básicas utilizadas na modelação de sistemas multicorpo. (a) é uma articulação esférica, (b) uma rotativa, (c) uma prismática/translacional e (d) uma articulação. Pode-se ainda ver em cada articulação os seus graus de liberdade representados. Retirado de [52].

De qualquer forma, tanto o objecto abstracto como uma implementação real podem ser modelados num sistema multicorpo através de restrições comuns. Um exemplo simples é a restrição de um ponto comum a dois corpos, do tipo

$$P_i^n = P_j^n \equiv \Phi = P_i^n - P_j^n = 0 \quad (3.41)$$

em que um ponto  $P_i^n$  pertencente a um corpo  $i$  coincide com o ponto  $P_j^n$  do corpo  $j$ . Sendo uma equação que envolve apenas posições, restringindo três graus de liberdade translacionais, podemos concluir que com apenas esta equação se modela o comportamento de uma articulação esférica. Outras restrições comuns são a imposição de paralelismo ou perpendicularidade de vectores no referencial fixo ao corpo e de orientação relativa, normalmente via composição de rotações,

$$R_{j,cte}^i = R_n^i R_j^n \quad (3.42)$$

em que  $R_{j,cte}^i$  é uma orientação relativa constante entre os referenciais, representados por  $R_i^n$  e  $R_j^n$ , e finalmente de distância, obedecendo a uma expressão como,

$$d_{ij}^T d_{ij} = \ell^2 \quad (3.43)$$

em que  $d_{ij} = P_j^n - P_i^n$  e  $\ell$  uma distância constante. De notar que estas restrições mencionadas são todas holonómicas [63].

### 3.2.4 Dinâmica

A Dinâmica consiste na relação entre o movimento de um corpo/sistema e as forças/torques que o geram. Uma das formas mais simples de analisar as forças a actuar num corpo é fazendo um diagrama de corpo livre, podendo-se seguir o mesmo raciocínio para um sistema, isolando os corpos constituintes do sistema e fazer um diagrama de corpo livre para cada. Ora, em sistemas

multicorpo esse diagrama terá, portanto, forças aplicadas pelos outros corpos e forças reactivas, provenientes das restrições que os corpos possuem entre si. Desta forma, o total das forças será uma força/torque equivalente a actuar no centro de massa.

Uma forma de obter esta relação é através das equações de Newton-Euler, que consiste em considerar as relações entre as taxas de variação de momento linear/angular com o total de forças/torques externos exercidos sobre o sistema, previamente formuladas por Isaac Newton para partículas e mais tarde generalizado para corpos rígidos por Leonard Euler.

### 3.2.4.1 Equações de Movimento de Newton-Euler

As equações de Newton-Euler para um único corpo são então:

$$m\ddot{r} = f_{ext} \quad (3.44)$$

$$\dot{H} = \frac{d\left(I^n \omega_{b/n}^n\right)}{dt} = \tau_{ext} \quad (3.45)$$

onde  $m$  é a massa do corpo,  $\ddot{r}$  é a aceleração do seu centro de massa,  $f_{ext}$  é o conjunto das forças externas aplicadas no corpo,  $\dot{H}$  é a variação temporal do momento angular,  $I^n$  é o tensor de inercia do corpo em relação a um referencial inercial cuja origem é o seu centro de massa,  $\omega_{b/n}^n$  é a velocidade angular do corpo em relação ao referencial inercial e  $\tau_{ext}$  é o conjunto de torques aplicados no corpo. A primeira expressão é retirada directamente da 2ª Lei de Newton, enquanto que a segunda já requer que se considere uma diferença essencial entre movimento translacional e rotacional. Enquanto que a massa  $m$  permanece constante na maioria dos casos considerados, com o tensor de inercia esse já não é o caso. Suponha-se que um tensor de inercia é calculado no centro de massa do corpo, mas em vez de ser em relação a um referencial inercial passa a ser a um referencial fixo ao corpo. Isso supõe que esse mesmo tensor de inercia  $I$  é constante, independentemente das rotações que o corpo possa fazer. Contudo, o tensor  $I^n$  é dado por:

$$I^n = RIR^T \quad (3.46)$$

em que  $R$  é a matriz que faz a transformação entre o referencial inercial e o fixo ao corpo. Assim sendo, uma forma de ultrapassar esta dificuldade é escrevendo a equação 3.45 no referencial fixo ao corpo, da seguinte forma:

$$I\dot{\omega}_{b/n}^b + \omega_{b/n}^b \times \left(I\omega_{b/n}^b\right) = \tau_{ext} \quad (3.47)$$

Esta equação é deduzida de seguida. Sabe-se que:

$$\dot{R}R^T = S\left(\omega_{b/n}^n\right) \quad (3.48)$$

ou seja, a velocidade angular do corpo no referencial inercial é dada pela equação antecedente. A velocidade angular no referencial fixo ao corpo é então:

$$\omega_{b/n}^n = R\omega_{b/n}^b, \omega_{b/n}^b = R^T \omega_{b/n}^n \quad (3.49)$$

O momento angular pode então ser representado por:

$$H = RIR^T R\omega_{b/n}^b = RI\omega_{b/n}^b \quad (3.50)$$

Derivando em ordem ao tempo, obtém-se a variação do momento angular no referencial inercial:

$$\dot{H} = \dot{R}I\omega_{b/n}^b + RI\dot{\omega}_{b/n}^b \quad (3.51)$$

Considerando mais uma vez:

$$\dot{R}R^T = S(\omega_{b/n}^n), \dot{R} = S(\omega_{b/n}^n)R \quad (3.52)$$

tem-se que:

$$\dot{H} = S(\omega_{b/n}^n)RI\omega_{b/n}^b + RI\dot{\omega}_{b/n}^b \quad (3.53)$$

E expressando-se a variação do momento angular no referencial fixo ao corpo fica-se com:

$$\begin{aligned} R^T \dot{H} &= R^T S(\omega_{b/n}^n)RI\omega_{b/n}^b + I\dot{\omega}_{b/n}^b \\ &= S(R^T \omega_{b/n}^n)I\omega_{b/n}^b + I\dot{\omega}_{b/n}^b \\ &= S(\omega_{b/n}^b)I\omega_{b/n}^b + I\dot{\omega}_{b/n}^b = \omega_{b/n}^b \times (I\omega_{b/n}^b) + I\dot{\omega}_{b/n}^b \end{aligned} \quad (3.54)$$

As equações de Newton-Euler podem então ser escritas como:

$$m_i \ddot{r}_i = f_{ext,i}^n + f_{r,i}^n \quad (3.55)$$

$$\omega_{b/n}^b \times (I_i \omega_{b/n,i}^b) + I_i \dot{\omega}_{b/n,i}^b = R^T \tau_{ext} \quad (3.56)$$

Para um sistema de vários corpos, pode-se escrever as equações da seguinte forma:

$$m_i \ddot{r}_i = f_{ext,i}^n + f_{r,i}^n \quad (3.57)$$

$$\omega_{b/n,i}^b \times (I_i \omega_{b/n,i}^b) + I_i \dot{\omega}_{b/n,i}^b = \tau_{ext,i}^b + \tau_{r,i}^b \quad (3.58)$$

onde  $m_i$  é a massa do corpo  $i$ ,  $\ddot{r}_i$  é a aceleração do centro de massa de  $i$ ,  $f_{ext,i}^n$  é o conjunto das forças aplicadas em  $i$ ,  $f_{r,i}^n$  é o conjunto das forças reactivas em  $i$ , ambas no referencial inercial,  $\tau_i^a$  e  $\tau_i^r$  são os torques aplicados e reactivos, respectivamente, no referencial fixo ao corpo,  $\omega_{b/n,i}^b$  é a

velocidade angular no referencial fixo e  $I_i$  é o tensor de inércia, expresso também no referencial fixo [57][54][56].

A presença de forças e torques reactivos nestas equações implicam a presença de restrições no sistema. Contudo, estas mesmas forças/torques permitem uma formulação mais simplificada da dinâmica do sistema e são parte integrante da chamada formulação recursiva de Newton-Euler. Como o nome indica, esta formulação, muito utilizada em sistemas com manipuladores, calcula recursivamente as velocidades e acelerações dos corpos, para manipuladores os segmentos que os constituem, na chamada *forward recursion* e calcula as forças e torques em cada segmento, na *backward recursion* [54][56].

É possível representar as equações de Newton-Euler com coordenadas generalizadas, mas primeiro será mais fácil a percepção de tal método abordando alguns conceitos inerentes a outras equações de movimento, comumente denominadas de equações de Lagrange ou Euler-Lagrange.

### 3.2.4.2 Equações de Euler-Lagrange

As equações de Lagrange ou Euler-Lagrange são equações que descrevem o movimento de sistemas mecânicos sujeitos a restrições holonómicas, quando estas mesmas restrições obedecem ao princípio do trabalho virtual. As equações são as seguintes:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k \quad (3.59)$$

Em que  $K$  é a energia cinética do sistema,  $q_k$  é a coordenada generalizada  $k$ , do conjunto das coordenadas generalizadas  $q$  do sistema e  $Q_k$  é a força generalizada na coordenada  $k$ . Esta força generalizada  $Q_k$  pode ainda subdividir-se em:

$$Q_k = -\frac{\partial P}{\partial q_k} + Q_{k,nc} \quad (3.60)$$

no qual  $P$  é uma função de energia potencial do tipo  $P(q)$  e  $Q_{k,nc}$  é uma força não-conservativa em  $q_k$ . Reorganizando os termos fica-se com a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_{k,nc} \quad (3.61)$$

Na qual  $\mathcal{L}$  é o Lagrangiano do sistema, dado pela expressão:

$$\mathcal{L} = K - P \quad (3.62)$$

Num sistema multicorpo pode-se então calcular as suas equações de movimento via as equações de Lagrange, se forem sabidas as suas expressões para a energia cinética e potencial. Para um corpo rígido, a sua energia cinética é calculada da seguinte forma:

$$K = \frac{1}{2} m v^T v + \frac{1}{2} \omega^T I^n \omega \quad (3.63)$$

No qual  $v$  é a velocidade linear do corpo,  $\omega$  a velocidade angular e  $I^n$  o tensor de inercia, calculada via:

$$I^n = RIR^T \quad (3.64)$$

A energia potencial no caso do corpo rígido resume-se à força da gravidade, pelo que:

$$P = g^T r_{CM} m \quad (3.65)$$

Em que  $g^T$  é o vector que indica a direcção da gravidade no referencial inercial,  $r_{CM}$  é o vector do centro de massa do corpo e  $m$  é a massa do corpo em questão.

Para estender este conceito para sistemas com múltiplos corpos é necessário definir primeiro as seguintes relações:

$$v_i = J_{v_i}(q)\dot{q}, \quad \omega_i = J_{\omega_i}(q)\dot{q} \quad (3.66)$$

As matrizes  $J_{v_i}(q)$  e  $J_{\omega_i}(q)$  são as matrizes Jacobianas, sendo utilizadas para exprimir restrições neste caso entre as velocidades  $v_i$  e  $\omega_i$ , e as derivadas temporais das coordenadas generalizadas. Isto permite-nos então substituir as velocidades nas expressões de energia cinemática de cada corpo, ficando estas expressões formuladas com coordenadas generalizadas. A derivação subsequente destas expressões é extensiva, pelo que se finalizará esta exposição com a forma matricial das equações de movimento de Lagrange ou Euler-Lagrange:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = Q_{ext} \quad (3.67)$$

Em que  $M(q)$  é a chamada matriz de inercia do sistema,  $C(q, \dot{q})$  é a matriz que contém os termos centrípetos,  $g(q)$  a força gravítica a actuar no sistema e  $Q_{ext}$  é o vector das forças generalizadas externas. Utilizando a formulação de Newton-Euler é possível a obtenção das mesmas equações, utilizando as matrizes Jacobianas atrás referidas [57].

Estas equações permitem descrever um sistema multicorpo arbitrário. Contudo, se o sistema tiver restrições não-holonómicas as coordenadas generalizadas irão ter restrições entre si, visto não existir uma relação integrável entre elas. Considere-se então a seguinte expressão:

$$M(q)\ddot{q} = Q_{tot} + Q_{cons} \quad (3.68)$$

em que  $Q_{tot}$  é o vector das forças generalizadas total, dado por

$$Q_{tot} = Q_{ext} - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) \quad (3.69)$$

E  $Q_{cons}$  é o vector das forças generalizadas reactivas, provenientes de restrições. O vector  $Q_{cons}$  pode ser calculado utilizando uma abordagem com recurso a multiplicadores de Lagrange, ou seja:

$$Q_{cons} = -h_q^T \lambda_h - h_{\dot{q}}^T \lambda_{\dot{h}} - h_{\ddot{q}}^T \lambda_{\ddot{h}} \quad (3.70)$$

em que  $\lambda_h$  e  $\lambda_{\dot{h}}$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições não-holonómicas ao

nível da velocidade e da aceleração, respectivamente, com  $h_q$  e  $h_{\dot{q}}$  a corresponderem às matrizes Jacobianas dos vectores com as relações de restrição ao nível das velocidades e das acelerações  $h_v$  e  $h_a$ , calculadas em relação aos vectores das velocidades e acelerações generalizadas, ou seja:

$$h_q = \frac{dh_p}{dq}, h_{\dot{q}} = \frac{dh_v}{d\dot{q}}, h_{\ddot{q}} = \frac{dh_a}{d\ddot{q}} \quad (3.71)$$

com:

$$h_p(q, t) = 0, \quad h_v(q, \dot{q}, t) = 0, \quad h_a(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0 \quad (3.72)$$

supondo restrições reonómicas. Isto implica que para obter os valores desconhecidos dos multiplicadores de Lagrange se tenha que incluir as equações das restrições para se poder resolver as restantes equações do sistema. Isso implica a resolução de sistemas de equações diferenciais-algébricas, ao invés de equações diferenciais ordinárias, como tem sido feito até a introdução desta questão. Como a resolução de DAEs[64] implica alguns cuidados no seu cálculo numérico e a sua utilização não é muito fácil de utilizar em esquemas de controlo que envolvam modelos, passa-se para a descrição de um método que permite a resolução das equações de movimento, com métodos de cálculo numérico mais acessíveis.

### 3.2.4.3 Formulação de Udwadia-Kalaba

As equações centrais de movimento restrito, também denominadas de equações de Udwadia-Kalaba, permitem a obtenção de uma solução analítica para o problema do movimento restrito. A característica principal deste método de obtenção de equações de movimento de um sistema com movimento restrito, como é um sistema multicorpo, prende-se na utilização do princípio de Gauss da mínima restrição. Este princípio constata que o movimento de um sistema mecânico sujeito a restrições obedece a uma trajectória correspondente ao desvio mínimo entre o vector das acelerações generalizadas do sistema com restrições e do vector de acelerações generalizadas do mesmo sistema sem estar sujeito a restrições, podendo este princípio ser equiparado ao princípio do trabalho virtual, em conjunção com a utilização de multiplicadores de Lagrange. De forma resumida pode-se representar o sistema de equações diferenciais algébricas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{Q}_{tot} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Em que  $\mathbf{Q}_{cons} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$ . Este método assume que as restrições não-holonómicas ao nível das acelerações são funções não-lineares das coordenadas e velocidades generalizadas  $q$  e  $\dot{q}$  mas ao mesmo tempo também são funções lineares das acelerações generalizadas  $\ddot{q}$ . Isto verifica-se na relação x, onde  $\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  é a matriz Jacobiana com dimensão  $n_c \times n_v$ , onde  $n_c$  é o número de restrições holonómicas e não-holonómicas e  $n_v$  o número de coordenadas generalizadas, e  $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  é o vector de velocidade quadrática com dimensão  $n_c$ . Verifica-se então que as restrições são todas incluídas na relação anterior referida.



A obtenção das chamadas equações de Udwadia-Kalaba implica a obtenção de uma forma fechada para o vector das acelerações generalizadas e para os multiplicadores de Lagrange. Sejam então essas variáveis dadas por:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}} &= a_{uncons}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + a_{cons}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \lambda &= -Fe\end{aligned}\quad (3.74)$$

em que  $a_{uncons}$  corresponde à aceleração do sistema na ausência de restrições e  $a_{cons}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , com  $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  representando uma matriz  $n_c \times n_c$  denominada de matriz de realimentação de restrições e  $e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  a representar um vector de dimensão  $n_c$ , que quantifica a violação das equações de restrição ao nível de aceleração, considerando o vector de aceleração generalizada do sistema na ausência de restrições. Considerando que a matriz de inercia  $M$  é não-singular, o vector  $a_{uncons}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  é dado por:

$$a_{uncons}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = M^{-1}Q_{tot} \quad (3.75)$$

O vector  $e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  é dado por:

$$e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{b} - Aa_{uncons} \quad (3.76)$$

quantificando assim analiticamente o desvio entre a aceleração do sistema sem restrições e  $\ddot{\mathbf{a}}$ . Quanto à matriz  $F$  pode-se computar explicitamente da seguinte forma:

$$F = K^\dagger, K = AM^{-1}A^T \quad (3.77)$$

com  $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  comumente designada por matriz da dinâmica correspondente ao sistema restrito com dimensão  $n_c \times n_c$ ,  $K^\dagger$  como sendo a pseudo-inversa de Moore Penrose. É importante notar que a pseudo-inversa coincide com uma inversa comum se a sua característica completa for igual ao seu número de colunas. Isto permite a quem modela expressar restrições redundantes se necessário, o que permite uma maior flexibilidade no processo de modelação de sistemas com restrições. Estas expressões permitem calcular as forças representadas no vector  $Q_{cons}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}Q_{cons} &= -A^T\lambda = A^TFe = A^TK^\dagger(\mathbf{b} - Aa_{uncons}) = \\ &= A^T(AM^{-1}A^T)^\dagger(\mathbf{b} - AM^{-1}Q_{tot})\end{aligned}\quad (3.78)$$

A aceleração do sistema pode ser obtida então da seguinte forma:

$$a_{cons}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = M^{-1}Q_{cons} \quad (3.79)$$

Tendo assim obtido por final uma forma de representar uma grande parte de sistemas com restrições, holonómicas e não-holonómicas, sem ter que recorrer a resolução de DAEs [65]. Outros métodos para obtenção de equações de movimento podem ser vistos em [36] e [66].

### 3.2.5 Elementos de Força

Uma das formas de modelar forças aplicadas por fenómenos físicos ou por objectos/dispositivos a actuar em corpos e entre corpos são os chamados elementos de força. Os elementos de força mais comuns são os actuadores, as molas e os amortecedores.

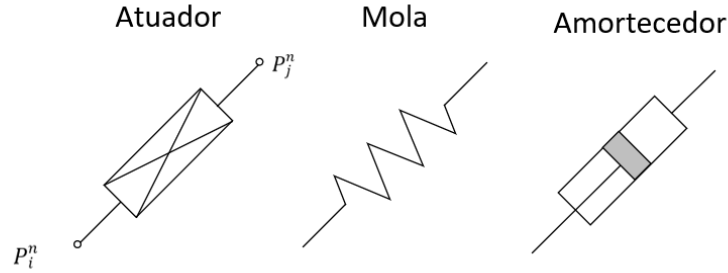


Figura 3.13: Elementos de força, com os pontos de ligação  $P_j^n$  e  $P_i^n$  exemplificados no actuator

Estes actuam ponto a ponto, interconectando os corpos onde os pontos estão situados. O actuator exerce uma força de magnitude constante, ou temporalmente variável, na direcção definida pelos dois pontos, mas em sentidos opostos. Uma convenção de sinais possível é considerar a força  $f_{a,i}$  no corpo  $i$  positiva quando "puxa" (*push*) os dois corpos interconectados mais próximos entre si e negativa quando "empurra" (*pull*) os mesmos, ficando os dois corpos interconectados mais distantes. Em termos matemáticos isto pode ser escrito da seguinte forma:

$$f_{a,i} = \|f_a\| \hat{d}_{ij} = -f_{a,j} \quad (3.80)$$

em que  $\|f_a\|$  é a magnitude da força  $f_{a,i}$ , simétrica a  $f_{a,j}$ ,  $\hat{d}$  versor da distância  $d_{ij} = P_j^n - P_i^n$ , em que  $P_j^n$  e  $P_i^n$  são pontos nos corpos interligados, descrito por

$$\hat{d}_{ij} = \frac{d_{ij}}{L} \quad (3.81)$$

em que  $L$  é a magnitude de  $d_{ij}$ , definida como sendo  $L = \sqrt{d_{ij}^T d_{ij}}$ . Outro elemento, talvez o mais utilizado e conhecido, é a mola. A força de uma mola pode ser dada por:

$$\|f_{s,i}\| = k(L(d_{ij}) - L(0)) \quad (3.82)$$

em que  $k$  é a rigidez da mola,  $L(d_{ij})$  é o comprimento da mola deformada e  $L(0)$  é o comprimento da mola quando em repouso. A convenção de sinal referida para o actuator repete-se, com  $\|f_{s,i}\|$  positiva quando  $L(d_{ij}) > L(0)$ , com a mola em tensão e negativa  $L(d_{ij}) < L(0)$ , quando em compressão. Finalmente, o amortecedor tem uma força descrita por

$$\|f_{d,i}\| = d_c \dot{L} \quad (3.83)$$

em que  $d_c$  é o coeficiente de amortecimento e  $\dot{L}$  é a variação temporal do tamanho do amortecedor.  $\dot{L}$  pode ser calculado derivando  $L^2 = d_{ij}^T d_{ij}$  temporalmente, o que dará a seguinte expressão,

$$2L\dot{L} = 2d_{ij}^T \dot{d}_{ij} \equiv \dot{L} = \frac{1}{L} d_{ij}^T \dot{d}_{ij} = \hat{d}_{ij}^T \dot{d}_{ij} \quad (3.84)$$

em que  $\dot{d}_{ij} = \dot{P}_j^n - \dot{P}_i^n$ . O amortecedor opõe-se ao movimento dos dois corpos, pelo que quando os corpos se afastam as forças do amortecedor "puxa" em oposição e "empurra" quando os corpos se aproximam.

Estes três elementos em paralelo podem ainda actuar como um elemento de força combinado, ficando então a força exercida por eles como:

$$f_{sda,i} = (\|f_{s,i}\| + \|f_{d,i}\| + \|f_{a,i}\|) \hat{d}_{ij} \equiv -f_{sda,j} \quad (3.85)$$

Este elemento de força combinado pode ser considerado conceptualmente como uma "pseudo-articulação", sendo esta constituída por um "segmento" de tamanho variável, ligado por duas articulações, rotativas no plano e esféricas no espaço, visto não restringir nenhum dos graus de liberdade dos corpos, apenas influenciando o seu movimento.

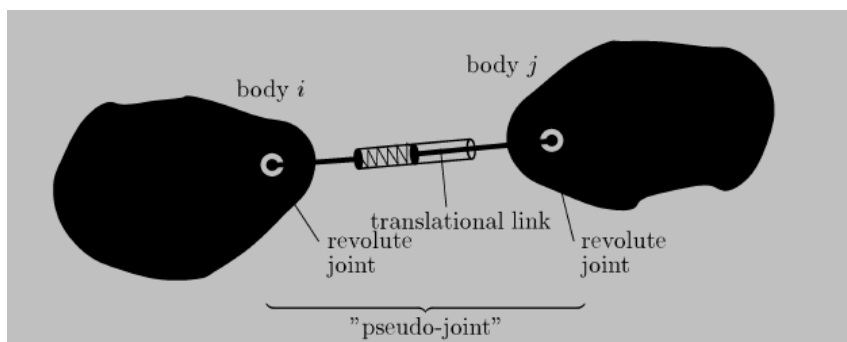


Figura 3.14: Dois corpos ligados por uma "pseudo-articulação". Retirado de [67].

De notar também que estes elementos de força têm as suas contrapartes rotacionais, mas por brevidade e como não irão ser utilizadas neste texto, não serão abordadas.

### 3.3 Modelação de AUVs

Um modelo matemático que descreva o movimento de um AUV/ROV é algo inerentemente complexo, com muitos factores e variáveis a considerar na sua modelação, podendo até à primeira vista não parecer algo fazível com as ferramentas analíticas abordadas anteriormente, sendo algo que talvez seja se insira melhor na área da mecânica de fluidos e com recurso a ferramentas de CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Não obstante, e não negando obviamente importância central das áreas anteriores, o desenvolvimento de modelos que representassem AUVs fiavelmente é possível, quando se alia conceitos base de sistemas multicorpo e da dinâmica do corpo rígido com técnicas de análise de hidrodinâmica e hidrostática. Talvez o modelo mais utilizado seja o

inicialmente concebido em [68], tanto para veículos subaquáticos e embarcações de superfície [69], que foi concebido precisamente para o design de sistemas de controlo, em combinação com a identificação e estimação dos parâmetros do sistema. Este modelo tem a particularidade de ser modelado com as equações de Newton-Euler e usa na sua cinemática conceitos já abordados anteriormente, como parametrização de rotações via ângulos de Euler e quatérniões, assim como a utilização de *Euler Angle Rates*. Este modelo bastante utilizado, descrito em [70] [69] e [71], é o que irá ser abordado sucintamente nesta secção.

### 3.3.1 Cinemática do AUV

Um AUV é normalmente representado com recurso a dois referenciais de tipos diferentes. Um deles é o referencial inercial denominado de NED, para North-East-Down, cuja origem é fixa num ponto na superfície. O outro referencial é o referencial fixo ao corpo. Um AUV representado via referencial NED possui seis graus de liberdade, ou seja, três coordenadas posicionais e três coordenadas rotacionais, que representam rotações em torno dos três eixos do seu referencial fixo ao corpo, considerando as convenções utilizadas pela SNAME (Society of Naval Architects and Marine Engineers). Segundo esta convenção, um AUV tem para a translação as seguintes coordenadas

$$\eta_1 = [n, e, d]^T, v_1 = [u, v, w]^T \quad (3.86)$$

onde as translações nos eixos do  $x, y$  e  $z$  são dadas por  $\eta_1$  e denominadas por surge, sway e heave, e onde  $v_1$  representa as velocidades lineares respectivas, no referencial fixo ao corpo. Para representar as rotações, tem-se que

$$\eta_2 = [\phi, \theta, \psi]^T, v_2 = [p, q, r]^T \quad (3.87)$$

onde as rotações em torno dos eixos do referencial fixo ao corpo são representadas por  $\eta_2$ , que como se pode ver são ângulos de Euler, mais concretamente a representação de Roll, Pitch and Yaw,  $v_2$  é o vector das velocidades angulares do referencial fixo em relação ao referencial inercial, representadas no referencial do corpo. Fica-se então com o vector das coordenadas generalizadas inerciais como sendo

$$\eta = [\eta_1, \eta_2]^T = [n, e, d, \phi, \theta, \psi]^T \quad (3.88)$$

e o vector das velocidades fixas ao corpo como

$$v = [v_1, v_2]^T = [u, v, w, p, q, r]^T \quad (3.89)$$

tem-se ainda que as forças e momentos de acção associados a cada coordenada como sendo  $\tau = [X, Y, Z, K, M, N]^T$ .

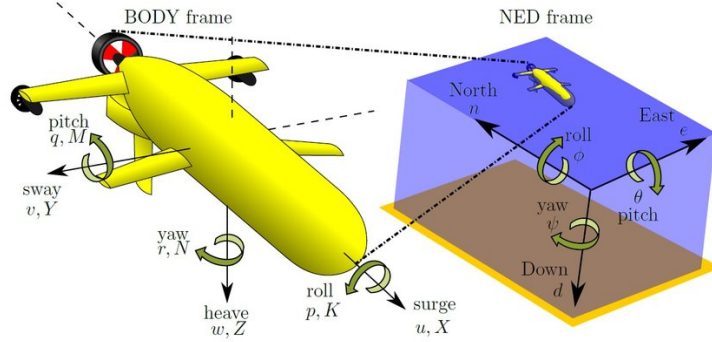


Figura 3.15: Esquema de um AUV com as coordenadas, forças e direcções convencionadas pela SNAME. Note-se ainda o referencial inercial NED. Retirado de [72]

As equações da cinemática com seis graus de liberdade podem ser dadas por:

$$\dot{\eta} = J_{\theta}(\eta)v \quad (3.90)$$

Com  $J(\eta)$  a representar

$$J_{\theta}(\eta) = \begin{bmatrix} R_b^n(\eta_2) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & T_{\theta}(\eta_2) \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

$$\text{Com } R_b^n(\eta_2) = R_{z,\psi} R_{y,\theta} R_{x,\phi} e \quad (3.92)$$

A sua inversa é dada por

$$R_b^n(\eta_2)^{-1} = R_{x,\phi}^T R_{y,\theta}^T R_{z,\psi}^T \quad (3.93)$$

A matriz  $T_{\theta}(\eta_2)$  é representada por:

$$T_{\theta}(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & \frac{s\phi}{c\theta} & \frac{c\phi}{c\theta} \end{bmatrix} \rightarrow T_{\theta}(\eta_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}, \theta \neq \pm 90^\circ \quad (3.94)$$

Note-se que a matriz  $T_{\theta}(\eta_2)$  é indefinida para  $\theta = \pm 90^\circ$  e  $T_{\theta}(\eta_2)^{-1} \neq T_{\theta}(\eta_2)^T$ . Uma possibilidade para resolver este problema é utilizar duas representações baseadas em ângulos de Euler ou utilizando quaterniões. Usando um quaterniã  $q_b = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$ , a sua matriz de rotação pode se exprimir como na secção de Cinemática anterior:

$$R_b^n(q_b) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Por sua vez, a derivada temporal de  $q_b$  é dada por:

$$\dot{q}_b = T_q(q_b)v_2 = T_q(q_b)\omega_{b/n}^b \quad (3.96)$$

Onde a matriz  $T_q(q_b)$  é definida como sendo:

$$T_q(q_b) = \frac{1}{2}H^T = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

em que a matriz  $H$  é definida por  $H = [-q, q_0 I_{3 \times 3} - S(q)]$ , com  $q_0$  a representar a parte inteira de  $q_b$  e  $q$  a representar a parte vectorial. Temos então a representação em quaternião definida da seguinte forma:

$$\dot{\eta} = [\dot{\eta}_1, \dot{q}_b]^T = J_q(\eta)v \quad (3.98)$$

com  $J_q(\eta)$  com a seguinte composição [73]:

$$J_q(\eta) = \begin{bmatrix} R_b^n(q_b) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{4 \times 3} & T_q(q_b) \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

### 3.3.2 Dinâmica do AUV

As equações de movimento de AUVs são formuladas frequentemente de forma a tomarem vantagem da geometria do veículo. Tendo isto em conta, a 2ª Lei de Newton pode ser formulada relativamente ao referencial fixo ao corpo como:

$$M_{RB}\dot{v} + C_{RB}(v)v = \tau_H + \tau \quad (3.100)$$

Em que  $\tau_H$  representa as forças e momentos hidrodinâmicos/hidrostáticos,  $\tau$  as entradas controláveis e outras forças exteriores,  $M_{RB}$  a matriz de inércia do sistema e  $C_{RB}(v)$  a matriz Centripeta - Coriolis. Para um veículo completamente submergido, as forças e momentos hidrodinâmicos devem-se a massa acrescentada e amortecimento proveniente do fluído envolvente, enquanto que as forças e momentos hidrostáticos se devem ao peso do veículo e a sua flutuabilidade. Isto pode ser visto na seguinte equação,

$$M_{RB}\dot{v} + C_{RB}(v)v + M_A\dot{v} + C_A(v)v + D(v)v + g(\eta) = \tau \quad (3.101)$$

Em que as matrizes com o subscrito  $A$  são as matrizes de massa acrescentada,  $D(v)$  é a matriz de amortecimento e  $g(\eta)$  é o vector de forças e momentos gravitacionais e de flutuabilidade. Mais compactamente pode-se expressar a seguinte equação na forma:

$$M\dot{v} + C(v)v + D(v)v + g(\eta) = \tau \quad (3.102)$$

em que  $M = M_{RB} + M_A$  e  $C = C_{RB} + C_A$  Para uma formulação relativa ao referencial inercial tem-se primeiro em conta as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= J(\eta)v \leftrightarrow v = J^{-1}(\eta)\dot{\eta} \\ \dot{\eta} &= J(\eta)\dot{v} + \dot{J}(\eta)v \leftrightarrow \dot{v} = J^{-1}(\eta)[\dot{\eta} - \dot{J}(\eta)\dot{\eta}]\end{aligned}\quad (3.103)$$

Para eliminar  $v$  e  $\dot{v}$  da equação de movimento define-se:

$$\begin{aligned}M_{\eta}(\eta) &= J^{-T}(\eta)MJ^{-1}(\eta) \\ C_{\eta}(v, \eta) &= J^{-T}(\eta) [C(v) - MJ^{-1}(\eta)\dot{J}(\eta)] J^{-1}(\eta) \\ D_{\eta}(v, \eta) &= J^{-T}(\eta)D(v)J^{-1}(\eta) \\ g_{\eta}(\eta) &= J^{-T}(\eta)g(\eta) \\ \tau_{\eta}(\eta) &= J^{-T}(\eta)\tau\end{aligned}\quad (3.104)$$

com  $\dot{J}(\eta)$  dada por[74]:

$$\dot{J}(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\phi}c_{\phi}t_{\theta} + s_{\phi}\dot{\theta}}{c_{\theta}^2} & \frac{-\dot{\phi}s_{\phi}t_{\theta} + c_{\phi}\dot{\theta}}{c_{\theta}^2} \\ 0 & -\dot{\phi}s_{\phi} & -\dot{\phi}c_{\phi} \\ 0 & \frac{\dot{\phi}c_{\phi}c_{\theta} + s_{\phi}\dot{\theta}s_{\theta}}{c_{\theta}^2} & \frac{-\dot{\phi}s_{\phi}c_{\theta} + c_{\phi}\dot{\theta}}{c_{\theta}^2} \end{bmatrix}\quad (3.105)$$

Ficando então a equação de movimento no referencial inercial:

$$M_{\eta}(\eta)\dot{\eta} + C_{\eta}(v, \eta)\dot{\eta} + D_{\eta}(v, \eta)\dot{\eta} + g_{\eta}(\eta) = \tau_{\eta}(\eta)\quad (3.106)$$

De seguida serão descritas as matrizes constituintes das equações de movimento. A matriz  $M$  é constituída pelos termos pertencentes á sua configuração enquanto corpo rígido  $M_{RB}$  e pelos termos de massa acrescentada  $M_A$ .  $M_{RB}$  é descrita da seguinte forma:

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & -mS(r_g^b) \\ mS(r_g^b) & I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_g & -my_g \\ 0 & m & 0 & -mz_g & 0 & mx_g \\ 0 & 0 & m & my_g & -mx_g & 0 \\ 0 & -mz_g & my_g & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_g & 0 & -mx_g & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_g & mx_g & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}\quad (3.107)$$

em que  $r_g^b = [x_g, y_g, z_g]^T$  representa o centro de gravidade do veículo em relação ao referencial do

corpo e  $I_o$  representa o tensor de inércia. A matriz  $M_A$  é descrita da seguinte forma:

$$M_A = - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{w}} & X_{\dot{p}} & X_{\dot{q}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{w}} & Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{q}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{u}} & Z_{\dot{v}} & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{p}} & Z_{\dot{q}} & Z_{\dot{r}} \\ K_{\dot{u}} & K_{\dot{v}} & K_{\dot{w}} & K_{\dot{p}} & K_{\dot{q}} & K_{\dot{r}} \\ M_{\dot{u}} & M_{\dot{v}} & M_{\dot{w}} & M_{\dot{p}} & M_{\dot{q}} & M_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{w}} & N_{\dot{p}} & N_{\dot{q}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Se o AUV tiver três planos de simetria, os elementos fora da diagonal podem ser ignorados. A matriz  $C$  contém os termos centrípetos e de Coriolis relativos ao corpo rígido  $C_{RB}(v)$  e à massa acrescentada  $C_A(v)$ .  $C_{RB}(v)$  é descrita da seguinte forma:

$$C_{RB}(v) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -m\mathbf{S}(v_1) - m\mathbf{S}(v_2)\mathbf{S}(\mathbf{r}_g^b) \\ -m\mathbf{S}(v_1) + m\mathbf{S}(\mathbf{r}_g^b)\mathbf{S}(v_2) & -\mathbf{S}(I_o v_2) \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Por sua vez,  $C_A(v)$  tem a seguinte composição:

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 & -b_3 & b_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_3 & 0 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

com:

$$a_1 = X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{p}}p + X_{\dot{q}}q + X_{\dot{r}}r$$

$$a_2 = Y_{\dot{u}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{q}}q + Y_{\dot{r}}r$$

$$a_3 = Z_{\dot{u}}u + Z_{\dot{v}}v + Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{p}}p + Z_{\dot{q}}q + Z_{\dot{r}}r$$

$$b_1 = K_{\dot{u}}u + K_{\dot{v}}v + K_{\dot{w}}w + K_{\dot{p}}p + K_{\dot{q}}q + K_{\dot{r}}r$$

$$b_2 = M_{\dot{u}}u + M_{\dot{v}}v + M_{\dot{w}}w + M_{\dot{p}}p + M_{\dot{q}}q + M_{\dot{r}}r$$

$$b_3 = N_{\dot{u}}u + N_{\dot{v}}v + N_{\dot{w}}w + N_{\dot{p}}p + N_{\dot{q}}q + N_{\dot{r}}r$$

A matriz de amortecimento  $D(v)$  pode ser separada em duas componentes, uma não-linear e outra linear, na seguinte forma:

$$D(v) = D_\ell + D_q(v) \quad (3.111)$$

com

$$D_\ell = - \begin{bmatrix} X_u & X_v & X_w & X_p & X_q & X_r \\ Y_u & Y_v & Y_w & Y_p & Y_q & Y_r \\ Z_u & Z_v & Z_w & Z_p & Z_q & Z_r \\ K_u & K_v & K_w & K_p & K_q & K_r \\ M_u & M_v & M_w & M_p & M_q & M_r \\ N_u & N_v & N_w & N_p & N_q & N_r \end{bmatrix} \quad (3.112)$$



e com  $D_q$  a representar o amortecimento quadrático. Ambas os termos estão presentes nas duas matrizes, podem ser obtidos experimentalmente/empiricamente.

O vector de forças e momentos de restabelecimento  $g(\eta)$  é composto pela soma das componentes da gravidade e flutuabilidade. A força da gravidade actua através do centro de gravidade descrito por  $r_g^b = [x_g, y_g, z_g]^T$  enquanto que a força de flutuabilidade actua no centro de flutuabilidade  $r_b^b = [x_b, y_b, z_b]^T$ . As magnitudes destas forças são calculadas com recurso às seguintes expressões:

$$W = mg, B = \rho g \nabla \quad (3.113)$$

Onde  $m$  é a massa do veículo,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\rho$  é a densidade da água e  $\nabla$  é o volume de fluido deslocado pelo veículo. A força da gravidade  $f_g^n$  e a força de flutuabilidade  $f_b^n$  no referencial inercial são dadas por:

$$f_g^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix}, f_b^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Como as equações do movimento são relativas ao referencial fixo ao corpo, então,

$$f_g^b = R_b^{nT} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix}, f_b^b = R_b^{nT} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$g(\eta)$  pode então ser calculado da seguinte forma, no referencial fixo ao corpo:

$$g(\eta) = \begin{bmatrix} f_g^b - f_b^b \\ r_g^b \times f_g^b - r_b^b \times f_b^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (W - B)s\theta \\ -(W - B)c\theta s\phi \\ -(W - B)c\theta c\phi \\ -(y_g W - y_b B)c\theta c\phi + (z_g W - z_b B)c\theta c\phi \\ (z_g W - z_b B)s\theta + (x_g W - x_b B)c\theta c\phi \\ -(x_g W - x_b B)c\theta s\phi - (y_g W - y_b B)s\theta \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Para o caso de o sistema possuir um sistema de flutuabilidade variável com variação de volume, a força  $B$  pode ser dada por:

$$B = \rho g \nabla_0 + \rho g \int_0^t \dot{\nabla}_{dt} = \rho g \left( \nabla_0 + \int_0^t \dot{\nabla}_{dt} \right) \quad (3.117)$$

Onde  $\nabla_0$  representa o volume inicial do veículo e  $\dot{\nabla}$  representa a variação volumétrica do veículo. Uma variação de volume pode ter a seguinte equação:

$$\dot{\nabla} = C_{fill} \delta_{fill} - C_{vent} \delta_{vent} \quad (3.118)$$

em que  $C_{fill}$  é taxa de enchimento do fluido utilizado para variar o volume,  $C_{vent}$  é taxa de exaustão

do fluido utilizado para variar o volume e  $\delta_{\text{fill}}/\delta_{\text{vent}}$  são variáveis binárias mutuamente exclusivas /que representam que operação o sistema de flutuabilidade variável esta a efectuar [75][76]. As forças aplicadas no *AUV* podem ser expressas como sendo forças e momentos de propulsão  $\tau_p$  e forças e momentos de interconexão  $\tau_{\text{intercon}}$ , de interconexões realizadas com elementos de força. As forças de propulsão podem ser descritas por:

$$\tau_p = \sum_{i=1}^n \tau_{p,i}, \tau_{p,i} = \begin{bmatrix} f_{p,i} \\ r_{p,i} \times f_{p,i} \end{bmatrix}, f_{p,i} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_k \end{bmatrix} F_{p,i} \quad (3.119)$$

Em que  $\tau_p$  é igual à soma das forças e momentos de propulsão  $\tau_{p,i}$  provenientes do propulsor  $i$ . Por sua vez, as forças e momentos de propulsão  $\tau_{p,i}$  são subdivididas em forças  $f_{p,i}$  e momentos dados por  $r_{p,i} \times f_{p,i}$ , em que  $r_{p,i}$  é o ponto de aplicação da força do propulsor respectivo. Por último, as forças  $f_{p,i}$  São dadas pela magnitude  $F_{p,i}$  e pelas variáveis  $\delta$ , que representam a direcção da força. As forças de interconexão já foram explicadas na sua respectiva secção adequadamente. Contudo, se o ponto onde actuam não for o centro de massa, então, da mesma forma que as forças de propulsão, estas forças geram momentos de acção no veículo.

### 3.4 Resumo

Neste capítulo foi revista a modelação matemática dos sistemas multicorpo, em particular de sistemas multicorpo com restrições e outros elementos utilizados na modelação, bem como um tipo de sistema, o *AUV*, que integrará nos próximos capítulos o sistema a estudar.

## Capítulo 4

# Modelação do Sistema

Um sistema robótico multicorpo interconectado pode ser modelado com recurso a vários métodos, já abordados na secção 3.2.4. A escolha de um método concreto para modelar um sistema deste tipo prende-se particularmente no tipo de fenómenos que se pretende modelar. Um *UVMS* normalmente é modelado com a recurso às equações de Newton-Euler, por possuir uma topologia em corrente e poder assim gozar das suas formulações recursivas [25]. Outros sistemas como 2.10, apesar de serem constituídos por vários veículos interconectados rigidamente, fazem uso de certas propriedades cinemáticas, sendo modelados em *clusters* [26]. Neste capítulo irá ser utilizado o método de Udwadia-Kalaba por diversos motivos. O primeiro é a sua capacidade de inclusão de todos os tipos de restrição. Outro motivo é a possibilidade de incluir restrições redundantes e não haver preocupações na escolha de coordenadas generalizadas. Por fim, havendo já precedentes específicos para o tipo de sistema que se quer modelar, que é um sistema robótico subaquático [38], seleccionou-se este método [77]. Neste capítulo irá então ser estendido este método e, adicionalmente, serão modelados os *AUVs* que irão constituir o sistema e as suas interconexões.

### 4.1 Modelação geral de um sistema robótico multicorpo interconectado com interconexões via elementos de força e restrições

As equações de Udwadia-Kalaba implicam a utilização de coordenadas generalizadas na sua formulação. Contudo, em [78] foi estas equações foram reformuladas para quasi-velocidades e quasi-acelerações, que figuram nas equações de movimento dos *AUVs* como  $v$  e  $\dot{v}$ , respectivamente, relacionadas com as coordenadas e velocidades generalizadas pela seguinte expressão:

$$\dot{\eta} = J(\eta)v \quad (4.1)$$

Assim sendo, têm-se que:

$$M\dot{v}_{uncons} = S \quad (4.2)$$

em que  $\dot{v}_{uncons}$  é o vector de acelerações no referencial fixo do sistema e  $S$  é o vector das forças totais a actuar no sistema. Analogamente á equação 3.73, a aceleração do sistema com restrições

$\dot{v}_{\text{cons}}$  é relacionada com as forças totais e as forças provenientes das restrições  $S_{\text{cons}}$  na seguinte expressão:

$$M\dot{v}_{\text{cons}} = S + S_{\text{cons}} \quad (4.3)$$

As restrições estão todas contidas na seguinte expressão:

$$A(\eta, v)\dot{v} = b(\eta, v) \quad (4.4)$$

Assim sendo, as forças de restrição são calculadas analiticamente por:

$$S_c = M^{1/2} \left( AM^{-1/2} \right)^\dagger (b - A\dot{v}_{\text{uncons}}) \quad (4.5)$$

O que leva a:

$$\dot{v}_{\text{cons}} = \dot{v}_{\text{uncons}} + M^{-1/2} \left( AM^{-1/2} \right)^\dagger (b - A\dot{v}_{\text{uncons}}) \quad (4.6)$$

As forças do sistema sem restrições  $S$  são dadas por:

$$\dot{v}_{\text{uncons}} = M^{-1} (\tau - C(v_{\text{cons}})v_{\text{cons}} + D(v_{\text{cons}})v_{\text{cons}} + g(\eta_{\text{cons}})) \quad (4.7)$$

De notar que isto são representações do sistema inteiro, com os vectores a representar todas as coordenadas do sistema e as matrizes como sendo diagonal em bloco. Para exemplificar, considere-se o vector das coordenadas generalizadas  $\eta_{\text{cons}}$  do sistema com restrições,

$$\eta_{\text{cons}} = \begin{bmatrix} \eta_{\text{cons}, 1} \\ \eta_{\text{cons}, 2} \\ \vdots \\ \eta_{\text{cons}, N} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Podendo-se ver que o vector  $\eta_{\text{cons}}$  possui dimensão  $(N \times N_v) \times 1$ , em que  $N_v$  é o número de coordenadas inerciais de cada veículo  $i$  e  $N$  o número de veículos do sistema. A matriz  $M$  por sua vez têm a seguinte expressão:

$$M = \begin{bmatrix} M^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M^{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & M^N \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

em que cada matriz  $M^i$  corresponde a um veículo. Tendo então as expressões já definidas, pode-se definir então as equações do sistema no todo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_{cons} &= J(\eta_{cons}) v_{cons} \\ \dot{v}_{uncons} &= M^{-1} (\tau - C(v_{cons}) v_{cons} + D(v_{cons}) v_{cons} + g(\eta_{cons})) \\ \dot{v}_{cons} &= \dot{v}_{uncons} + M^{-1/2} (AM^{-1/2})^\dagger (b - A\dot{v}_{uncons})\end{aligned}\quad (4.10)$$

Na próxima secção tratar-se-á então da modelação de um AUV em concreto.

## 4.2 Modelação de um AUV

A modelação de AUVs em concreto já foi tratada na Secção 3.3.1. Contudo, nesta secção irá ser modelado um AUV exemplo para integrar as simulações do próximo capítulo e também para exemplificar as considerações a ter quando se modela um AUV específico. A modelação a seguir demonstrada dos AUVs segue dois princípios: o primeiro é o facto dos AUVs serem todos iguais, ou seja, o sistema robótico multicorpo interconectado irá ser homogéneo. O segundo princípio é considerar o AUV a modelar realista e simples, pelo que o modelo foi baseado em [79] e [80], sistemas reais com geometria esférica para simplificar alguns parâmetros como se irá ver de seguida.

### 4.2.1 Características geométricas e inerciais

Considere-se um AUV esférico, com massa  $m$  e volume  $V$ . Uma das considerações a ter quando se concebe um veículo deste tipo é se o mesmo possui flutuabilidade positiva, negativa ou neutra. Para motivos de simplicidade e de conveniência considere-se esse mesmo AUV com flutuabilidade neutra. Isto significa que:

$$W = B \leftrightarrow mg = \rho g \nabla \leftrightarrow m = \rho \nabla \quad (4.11)$$

o que implica que a sua massa seja igual ao produto da densidade da água com o volume do fluido deslocado pelo corpo. Assumindo uma densidade de  $1000 \text{ kg m}^{-3}$  e uma massa de  $50 \text{ kg}$ , para o AUV possuir flutuabilidade neutra têm que possuir um volume de  $0.05 \text{ m}^3$ , ou seja  $50 \text{ dm}^3$  ou litros ( $\ell$ ). Como o AUV é de geometria esférica pode-se obter o seu raio através da fórmula:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \pi V} \cong 0.2286 \text{ m} \quad (4.12)$$

Por sua vez, o tensor de inércia para uma esfera é calculado da seguinte forma:

$$I_o = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Considere-se ainda o vector do centro de massa  $r_g^b$  e o vector do centro de flutuabilidade  $r_b^b$  relativo ao referencial fixo ao corpo como sendo:

$$r_g^b = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad r_b^b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.05 \end{bmatrix} \text{ m} \quad (4.14)$$

Note-se que numa esfera com densidade de massa uniforme o centro de massa e o centro de flutuabilidade coincidem. Contudo, para o modelo possuir momentos de restabelecimento, que ocorrem naturalmente na maior parte dos corpos e para simplificar as contas através de um referencial fixo no centro de massa escolheu-se estes valores. Com estes dados é possível então calcular a matriz de inercia do sistema relativa ao corpo rígido  $M_{RB}$  e a matriz de Coriolis e dos termos centrípetos  $C_{RB}(v)$ .

#### 4.2.2 Características hidrodinâmicas

Para calcular a matriz de massa acrescentada  $M_A$  de uma esfera, bem como a matriz  $C_A$ , considera-se apenas os termos diagonais relativos aos movimentos translacionais, ou seja [81]:

$$X_{\dot{u}} = Y_{\dot{v}} = Z_{\dot{w}} = -\frac{2}{3} \rho_{\text{fluido}} \pi r^3 \quad (4.15)$$

$$K_{\dot{p}} = M_{\dot{q}} = N_{\dot{r}} = 0$$

Resta calcular a matriz de atrito viscoso  $D(v)$ , dada pela seguinte expressão:

$$D(v) = D_\ell + D_q(v) \quad (4.16)$$

em que  $D_\ell$  contem os termos lineares e  $D_q(v)$  os termos quadráticos da matriz  $D(v)$ . Por motivos de simplificação, considere-se  $D_\ell$  desprezável. O amortecimento  $D_q(v)$  é dado pela seguinte matriz:

$$D_q(v) = - \begin{bmatrix} X_{u|u}|u| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{v|v}|v| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{w|w}|w| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{p|p}|p| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{q|q}|q| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{r|r}|r| \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Com os elementos da sua diagonal a obedecerem á seguinte expressão:

$$f_d = -\frac{1}{2} \rho C_D A_{\text{sec}} V_{el} |V_{el}| \quad (4.18)$$

com  $f_d$  sendo a força resultante do amortecimento viscoso,  $C_D$  o coeficiente de amortecimento viscoso,  $A_{\text{sec}}$  a área da secção do veiculo e  $V_{el}$  é um vector de velocidade arbitrário. O cálculo de

$C_D$  implica calcular o número de Reynolds, dado pela fórmula:

$$Re = \frac{V_{\text{fluid}} D}{\nu_{\text{kin}}} \quad (4.19)$$

onde  $V_{\text{fluid}}$  é a velocidade do fluido,  $D$  é o diâmetro da esfera e  $\nu_{\text{kin}}$  é a viscosidade cinemática. Para efeitos de simulação, seleccionou-se o valor 0.46 para  $C_D$ . Por fim, a área da secção é dada por  $\pi r^2$ .

Os termos da matriz da matriz  $D_q(v)$  são calculados então com a seguinte expressão:

$$X_{u|u} = Y_{v|v} = Z_{w|w} = -\frac{1}{2} \rho C_D A_{\text{sec}} \quad (4.20)$$

com os elementos relativos ao movimento rotacional desprezados [82].

### 4.2.3 Características de actuação

A actuação do AUV é assegurada através de um jacto de água e da variação da sua fluutuabilidade. Para efeitos de simplicidade considere-se que o AUV consegue variar a sua fluutuabilidade de forma instantânea, comparado com a dinâmica do restante sistema, ou seja, a sua fluutuabilidade é dada por:

$$B = \rho g \nabla_0 + \rho g \nabla_{\text{var}} \quad (4.21)$$

em que  $\nabla_{\text{var}}$  é o volume variado. A actuação proveniente do jacto pode ser dada pela seguinte formula:

$$\tau_p = \begin{bmatrix} f_p \\ r_p \times f_p \end{bmatrix}, f_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} F_p, r_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

## 4.3 Modelação de uma Interconexão entre Corpos

As interconexões do sistema podem consistir em ligações via elementos de força, articulações ou ambos. A título de exemplo será modelada uma interconexão baseada em [83], com ligações através de um paralelo mola-amortecedor e restrições que se verificam em ligações de corpos via articulações prismáticas. Outras interconexões podem ser encontradas em [84].

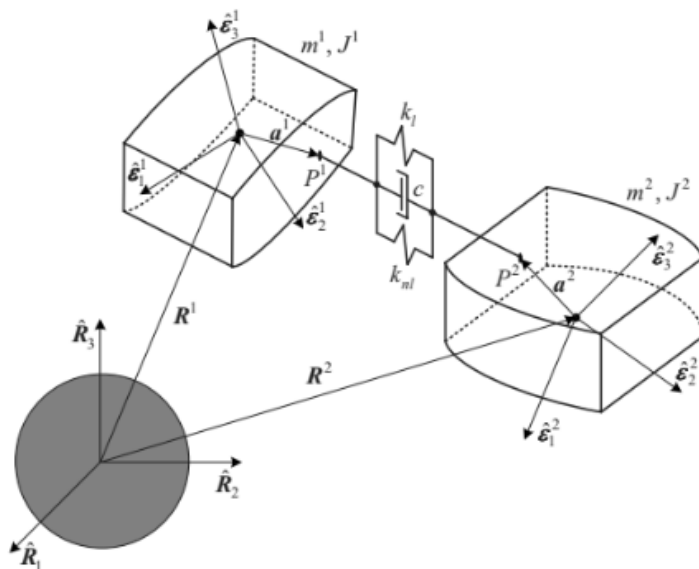


Figura 4.1: Uma nave espacial multicorpo constituída por dois corpos rígidos (satélites) interconectados por um paralelo mola-amortecedor, com liberdade de translação e rotação descrita pelo vector que os liga. Retirado de [83].

### 4.3.1 Articulação Prismática

Uma articulação prismática contém apenas um grau de liberdade translacional, que será neste caso o vector  $d_{ij}$ . Assim sendo, as restrições para a modelar implicarão a restrição total da sua orientação e a restrição de toda a translação, exceptuando a translação no eixo definido por  $d_{ij}$ . Adicionalmente, esta articulação terá no seu eixo de translação um paralelo mola-amortecedor, podendo assim modelar uma variedade de interconexões.

#### 4.3.1.1 Mola-Amortecedor em Paralelo

Como foi demonstrado na Secção 3.2.5, a expressão dos elementos de força a actuar em dois corpos é:

$$f_{sda,i} = (\|f_{s,i}\| + \|f_{d,i}\| + \|f_{a,i}\|) \hat{d}_{ij} \equiv -f_{sda,j} \quad (4.23)$$

Para um paralelo mola-amortecedor fica só:

$$f_{sd,i} = (\|f_{s,i}\| + \|f_{d,i}\|) \hat{d}_{ij} \equiv -f_{sd,j} \quad (4.24)$$

No sistema a modelar, pode-se expressar então o paralelo como:

$$\tau_{sd} = (\|f_{s,i}\| + \|f_{d,i}\|) \hat{d}_{ij} \quad (4.25)$$



com:

$$\widehat{d}_{ij} = \frac{d_{ij}}{L}, d_{ij} = P_j^n - P_i^n = \eta_{1,cons,j} + R_{b,j}^n r_{p,j}^b - \eta_{1,cons,i} - R_{b,i}^n r_{p,i}^b \quad (4.26)$$

em que  $r_{p,j}^b$  é um ponto de conexão no corpo  $j$ ,  $\eta_{1,cons,j}$  são as coordenadas de posição do corpo  $j$  e  $R_{b,j}^n$  é a matriz de rotação do corpo  $j$ . O resto das fórmulas são análogas.

### 4.3.2 Restrições de Orientação

A restrição de orientação da rotação de um veículo relativo a outro pode ser dada pela seguinte expressão:

$$q_{b,i} \otimes (q_{b,j})^* = q_{b,ij} \quad (4.27)$$

em que  $\otimes$  representa o operador de produto entre quaterniões,  $q_{b,i}$  representa o quaternião do veículo  $i$  e  $q_{b,ij}$  é o quaternião que representa a rotação relativa entre o referencial fixo ao corpo do veículo  $i$  e  $j$ , sendo uma quantidade constante[84]. Para se expressar esta restrição com recurso à equação 4.4 é necessário derivar a mesma em ordem ao tempo duas vezes, o que resulta em:

$$\ddot{q}_{b,i} \otimes (q_{b,j})^* + q_{b,i} \otimes (\ddot{q}_{b,j})^* + 2(\dot{q}_{b,i} \otimes (\dot{q}_{b,j})^*) = 0 \quad (4.28)$$

Antes de continuar, convém reintroduzir a matriz  $H_i$  e outra  $\bar{H}_i$ , dadas por:

$$\begin{aligned} H_i &= [-q_i, \quad q_{0,i} \mathbf{I}_{3 \times 3} - S(q_i)] \\ \bar{H}_i &= [-q_i, \quad q_{0,i} \mathbf{I}_{3 \times 3} + S(q_i)] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Que reflectem as relações para um qualquer quaternião  $q_b$  :

$$\begin{aligned} \omega_{b/n}^b &= 2H \dot{q}_b \\ \omega_{b/n}^n &= 2\bar{H} \dot{q}_b \end{aligned} \quad (4.30)$$

Com o auxílio destas matrizes, é possível exprimir a equação 4.27 como sendo:

$$\begin{aligned} q_{b,i} \otimes (q_{b,j})^* &= \begin{bmatrix} q_{b,j}^T \\ \bar{H}_j \end{bmatrix} q_{b,i} = \mathbf{G}_j q_{b,i} \\ &= \begin{bmatrix} q_{b,i}^T \\ -\bar{H}_i \end{bmatrix} q_{b,j} = \mathbf{G}_i q_{b,j} \end{aligned} \quad (4.31)$$

A parcela  $2(\dot{q}_{b,i} \otimes (\dot{q}_{b,j})^*)$  têm subsequentemente a seguinte expressão:

$$2(\dot{q}_{b,i} \otimes (\dot{q}_{b,j})^*) = 2 \begin{bmatrix} \dot{q}_{b,j}^T \\ \bar{H}_j \end{bmatrix} \dot{q}_{b,i} = 2\dot{\mathbf{G}}_j \dot{q}_{b,i} \quad (4.32)$$

Chegando a este ponto, convém voltar a lembrar que o objectivo destas derivações é expressar a restrição na forma 4.4. Ora, como até agora têm sido tudo calculado com os quaterniões dos veículos  $i$  e  $j$ , que são coordenadas inerciais dos veículos. Assim sendo, pode-se fazer a mudança

para as coordenadas fixas ao corpo da seguinte forma:

$$\ddot{q}_b = \mathbf{T}_q \dot{\omega}_{b/n}^b + \dot{\mathbf{T}}_q \omega_{b/n}^b \quad (4.33)$$

Voltando então à equação 4.32, pode-se escrever esta da seguinte forma:

$$2(\dot{q}_{b,i} \otimes (\dot{q}_{b,j})^*) = 2 \begin{bmatrix} (\mathbf{T}_{q,j} \omega_{b,j/n}^{b,j})^T \\ \dot{H}_j \end{bmatrix} \mathbf{T}_{q,i} \omega_{b,i/n}^{b,i} = 2\dot{\mathbf{G}}_j \mathbf{T}_{q,i} \omega_{b,i/n}^{b,i} \quad (4.34)$$

Sendo as restantes parcelas dadas por:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{b,i} \otimes (q_{b,j})^* &= \mathbf{G}_j \mathbf{T}_{q,i} \dot{\omega}_{b,i/n}^{b,i} + \mathbf{G}_j \mathbf{T}_{q,i} \omega_{b,i/n}^{b,i} \\ q_{b,i} \otimes (\ddot{q}_{b,j})^* &= \mathbf{G}_i \mathbf{T}_{q,j} \dot{\omega}_{b,j/n}^{b,j} + \mathbf{G}_i \mathbf{T}_{q,j} \omega_{b,j/n}^{b,j} \end{aligned} \quad (4.35)$$

O que permite então finalmente a escrita da matriz  $A(\eta, \nu)$  e do vector  $b(\eta, \nu)$ , que denominaremos de  $A_o$  e  $b_o$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{G}_j \mathbf{T}_{q,i} & \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{G}_i \mathbf{T}_{q,j} \end{bmatrix} \\ b_o &= -\mathbf{G}_i \mathbf{T}_{q,j} \omega_{b,j/n}^{b,j} - (\mathbf{G}_j \mathbf{r}_{q,i} + 2\dot{\mathbf{G}}_j \mathbf{T}_{q,i}) \omega_{b,i/n}^{b,i} \end{aligned} \quad (4.36)$$

### 4.3.3 Restrições de Translação

Uma forma de definir matematicamente que só pode haver translação num eixo é através do estabelecimento da ortogonalidade desse eixo em relação a outros dois vectores, utilizando, por exemplo, dois produtos internos do vector que define o eixo e dois versores do referencial fixo ao corpo de um dos veículos, através dos produtos internos:

$$\begin{aligned} d_{ij} \cdot n_e &= 0 \\ d_{ij} \cdot n_d &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

em que  $n_e$  e  $n_d$  são os versores do referencial fixo ao veículo  $j$ , como se pode ver na seguinte figura.

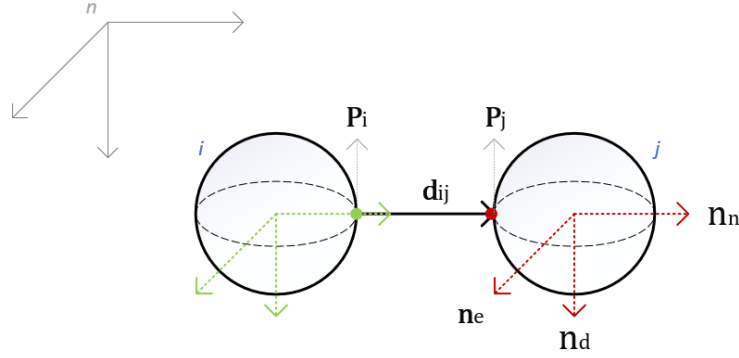


Figura 4.2: Dois AUVs com uma restrição de translação no eixo  $d_{ij}$ . Note-se que  $d_{ij}$  é perpendicular aos versores  $n_e$  e  $n_d$  do veículo  $j$ .

Como a restrição é igual, só mudando o versor, será feita de seguida a dedução da matriz  $A_t$  e do vector  $b_t$  para uma das restrições atrás mencionadas. A restrição 4.37 pode ser escrita da seguinte forma:

$$d_{ij}^T n_e = 0 \quad (4.38)$$

Para poder ser descrita da forma pretendida precisa de ser derivada duas vezes temporalmente, ficando:

$$\ddot{d}_{ij}^T n_e + 2\dot{d}_{ij}^T \dot{n}_e + d_{ij}^T \ddot{n}_e = 0 \quad (4.39)$$

Por conveniência e por motivos que serão abordados já de seguida pode-se ainda escrever:

$$n_e^T \ddot{d}_{ij} + d_{ij}^T \ddot{n}_e = -2\dot{d}_{ij}^T \dot{n}_e \quad (4.40)$$

Os vectores e as suas derivadas temporais são dados de seguida:

$$\begin{aligned} d &= \eta_{1,j} + R_{b,j}^n r_{p,j}^b - \eta_{1,i} + R_{b,i}^n r_{p,i}^b \\ \dot{d} &= \dot{\eta}_{1,j} + \omega_{b,j/n}^n \times r_{p,j}^n - \dot{\eta}_{1,i} - \omega_{b,i/n}^n \times r_{p,i}^n \\ \ddot{d} &= \ddot{\eta}_{1,j} + \dot{\omega}_{b,j/n}^n \times r_{p,j}^n + \omega_{b,j/n}^n \times (\omega_{b,j/n}^n \times r_{p,j}^n) - \ddot{\eta}_{1,i} - \dot{\omega}_{b,i/n}^n \times r_{p,i}^n \\ &\quad - \omega_{b,i/n}^n \times (\omega_{b,i/n}^n \times r_{p,i}^n) \\ \dot{n}_e &= S(\omega_{b,j/n}^n) R_{b,j}^n n_e^b = S(R_{b,j}^n \omega_{b,j/n}^b) R_{b,j}^n n_e^b \\ \ddot{n}_e &= \dot{\omega}_{b,j/n}^n \times n_{b,j/n}^n \times (\omega_{b,j/n}^n \times n_e^n) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Para ser possível obter a equação 4.4, é necessário colocar as velocidades fixas ao corpo em evidência, isto é, tem que ser possível obter os coeficientes do seguinte vector:

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{v}_i & \dot{v}_j \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{v}_{1,i} & \dot{\omega}_{b,i}^i & \dot{v}_{1,j} & \dot{\omega}_{b,j}^{b,j} \end{bmatrix}^T \quad (4.42)$$

Note-se que as derivadas de segunda ordem dos vectores contêm as quantidades vectoriais atrás referidas. Finalmente, falta passar as equações para os seus respectivos referenciais fixos ao corpo,

através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{b,j/n}^n &= \dot{R}_{b,j}^n \omega_{b,j/n}^{b,j} + R_{b,j}^n \dot{\omega}_{b,j/n}^{b,j} = S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^{n,j} \omega_{b,j/n}^{b,j} + R_{b,j}^n \dot{\omega}_{b,j/n}^{b,j} \\ \dot{\eta}_{1,j} &= R_{b,j}^n v_{1,j} \\ \dot{\eta}_{1,j} &= \dot{R}_{b,j}^n v_{1,j} + R_{b,j}^n \dot{v}_{1,j} = S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^n v_{1,j} + R_{b,j}^n \dot{v}_{1,j}\end{aligned}\quad (4.43)$$

Substituindo:

$$\begin{aligned}\ddot{d} &= S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^n v_{1,j} + R_{b,j}^n \dot{v}_{1,j} - S\left(r_{p,j}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^{n,j} \omega_{b,j/n}^{b,j} + R_{b,j}^n \dot{\omega}_{b,j/n}^{b,j}\right) \\ &\quad + S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) r_{p,j}^n\right) - \left(S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) R_{b,i}^n v_{1,i} + R_{b,i}^n v_{1,i}\right) \\ &\quad + S\left(r_{p,i}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) R_{b,i}^n \omega_{b,i/n}^{b,i} + R_{b,i}^n \dot{\omega}_{b,i/n}^{b,i}\right) - S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) r_{p,i}^n\right) \\ \ddot{n}_e &= -S\left(n_e^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^{n,j} + R_{b,j}^n \dot{\omega}_{b,j/n}^{b,j}\right) + S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) n_e^n\right)\end{aligned}\quad (4.44)$$

A equação 4.40 com os termos reorganizados ficará então:

$$\begin{aligned}n_e^T R_{b,j}^n \dot{v}_{1,j} - n_e^T S\left(r_{p,j}^n\right) R_{b,j}^n \dot{\omega}_{b,j/n}^{b,j} + n_e^T R_{b,i}^n \dot{v}_{1,i} \\ + n_e^T S\left(r_{p,i}^n\right) R_{b,i}^n \dot{\omega}_{b,i/n}^{b,i} + d_{ij}^T R_{b,j}^n \dot{\omega}_{b,j/n}^{b,j} = \\ = -2d_{ij}^T \dot{n}_e - n_e^T \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^n v_{1,j} - S\left(r_{p,j}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^n \omega_{b,j/n}^{b,j}\right) \right. \\ \left. + S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) r_{p,j}^n\right) - \left(S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) R_{b,i}^n v_{1,i}\right) \right. \\ \left. + S\left(r_{p,i}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) R_{b,i}^n \omega_{b,i/n}^{b,i}\right) - S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) r_{p,i}^n\right) \right) \\ - d_{ij}^T \left(-S\left(n_e^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^n \omega_{b,j/n}^{b,j}\right) + S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) n_e^n\right)\right)\end{aligned}\quad (4.45)$$

O que resulta numa matriz e num vector:

$$A_t = \begin{bmatrix} n_e^T R_{b,i}^n & n_e^T S\left(r_{p,i}^n\right) & n_e^T R_{b,j}^n & d_{ij}^T R_{b,j}^n - n_e^T S\left(r_{p,j}^n\right) R_{b,j}^n \end{bmatrix}\quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}b_t &= -2d_{ij}^T \dot{n}_e - n_e^T \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^n v_{1,j} - S\left(r_{p,j}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^n \omega_{b,j/n}^{b,j}\right) \right. \\ &\quad \left. + S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) r_{p,j}^n\right) - \left(S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) R_{b,i}^n v_{1,i}\right) \right. \\ &\quad \left. + S\left(r_{p,i}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) R_{b,i}^n \omega_{b,i/n}^{b,i}\right) - S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,i/n}^n\right) r_{p,i}^n\right) \right) \\ &\quad - d_{ij}^T \left(-S\left(n_e^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) R_{b,j}^n \omega_{b,j/n}^{b,j}\right) + S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) \left(S\left(\omega_{b,j/n}^n\right) n_e^n\right)\right)\end{aligned}\quad (4.47)$$

Como se pode ver pelas expressões anteriores, uma das grandes desvantagens das equações de Udwadia-Kalaba prende-se na obtenção das expressões das derivadas.

Obtidas todas as restrições de orientação e de translação, escreve-se a matriz  $A$  e o vector  $b$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} A_o & A_{t,1} & A_{t,2} \end{bmatrix}^T \\ b &= \begin{bmatrix} b_o & b_{t,1} & b_{t,2} \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (4.48)$$

em que  $A_o$ ,  $A_{t,1}$  e  $A_{t,2}$  correspondem às matrizes provenientes das restrições de orientação e de translação de um de dois versores conforme o subscrito. Os vectores  $b_o$ ,  $b_{t,1}$  e  $b_{t,2}$  idem.

## 4.4 Sistema Final

Tendo então o sistema modelado, com os *AUVs* e as interconexões já parametrizadas, é possível então passar para a simulação do sistema. No Apêndice A estão contidos todos os valores numéricos do *AUV* modelado, bem como parâmetros relativos à interconexão. Considere-se o caso mais simples: dois *AUVs* interconectados pela articulação prismática anteriormente abordada, representado na seguinte figura:

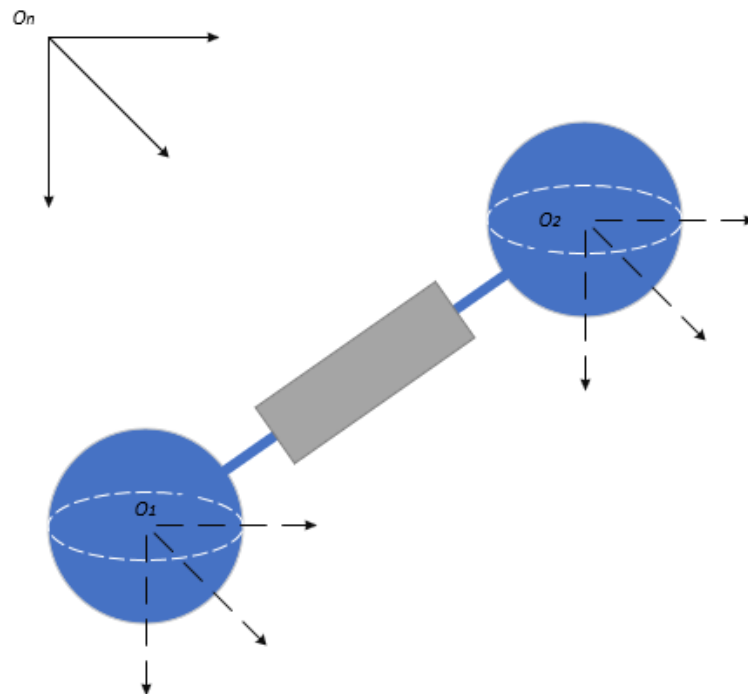


Figura 4.3: Sistema de dois *AUVs* interconectados por uma articulação prismática com um paralelo mola-amortecedor na sua direcção livre.

Pode-se considerar, face à sua morfologia, que o sistema é análogo a um robô móvel com tracção diferencial. O sistema robótico consegue então deslocar-se planarmente e em profundidade, apesar de cada robô individual ter apenas dois graus de liberdade translacionais. Isto reforça a ideia de versatilidade por detrás da filosofia dos robôs modularmente reconfiguráveis referida em 2. O facto de os robôs serem todos iguais e possuírem um numero reduzido de actuadores também reforça a ideia de uma massificação de soluções robóticas de baixo custo modulares, sendo estas mais baratas que soluções específicas e com versatilidade suficiente para satisfazer os requisitos de aplicações generalizadas.

## **4.5 Resumo**

Neste capítulo utilizou-se as técnicas para modelar um sistema robótico multicorpo interconectado completo, estabelecendo-se um modelo geral para qualquer sistema robótico multicorpo interconectado subaquático. De seguida modelou-se o robô integrante do sistema, sendo este sistema robótico multicorpo interconectado subaquático homogéneo, e as suas interconexões, que consistem na conjugação de elementos de força e restrições e/ou articulações.

## Capítulo 5

# Simulação do Modelo Desenvolvido

A simulação de sistemas multicorpo possui algumas particularidades que importa referir antes de se passar á simulação do sistema modelado no capítulo anterior. Primeiramente, importa referir que existe diversas ferramentas e software disponível para o efeito. Contudo, esse software muitas vezes não divulga ou explicita a forma como simula, ou seja, não indica que métodos utiliza, como por exemplo se utiliza as equações de movimento de Newton-Euler com restrições expressadas por equações algébricas, resolvendo depois o sistema de DAEs, ou ainda se utiliza as equações de Newton-Euler, resolvendo as equações algébricas simbolicamente para utilizar coordenadas generalizadas e resolver um sistema de ODE. Não se sabendo, efectivamente está-se a lidar com uma espécie de “caixa negra” quando se utiliza estes softwares. Como um dos objectivos desta Dissertação se prende na síntese de modelos para utilizar em controladores baseados em modelos, procurou-se a obtenção de um método de modelação que satisfizesse os requisitos para esse tipo de modelos. Como foi abordado anteriormente, a resolução de sistemas DAE pode levantar algumas dificuldades numéricas e é algo complexo projectar esquemas de controlo baseados nestes sistemas, apesar de possuírem a vantagem de conseguir modelar sistemas de forma mais geral do que sistemas com coordenadas generalizadas, por exemplo. A solução que se encontrou para satisfazer o compromisso de obter um método que representasse o nosso sistema e que fosse implementável em esquemas de controlo baseados em modelos foi a utilização das equações de Udwadia-Kalaba. Estas equações, no entanto, também têm a particularidade de poderem ter uma carga computacional elevada, devido ao facto de se ter que calcular uma matriz pseudo-inversa. Ainda assim, este método oferece a vantagem de não ter que escolher coordenadas generalizadas, não ter que resolver sistemas DAE, possuir redundância na formulação das restrições do sistema e ser um tanto ou algo modular, pelo simples facto de se ter única e exclusivamente que retirar ou colocar das matrizes definidas em 4.4 as sub-matrizes que representem as restrições que se pretendem retirar ou impôr no sistema. Para a simulação do sistema em si, a maior vantagem é na simulação consistir em resolver equações diferenciais ordinárias, que é o que será abordado na próxima secção.

## 5.1 Resolução de Sistemas de Equações Ordinárias

Como é sabido, um sistema de equações diferenciais ordinárias ou ODE (Ordinary Differential Equation) pode ser resolvido analiticamente. Contudo, para a maior parte dos sistemas que não seja linear, ou cuja uma aproximação linear seja insuficiente para a gama de funcionamento que se pretende, estes sistemas de equações são normalmente resolvidos numericamente. Existindo uma panóplia de métodos numéricos para resolver sistemas de ODEs, optou-se nesta Dissertação pela utilização do método de Runge-Kutta de 4ª Ordem, tendo este método um bom compromisso entre o esforço computacional e a precisão da sua solução aproximada, dando um erro de truncatura  $h^4$ , em que  $h$  é o seu passo[85].

## 5.2 Considerações acerca da deriva numérica de representações com recurso a quatérnions

O sistema modelado no capítulo anterior apresentava uma representação da sua orientação com recurso a quatérnions. Ora, apesar das suas vantagens, apresentadas na secção 3.2.2, os quatérnions requerem que a sua norma seja unitária, ou seja:

$$q_b^T q_b = 1 \quad (5.1)$$

A imposição desta condição pode ser feita numericamente de duas formas, segundo [69]. A primeira é normalizando o quatérnio a cada iteração  $k$  da simulação, da seguinte forma:

$$q_b(k+1) = \frac{q_b(k+1)}{\|q_b(k+1)\|} = \frac{q_b(k+1)}{\sqrt{q_b^T(k+1)q_b(k+1)}} \quad (5.2)$$

A segunda seria introduzir um termo de compensação em 3.96, ou seja:

$$\dot{q}_b = T_q(q) \omega_{b/n}^b + \frac{\gamma}{2} (1 - q_b^T q_b) q_b \quad (5.3)$$

Onde  $\gamma$  é um parâmetro de projecto, que reflecte a razão de convergência da normalização. Sendo ambos os métodos um tanto ou pouco heurísticos, optou-se pela primeira opção, que têm a grande vantagem de não ter que seleccionar um parâmetro que teria que ser seleccionado empiricamente, no fundo através de tentativa e erro.

## 5.3 Simulador implementado

Para simular o sistema foi necessário implementar um simulador para o efeito. O simulador foi baseado em [84] e implementado em MATLAB, consistindo no seguinte diagrama de blocos:



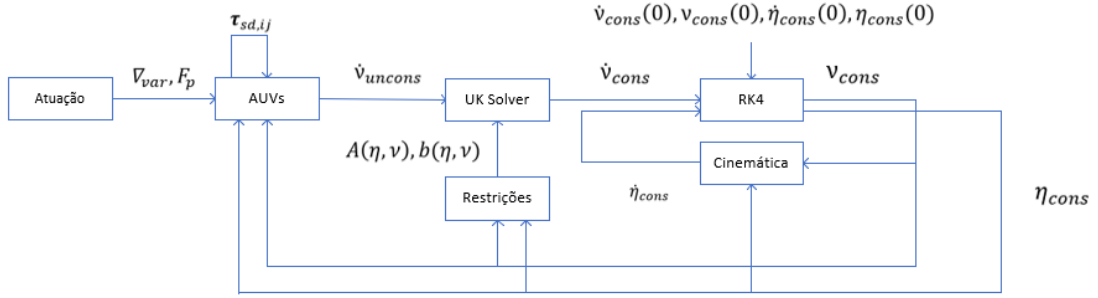


Figura 5.1: Simulador implementado para simular o sistema modelado.

O primeiro bloco, o bloco da actuação, gera as variações de volume  $\nabla_{var}$  e as magnitudes das forças de propulsão  $F_p$  para o bloco *AUVs*, no qual está implementada a equação 4.7. O bloco *AUVs*, por sua vez, possui as forças de interconexão  $\tau_{sd,ij}$  ilustradas, visto estas se exercerem entre *AUVs*. O bloco *AUVs* têm como saída a derivada temporal das velocidades fixas ao corpo do sistema sem restrições,  $\dot{v}_{uncons}$ . A saída do bloco *AUVs* coincide com a entrada de UK Solver, bloco que implementa a equação 4.6, devolvendo então na sua saída as velocidades fixas ao corpo,  $\dot{v}_{cons}$ . Para fazer o cálculo da equação 4.6 são necessários a matriz  $A(\eta, v)$  e o vector  $b(\eta, v)$ , gerados pelo bloco Restrições. O bloco Cinemática implementa a equação sendo então a sua entrada  $v_{cons}$  e a sua saída  $\dot{\eta}_{cons}$  e finalmente o bloco RK4 implementa o método de Runge-Kutta de 4ª ordem das seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{cons} &= J(\eta_{cons}) v_{cons} \\ \dot{v}_{cons} &= \dot{v}_{uncons} + M^{-1/2} \left( AM^{-1/2} \right)^\dagger (b - A\dot{v}_{uncons}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

com as condições iniciais:

$$[\dot{v}_{cons}(0) v_{cons}(0) \dot{\eta}_{cons}(0) \eta_{cons}(0)]^T \quad (5.5)$$

De seguida apresentam-se algumas simulações relevantes. Devido às características do sistema, algumas experiências análogas a robôs moveis com tracção diferencial podem ser efectuadas.

## 5.4 Simulação do Sistema

Nesta secção será simulado o sistema descrito em 4.4. Cada simulação durará um minuto (60 segundos), com um passo de  $h = 0.01$  s. Para cada simulação serão descritos os objectivos para a efectuar e a actuação dos *AUVs* utilizada para os concretizar. No Apêndice A figuram todos parâmetros utilizados na simulação, que apenas serão modificados se assim o for explicitado.

### 5.4.1 Translação de todo o sistema em linha recta, com variação da propulsão de um dos AUVs

O teste mais básico que se pode fazer ao sistema é impor-lhe forças de igual magnitude em ambos os AUVs e verificar se o seu movimento é equivalente. Após um determinado período de tempo, mudar-se-á a magnitude de um dos jactos, o que fará com que os AUVs descrevam uma trajectória curva. A seguinte figura mostra a magnitude dos jactos em função do tempo:

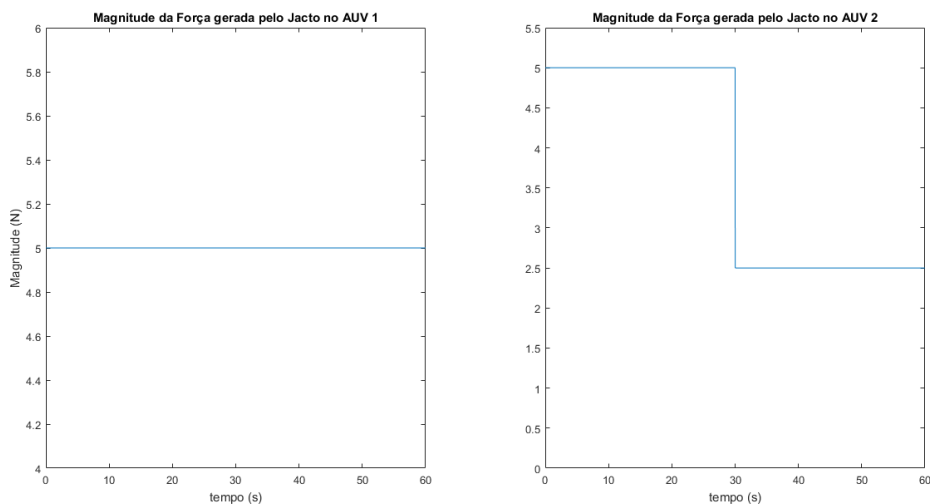


Figura 5.2: Magnitude das forças aplicadas pelos jactos.

De seguida mostrar-se-á as coordenadas  $[n, e]^T$  de cada veículo em função do tempo:

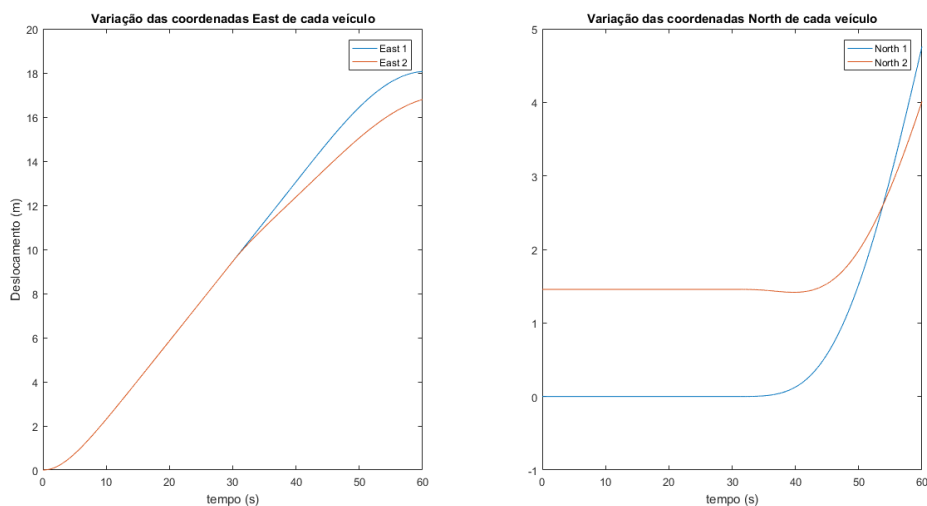


Figura 5.3: Variação temporal da coordenadas  $n$  e  $e$  para cada veículo.

E ainda adicionalmente alguns gráficos da trajectória de cada veículo no plano definido por NE:

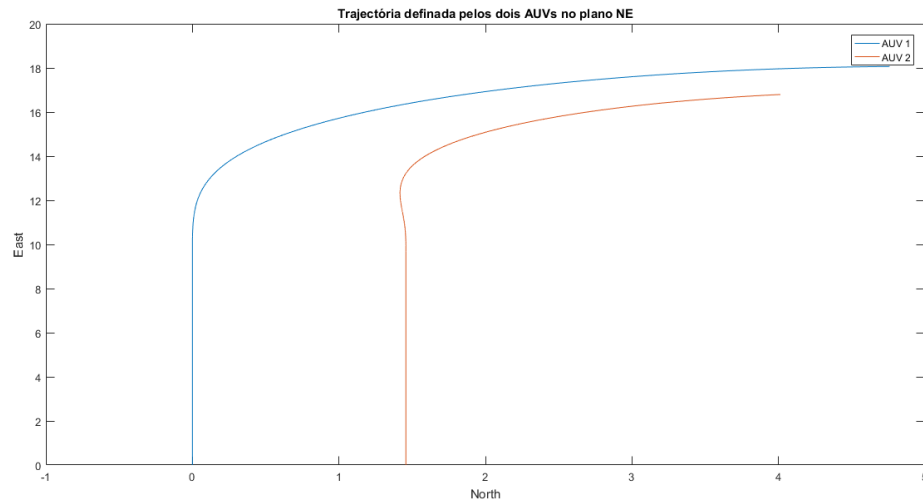


Figura 5.4: Trajetória dos dois AUVs no plano *NE*.

Estas imagens permitem-nos tirar algumas conclusões. A primeira é que até ao segundo 30, a trajetória dos dois AUVs variava unicamente na direcção *East*. Passado o segundo 30, a magnitude da força do jacto do AUV 2 passou a ser duas vezes menor, pelo que a velocidade do AUV 1 aumentou tanto na direcção *North* como na direcção *East*. A trajetória dos dois AUVs passou de recta para curva e a distância absoluta de ambos aumentou ligeiramente. Isso significa que o comprimento da mola que liga os dois AUVs aumentou, como se pode ver no seguinte gráfico:

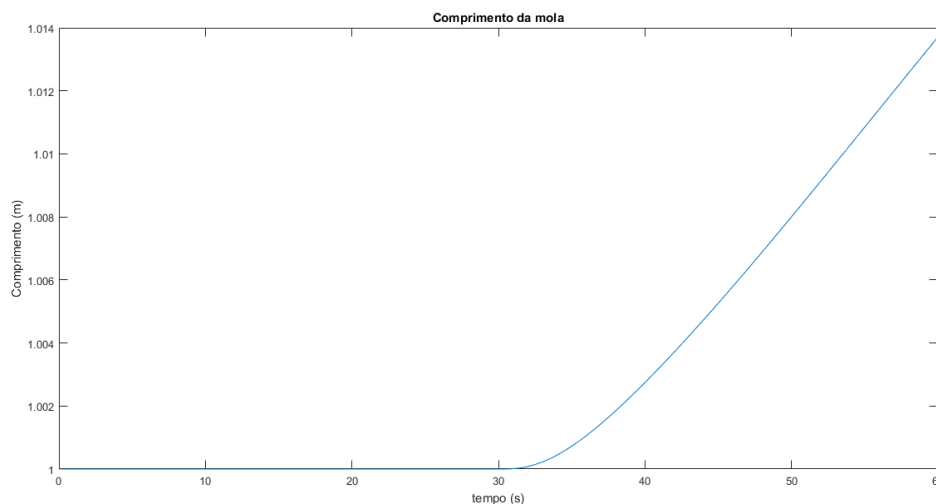


Figura 5.5: Comprimento da mola ao longo do tempo da simulação.

Verificando-se assim o comportamento esperado. Falta, no entanto, fazer uma análise mais rigorosa da simulação no que toca ao cumprimento das restrições impostas. Relembre-se que

foram impostas restrições do tipo:

$$\begin{aligned} q_{b,i} \otimes (q_{b,j})^* &= q_{b,ij} \\ d_{ij} \cdot n_e &= 0 \\ d_{ij} \cdot n_d &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

A forma de comprovar que a restrição de orientação é, se os dois referenciais possuírem exactamente a mesma orientação, comparar os quaterniões. Se a orientação relativa dos referenciais for diferente da matriz identidade, ou seja:

$$R_n^i R_j^n = R_{j,cte}^i \quad (5.7)$$

com  $R_{j,cte}^i = I_{3 \times 3}$ , pode-se comparar as velocidades angulares fixas ao corpo de cada corpo e verificar se coincidem. As velocidades angulares são então comparadas de seguida:

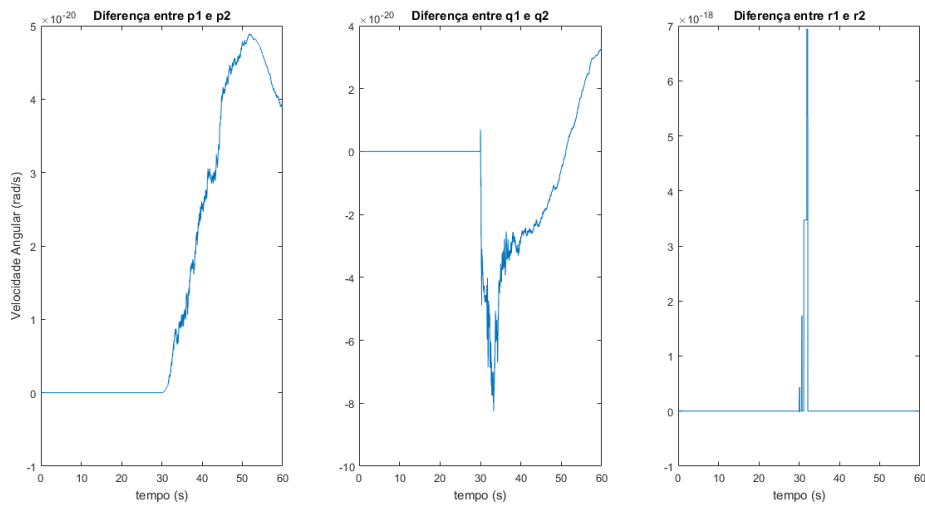


Figura 5.6: Erros das velocidades angulares dos AUVs.

Como se pode ver, as diferenças não são 0, sendo estas resultantes de erros de integração e deriva numérica da normalização dos quaterniões. Para confirmar as restrições de translação é só verificar as expressões descritas pelas mesmas directamente, como se pode ver na seguinte figura:

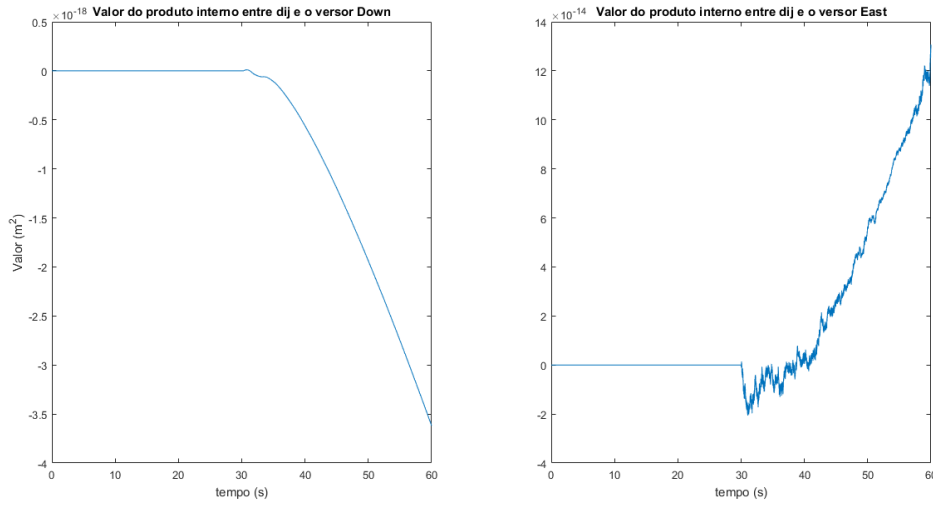


Figura 5.7: Erros das restrições de translação.

Como se pode ver pelos valores do gráfico, os seus valores são muito reduzidos pelo que se comprova que o sistema satisfaz as restrições que lhe são impostas.

#### 5.4.2 Exemplo 2: Rotação em torno de si próprio

Para motivos experimentais considere-se que um dos *AUVs* têm o jacto a apontar no sentido contrário do outro *AUV*, ou seja:

$$\begin{aligned}
 r_{p,1} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \\
 r_{p,2} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \\
 f_{p,1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} F_{p,1} \\
 f_{p,2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} F_{p,2}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Considere-se também que:

$$\begin{aligned}
 k &= 10 \text{ Nm}^{-1} \\
 d_c &= 5 \text{ kg s}^{-1}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Se for aplicada uma força de magnitude igual em cada *AUV*, a sua interconexão fará com que sejam aplicadas forças opostas em cada um dos *AUVs*, gerando assim um par de forças, com magnitude de 10 *N* que se anulam, gerando só movimento rotacional, sendo o movimento translacional que efectuem gerado pelas restrições de orientação. Contudo, o par mola-amortecedor contido na

interconexão fará com que a distância entre eles se altere ligeiramente, visto que os AUVs partem do repouso. Este comportamento pode ser visto na seguinte figura:

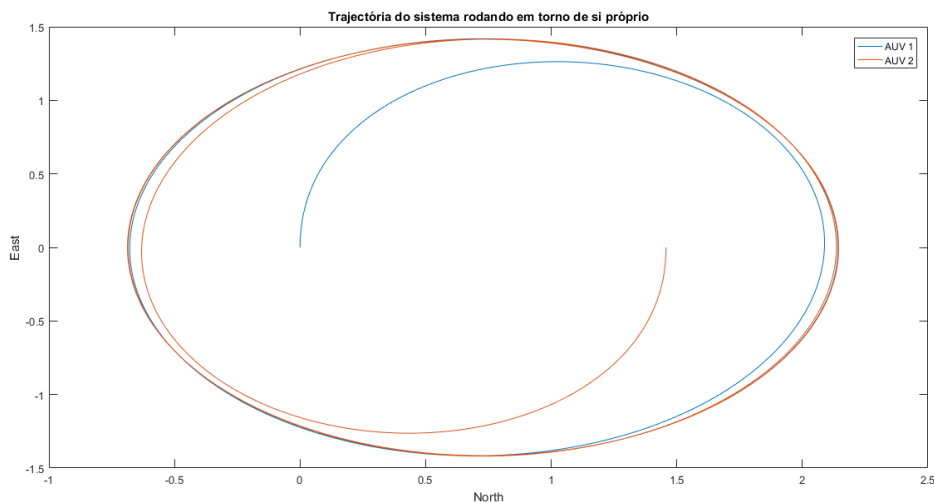


Figura 5.8: Movimento de dois robôs interligados, com a trajectória de um robô a azul e outra laranja.

De seguida mostram-se as coordenadas *North* e *East* de cada AUV:

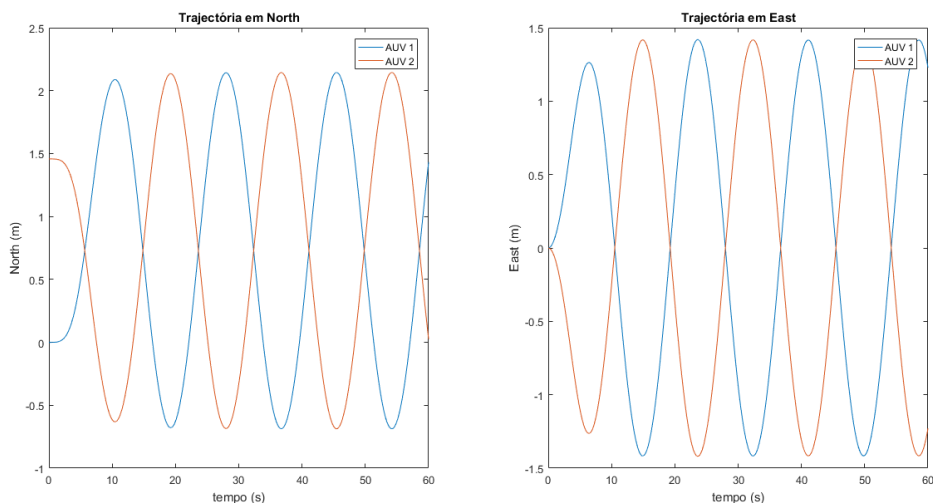


Figura 5.9: Trajectórias em *North* e *East*.

Outro aspecto interessante a considerar é verificar o tamanho da mola, que se pode ver na seguinte figura 5.10. A mola apresenta claramente um comportamento sub-amortecido com os parâmetros utilizados. No exemplo seguinte isso será analisado com maior detalhe.

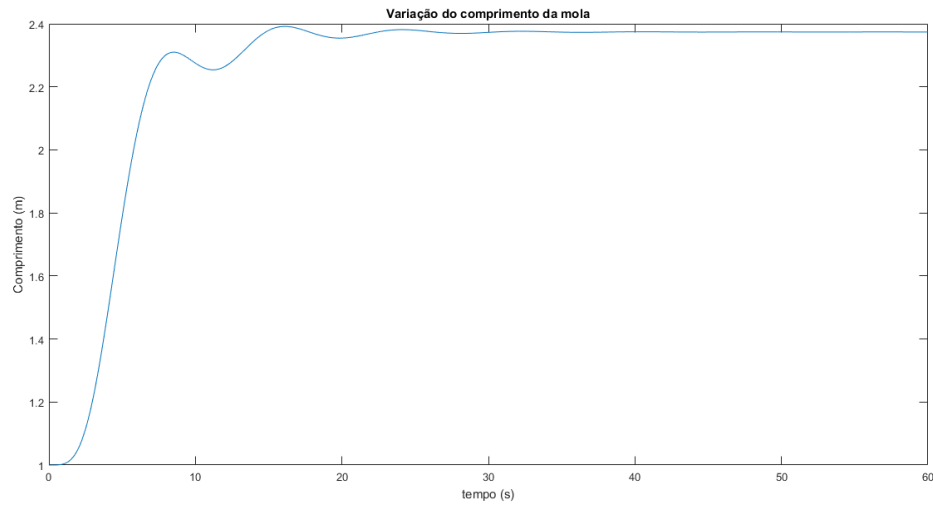


Figura 5.10: Variação da distância absoluta entre AUVs.

### 5.4.3 Exemplo 3: Interconexão

Considere-se o exemplo anteriormente referido. Para pares de valores diferentes serão feitas novas simulações, para avaliar a eficácia da modelação do par mola-amortecedor, com os valores:

$$\begin{aligned}
 k &= 10 \text{ N m}^{-1}, d_c = 5 \text{ kg s}^{-1} \\
 k &= 10 \text{ N m}^{-1}, d_c = 100 \text{ kg s}^{-1} \\
 k &= 10 \text{ N m}^{-1}, d_c = 44.72 \text{ kg s}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Os resultados de todas as simulações encontram-se na seguinte figura:

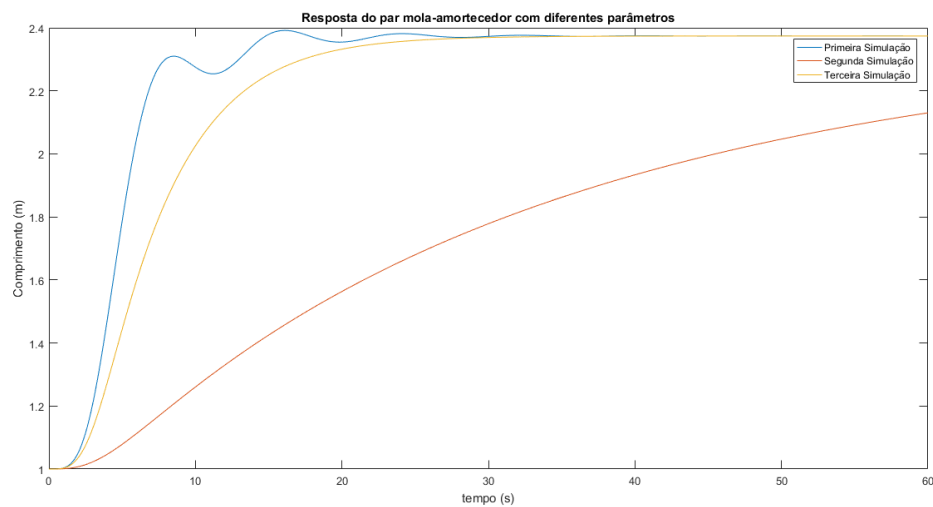


Figura 5.11: Comportamento do par mola-amortecedor para diferentes parâmetros do amortecedor.

Como se pode ver na figura, a primeira simulação apresentou uma resposta sub-amortecida, a segunda simulação apresentou uma resposta sob-amortecida e a terceira uma resposta criticamente amortecida. Considerando as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \zeta &= \frac{d_c}{2\sqrt{km}}\end{aligned}\quad (5.11)$$

em que  $\omega_n$  é a frequência natural e  $\zeta$  é a taxa de amortecimento, chega-se à conclusão de que, com o valor da mola e da massa do AUV fixa, pode-se chegar a um valor de  $d_c$  que dê uma resposta criticamente amortecida, com uma aproximação grosseira a um sistema linear de 2ª ordem [86].

#### 5.4.4 Exemplo 5: Sistema de Flutuabilidade Variável em conjunção com Jactos de Água

Para finalizar os exemplos desta secção de simulação serão utilizadas tanto os sistemas de flutuabilidade variável como a propulsão via jactos de água. Considere-se inicialmente que se pretendia exercer uma força de 10 N inercialmente. Para tal,  $\nabla_{var}$  seria equivalente a:

$$\nabla_{var} = \frac{10}{1000 \times 9.81} \cong 0.00102m^3 \quad (5.12)$$

O que seria equivalente a ter aproximadamente mais 2% do volume inicial num dos AUVs. Nesta simulação serão exercidas forças de 10 N inercialmente, em sentidos opostos nos dois AUVs e serão alternados os sinais no segundo 30. Adicionalmente serão actuados os dois jactos com 5 N cada e avaliar-se-á a resposta do sistema. A trajectória no espaço pode ser visualizada na seguinte figura:

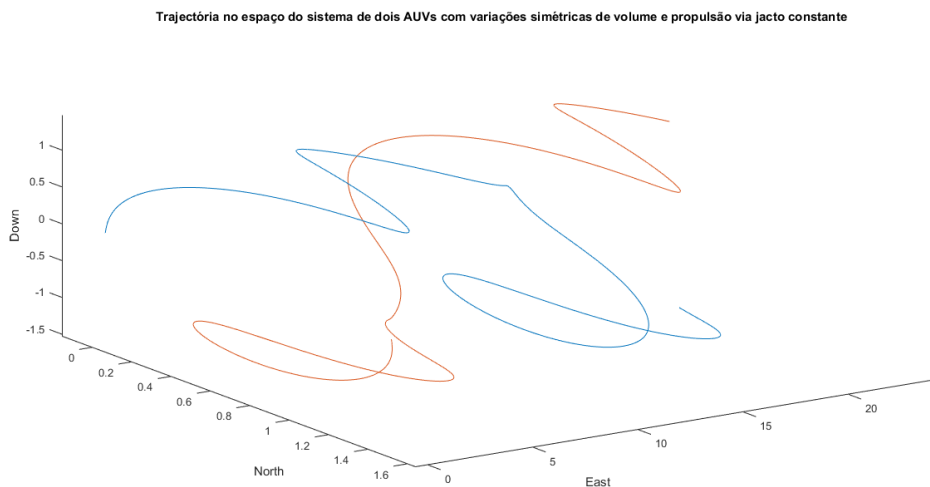


Figura 5.12: Trajectória dos AUVs no espaço.



Esta trajectória descreve uma curva com um formato um algo complexo, pelo que se irá decompor a mesma nas suas componentes. Na seguinte figura pode-se ver a trajectória na direcção *Down*:

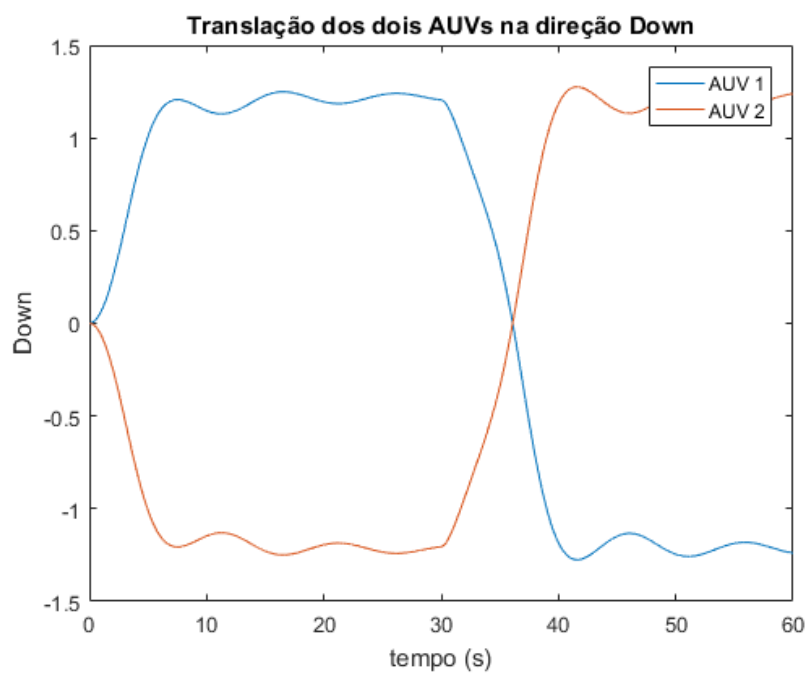
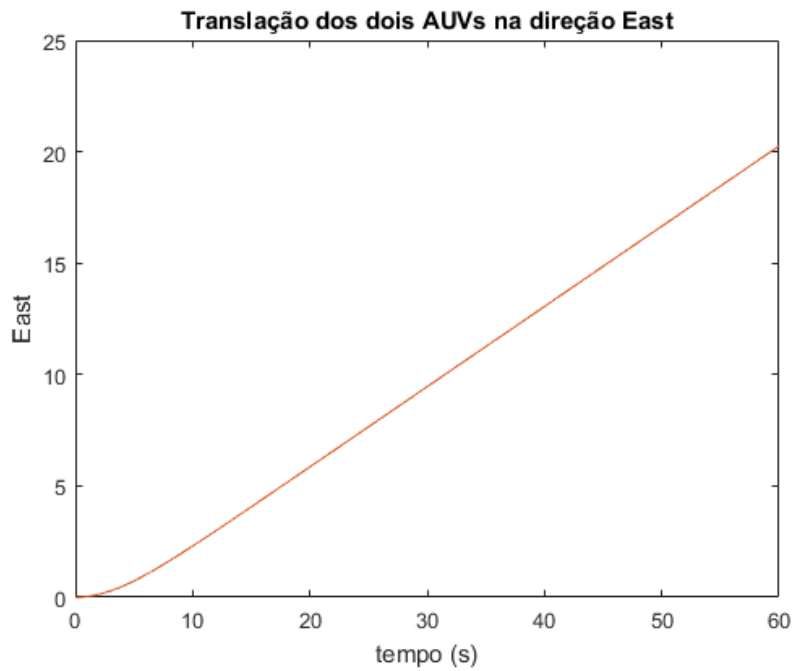


Figura 5.13: Trajectória do sistema em profundidade.

Como se pode verificar os *AUVs* aumentaram ou diminuíram a sua profundidade, atingindo o estado permanente pouco antes dos 10 e 40 segundos. Vejamos de seguida a trajectória em direcção a East:

Figura 5.14: Trajectória do sistema na direcção *East*.

Pode-se ver que a trajetória dos AUVs em *East* é coincidente, fruto da mesma actuação nessa mesma direcção em ambos os AUV. De seguida verifica-se a trajetória em *North* na próxima figura:

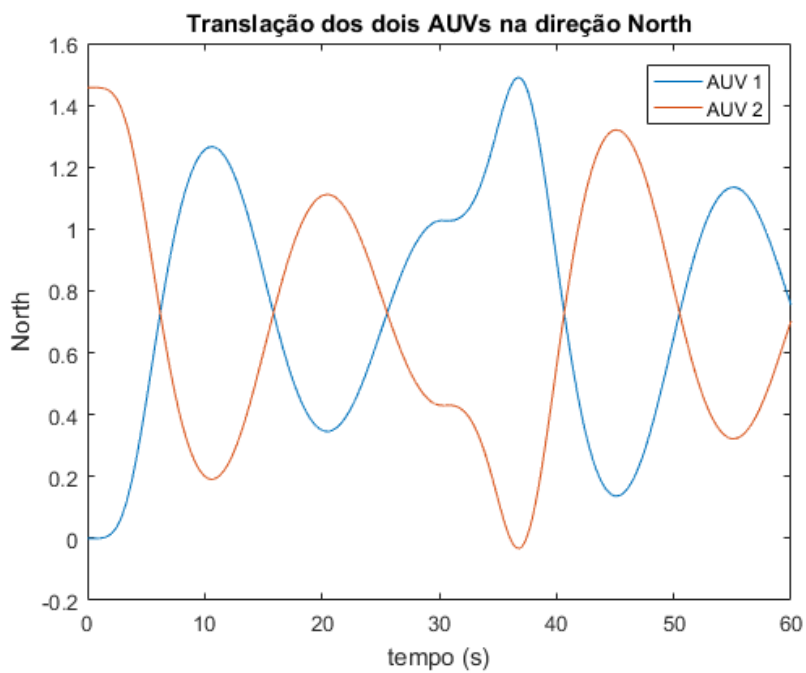


Figura 5.15: Trajectória do sistema na direcção North.

Embora curiosa, a trajectória dos *AUVs* em *North* têm que oscilar, resultado natural da compressão e tensão da mola, quando os *AUVs* variam a sua profundidade com o sistema de *VB*. Para terminar este exemplo, conclui-se então com a figura do comprimento da mola:

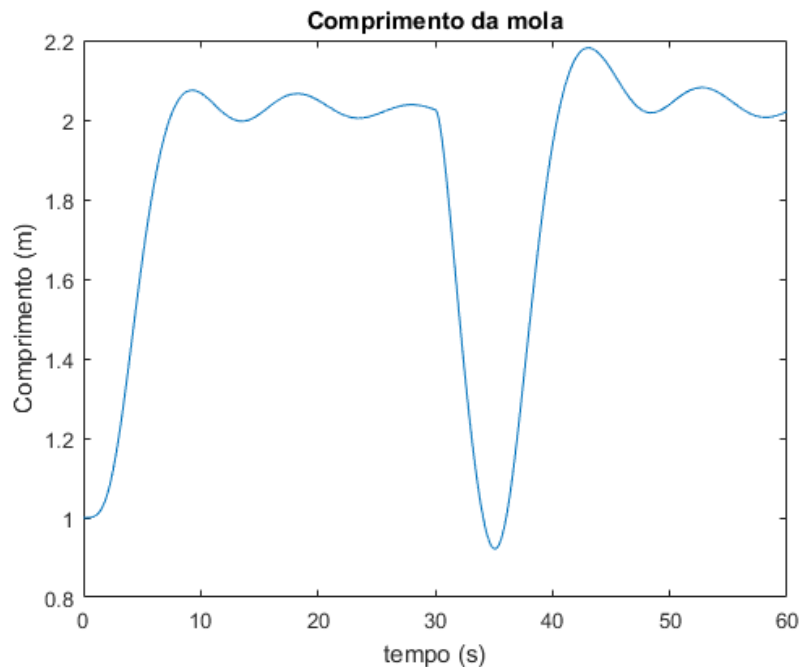


Figura 5.16: Comprimento da mola ao longo da trajectória do *AUV*.

Pode-se ver nesta última figura que o comprimento da mola aumenta numa fase inicial até atingir o regime permanente a partir dos 10 segundos, comprime após os 30 segundos e volta a esticar entre os 30 e os 40 segundos. Isto deve-se estarem a passar de uma disposição simétrica em profundidade, ou seja um dos *AUVs* fica acima do outro e vice-versa, para a outra disposição simétrica possível, em termos de profundidade.

## 5.5 Resumo

Neste capítulo abordou-se inicialmente a questão de simulação de sistemas multicorpo de uma forma geral, abordando a possibilidade de obter simulações via *software* específico ou opções mais gerais, como obter as equações de movimento e resolver as mesmas numericamente. Após algumas considerações gerais acerca da simulação a fazer, descreveu-se o simulador concebido nesta Dissertação e apresentou-se os resultados obtidos via simulação, em conjunto com uma análise dos mesmos.



## Capítulo 6

# Conclusão e Trabalho Futuro

### 6.1 Satisfação dos Objectivos

O objectivo inicial de estabelecer uma definição para o sistema a modelar foi atingido após uma pesquisa extensiva de sistemas robóticos no geral, de uma posterior seriação dos termos mais utilizados para caracterizar robôs com características semelhantes e por fim chegando a uma classificação possível para os sistemas no qual o sistema a modelar se encontrava, sendo a classificação, obviamente, a de sistema robótico multicorpo interconectado. Após se perceber que o sistema robótico se inseria na categoria dos sistemas multicorpo, foram revistas várias formulações e técnicas utilizadas para descrever a dinâmica do sistema, culminando essa revisão na escolha de técnicas para a representação do movimento do sistema e para a análise do seu comportamento dinâmico. Como os robôs integrantes do sistema foram classificados como sendo AUVs, foram também analisados modelos matemáticos para AUVs, embora neste ponto, como existe um modelo preponderante em relação aos demais, esse foi o seleccionado. Estando as ferramentas a utilizar na modelação do sistema abordadas, fruto do cumprimento dos objectivos anteriores, passou-se à modelação em concreto do sistema, tendo-se utilizado algumas das técnicas citadas anteriormente. Neste ponto também se fez uma abordagem de modelação simples e pragmática, de modo a obter um modelo realista sem ter, porém, de exigir tarefas adicionais para a estimação e identificação de parâmetros não calculáveis analiticamente ou heurísticamente. Após a obtenção de um modelo em concreto, esse modelo foi simulado. Depois de tomadas algumas considerações fulcrais para o sucesso da simulação, implementou-se um simulador que satisfizesse as necessidades da tarefa em mãos. Após a análise dos resultados obtidos via simulação, comprovou-se que o sucesso global desta Dissertação foi garantido, não obstante o cumprimento individual de cada objectivo, podendo-se dar como satisfeitos os objectivos estabelecidos para esta Dissertação.

### 6.2 Trabalho Futuro

Para se estabelecer vias de trabalho futuro, baseadas nas matérias tratadas nesta Dissertação, pode-se ter os seguintes tópicos expostos nas seguintes secções em mente.

### **6.2.1 Comparação ou benchmarking de métodos de modelação**

Nesta Dissertação foram abordados os métodos de modelação mais essenciais, sendo apenas referidos outros métodos utilizados na modelação de sistemas robóticos multicorpo interconectados. Sendo o controlo de sistemas baseado em modelos dependente de um cálculo rápido de uma resposta possível do modelo em questão, seria útil definir que métodos disponíveis se traduzem em respostas que correspondam aos requerimentos dos sistemas [87].

### **6.2.2 Implementação ou integração de um ambiente de simulação**

Estando uma proposta de simulador estabelecida nesta Dissertação, este poderia ser um incluído num ambiente gráfico dedicado, para uma visualização mais intuitiva das simulações realizadas, podendo, por exemplo, ser utilizado o ambiente VRML[88] incluído no MATLAB ou outra ferramenta mais generalista, como Blender[89]. A integração do simulador, visto constar apenas na resolução de ODEs, pode ser viável em ambientes como Gazebo[90], CoppeliaSim[91] ou SimTwo[92].

### **6.2.3 Modelação, análise e estimação de interconexões e influencias inter-robô em sistemas multicorpo interconectados**

Existem alguns tipos de interconexões[93] que se encontram frequentemente nos sistemas abordados e outros mais simples, como ROVs, satélites e naves espaciais amarrados por cabos[94]. Outras influencias entre robôs subaquáticos podem ser vistas em [95], o que pode ser algo a ter em consideração em trabalhos futuros. Adicionalmente, contactos e impactos entre robôs do mesmo sistema poderiam ser modelados, conferindo um maior realismo nas simulações.

### **6.2.4 Modelos Híbridos para Sistemas Reconfiguráveis**

Uma inquirição na área dos sistemas híbridos poderia ser interessante, no sentido de comparar a abordagem estabelecida nesta Dissertação, ou seja, a utilização de equações de Udwadia-Kalaba, que permite a descrição das restrições do sistema via uma matriz e um vector, implicando que as restrições podem ser incluídas ou excluídas do sistema removendo linhas/elementos do matriz/vector, com as técnicas utilizadas em modelos híbridos, muito utilizados para descrever situações diferentes para o mesmo sistema, como na locomoção de sistemas com pernas[96] e neste caso em sistemas com diferentes morfologias e com a capacidade de se reconfigurar.

### **6.2.5 Controlo Baseado em Modelos. Controlo de Sistemas Robóticos Multicorpo Interconectados**

Por fim, porventura a via mais directa de se seguir após esta Dissertação é a implementação de esquemas de controlo para Sistemas Robóticos Multicorpo Interconectados. Pode-se seguir duas abordagens: uma consiste em utilizar o trabalho desenvolvido em [65] e [97] para estabelecer relações para a dinâmica inversa do sistema e assim sintetizar leis de controlo em malha aberta,

para posteriormente fazer o mesmo em malha fechada. A outra abordagem seria utilizar [98], [99] e [73], criando assim esquemas de controlo baseado em modelos.





## Anexo A

# Parâmetros de Simulação

Neste apêndice inclui-se os valores utilizados para parametrizar o AUV simulado em , os parâmetros da interconexão utilizada para unir os dois AUVs e as condições iniciais da mesma simulação.

### A.1 Parâmetros do AUV

Parâmetros do AUV		
Descrição	Símbolo	Valor(Unidades)
Massa do AUV	$m$	50 kg
Constante gravitacional	$g$	$9.81 \text{ m s}^{-2}$
Densidade da Água	$\rho$	$1000 \text{ kg m}^{-3}$
Raio do AUV	$r$	0.2286 m
Momentos de Inércia	$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}$	$\text{kg m}^2$
Centro de Massa	$r_g^b$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m}$
Centro de Flutuabilidade	$r_b^b$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.05 \end{bmatrix}^T \text{ m}$
Termos de Massa de Acrescentada	$X_{\dot{u}}=Y_{\dot{v}}=Z_{\dot{w}}$	-25.0 kg
Área da Secção	$C_D$	$0.46 \text{ m}^2$
Termos de Amortecimento Quadrático	$X_{u u}  = Y_{v v}  = Z_{w w} $	$-37.4 \text{ kg m}^{-1}$
Volume inicial do AUV	$\nabla_0$	50 $\ell$
Posição do Jacto de Agua	$r_{jacto}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m}$

## A.2 Parâmetros da Interconexão

Parâmetros da Interconexão		
Descrição	Símbolo	Valor(Unidades)
Rigidez da Mola	$k$	$10 \text{ N m}^{-1}$
Tamanho da Mola	$L(0)$	$1 \text{ m}$
Coefficiente de Amortecimento	$d_c$	$500 \text{ kg s}^{-1}$
Posição da Conexão no AUV 1	$r_{p,1}^b$	$\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m}$
Posição da Conexão no AUV 2	$r_{p,2}^b$	$\begin{bmatrix} -r & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m}$
Versor da Posição <i>East</i> no AUV 2	$n_e$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m}$
Versor da Posição <i>Down</i> no AUV 2	$n_d$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \text{ m}$

## A.3 Condições iniciais

Condições iniciais		
Descrição	Símbolo	Valor
Coordenadas Inerciais do AUV 1	$\eta_{\text{cons},1}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
Velocidades Inerciais do AUV 1	$\dot{\eta}_{\text{cons},1}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
Velocidades Fixas ao Corpo do AUV 1	$v_{\text{cons},1}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
Acelerações Fixas ao Corpo do AUV 1	$\dot{v}_{\text{cons},1}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
Coordenadas Inerciais do AUV 2	$\eta_{\text{cons},1}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2r+L(0) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
Velocidades Inerciais do AUV 2	$\dot{\eta}_{\text{cons},1}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
Velocidades Fixas ao Corpo do AUV 2	$v_{\text{cons},1}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
Acelerações Fixas ao Corpo do AUV 2	$\dot{v}_{\text{cons},1}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

# Referências

- [1] James Lamert e Edward Cone. How robots change the world - what automation really means for jobs and productivity. Relatório técnico, Oxford Economics, Junho 2019.
- [2] Indranil Mitra, Srinivas TK, Vijay Rao, Vishal Kelkar, e Preeti Chhaparia. How cyber-physical systems are reshaping the robotics landscape. Relatório técnico, Cognizant, Maio 2019.
- [3] Kelly McSweeney. Investments in robotics r&d are growing, and it's about time, 2016. Último acesso em 16 September 2019. URL: <https://www.zdnet.com/article/investments-in-robotics-r-d-are-growing/>.
- [4] Jungwon Seo, Jamie Paik, e Mark Yim. Modular reconfigurable robotics. *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, 2(1):63–88, 2019. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev-control-053018-023834>, arXiv:<https://doi.org/10.1146/annurev-control-053018-023834>, doi:10.1146/annurev-control-053018-023834.
- [5] David D. Walden, Garry J. Roedler, Kevin J. Forsberg, R. Douglas Hamelin, e Thomas M. Shortell. *INCOSE Systems Engineering Handbook: A Guide for System Life Cycle Processes and Activities*. Wiley, Massachusetts, 4ª edição, 2015.
- [6] Definição de *Robot* dicionário de inglês oxford, 2019. Último acesso em 16 September 2019. URL: <https://www.oxfordlearnersdictionaries.com/definition/english/robot>.
- [7] Erico Guizzo. Robots IEEE: *What Is a Robot?*, 2019. Último acesso em 16 September 2019. URL: <https://robots.ieee.org/learn/>.
- [8] Definição de *Robot* dicionário de merriam-webster, 2019. Último acesso em 16 September 2019. URL: <https://www.merriam-webster.com/dictionary/robot>.
- [9] Mathieu Porez, Frédéric Boyer, e Ayman Belkhiri. A hybrid dynamic model for bio-inspired soft robots - application to a flapping-wing micro air vehicle. Em *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, páginas 3556 – 3563, Hong Kong, China, May 31 - June 7, 2014.
- [10] Francis C. Moon. *Applied Dynamics: With Applications to Multibody and Mechatronic Systems*. Wiley-VCH, 1ª edição, 1998.
- [11] Avinash Gautam e Sudeept Mohan. A review of research in multi-robot systems. Em *2012 IEEE 7th International Conference on Industrial and Information Systems (ICIIS)*, páginas 1–5, 2012.

- [12] Brandon M. Zoss, David Mateo, Yoke Kong Kuan, Grgur Tokié, Mohammadreza Chamanbaz, Louis Goh, Francesco Vallegra, Roland Bouftanais, e Dick K.P. Yue. Distributed system of autonomous buoys for scalable deployment and monitoring of large waterbodies. Em *Autonomous Robots - December 2018, Volume 42, Issue 8*, página 1669–1689, 2018.
- [13] M. Zhao, T. Anzai, F. Shi, X. Chen, K. Okada, e M. Inaba. Design, modeling, and control of an aerial robot dragon: A dual-rotor-embedded multilink robot with the ability of multi-degree-of-freedom aerial transformation. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 3(2):1176–1183, April 2018. doi:10.1109/LRA.2018.2793344.
- [14] M. Zhao, F. Shi, T. Anzai, K. Chaudhary, X. Chen, K. Okada, e M. Inaba. Flight motion of passing through small opening by dragon: Transformable multilinked aerial robot. Em *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, páginas 4735–4742, Oct 2018. doi:10.1109/IROS.2018.8593368.
- [15] F. Shi, M. Zhao, T. Anzai, X. Chen, K. Okada, e M. Inaba. External wrench estimation for multilink aerial robot by center of mass estimator based on distributed imu system. Em *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, páginas 1891–1897, May 2019. doi:10.1109/ICRA.2019.8794325.
- [16] E. Kelasidi, K. Y. Pettersen, J. T. Gravdahl, e P. Liljebäck. Modeling of underwater snake robots. Em *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, páginas 4540–4547, May 2014. doi:10.1109/ICRA.2014.6907522.
- [17] Eleni Kelasidi, Pål Liljebäck, K.Y. Pettersen, e Jan Gravdahl. Experimental investigation of efficient locomotion of underwater snake robots for lateral undulation and eel-like motion patterns. *Robotics and Biomimetics*, 2, 12 2015. doi:10.1186/s40638-015-0029-4.
- [18] J. Sverdrup-Thygeson, E. Kelasidi, K. Y. Pettersen, e J. T. Gravdahl. The underwater swimming manipulator—a bioinspired solution for subsea operations. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 43(2):402–417, April 2018. doi:10.1109/JOE.2017.2768108.
- [19] Website do projeto trident. Último acesso em 16 September 2019. URL: <http://www.irs.uji.es/trident/>.
- [20] Website do projeto pandora. Último acesso em 16 September 2019. URL: [https://cirs.udg.edu/portfolio\\_page/pandora/](https://cirs.udg.edu/portfolio_page/pandora/).
- [21] D. Ribas, P. Ridao, A. Turetta, C. Melchiorri, G. Palli, J. J. Fernández, e P. J. Sanz. I-avv mechatronics integration for the trident fp7 project. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 20(5):2583–2592, Oct 2015. doi:10.1109/TMECH.2015.2395413.
- [22] Website do projeto maris. Último acesso em 16 September 2019. URL: <http://www.graal.dibris.unige.it/projects/3>.
- [23] Gianluca Antonelli. *Underwater Robots*. Springer Publishing Company, Incorporated, 4th edição, 2018.
- [24] E. Simetti, G. Casalino, S. Torelli, A. Sperindé, e A. Turetta. Underwater floating manipulation for robotic interventions. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3):3358 – 3363, 2014. 19th IFAC World Congress. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016421245>, doi:<https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.00503>.

- [25] E. Simetti, G. Casalino, N. Manerikar, A. Sperindé, S. Torelli, e F. Wanderlingh. Cooperation between autonomous underwater vehicle manipulations systems with minimal information exchange. Em *OCEANS 2015 - Genova*, páginas 1–6, May 2015. doi:10.1109/OCEANS-Genova.2015.7271700.
- [26] Website do projeto robust. Último acesso em 16 September 2019. URL: <http://eu-robust.eu/>.
- [27] Roberta Ingrosso, Daniela De Palma, Giovanni Indiveri, e Giulio Avanzini. Preliminary results of a dynamic modelling approach for underwater multi-hull vehicles. *IFAC-PapersOnLine*, 51(29):86 – 91, 2018. 11th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems, Robotics, and Vehicles CAMS 2018. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896318321633>, doi:<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.09.474>.
- [28] Website do projeto dexrov. Último acesso em 16 September 2019. URL: <http://www.dexrov.eu/>.
- [29] P.A. Lillo, Enrico Simetti, Daniela De Palma, Elisabetta Cataldi, Giovanni Indiveri, G. Antonelli, e Giuseppe Casalino. Advanced rov autonomy for efficient remote control in the dexrov project. *Marine Technology Society Journal*, 50:67–80, 01 2016.
- [30] Pierre Letier, Torsten Siedel, e Guillaume Fau. D6.3 - haptic arm and hand exoskeletons. Relatório técnico, DexROV - SPACEAPPS, April 2018.
- [31] Website do projecto angels. Último acesso em 16 September 2019. URL: <http://sssa.bioroboticsinstitute.it/projects/ANGELS>.
- [32] S. Mintchev, C. Stefanini, A. Girin, S. Marrazza, S. Orofino, V. Lebastard, L. Manfredi, P. Dario, e F. Boyer. An underwater reconfigurable robot with bioinspired electric sense. Em *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 1149–1154, May 2012. doi:10.1109/ICRA.2012.6224956.
- [33] I. Vasilescu, P. Varshavskaya, K. Kotay, e D. Rus. Autonomous modular optical underwater robot (amour) design, prototype and feasibility study. Em *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 1603–1609, April 2005. doi:10.1109/ROBOT.2005.1570343.
- [34] P. Corke, C. Detweiler, M. Dunbabin, M. Hamilton, D. Rus, e I. Vasilescu. Experiments with underwater robot localization and tracking. Em *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 4556–4561, April 2007. doi:10.1109/ROBOT.2007.364181.
- [35] Ke Yang. Dynamic model and cpg network generation of the underwater self-reconfigurable robot. *Advanced Robotics*, 30(14):925–937, 2016. URL: <https://doi.org/10.1080/01691864.2016.1175381>, arXiv:<https://doi.org/10.1080/01691864.2016.1175381>, doi:10.1080/01691864.2016.1175381.
- [36] Ke Yang, Xu-yang Wang, Tong Ge, e Chao Wu. Dynamic model of underwater snake-like robot using kane’s method. *Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)*, 19(2):146–154, Apr 2014. URL: <https://doi.org/10.1007/s12204-014-1483-9>, doi:10.1007/s12204-014-1483-9.

- [37] Ke Yang, Xu-yang Wang, Tong Ge, e Chao Wu. A dynamic model of an underwater quadruped walking robot using kane's method. *Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)*, 19(2):160–168, Apr 2014. URL: <https://doi.org/10.1007/s12204-014-1485-7>, doi:10.1007/s12204-014-1485-7.
- [38] David Christensen, Jens Christian Andersen, Mogens Blanke, L Furno, Roberto Galeazzi, Peter Hansen, e Mikkel Nielsen. Collective modular underwater robotic system for long-term autonomous operation. 01 2015.
- [39] L. Furno, M. Blanke, R. Galeazzi, e D. J. Christensen. Self-reconfiguration of modular underwater robots using an energy heuristic. Em *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, páginas 6277–6284, Sep. 2017. doi:10.1109/IROS.2017.8206530.
- [40] Website do projecto roboat. Ultimo acesso em 16 September 2019. URL: <http://roboat.org/>.
- [41] S. Park, E. Kayacan, C. Ratti, e D. Rus. Coordinated control of a reconfigurable multi-vessel platform: Robust control approach. Em *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, páginas 4633–4639, May 2019. doi:10.1109/ICRA.2019.8794075.
- [42] Iván Darío, ZZO, Brandt Andreas, e ORGGRAEFE. An electromagnetically actuated , self-reconfigurable space structure. 2017.
- [43] Joseph Shoer e Mason Peck. Simulation of multibody spacecraft reconfiguration through sequential dynamic equilibria. 08 2010. doi:10.2514/6.2010-8068.
- [44] Kristian Klausen. *Coordinated Control of Multirotors for Suspended Load Transportation and Fixed-Wing Net Recovery*. Tese de doutoramento, Norwegian University of Science and Technology - Faculty of Information Technology and Electrical Engineering Department of Engineering Cybernetics, 2017.
- [45] Maciej Michałek. *Tracking Control Strategy for the Standard N-trailer Mobile Robot – A Geometrically Motivated Approach*, volume 422, páginas 39–51. 01 2012. doi:10.1007/978-1-4471-2343-9\_4.
- [46] Atsushi Kakogawa e Shugen Ma. *Robotic Search and Rescue through In-Pipe Movement*. 08 2019. doi:10.5772/intechopen.88414.
- [47] Manuel Fernando dos Santos Silva. *Sistemas Robóticos de Locomoção Multipernas*. Tese de doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2017.
- [48] Marcus Hörger, Navinda Kottege, Tirthankar Bandyopadhyay, Alberto Elfes, e Peyman Moghadam. *Real-Time Stabilisation for Hexapod Robots*, páginas 729–744. Springer International Publishing, Cham, 2016. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-23778-7\\_48](https://doi.org/10.1007/978-3-319-23778-7_48), doi:10.1007/978-3-319-23778-7\_48.
- [49] Maarten van Steen e Andrew S. Tanenbaum. *Distributed Systems*. Maarten van Steen, 3ª edição, 2017.
- [50] Ahmed A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, 4 edição, 2013. doi:10.1017/CBO9781107337213.

- [51] Jens Wittenburg. *Dynamics of Multibody Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2th edição, 2008.
- [52] Paulo Flores e Hamid Lankarani. *Contact Force Models for Multibody Dynamics*. 01 2016.
- [53] Robert Seifried. *Dynamics of underactuated multibody systems. Modeling, control and optimal design*, volume 205. 01 2014. doi:10.1007/978-3-319-01228-5.
- [54] Roland Siegwart Konrad Rudin Marco Hutter, Michael Blösch e Thomas Stastny. *Robot Dynamics Lecture Notes*. 2017. Último acesso em Setembro 2019. URL: [https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/mavt/robotics-n-intelligent-systems/rsl-dam/documents/RobotDynamics2017/RD\\_HS2017script.pdf](https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/mavt/robotics-n-intelligent-systems/rsl-dam/documents/RobotDynamics2017/RD_HS2017script.pdf).
- [55] Herbert Goldstein, Jr. Charles P. Poole, e John L. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 3rd edição, 2002.
- [56] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, e Giuseppe Oriolo. *Robotics - Modelling, Planning and Control*. 2009.
- [57] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, e M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 2006.
- [58] James Diebel. Representing attitude : Euler angles , unit quaternions , and rotation vectors. 2006.
- [59] Thomas Peacock e Nicolas Hadjiconstantinou. *Course materials for 2.003J/1.053J Dynamics and Control I, Spring 2007. MIT OpenCourseWare*. 2007. URL: <https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-003j-dynamics-and-control-i-spring-2007/lecture-notes/lec14.pdf>.
- [60] Parviz E. Nikravesh. *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1988.
- [61] Parviz E. Nikravesh. *Planar Multibody Dynamics: Formulation, Programming and Applications*. CRC Press, Inc., USA, 1st edição, 2007.
- [62] Xiaolong Chen, Han Zhao, Hao Sun, Shengchao Zhen, e Kang Huang. A novel adaptive robust control approach for underactuated mobile robot. *Journal of the Franklin Institute*, 356(5):2474 – 2490, 2019. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016003219300109>, doi:<https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.01.002>.
- [63] Parviz E. Nikravesh. *Course materials for Spring 2020 Computational Multibody Dynamics, University of Arizona*. 2020. URL: <http://www.u.arizona.edu/~pen/ame553/Notes/Lesson%2011-B.pdf>.
- [64] Peter Kunkel e Volker Mehrmann. Differential-algebraic equations. analysis and numerical solution. 01 2006. doi:10.4171/017.
- [65] Carmine Pappalardo e Domenico Guida. On the dynamics and control of underactuated nonholonomic mechanical systems and applications to mobile robots. *Archive of Applied Mechanics*, 89, 11 2018. doi:10.1007/s00419-018-1491-6.

- [66] Farid Amirouche. Fundamentals of multibody dynamics. *Birkhäuser*, páginas 68–71, 01 2006.
- [67] Hubert Hahn. *Rigid Body Dynamics of Mechanisms: 1 Theoretical Basis*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2014.
- [68] Thor I. Fossen. Nonlinear modelling and control of underwater vehicles. 1998.
- [69] Thor Fossen. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*. 05 2011. doi:10.1002/9781119994138.
- [70] Thor I. Fossen. Guidance and control of ocean vehicles. 1994.
- [71] Thor Fossen e A. Ross. *Nonlinear modelling, identification and control of UUVs*, páginas 13–42. 01 2006. doi:10.1049/PBCE069E\_ch2.
- [72] Ivan Masmitja, Julián González Agudelo, Cesar Galarza, Spartacus Gomariz, Jacopo Aguzzi, e Joaquin del Rio. New vectorial propulsion system and trajectory control designs for improved auv mission autonomy. *Sensors*, 18:1241, 04 2018. doi:10.3390/s18041241.
- [73] Mikkel Cornelius Nielsen. *Modular Underwater Robots - Modeling and Docking Control*. Tese de doutoramento, 2018.
- [74] G. Alcan e M. Unel. Robust hovering control of a quadrotor using acceleration feedback. Em *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, páginas 1455–1462, June 2017. doi:10.1109/ICUAS.2017.7991335.
- [75] A. V. Medvedev, V. V. Kostenko, e A. Y. Tolstonogov. Depth control methods of variable buoyancy auv. Em *2017 IEEE Underwater Technology (UT)*, páginas 1–5, Feb 2017. doi:10.1109/UT.2017.7890333.
- [76] A. H. Sylvester, J. A. Delmerico, A. Z. Trimble, e B. S. Bingham. Variable buoyancy control for a bottom skimming autonomous underwater vehicle. Em *2014 Oceans - St. John's*, páginas 1–6, Sep. 2014. doi:10.1109/OCEANS.2014.7003058.
- [77] Mikkel Cornelius Nielsen, Mogens Blanke, e Ingrid Schjølberg. Efficient modeling methodology for reconfigurable underwater robots. *IFAC-PapersOnLine*, 49(23):74 – 80, 2016. 10th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems-CAMS 2016. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896316319115>, doi:<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.324>.
- [78] Firdaus Udwadia e Phailaung Phohomsiri. Explicit poincaré equations of motion for general constrained systems. part i. analytical results. *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463:1421–1434, 06 2007. doi:10.1098/rspa.2007.1825.
- [79] R. A. Suarez Fernandez, D. Grande, A. Martins, L. Bascetta, S. Dominguez, e C. Rossi. Modeling and control of underwater mine explorer robot ux-1. *IEEE Access*, 7:39432–39447, 2019. doi:10.1109/ACCESS.2019.2907193.
- [80] Chunfeng Yue, Shuxiang Guo, e Liwei Shi. Hydrodynamic analysis of the spherical underwater robot sur-ii. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 10(5):247, 2013. URL: <https://doi.org/10.5772/56524>, arXiv:<https://doi.org/10.5772/56524>, doi:10.5772/56524.



- [81] A.H. Techet e TA B. P. Epps. *Course materials for 2.016 Hydrodynamics, Fall 2005*. 2005. URL: [http://web.mit.edu/2.016/www/handouts/Added\\_Mass\\_Derivation\\_050916.pdf/](http://web.mit.edu/2.016/www/handouts/Added_Mass_Derivation_050916.pdf/).
- [82] S. Zavari, A. Heininen, J. Aaltonen, e K. T. Koskinen. Early stage design of a spherical underwater robotic vehicle. Em *2016 20th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, páginas 240–244, Oct 2016. doi:10.1109/ICSTCC.2016.7790672.
- [83] Aaron Schutte e Firdaus Udwadia. New approach to the modeling of complex multibody dynamical systems. *Journal of Applied Mechanics*, 78, 01 2011. doi:10.1115/1.4002329.
- [84] Mikkel Cornelius Nielsen, Ole Alexander Nørve Eidsvik, Mogens Blanke, e Ingrid Schjølborg. Constrained multi-body dynamics for modular underwater robots — theory and experiments. 2018.
- [85] A.Matos. *Apontamentos de Análise Numérica*. 2005.
- [86] Katsuhiko Ogata. *Modern control engineering*. 01 2009.
- [87] Domenico de Falco, Ettore Pennestri, e L. Vita. Investigation of the influence of pseudoinverse matrix calculations on multibody dynamics simulations by means of the udwadiakalaba formulation. *Journal of Aerospace Engineering - J AEROSP ENG*, 22, 10 2009. doi:10.1061/(ASCE)0893-1321(2009)22:4(365).
- [88] Pagina de documentação do matlab sobre virtual reality modeling language (vrml). Último acesso em 16 September 2019. URL: <https://www.mathworks.com/help/sl3d/vrml.html>.
- [89] Pagina web do blender. Último acesso em 16 September 2019. URL: <https://www.blender.org/>.
- [90] Pagina web do simulador gazebo. Último acesso em 16 September 2019. URL: <http://gazebosim.org/>.
- [91] Pagina web do simulador coppeliasim. Último acesso em 16 September 2019. URL: <http://www.coppeliarobotics.com/>.
- [92] Pagina web do simulador simtwo. Último acesso em 16 September 2019. URL: <https://github.com/P33a/SimTwo>.
- [93] M. Nohmi. Mission design of a tethered robot satellite “stars” for orbital experiment. Em *2009 IEEE Control Applications, (CCA) Intelligent Control, (ISIC)*, páginas 1075–1080, July 2009. doi:10.1109/CCA.2009.5281113.
- [94] Sebastião C.P. Gomes, Elisane B. Zanela, e Adriana E.L. Pereira. Automatic generation of dynamic models of cables. *Ocean Engineering*, 121:559 – 571, 2016. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801816301676>, doi:<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.05.041>.
- [95] X. Feng e W. Bai. Hydrodynamic analysis of marine multibody systems by a nonlinear coupled model. *Journal of Fluids and Structures*, 70:72 – 101, 2017. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974616300482>, doi:<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.01.016>.

- [96] Philip Holmes, Robert Full, Daniel Koditschek, e John Guckenheimer. The dynamics of legged locomotion: Models, analyses, and challenges. *Departmental Papers (ESE)*, 48, 06 2006. doi:10.1137/S0036144504445133.
- [97] Carmine Pappalardo e Domenico Guida. *On the Use of the Udwadia-Kalaba Equations for the Nonlinear Control of a Generalized Van Der Pol-Duffing Oscillator*, páginas 82–95. 01 2020. doi:10.1007/978-3-030-18072-0\_9.
- [98] Joana Filipa Gouveia Fonseca. *Optimal control of AUVs*. FEUP, 2017.
- [99] Shahab Heshmati-alamdari, George Karras, e Kostas Kyriakopoulos. A distributed predictive control approach for cooperative manipulation of multiple underwater vehicle manipulator systems, 06 2019.