УДК 519.852:519.876
DOI: 10.15587/1729-4061.2019.184530

Формування методології базисних матриць у дослідженні погано обумовлених лінійних систем

В. І. Кудін, В. В. Оноцький, А. М. Онищенко, Ю. О. Ступак

Удосконалено алгоритм методу базисних матриць для проведення аналізу властивостей лінійної системи (СЛАР) при різноманітних змінах в моделі. Зокрема, при включенні-виключенні групи рядків та стовпців (на основі "окаймлювання") без перерозв'язання задачі спочатку. Встановлено умови сумісності (несумісності) обмежень та побудовано вектори фундаментальної системи розв'язків у випадку сумісності. Досліджено вплив точності подання елементів моделі (довжина мантиси, величина порядку, порогу машинного нуля та переповнення) та варіантів організації проведення обчислень на властивості розв'язків. Зокрема, вплив на величину та повноту рангу на прикладі СЛАР з погано обумовленою матрицею обмежень. Програмна реалізація була розвинута на проведення обчислень за методами базисних матриць (МБМ) та Гауса, тобто використано довгу арифметику для моделей з раціональними елементами. Запропоновано алгоритми та комп'ютерну реалізацію методів типу Гауса та штучних базисних матриць (варіант методу базисних матриць) в середовищах Matlab та Visual C++ з використанням технології точних обчислень елементів методів, в першу чергу, для погано обумовлених систем різної розмірності.

На прикладі матриць Гільберта, які характеризуються як "незручні", проведено експеримент з метою аналізу властивостей лінійної системи при різних розмірностях, точності подання вхідних даних та сценаріях проведення обчислень. Розвинуто формати ("точний" та "неточний") подання елементів моделі (довжина мантиси, величина порядку, порогу машинного нуля та переповнення) та варіанти організації виконання основних операцій при проведенні обчислень та їх вплив на властивості розв'язків. Зокрема, простежено вплив на величину та повноту рангу на прикладі СЛАР з погано обумовленою матрицею обмежень.

Ключові слова: метод базисних матриць, прямокутна матриця обмежень, погано обумовлена СЛАР

1. Вступ

Історично склалось, що помітна кількість наукових досліджень в значній мірі спрямована на вивчення властивостей лінійних систем, зокрема, систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) [1–3]. Такий факт обумовлено тим, що лінійність є початковою базовою структурою, на яку в подальшому "насаджуються" більш складні конструкції. Досить часто нелінійна задача замінюється в деякому означеному околі лінійною (спрощеною) на кожному кроці алгоритму дослідження. Наприклад, класичний метод Ньютона при розв'язанні систем не-лінійних рівнянь містить в своїй структурі (як спрощення або лінеаризацію) розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). СЛАР та задачі лінійного програмування (ЗЛП) знайшли застосування, наприклад, в перших промислових реалізаціях для військових потреб та економіки як допоміжний інструмент прийняття рішень з використанням інформаційних технологій [3, 4]. Не важко переконатись, що типові реалізації СЛАР (як ітерація ЗЛП) реалізовані для прямокутної матриці обмежень у припущенні повноти рангу [1–3]. Сумісність СЛАР з прямокутною матрицею обмежень досліджується, наприклад, застосуванням широко відомої теореми Кронекера-Капеллі. В такому випадку розв'язність задачі зводиться до порівняння величин рангів матриць основної системи обмежень та розширеної. При побудові фундаментальної системи розв'язків (ФСР) величина рангу залишається основоположною задачею по встановленню властивостей системи [3]. Величина рангу встановлюється як найвищий порядок мінору, що відмінний від нуля (аналіз послідовності "окаймлюючих" квадратних матриць). З величиною рангу корелюється кількість ітерацій, за яких ведучий елемент відмінний від нуля в методах типу Гауса.

З іншої сторони задача встановлення величини рангу лінійної системи виявилась залежною від організації технології обчислень. Зокрема, практика проведення обчислень виявила відмінності між математичним (теоретичним чи точним) та машинним (комп'ютерним) поданням моделі [1]. Ці відмінності (як неусувні похибки) є додатковим джерелом неадекватності моделі та процесу (наприклад, некоректності задачі). Причому, при різних сценаріях обчислень ця неадекватність кількісно і якісно проявляє себе по-різному (через довжину мантиси, величину порядку, способи округлення та організацію проведення операцій). Наприклад, в стандарті IEEE [1, 2] машинний нуль – певний інтервал належності множині субнормальних чисел при обчисленнях. Може набувати конкретні межі (орієнтовні) при заданій конфігурації обчислень. В загальному випадку математичний (аналітичний) нуль може розглядатися як точне задання, а машинний (комп'ютерний) – як неточне. З іншого боку, виконання умови "нуль-ненуль" є суттєвою при організації багатьох алгоритмів, зокрема, у методі Гауса (ведучий елемент), у симплекс-методі як умова незалежності системи векторів (опорності), тощо і можуть набувати «власного» кількісного змісту в залежності від організації обчислень. Загалом, при проведенні обчислень важливим є також і черговість проведення операцій, бо комутативність не завжди виконується. Через "окреслення" машинного нуля обумовлюється вплив на величину рангу та інші параметри моделі при проведенні обчислень. Величина рангу як математична категорія, є ключовою властивістю при проведенні аналізу структурних властивостей задачі (представлення багатогранної множини), яка також залежить від виконання цієї умови. Кількісні неточності при поданні елементів моделі можуть зумовити якісні відмінності в геометричній структурі (багатогранній множині), зокрема, розмірності множини, мінімальних граней тощо.

Зазначені властивості можуть мати суттєве значення в умовах поганої обумовленості. Деякі погано обумовлені матриці обмежень мають типову структуру з притаманними їм особливостями (закладені особливості утворення). Зокрема, матриця Гільберта, – математично повнорангова та невироджена.

Проведення обчислень з використанням цієї матриці може давати суперечливі (непередбачувані) результати, – як точні, так і з великою похибкою. У зв’язку з цим запропоновано підходи побудови передобумовлювачів, які спрямовані на “виправлення” такої властивості системи направленим перетворенням матриці обмежень [5–8].

Деякі типові матриці (зокрема і згадана вище) можуть бути складовими при розв’язанні серії однотипних задач в умовах різних розмірностей. В такому випадку матриці обмежень більшої розмірності можна розглядати як послідовності включень рядків-стовпців до матриць меншої розмірності. Зокрема, у схемі Гальоркіна для крайової задачі система базисних функцій може бути розширеною включенням нових функцій для досягнення більшої точності розв’язку, що обумовлює процес збільшення розмірності матриці обмежень СЛАР проведенням окаямлення матриць Гільберта.

Встановлення як величини рангу, так і зв’язків розв’язків задач різної розмірності при таких змінах стає важливим.

Бачиться доцільним розробку нових та розвиток існуючих методів та алгоритмів проведення аналізу впливу змін при поданні елементів СЛАР, значення яких знаходяться в “зоні” близькій до машинного нуля. Зокрема – при розв’язанні систем рівнянь при різних варіантах подання моделі (довжини мантиси, величини порядку тощо) з врахуванням особливостей структури матриці обмежень.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

На сьогодні відомі для точних – десятки, а для ітераційних, напевне, сотні варіантів методів та алгоритмів розв’язання СЛАР. Найбільш поширені та вживані наведені у [1, 3]. В окремих випадках застосування тих чи інших ітераційних методів при розв’язанні СЛАР може призводити до втрати “спадкоємності” (залежності від початкових розв’язків), що обмежує їх застосування при проведенні аналізу властивостей системи в контексті поставленої задачі. Це, зокрема, простежується в [1, 3]. Але авторами важливі аспекти, що стосуються встановлення величини рангу та її впливу на властивості, залишилися поза увагою і досліджені недостатньо. В теоретичних дослідженнях категорія рангу є ключовою при встановленні властивостей системи, а при практичних обчисленнях є залежною і від організації обчислень, і від властивостей задачі. Бачиться доцільним таке застосування методів розв’язання СЛАР, при якому всебічно оцінюються та враховуються величина рангу та його повнота. Тому, з точки зору застосовуваності при аналізі властивостей задачі, доцільно взяти за основу класичні точні методи, в яких така можливість закладена. Найбільш відомими є методи Крамера та Гауса, в тому числі їх адаптації під структуру матриці обмеження та узагальнення [1–3]. Якщо розглядати СЛАР з довільним співвідношенням кількості рядків та стовпців, то метод Гауса можна вважати універсальним. Метод дозволяє розв’язати задачу без обмежень на структуру та розмірність відповідної матриці. В ряді реалізацій СЛАР та ЗЛП [3, 4] закладено саме такі варіанти цього методу. Теоретичні підґрунтя методів розв’язання СЛАР, що запропоновані як у загальновідомих [1, 3], так і в більш сучасних [5–7] публікаціях, дозволяють стверджувати наступне. Для коректного їхнього застосування, наприклад при обчисленнях, є важливими встановлення величини рангу та властивості його повноти, знаходження відповідної рангової матриці (базисної), виконання умов опорності, невиродженості базисної матриці. Загалом, встановлення цих властивостей є окремою допоміжною задачею аналізу.

Згадані вище класичні методи розв’язання СЛАР мають певні універсальні властивості, що дозволяють в ході ітерацій проводити переходи від початкової матриці обмежень до матриці обмежень простої структури без обмеження на її розмірність. В ході цих ітерацій (умова коректності переходів – відмінність від нуля ведучого елементу на ітераціях) можуть бути встановлені всі важливі параметри системи (розв’язність, величина рангу), що дає можливість будувати загальні розв’язки чи встановлювати несумісність обмежень задачі. У випадку повноти рангу такий підхід покладено в основу процедури обертання матриці та побудови варіантів реалізації симплекс-методу знаходження оптимального розв’язку [3, 4]. Але специфіка методу Гаусу, як інструменту для розв’язання СЛАР [8], дещо обмежує його застосування для проведення аналізу властивостей системи при вирішенні інших супутніх задач. Слід зазначити, що трудомісткість ітерацій методу в ході обчислень зменшується.

Наряду з класичною схемою (Гауса) дослідження СЛАР та ЗЛП, існують варіанти з використанням методу базисних матриць (МБМ), обчислювальна схема яких працює, умовно кажучи, навпаки [9–11]. Від допоміжної СЛАР з тривіальною матрицею обмежень та відомим розв’язком еквівалентними перетвореннями (послідовним включенням обмежень вихідної задачі) проводиться перехід до початкової моделі. При цьому, в ході ітерацій відстежуються всі важливі параметри як, наприклад, умова опорності (ведучий елемент перетворення відмінний від нуля), повнота рангу, невиродженість прямої та оберненої матриці, проміжні розв’язки, встановлюється розв’язність задачі, контролюється обумовленість системи. Але найбільш цінною є можливість аналізувати вплив зміни окремих елементів (рядків, стовпців) в моделі без необхідності повторного розв’язання задачі з внесенням змін до моделі, що зменшує витрати часу на пошук оптимального рішення. Таким чином, використання МБМ дає можливість не лише розв’язувати задачі, але й проводити аналіз.

Знайдений одним з методів розв’язок може обумовити також постановку ряду нових задач по дослідженню. Так, при встановленні властивості неповноти рангу матриці обмежень або нерозв’язності СЛАР чи ЗЛП може виявитися необхідним відновити повноту рангу направленими змінами матриці обмежень, через виявлення обмежень, що породжують несумісність та усуненням їх з розгляду чи, за можливості, направленими змінами в моделі відновити розв’язність. Це характерно для випадку, коли просте відкидання обмежень, які породжують нерозв’язність є неприйнятне. Якщо СЛАР, як модель процесу удосконалюється, зазнаючи змін, то може стати актуальною задача аналізу властивостей СЛАР в результаті змін в моделі, але без перерозв’язання. Задачі в такій постановці досліджено в [11]. Зокрема, при розширенні матриці обмежень (чи звуженні) – включенням (виключенням) рядків чи стовпців [11]. Це може бути актуальним при використанні СЛАР, наприклад, в розв’язанні крайової задачі методом Гальоркіна. Тут система базисних функцій може бути розширена, що обумовлює зміну матриці обмежень (“окаямлювання” поточної).

З математичної точки зору категорія рангу (його величина, повнота), як порядок максимального відмінного від нуля мінора, визначається через перевірку виконання умови незалежності системи векторів (опорності) на ітераціях ряду методів (ведучий елемент відмінний від нуля). Є значимою при теоретичних дослідженнях з аналізу властивостей лінійної системи. З іншої сторони, практика реалізації методів та алгоритмів відкриває грань значущості категорії рангу, але вже у контексті комп’ютерного подання математичної моделі [1, 2].

Відомо, що накопичення помилок при округленні та виконанні основних операцій з використанням ЕОМ є загалом неусувним джерелом похибок та неадекватності моделі процесу при дослідженнях. В роботах [1, 2] було розкрито зміст категорії машинного нуля як аналога математичного нуля, яку можна інтерпретувати як в деякому сенсі неточно задану величину (певний інтервал належності). Відомо також, що округлення та обчислювальні операції можуть організовуватись, загалом, по-різному. Зокрема, згідно формату IEEE при поданні моделі машинний нуль відповідає математичному, як певна множина (інтервал). Наприклад, при обчисленнях математичного ведучого елемента та його машинного аналога (як інтервалу залежного від обраного стандарту представлення чисел моделі та організації обчислень) при перевірці виконання умови “нуль-ненуль” можуть виникати розбіжності. Зокрема, виникають невідповідності у кількості “виконань” умов незалежності системи векторів (ведучий елемент перетворення відмінний від нуля) на ітераціях між математичним та машинним поданням моделі з різною точністю в зонах близьких до машинного нуля. Наприклад, при проведенні обчислень з використанням матриці Гільберта були виявлені значні похибки – відхилення знайденого розв’язку для різних варіантів точності [10]. Таким чином можна констатувати, що методи дослідження властивостей моделі та взаємозв’язків результатів при різних параметрах (особливо, близьких до перехідних “нуль-ненуль”) проведення експериментів розроблені недостатньо.

Накопиченню похибок при обчисленнях сприяє і погана обумовленість системи [1]. В умовах поганої обумовленості бажаною властивістю методів та алгоритмів є наявність контролю входження обчислень в стан поганої обумовленості в ході обчислень [1, 5–8]. Відомо, що оцінка обумовленості передбачає наявність норм (або їх оцінок) прямої та оберненої матриць, що не завжди закладене в можливості конкретної обчислювальної схеми. В роботі [10] наведено огляд методів та алгоритмів проведення обчислень при різних варіантах точності подання моделі, зокрема і в точних числах для погано обумовлених систем (з особливостями структури).

Важливими при проведенні обчислень є також наявність еталонного розв’язку та набору тестових завдань під застосування конкретних методів щодо перевірки їх властивостей. В [1, 8] наведено посилання на відповідні бібліотеки.

Іншим підходом, запропонованим у [10], є розробка так званих точних алгоритмів в рамках методів проведення обчислень в раціональних числах. Це дає змогу безпосередньо перевіряти ефективність розрахунків за алгоритмом. Зокрема, комбіноване використання варіантів реалізації алгоритмів та методів [1–3, 8–10] на різних мовах програмування, для різних рівнів точності (довжина мантиси, величина порядку), в точних числах для типової задачі. Наприклад, з матрицею обмежень Гільберта можна виявити важливі закономірності, наприклад, для подальшої побудови функції належності [12, 13]. Вдало побудована функція належності може бути застосованою у подальшому при прийнятті рішень щодо порядку організації обчислень з досягненням заданого рівня параметрів обчислень.

В МБМ [9–11] закладено знаходження величини рангу, встановлення його повноти, схему відновлення його повноти, аналіз розв'язності. Розроблено реалізації в середовищі різних програмних продуктів, при різних сценаріях обчислень, зокрема в точних числах та передбачено "нарощування" механізму врахування і нечіткості в поданні моделі.

Очевидною є потреба в розвитку існуючих і розробці нових методів та алгоритмів, в яких було б передбачено можливість проводити аналіз лінійних систем за єдиною методологією. Це стосується, зокрема моделей, застосовних в подальшому при розв'язанні СЛАР з погано обумовленою матрицею обмежень, для різних сценаріїв подання елементів моделі (довжини мантиси, величини порядку тощо). При цьому важливим є не лише факт розв'язання задачі, але й наявність інструментів проведення аналізу властивостей моделі при змінах, різних сценаріях обчислень та встановлення їх взаємозв'язків. Важливим є також дослідження можливостей впливу ("зсередини") на ключові параметри методів та алгоритмів аналізу таких параметрів, як ведучий елемент ітерації, умови опорності величини та повноти рангу з урахуванням порогу машинного нуля та переповнення. Це стосується й способів аналізу та обробки перехідних ситуацій ("біля нуля"). Заздалегідь перевірена та підтверджена погодженість поміж собою всіх параметрів обчислень повинна розглядатись як важлива ознака коректності їх проведення.

3. Мета і завдання дослідження

Метою дослідження є розробка теоретичних положень побудови алгоритмів аналізу сумісності та розв'язання лінійних систем (СЛАР), що оснащені додатковими типами даних ("точними" та "неточними") для подання параметрів моделі, організації різних варіантів виконання основних операцій в ході проведення обчислень. Зокрема, при значеннях елементів моделі в "зоні" близькій до машинного нуля при встановленні властивостей погано обумовлених лінійних систем.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

– удосконалити алгоритми розв'язання СЛАР, щодо аналізу сумісності (несумісності) обмежень, побудови структури векторів фундаментальної системи розв'язків у випадку сумісності та впливу змін в моделі з використанням методу базисних матриць. Зокрема, при включенні-виключенні групи рядків та стовпців, без перерозв'язання задачі спочатку;

– дослідити вплив на властивості розв'язків "точних" та "неточних" типів даних, введених для проведення обчислень за алгоритмами методу базисних матриць. Зокрема, впливу на величину та повноту рангу на прикладі СЛАР з погано обумовленою матрицею обмежень;

– провести обчислювальний експеримент щодо аналізу властивостей лінійної системи з погано обумовленою матрицею обмежень (матрицею Гільберта) для різних параметрів подання даних (довжині мантиси, розмірностях моделі) та варіантах проведення обчислень (включаючи випадок в точних числах).

4. Теоретичні аспекти аналізу сумісності обмежень та побудови структури розв’язку лінійних систем

Відомо [4], що знаходження загальних розв’язків системи лінійних алгебраїчних неоднорідних рівнянь (СЛАР) включає стадію побудови фундаментальної системи векторів – багатовиду, тобто підпростору загальних розв’язків відповідної системи однорідних рівнянь зміщених на вектор розв’язку неоднорідної системи. Для перевизначеної СЛАР виникає також і задача аналізу розв’язності за сумісністю.

Витікає, що задачею є не лише розробка типової процедури побудови загальних розв’язків (при сумісності обмежень), але й встановлення загалом розв’язності системи. При використанні моделей СЛАР виникає потреба в аналізі впливів на структуру загальних розв’язків змін в елементах, рядках чи стовпцях матриці обмежень [9–11].

Нехай маємо СЛАР вигляду

$$Ax = B \tag{1}$$

де $A = \left\{ a_{ij} \right\}_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$ – елементи, $\left\{ a_i \right\}_{i=\overline{1,m}} = \left\{ a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} \right\}_{i=\overline{1,m}}$ рядки, $\left\{ A_j \right\}_{j=\overline{1,n}} = \left\{ a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj} \right\}_{j=\overline{1,n}}$ – стовпці матриці розмірності (m, n), $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, – вектор змінних, $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T = (B_b, B_H)^T$, – вектор правих частин обмежень, Т – знак транспонування. Модель (1) досліджується в E^n.

Введемо множини індексів $I = (1,2,\dots,m)$, $J = (1,2,\dots,n)$, $I_b = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, $J_b = (j_1, j_2, \dots, j_r)$, $J_н = J/J_b$, $I_н = I/I_b$, – множини індексів рядків та стовпців, лінійно-незалежних та решти рядків (стовпців).

В загальному випадку для прямокутної матриці обмежень ранг $R = rank(A) < \min(m,n)$.

Вважаємо, що модель (1) досліджується в просторі E^n. В припущенні, що відомі множини I_b, J_b введемо в розгляд матриці

$$A_{(b)} = \left\{ a_{ij} \right\}_{\substack{i \in I_b, \\ j \in J_b}} = \left\{ a_{(b)i} \right\}_{i \in I_b} = \left\{ a_{ij_1}, a_{i_{j_2}}, ..., a_{i_{j_r}} \right\}_{i \in I_b} \ ;$$

$$A_{(b)j} = \left\{ a_{i_1 j}, a_{i_2 j}, ..., a_{i_r j} \right\}^T_{j \in J_b};$$

$$A_{(н)} = \left\{ a_{ij} \right\}_{\substack{i \in I_b, \\ j \notin J_b}},\ \ A_{(н)j} = \left\{ a_{i_1 j}, a_{i_2 j}, ..., a_{i_r j} \right\}^T_{j \notin J_b};$$

$$\overline{A}_{(b)} = \left\{ a_{ij} \right\}_{\substack{i \notin I_b, \\ j \in J_b}} = \left\{ \overline{a}_{(b)i} \right\}_{i \notin I_b} = \left\{ a_{i_{j1}}, a_{i_{j2}}, ..., a_{i_{jr}} \right\}_{i \notin I_b};$$

$$\overline{A}_{(н)} = \left\{ a_{ij} \right\}_{\substack{i \notin I_b, \\ j \notin J_b}}.$$

Введемо основні означення.

Означення 1. Квадратну матрицю A_b A_b, утворену перетином r лінійно незалежних рядків $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ $(i_1, i_2, \dots, i_r) = I_b \subset I$ та стовпців $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$, $(j_1, j_2, \dots, j_r) = J_b \subset J$ (1), будемо називати *r* – базисною, а розв′язок $x_0 = \left(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}\right)$ відповідної їм системи рівнянь $A_b x_b = B_b$, $B_b \subset B$, *r*-базисним.

Означення 2. Дві *r*-базисні матриці з одним відмінним рядком чи стовпцем будемо називати суміжними.

Базисні матриці ($r = m$) в ході ітерацій МБМ [9] послідовно змінюються заміщенням рядків. Нехай e_{ri} – елементи матриці A_b^{-1}, оберненої до A_b $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots, \alpha_{rm})$ – вектор розвинення α_r за рядками базисної матриці A_b, $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$ – вектор розвинення стовпця A_j, $j \in J$ за стовпцями базисної матриці A_b. Елементи МБМ – коефіцієнти розвинення нормалей обмежень, коефіцієнти оберненої матриці будемо позначати рискою зверху, тобто A_b, α_r, e_{ri}, α_r.

Згідно теореми 1 [9] між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (1) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць в двох суміжних базисних матрицях встановлено відповідні співвідношення. Встановлені також умови невиродженості базисної матриці при заміщенні нормаллю α_l *k*-го рядка базисної матриці A_b ($\alpha_{lk} \neq 0$).

Нехай відомі величина рангу матриці *A* та її *r*-базисна матриця A_b.

Без обмеження загальності, згідно введених позначень систему (1) можна переписати в еквівалентному вигляді:

$$A_б x_б = B_б - A_н x_н; \tag{2}$$

$$\overline{A}_н x_б = B_н - \overline{A}_н x_н. \tag{3}$$

Дослідимо властивість розв’язності (1) при основних, не тривіальних, співвідношеннях розмірності матриці обмежень та величини рангу.

I. Нехай $r = rank(A) = \min(m,n) = m$, $m<n$. За таких обмежень рядки $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jm})$, $j \in I$ та стовпці $Aj = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj})$, $j \in J_b$ лінійно-незалежні $I_б = I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, $J_н = J/J_б$, $I_н = I/I_б = \varnothing$, вектор змінних – $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = (x_b, x_n)^T$, $x_b = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \subset x$, вектор правих частин обмежень – $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T = B_b$.

Систему (1) в цьому випадку можна переписати у еквівалентному вигляді, причому буде розв'язною за сумісністю

$A_б x_б = \mathrm{B} - A_н x_н.$ (4)

Матриця A_b (r-базисна) буде визначатись перетином рядків та стовпців ($I_b = I \quad J_b = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \subset J$).

Означимо вектори $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})^T$, $(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})^T$, $j \in J_н$ як розв'язки наступних СЛАР з квадратною невиродженою матрицею $A_б\, A_б$ виду

$$A_b x_b = B_b, \tag{5}$$

$$A_b x_b = -A_j,\ j \in J_н \tag{6}$$

і сформуємо на їх основі наступну систему векторів

$$X_0 = \left(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r} \right), X_i = \left(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{mi}, \underbrace{0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0}_{n-r} \right), i = \overline{1, n-r},$$

де i – порядковий номер стовпця j в множині $J_н$. Згідно [4] така система векторів визначає фундаментальну систему векторів – багатовид загальних розв'язків (1) у вигляді

$$X_0 + \sum_{s=1}^{n-r} \beta_s X_s,$$

де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ довільні дійсні числа.

Обчислювальні труднощі при знаходженні загального розв'язку (1) полягають не лише у визначенні величини рангу, але й при формуванні базисної та оберненої до неї матриць. Це стосується і формування набору лінійно-незалежних рядків та стовпців A_b, векторів розвинень рядків та стовпців, компонент векторів X_0, X_i, X_0, X_i, $i = \overline{1, n-r}$. Визначення рангу, побудова оберненої базисної матриці до A_b (r-базисна) можна здійснити на основі МБМ – заміщенням рядків використовуючи співвідношення теореми 1 [9].

Проведення згідно [9] r симплексних ітерацій МБМ по заміщенню рядків матриці $E = E^{-1}$ (допоміжна матриця порядку n) рядками матриці A (алгоритм 1 у [9]) визначає базисну матрицю A_b. Також визначається обернена матриця A_b^{-1} системи (1) – викреслюванням відповідних рядків і стовпців та контролюється на кроках невиродженість матриці.

Вектори

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}) = A_b^{-1} B_b,\ x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}) = A_b^{-1} A_j,\ j \in J_н$$

є розв'язками СЛАР виду (5), (6), а з іншої сторони визначають компоненти векторів X_0, X_i, $\overline{X}_0$, $\overline{X}_i$, $i=\overline{1,n-r}$.

II. Дослідження розв'язності системи при виконанні умови $m > n$, $r = rank(A) = \min(n,m) = n$ визначає еквівалентну (1) систему вигляду:

$$A_b x_b = B_b\,, \tag{7}$$

$$\overline{A}_b x_b = B_н x_b = B_н\,. \tag{8}$$

Матриця A_b (r-базисна) буде визначатись перетином рядків та стовпців ($I_b=I$ та $J_b = (j_1, j_2, \ldots, j_r) \subset J$).

Система (7) має єдиний розв'язок $x_b = A_b^{-1}B_b$. В сукупності для (7), (8) характерною ознакою є перевизначеність (системи обмежень (1)) $B_b \subset B$. Додаткова складність – аналіз системи (7), (8) на розв'язність за сумісністю, тобто допустимості розв'язку (7) системі обмежень (8). Для аналізу цього випадку вважаємо, що відомі $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2},\ldots, \alpha_{im})$, $i\in I_н$, $\alpha_i = \alpha_i A_b^{-1}$, $B_b = (b_{i1}, b_{i2},\ldots, b_{iн})^T\subset$B, $\overline{b}_i = \alpha_i B_b = \alpha_i B_b$, які можна визначити наприклад, МБМ. Виявляється, що для цього випадку є справедливим наступне:

необхідною і достатньою умовою несумісності обмежень (нерозв'язності системи (7),(8)) для якої $m > n$, $r = rank(A) = \min(n,m) = n$ є порушення принаймні для одного i співвідношення:

$$\exists\, i,\ i\in I_н,\ b_i \neq b_i = \overline{b}_i,\ i\in I_н\ . \tag{9}$$

Необхідною і достатньою умовою сумісності обмежень (розв'язності системи (1)) для якої якої $m > n$, $r = rank(A) = \min(n,m) = n$ є виконання співвідношення:

$$b_i = b_i = \overline{b}_i,\ i\in I_н,\ i\in I_н. \tag{10}$$

III. Нехай $r = rank(A) < \min(n,m)$. Матриця $A_б$ (r-базисна) буде визначатись перетином рядків та стовпців ($J_b^r = (j_1, j_2, \ldots, j_r) \subset J$ та $I_b^r = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \subset I$).

Характерно, що система еквівалентна (1) набуде вигляду (2), (3), тобто аналіз її розв'язності проводиться за два кроки. На першому кроці будуємо загальний розв'язок (2) – І-й випадок, а на другому – аналізуємо розв'язність (2), (3). Слід зазначити, що умови розв'язності (випадок ІІ) можна поширити на загальний випадок структурних властивостей матриці обмежень та величини рангу, тобто $r = rank(A) < \min(n,m)$.

Дослідження випадків $r = rank(A) < \min(n,m)$, $n = m$ та $r = rank(A) = \min(n,m)$, $n = m$ зводиться до попередніх випадків.

Наведені вище умови розв'язності є конструктивними при проведенні аналізу властивості лінійної системи при змінах в окремих елементах, групах рядків, стовпців чи вектору обмежень. Загалом зміни в системі зумовлюють величина рангу матриці обмежень – збільшення (зменшення), переформування нової базисної матриці (зміна в елементах) та розвинення відповідних рядків чи стовпців – структури векторів фундаментальної системи розв'язків.

Умови теореми не суперечать положенням відомої теореми Кронекера-Капеллі про розв'язність системи рівнянь.

Використання МБМ [9] дає змогу проводити направлений аналіз впливу змін в моделі (1) на загальний розв'язок. Це може зменшити загальну кількість обчислень при незначних змінах в елементах що не входять в A_b (1). В цьому випадку проводиться фактично дорозв'язання задачі. Зокрема, зміни в векторі B та компонентах векторів A_j, $j \in J_н$ обумовлюють лише перерахунок збурених компонент підвекторів та перевірку сумісності. Зміни в компонентах базисної матриці мають дещо складніший механізм впливу на структуру розв'язку. За цих обставин типовими симплексними ітераціями потрібно проконтролювати ранг та властивість невиродженості матриці в результаті змін.

5. Алгоритми аналізу повноти рангу матриць обмежень лінійних систем методом базисних матриць

В даному розділі розвинуто метод базисних матриць для проведення аналізу повноти рангу [9].

Введемо в розгляд СЛАР вигляду:

$$Au=C, \tag{11}$$

де матриця A розмірності (n×m), $C = (c_1, c_2,\ldots, c_n)^T$ – вектор стовпець розмірності n, $u = (u_1, u_2,\ldots, u_n)^T$ $u=(u_1,u_2,..,u_m)^{\mathrm{T}}$ – шуканий вектор розмірності m, T – знак транспонування, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jm})$, $j = 1,2,\ldots,n$ – рядки матриці A. Рівняння (1) доповнюється допоміжною СЛАР виду:

$$Iu = K, \tag{12}$$

де I – одинично-діагональна матриця розмірності ($m \times m$), а

$$K=(\underbrace{1,1,....,1}_{m})^{\mathrm{T}}$$

– вектор розмірності m. Передбачається, що система (12), зазвичай, тривіальна, з відомими властивостями виконує лише допоміжну роль, а саме – побудови початкових значень елементів МБМ, зокрема, оберненої матриці та розв'язку.

В основу побудови алгоритму аналізу властивостей СЛАР покладено метод базисних матриць, оскільки в ньому згідно [9] закладена здатність:

– знаходити величину рангу матриці обмежень системи (11);

– знаходити розв'язок СЛАР (11);

– контролювати обумовленість системи;

– аналізувати вплив змін у моделі (11) в результаті уточнень (без перерозв’язання);

– будувати початкові розв’язки задач на основі тривіальних базисних матриць (12), що виключає трудомісткі початкові обчислення.

Нагадаємо [9], що основою запропонованого методу штучних базисних матриць (варіант МБМ) є ідея порядкової базисної матриці. Базисні матриці в ході ітерацій послідовно змінюються вводом-виводом із неї рядків-нормалей обмежень задачі.

Підматрицю $A_б$, складену із m лінійно незалежних рядків-нормалей $(i_1,i_2,\ldots,i_m)$ обмежень, будемо називати штучною базисною, а розв′язок u_0 відповідної їм системи рівнянь $A_б u = C^0$, де $C^0 = (c_{i1}, c_{i2},\ldots, c_{in})^T$ штучним базисним.

Ранг матриці обмежень A будемо вважати повним, якщо виконується умова $rank(A) = \min(n,m)$, m, n відповідно кількість рядків та стовпців матриці обмежень.

Нехай: e_{ri} – елементи матриці $A_б^{-1}$ оберненої до $A_б$; $u_0 = (u_{01}, u_{01},\ldots, u_{0m})^T$ – базисний розв’язок; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2},\ldots,\alpha_{rm})$ – вектор розвинення вектору-нормалі обмеження $\alpha_r u \le c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$; $\Delta_r = \alpha_r u_0 - c_r$ – нев’язка r-го обмеження (1) в вершині. Всі введені елементи в новій базисній матриці $\overline{A}_б$, відмінній від $A_б$ одним рядком, будемо позначати рискою зверху.

Згідно Теореми 1 [9], між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень, елементами обернених матриць, базисними розв’язками, нев’язками обмежень в двох суміжних базисних матрицях встановлено відповідні співвідношення.

На основі них будується схема визначення рангу системи (1) та розв’язку системи рівнянь, послідовними змінами базисних матриць та відповідних штучних розв′язків.

Згідно Леми 1 [9], необхідною та достатньою умовою лінійної незалежності системи векторів $a_{i_1}, a_{i_2},\ldots, a_{i_{k-1}}, a_l, a_{i_{k+1}},\ldots, a_{i_m}$, яка утворена заміною вектора a_{i_k}, що займає k-ий рядок в базисній матриці A_b вектором α_1 є виконання умови $\alpha_{lk} \neq 0$. Лема є основоположною при аналізі повноти рангу матриці обмежень та побудови нових алгоритмів метода базисних матриць.

Наслідок 1. (Леми 1 [9]) Для існування єдиного розв’язку (11) необхідно та достатньо, щоб $\alpha_{lk}^{(i)} \neq 0$, $i = \overline{1,r}$, $r = m = n$, $r = m = n$ де i – номер ітерації, $\alpha_{lk}^{(i)}$ – ведучі елементи симплексної ітерації МБМ по заміщенню рядків базисної матриці (12) нормалями обмежень (11).

Наслідок 2. (Леми 1 [9]) Матриця А основної системи (11) невироджена, якщо $\alpha_{lk}^{(i)} \neq 0$, $i = \overline{1,m}$, $r = n = m$ $r = m = n$.

Наслідок 3. (Леми 1 [9]) Ранг системи (11) визначається кількістю коректних (по виконанню умов леми 1) заміщень рядків матриці обмежень (12) векторами нормалями (11) (згідно Теореми 1 [9]).

Нижче наведені основні стадії алгоритмічної схеми знаходження величини рангу, відповідної базисної матриці і рішення системи (11) на основі відомих властивостей системи (12), що побудована за кількістю стовпців (змінних) матриці обмежень:

1. Проводимо симплексні ітерації по заміщенню рядків базисної матриці системи (12) (алгоритм 1 [11]) рядками обмежень системи (11), згідно співвідношень (5) – (9) [9].

2. Перевіряємо виконання умов невиродженості ($\alpha_{l^{(r)}k^{(r)}} \neq 0,\ r - r$ – номер ітерації).

3. Знаходимо відповідні елементи метода: вектори розкладу за рядками базисних матриць обмежень (12), обернену базисну матрицю, базисні розв'язки $u_0^{(r)}$, де r – номер ітерації.

4. Контролюємо кількість ітерацій r заміщення рядків допоміжної системи (12) рядками основної системи (11) для яких виконуються умови невиродженості.

Якщо кількість ітерацій заміщення рядків допоміжної системи (12) рядками основної системи (11) для яких виконуються умови невиродженості ($\alpha_{lk}^{(i)} \neq 0$), дорівнює r та $r = m = n$, тобто для квадратної матриці, то знаходимо єдиний розв'язок згідно співвідношення: $A_б^{-1} \cdot c^0 = u^0$.

Якщо кількість ітерацій заміщення рядків допоміжної системи (2) рядками основної системи (1) для яких виконуються умови невиродженості ($\alpha_{lk}^{(i)} \neq 0$), дорівнює r та $r = m < n$**,** тобто матриця обмежень (11) – "довга", повнорангова матриця обмежень. Матриця A_b (r-базисна) та обернена до неї буде визначатись з перетворених за r ітерацій повнорангових матриць (прямої та оберненої) (12) викреслюванням відповідно заміщених рядків та стовпців ($I_b = I$ та $J_b = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \subset J$) (випадок I попередній розділ). Далі знаходимо ФСР – множину розв'язків (багатовид) або можемо виокремити один з розв'язків.

Якщо кількість ітерацій, для яких $\alpha_{lk}^{(i} \neq 0$, дорівнює r та $r = n < m$ **–** висока матриця обмежень. Матриця A_b (r-базисна) та обернена до неї буде визначатись з перетворених за r ітерацій повнорангових матриць (прямої та оберненої) (12) викреслюванням відповідно заміщених рядків та стовпців ($J_b = J$ та $I_b = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \subset I$) (випадок II). Далі проводиться аналіз розв'язності задачі**.**

Якщо кількість ітерацій, для яких $\alpha_{lk}^{(i} \neq 0$, дорівнює r та виконуються умови $r < m$, $r < n$. Це означає неповноту рангу для СЛАР (1), тобто модель потребує подальшого аналізу розв'язності (випадок III передній розділ). А саме, матриця A_b (r-базисна) та обернена до неї буде визначатись з перетворених за r ітерацій повнорангових матриць (прямої та оберненої) (12) викреслюванням відповідно заміщених рядків та стовпців ($J_б^r = (j_1, j_2, \ldots, j_r) \subset J$ та $I_б^r = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \subset I$) (випадок III). Перевіряємо умови розв'язності. При їх виконанні знаходимо ФСР – множину розв'язків (багатовид).

5. 1. Про повноту рангу матриці обмежень СЛАР

Нехай для рядка α_1 обмеження $\alpha_l u = c_l$ з (11) виконується, що $\alpha_{lk} = 0$ (k-а компонента вектора розкладу α_l за рядками A_b дорівнює нулю). Тобто «введення» такого рядка в базисну матрицю порушує умову невиродженості "нової" матриці обмежень (вказує на можливу неповноту величини рангу). Відповідно для збуреного обмеження $a_l u \le \tilde{c}_l$, у вигляді $a_l = a_l + a_l^{'}$, $c_l = c_l + c_l^{'}$ можемо записати, що $\Delta_l = \Delta_l + \Delta_l^{'} = a_l u_0 - c_l$ та $\alpha_l = (\alpha_l + \alpha_l^{'}) = (a_l + a_l^{'}) A_б^{-1}$.

Наслідок 4. Умовою невиродженості матриці $\overline{A}_б$ утвореної заміщенням α_l, яка займає k-ий рядок у базисній матриці рядком a_l є виконання умови: $\exists\ i\ e_{ik} \neq 0$, де e_{ik} елемент оберненої матриці $A_б^{-1}$, такого, що α'_{li}. Новий розв'язок буде визначатись співвідношенням $\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \dfrac{e_{jk}}{\tilde{\alpha}_{lk}} \Delta_l$, причому якщо $\Delta_l = 0$, то $\overline{u}_{0j} = u_{0j}$, $j = \overline{1,m}$ (залишається незмінним).

Це умова направленого відновлення невиродженості базисної матриці в ході обчислень (повноти рангу).

Наслідок 5. Якщо ведучий елемент симплексної ітерації $\alpha_{lk} \neq 0$, то для збурення, що зберігає невиродженість "нової" базисної матриці (величину рангу) повинна виконуватись умова $\alpha'_{li} + \alpha_{lk} \neq 0$.

Це умова збереження невиродженості базисної матриці при змінах в ході обчислень (повноти рангу).

Наслідок 6. Необхідною та достатньою умовою збереження невиродженості нової $\overline{A}_b$ (повноти рангу), яка утворена заміною рядка α_l, шо займає k-ий рядок у базисній матриці рядком a_l є виконання умови $\alpha_{lk} \neq 0$.

Справедливість наслідків безпосередньо випливає з теореми 1 [9] та організації алгоритмічної схеми розв'язання СЛАР (11).

6. Аналіз величини рангу при "розширенні" та "звуженні" матриці обмежень "окаямленням" матриці обмежень лінійної системи

Відомо, що про величину рангу матриці обмежень можна робити висновок за властивостями визначників головних мінорів матриці обмежень [1–3]. Саме тут застосовна процедура окаямлювання мінорів. Існують матриці обмежень (наприклад, Гільберта), які математично невироджені (повнорангові), але при "незадовільній" організації обчислень "можуть стати" неповноранговими. Слід зазначити, що випадок неповноти рангу (якщо кількість ітерацій, для яких $\alpha_{lk}^{(i} \neq 0$, дорівнює r та виконуються умови $r < m$, $r < n$) можна розглядати як найбільш загальний. Це означає, що вастивість неповноти рангу для СЛАР (11) може бути стартовою для подальшого її вивчення і, зокрема, для відновлення його повноти. Модель може зазнавати в подальшому змін. Через це аналіз розв'язності при розширенні (звуженні) розмірності матриці обмежень – включення (виключення) нових рядків та стовпців або зміні окремих елементів моделі [9, 11] може розглядатись як варіант послідовних змін. Змін по відновленню повноти рангу тощо. Звичайно, при таких перетвореннях повинна простежуватись зміна властивостей моделі.

Матриця A_b (r-базисна) може розглядатись як підматриця матриці більшої розмірності, її складовою частиною.

Елементарна “порція” змін в моделі буде визначатись і окайямлюванням базисної матриці (r-базисної) – включенням рядка та стовпця при розширенні.

Наступна матриця буде включать попередню, тобто маємо послідовність головних мінорів матриці (порядок таких мінорів змінюється). Кінцева матриця A_b (r-базисна) та обернена до неї визначаються перетвореннями за r ітерацій з A (12) – викреслюванням відповідно заміщених рядків-стовпців $J_b = (i_1,i_2,\ldots,i_r) \subset J$, $I_b = (i_1,i_2,\ldots,i_r) \subset I$ в загальному випадку (випадок III).

В [11] досліджено властивості СЛАР (11) з квадратною матрицею обмежень при збуреннях в елементах “групи” рядків. Алгоритмом закладено проведення послідовного (порядкового) заміщення рядків базисних матриць відповідно збуреними та обчислення (зміну) елементів методу на ітераціях. Важливою умовою в ході ітерацій є збереження невиродженості матриці обмежень задачі (Алгоритм 1 [11]).

Аналогічно, технологію впливу змін окремого стовпця на розв’язок СЛАР [11] можна поширити на аналіз впливу змін групи стовпців побудовою відповідної ітеративної процедури врахування впливу змін кожного зі стовпців (Алгоритм 2 [11]).

На основі алгоритмів 1, 2 можна побудувати додатки до дослідження властивостей головних мінорів при розширенні (змінах у групі рядків-стовпців). Наприклад, шляхом проведення направленого окаямлювання групою рядків та стовпців (при розширенні розмірності мінора – включення (виключення) нових рядків та стовпців (окаямлювання).

“Розширення” та “звуження” матриці обмежень СЛАР досліджено в [11].

Нехай відомо, що початкова r-базисна матриця (з відомими властивостями) є частиною “більшої” матриці обмежень (“окаямлення”). Без обмеження загальності, будемо вважати, що маємо головний мінор – r-базисну матрицю обмежень A_b. Проведемо дослідження впливу окаямлювання даного мінора рядками та стовпцями “більшої” матриці обмежень.

Введемо в розгляд допоміжні блочно-клітинні матриці структурно близькі до A_b та A_b^{-1} (r-базисна матриця та обернена до неї) вигляду:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \ldots & a_{1r} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & 0 \\ . & . & \ldots & . & 0 \\ a_{r1} & a_{r1} & \ldots & a_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & I_{r+1r+1} \end{pmatrix},$$

$$E_0 = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{11} & \dots & e_{1r} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2r} & 0 \\ . & . & \dots & . & 0 \\ e_{r1} & e_{r1} & \dots & e_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_{r+1\, r+1} \end{pmatrix},$$

де $I_{r+p\; r+p}$ – одинично-діагональна матриця розмірності p, A_0 та E_0 містять відповідно, A_b та A_b^{-1} (введені раніше).

За відомою r-базисною матрицею та оберненою до неї A_b (мінор) та A_b^{-1} можна встановити властивості окаямлюючої $\overline{A}$, $A_b \subset \overline{A}$ вигляду:

$$A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ . & . & \dots & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix},$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r+p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r+p} \\ . & . & \dots & . \\ a_{r+p1} & a_{r2} & \dots & a_{r+pr+p} \end{pmatrix},$$

які містять відповідно $r\times r$, $(r+p)\times(r+p)$ елементів, тобто добавлено p стовпців та рядків окаямлювання до мінора (r-базисної матриці A_b).

Неважко переконатись, що:

– матриці A_0 та E_0 є прямою та оберненою матрицями;

– встановлення властивостей $\overline{A}$ (“розширеної” матриці) в припущенні відомих A_b та A_b^{-1} ґрунтується на послідовному застосуванні алгоритмів 2 (за стовпцями) та 1 (за рядками) відповідно.

Тобто, на основі A_b та A_b^{-1}:

– формуємо допоміжні матриці A_0 та E_0;

– послідовним заміщенням (“включенням”) стовпців та рядків (“окаямлювання”) здійснюється ітераційний перехід від A_0 з оберненою E_0 до $\overline{A}_b$, $\overline{A}_b^{-1}$;

– перевіряються умови опорності (зростання рангу мінора), перераховуються елементи методу, зокрема, зміни у розв’язку та оберненій матриці;

– невиконання умови опорності вказує, що відповідний рядок та стовбець “непридатні” для окаямлювання.

У ході ітерацій формується нова базисна матриця (повного чи неповного рангу – максимальний мінор з визначником відмінним нуля) відповідно проведеному “розширенню” матриці обмежень.

Навпаки (“звуження” матриці), тобто встановлення властивостей A_b та A_b^{-1} за відомими $\bar{A}$, $\bar{A}^{-1}$ ґрунтується на “оберненому” послідовному застосуванні алгоритмів 2 (за стовпцями) та 1 (за рядками), відповідно. Перехід до допоміжних A_0 та оберненої E_0 що включають A_b та A_b^{-1} здійснюється послідовним заміщенням (“виключенням”) стовпців та рядків з переходом до структури A_0 та E_0. На наступному етапі з них “виокремлюються” A_b та A_b^{-1}.

7. Про обчислювальні аспекти аналізу лінійних систем методом базисних матриць

Відомо [1, 2], що загальноприйнятим стандартом представлення чисел є IEEE – стандарт двійкової арифметики. Реалізований на основних машинних станціях та на всіх видах ПК. Стандарт IEEE передбачає 2 основні типи чисел з плаваючою крапкою (з 32-бітним та 64-бітним представленням). Відповідно, для 1-го типу вводиться поняття порогу машинного нуля “приблизно” на рівні 2^{-126} та переповнення – 2^{+128}, а для 2-го типу – поріг нуля 2^{-1022} та переповнення 2^{+1024}. Тобто поріг машинного нуля визначає зону субнормальних чисел, як множину (деякий окіл нуля), поріг переповнення обмежує зону нормалізованих чисел (знаходиться за зоною субнормальних чисел). У введеному стандарті IEEE категорії довжини мантиси, величини порядку (і спосіб округлення, виконання операцій) є основоположними. Лежать в основі представлення чисел, визначають рівні порогів переповнення та машинного нуля. Це обумовлює основні кількісні оцінки похибок при представленні чисел та при проведенні обчислень. Загалом, організація стандарту може бути організована по-різному, і згадані вихідні параметри можуть бути різними. Тобто втрати точності при представленні чисел за рахунок округлення (звичайно малі).

7. 1. Ведучий елемент як неточно визначена величина

При проведенні математичних (точних) обчислень в класичних методах типу Гауса привертає до себе увагу умова нерівності нулю ведучого елемента перетворення. З математичної точки зору, згідно основоположних формул проводиться ділення на ведучий елемент при перетвореннях (звичайно ділення на нуль неприпустиме). В той же час, ця умова вказує на лінійну залежність рядків, тобто і неповноранговість матриці обмежень. В умовах машинної реалізації методу умова “нуль-ненуль” (неточна множина), як належність зоні субнормальних чисел надає обчисленням нового змісту – вплив на величину рангу.

7. 2. Умова опорності як неточна величини в МБМ

В методі базисних матриць (МБМ) умова опорності (як незалежність системи векторів) Лема 1 [9] також вказує на значущість в середовищі методу умови “нуль-ненуль” (належність неточній множині).

Було встановлено, що величина рангу корелюється з кількістю виконань умов опорності в схемі МБМ. Повнота рангу – як умова співпадання з максимальною кількістю виконання умов опорності.

В умовах різних сценаріїв організації обчислень величина рангу (його повнота) чітка та однозначно визначена в умовах математичного подання, “виступає” як неточною (належність множині), оскільки напряму залежить від реального порогу математичного нуля (множини – зони субнормальних чисел). Це фігурує в умові опорності МБМ та нерівності нулю ведучого елемента в методі Гауса. А загалом – у методах типу «симплекс-метод».

Відомо, що матриця Гільберта математично невироджена, а при машинному «вдалому» представленні в ході обчислень може давати великі похибки знайденого розв'язку. В [10] було розроблено відповідний спосіб представлення чисел, виконання основних операцій та проведення обчислень в точних числах. Було здійснено реалізацію методів Гауса та МБМ в точних числах та проведено відповідні експерименти для СЛАР, зокрема, з матрицею обмежень Гільберта. В подальшому, на основі точного формату, було розроблено новий тип представлення чисел (“неточний” або з фіксованою комою), проведення округлення та виконання основних операцій. Згідно цього формату представлення з’явилась можливість програмно керувати процесом проведення обчислення з різною довжиною дробової частини числа (справа від коми) та необмеженою кількістю цілих цифр (в межах переповнення). В цьому випадку відповідно до дробової частини числа, способу округлення та реалізації основних операцій ставиться у відповідність “свій” машинний нуль. Це відкрило можливість проводити обчислення на типових моделях різної розмірності, з різною довжиною дробової частини (16, 32, 64, 128, 256), як на еталонних точних так і “неточних” алгоритмах форматів представлення чисел. В основу було покладено алгоритми методів Гауса та МБМ. За типову структуру обрано матрицю Гільберта. На фоні поганої обумовленості матриці Гільберта в ході експерименту було виявлено прояви невідповідності математичного (аналітичного) та машинного подання нуля особливо в зонах близьких до нуля (Eps). За посиланням [14] наведено відповідні результати та інструменти, що були застосовані при організації експерименту.

Слід наголосити, на деякі загальні властивості експерименту:

– при високоточних обчисленнях з великою довжиною мантиси спостерігається збереження повноти рангу та висока точність розв’язку;

– наявна певна межа при якій повнота рангу ще зберігається, але похибка знайденого розв'язку стає значною;

– з певного моменту настає фаза і падіння повноти рангу, і значної похибки розв’язку – момент машинної нерозв’язності чи неєдиності розв’язків СЛАР.

В першому випадку маємо відповідність еталонного математичного розв’язку та машинного. Другий випадок вказує на ефект впливу похибок обчислень, що спочатку зумовлюють збурення (зі збереження лінійної незалежностті векторів-нормалей обмежень) та відхилення розв’язку (зростання абсолютної похибки).

Подальше накопичення похибок приводить до “зближення” (склеювання) векторів нормалей (втрата повноти рангу) та утворення багатовиду при розв'язності або суперечливості обмежень (при несумісності).

Наприклад, якщо мантиса дробової частини 32 двійкові цифри, то 2^{-11} – мінімальний окіл машинного нуля (значення 2^{-32}), при якому ранг стає неповним для розмірності 10 матриці обмежень. Простежується така приблизна залежність околу Eps від довжини мантиси (Mant) в прикладах: Eps = $2^{-\mathrm{Mant}+21}$.

Загалом, встановлено немонотонну залежність падіння рангу від розмірності: якщо для деякої розмірності ранг "падає", це не обов'язково означає, що "впаде" і для більш високої розмірності. Напевне впливає і властивість некомутативності обчислень у загальному випадку (таблиця 1).

Таблиця 1
Взаємозв'язок параметрів обчислень та повноти рангу за результатами експерименту

Mant	Eps	Dim	Rank	Fool
32	2^{-11}	10	7	"Впав"
32	2^{-11}	11	9	"Впав"
32	2^{-11}	12	10	"Впав"
32	2^{-11}	13	13	"Не впав"
32	2^{-11}	14	12	"Впав"
64	2^{-43}	10	10	"Не впав"

де Mant – довжина мантиси двійкових цифр дробової частини (мантиса цілої частини не обмежена), Eps – машинний нуль, Dim – розмірність матриці обмежень, Full – повнота рангу ("впав"/"невпав"). Оскільки, математично ранг матриці Гільберта повинен бути повним, розв'язок єдиним, але за результатами обчислень в умовах поганої обумовленості можливі різні ситуації, введено термін ("впав"/"невпав"), який характеризує його повноту.

У випадку експерименту з розв'язання СЛАР методом Гауса з матрицею Гільберта великої розмірності (Dim = 50, Mant = 32, Eps = 2^{-11}) спостерігалася ситуація, коли всі елементи матриці під ведучим елементом потрапляли в Eps-окіл нуля. Цікаво, що в точних числах відповідні елементи не були нулями. Це впливало на зміну порядку наближених обчислень по відношенню до порядку обчислень в точних числах. При цьому ранг залишався повним і отримувався розв'язок, який нічого спільного не мав з точним розв'язком.

Похибка вхідних даних ("обрізання" мантиси) та погана обумовленість матриці Гільберта на практиці призводить до "нестійкості" обчислень: суттєвого посилення цих похибок.

Це вказує на потребу поєднання обчислень в точних числах та неточних (з фіксованою комою).

8. Обговорення результатів проведення аналізу погано обумовлених матричних структур алгоритмами методу базисних матриць

Теоретично було встановлено:

– суттєву роль категорії рангу при формуванні структури розв'язків, тобто підпросторів (багатовидів),

– значимість математичного нуля (провідного елементу чи умови опорності) при формуванні розмірності підпросторів (в структурі ФСР).

Експериментально було встановлено немонотонну залежність падіння рангу від розмірності лінійної системи та інших параметрів обчислень.

Загалом, підтверджено припущення про нееквівалентність теоретичного математичного нуля (числа) та реального машинного нуля (неточна задана множина) в умовах “роботи” з погано обумовленими системами.

Наявність різних варіантів організації обчислень (включаючи і в точних числах) дає можливість отримувати різносторонню інформацію про модель. Про математичну (ідеальну чи еталонну) модель в точних числах та машинну (реальну) при різних точностях подання та обчислень. Встановлено, що величина рангу є ключовою категорією при математичному аналізі властивостей лінійної системи аналітично (теоретично). Величина рангу для СЛАР при обчисленнях є основоположною якісною категорією подання розв’язків. Погана обумовленість (наприклад, матриці Гільберта) на практиці призводить до "нестійкості" обчислень в зонах наближених до машинного нуля. Величина рангу (в результаті обчислень) окреслює стартові можливості (та обмеження) методів та алгоритмів, формує передумови для формування розв’язків, які можуть бути єдиними, неєдиними чи не існувати.

З іншої сторони, кількісне значення величини рангу, його властивість повноти суттєво залежить від значення ведучого елемента (чи виконання умови опорності у методі базисних матриць). Слід зазначити, що визначення його значення як “нуль-ненуль” відповідає визначенню належності до множини (чи неналежності) субнормальності чи близькій до неї. Це може бути подано як співвідношення математичного точного нуля та неточного машинного нуля. Звичайно, що межі субнормальних чисел визначаються через поріг машинного нуля (наприклад, у форматі IEEE) представлення чисел з плаваючою точкою в ПК. Тобто для них (меж) довжина мантиси, величина порядку є виключно суттєвими складовими. Це також можна віднести до введеного неточного формату з фіксованою точкою.

Експериментально було встановлено немонотонну залежність падіння рангу від розмірності. Це вказує, що наявність еталонного рішення (його знаходження в точних числах), при проведенні обчислень є важливим. Розробка “так званих” «точних» алгоритмів в рамках методів проведення обчислень в раціональних числах дає змогу безпосередньо перевіряти ефективність розрахунків за алгоритмом. Зокрема, комбіноване використання різних варіантів реалізації алгоритму методу при різних точностях (довжина мантиси, величина порядку), в точних числах для типової задачі може виявити важливі закономірності, наприклад, для побудови функції належності. А також для застосування в подальшому при прийнятті рішень щодо порядку організації обчислень з досягненням заданого рівня параметрів (наприклад, ступеня повноти рангу), тобто математичного апарату нечітких множин, побудови функцій належності.

Звичайно, обчислення за різними сценаріями повинні бути взаємопов’язаними, пояснюваними. В точних числах, як еквівалент ідеального математичного обчислення, а при різних наближеннях (значення мантиси та порядку), обчислення може бути визнане як еквівалент реального, що з певною мірою визначає розв’язок.

9. Висновки

1. Удосконалено алгоритм методу базисних матриць аналізу змін при включенні-виключенні та змінах в групі рядків та стовпців СЛАР, без перерозв’язання задачі спочатку. Встановлено умови сумісності (несумісності) обмежень системи, єдиності розв’язку тощо. Побудовано структуру векторів фундаментальної системи розв’язків у випадку сумісності.

2. Розвинуто формати (“точний” та “неточний”) подання елементів моделі (довжина мантиси, величина порядку, порогу машинного нуля та переповнення) і варіанти організації виконання основних операцій при проведенні обчислень та їх вплив на властивості розв’язків. Зокрема, простежено вплив на величину та повноту рангу на прикладі СЛАР з погано обумовленою матрицею обмежень.

3. Відомо, що при побудові інтерполяційного многочлена Лагранжа, застосуванні методу найменших квадратів чи розв’язанні крайової задачі тощо, покращення наближеного розв’язку досягається розширенням відповідної системи базисних функцій. При такому розширенні матриця обмежень СЛАР зазнає змін окаямлюванням, а система може належати до погано обумовлених. Вірогідно, значення елементів методу при проведенні обчислень можуть попадати в зону наближену до машинного нуля. Це обумовлює удосконалення організації та проведення обчислень, яке може бути досягнуте використанням “точного” та “неточного” типів даних подання елементів методу. Тому саме на прикладі матриці Гільберта було проведено експеримент з аналізу властивостей лінійної системи при різних розмірностях, точності подання вхідних даних та сценаріях проведення обчислень, в тому числі – і в точних числах. Встановлено, що немонотонна залежність падіння рангу від розмірності, похибки вхідних даних та поганої обумовленість призводить до "нестійкості" обчислень.

Література

1. Demmel, J. W. (1997). Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, 416. doi: https://doi.org/10.1137/1.9781611971446
2. IEEE Standart for Binary Floating-Point Arithmetics, Std 754-1985 (1985). New York, 20.
3. Schrijver, A. (2000). Theory of Linear and integer Programming. John Wiley & Sons.
4. Dantzig, G. B., Thapa, M. N. (2003). Linear Programming 2: Theory and Extensions. Springer, 448. doi: https://doi.org/10.1007/b97283
5. Han, D., Zhang, J. (2007). A comparison of two algorithms for predicting the condition number. Sixth International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA 2007). doi: https://doi.org/10.1109/icmla.2007.8
6. Ebrahimian, R., Baldick, R. (2001). State Estimator Condition Number Analysis. IEEE Power Engineering Review, 21 (5), 64–64. doi: https://doi.org/10.1109/mper.2001.4311389
7. Nishi, T., Rump, S., Oishi, S. (2013). A consideration on the condition number of extremely ill-conditioned matrices. 2013 European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD). doi: https://doi.org/10.1109/ecctd.2013.6662260

8. BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms). URL: http://www.netlib.org/blas/sblat1

9. Кудин, В. И., Ляшко, С. И., Хритоненко, Н. М., Яценко, Ю. П. (2007). Анализ свойств линейной системы методом искусственных базисних матриц. Кибернетика и системный анализ, 4, 119–127.

10. Kudin, V., Onotskyi, V., Al-Ammouri, A., Shkvarchuk, L. (2019). Advancement of a long arithmetic technology in the construction of algorithms for studying linear systems. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 1 (4 (97)), 14–22. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.157521

11. Kudin, V., Onyshchenko, A., Onyshchenko, I. (2019). Algorithmizing the methods of basis matrices in the study of balace intersectoral ecological and economic models. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3 (4 (99)), 45–55. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.170516

12. Zadeh, L. A., Fu, K.-S., Tanaka, K. (Eds.) (1975). Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes. Academic Press, 506.

13. Zimmerman, H.-J. (1983). Using fuzzy sets in operational research. European Journal of Operational Research, 13 (3), 201–216. doi: https://doi.org/ 10.1016/0377-2217(83)90048-6

14. Пакет прикладних програм з чисельного моделювання та обчислювальної математики. URL: http://www.vingar.ho.ua/for_students/Package1.zip