УДК 517.8
DOI: 10.15587/1729-4061.2019.175105

Розробка формального алгоритму складання двоїстої задачі лінійної оптимізації

Лд. С. Чернова, С. Д. Титов, С. К. Чернов, К. В. Колеснікова, Лб. С. Чернова, В. Д. Гогунський

Запропоновано строгий формальний алгоритм побудови двоїстої задачі для різних випадків запису (загальна, основна, стандартна та канонічна) прямої задачі лінійного програмування.

На початку наведено означення пари двоїстих задач для стандартної форми запису прямої задачі лінійного програмування. Такий підхід обґрунтовується з тих позицій, що за часом така пара була означена першою, оскільки мала змістовну інтерпретацію.

Економічною інтерпретацією стандартної задачі є максимізація прибутку при виробництві та реалізації деяких видів продукції. Такий підхід змістовно вказує на існування прямої задачі (I) та строго відповідної до неї двоїстої (спряженої) (II). Супутня до прямої задачі є задача про мінімізацію витрат.

Базовим поняттям теорії двоїстості в задачах лінійного програмування є той факт, що пара задач є взаємно спряженими – отримання двоїстої від двоїстої призводить до прямої задачі.

Строгий підхід до отримання алгоритму складання двоїстої задачі ґрунтується на твердженні – двоїста задача від двоїстої є прямою (вихідною) задачею. Для різних пар двоїстих задач строго доводиться виконання такого твердження.

Існуючі схеми переходу від прямої задачі до двоїстої носять змістовний характер. З огляду на цей факт, запропоновано та строго доведено алгоритм загального підходу до складання пар спряжених задач.

Формалізація розробленої схеми дозволяє легко отримувати пари відомих двоїстих задач. Це дозволило вперше запропонувати та довести істинність алгоритму побудови двоїстої задачі для довільної форми представлення прямої задачі

Ключові слова: лінійне програмування, пряма задача, двоїста задача, двоїстість, цільова функція, система обмежень, пари спряжених задач

1. Вступ

Лінійне програмування набуло широкого застосування для розв’язання задач розподілу ресурсів [1], визначення найбільшого прибутку або найменшої вартості [2], управління виробничими запасами [3], формування оптимального плану перевезень [4], ідентифікації наукових досліджень [5] та ін.

Одним з підходів рішення задач лінійного програмування є застосування принципу двоїстості, який методологічно пов'язаний з теорією систем залежних нерівностей [4]. Такий аспект піднімає поняття двоїстості в задачах лінійного програмування (ЛП) до загальної математичної строгості. Ключовою теоремою в теорії ЛП є теорема Мінковського-Фаркаша [6]. Теорема надає необхідну та достатню умову для лінійної нерівності бути наслідком скінченої системи лінійних нерівностей. Важливість теореми полягає в тому, що всі основні факти теорії лінійного програмування [7] (в тому числі і в теорії двоїстості), можуть бути отриманні як наслідки цієї теореми.

Відомі способи переходу від прямої задачі до двоїстої базуються на якісних перетвореннях і носять змістовний характер. Формалізація і доведення коректності алгоритму побудови двоїстої задачі для довільної форми представлення прямої задачі дозволить легко отримувати коректні пари відомих двоїстих задач.

Актуальність досліджень обумовлена вимогами щодо спрощення розв'язань задач лінійного програмування на основі розробки формального алгоритму трансформації прямої задачі до двоїстої задачі лінійної оптимізації.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Без особливого перебільшення можливо констатувати той факт, що теорія двоїстості та випливаючи звідти пара спряжених задач є надважливими поняттями в теорії ЛП. В теорії множин, предикатів, висловлювань, в алгебрі подій та геометрії існують так звані теореми двоїстості. За певними правилами прямій теоремі ставиться у відповідність двоїста. В багатьох випадках математичні моделі різних систем інтерпретуються у формі задач дискретної оптимізації [8]. Пошук методів точного або наближеного розв'язків таких задач виконується з урахуванням належності їх до, так званих, задач з класу P та NP (алгоритми поліноміальної та експоненціальної реалізації розв'язку) [7].

У класичному розділі лінійного програмування відома така пара екстремальних задач. Пов'язано це з особливістю опуклих множин – замкнені опуклі множини у векторному просторі можливо описувати двояко, як у вихідному R^n так і у спряженому R^m просторі. Існуючі схеми переходу від прямої задачі лінійного програмування до двоїстої мають, як правило, змістовно економічний характер і тому не можуть задовольняти як економічну, так і технічну кібернетику, які широко застосовуються в моделях управління.

Комбінаторні методи точного та практичного розв'язку задач дискретної оптимізації посідають одне з вагомих місць в отриманні оптимальних значень таких задач [8]. Для реалізації алгоритмів розв'язку необхідно отримання первісного опорного плану, оцінок оптимальності та покращення у разі його не оптимальності. Сучасні комбінаторні методи для практичного розв'язку задач лінійного програмування потребують розробки алгоритмів, які дозволяють отримувати наближений розв'язок з гарантованою оцінкою відхилення від оптимуму [9].

Алгоритми перетворень в задачах лінійного програмування є ефективним прийомом пошуку розв'язку оптимізаційних задач [10]. Якщо виконати операцію перетворення прямої задачі в двоїсту, то такий прийом дозволить наочно спостерігати за припустимою множиною параметрів задачі [11]. Можна виконувати оцінку знизу та зверху значень цільової функції задачі та динамічно оцінювати можливість диверсифікації базисних оптимальних змінних з гарантованою точністю [12]. В роботі [13] розроблено метод термоекономічної оптимізації енергоємних систем з лінійною структурою на графах. Аналіз стійкості розв'язань в задачах детектування дублікатів в електронних документах наведено в роботі [14]. Складність відображення лінійних зв'язків в процесах навчання за допомогою ланцюгів Маркова досліджена в роботі [15]. Працездатність лінійних моделей для спортивних тренувань показана в роботі [16].

В розглянутих вище публікаціях, як правило, досліджені і застосовані окремі форми представлення задач лінійного програмування для різних випадків запису (загальна, основна, стандартна та канонічна форми) прямої задач. У той же час, незважаючи на те, що багато методів в цьому напрямі розвинуто та досліджено, існує проблема створення дієвих моделей на етапі отримання розв'язку систем рівнянь математичного опису складних систем [8].

Підходи, які зазвичай застосовуються для рішення задач ЛП, часто спрямовані на спрощення задач через використання специфічних обмежень [5], здійснення ітераційного пошуку розв'язку систем рівнянь [12], виконання декомпозиції систем за допомогою графів [13]. Означені способи розв'язку систем лінійних рівнянь спрямовані на використанні додаткової трансформації математичного опису систем з побудовою унікальних алгоритмів отримання рішення задачі [15]. Проблемною складовою задач ЛП є відсутність стратегій узагальнення пошуку рішень. Сутність даного дослідження є у тому, що пропонується на етапі формулювання задачі обрати найпростішу форму запису задачі, у тому числі з урахуванням існуючих спряжених двоїстих відображень задачі.

Двоїста задача ЛП отримується шляхом інверсії цільової функції і змінних вихідної задачі. Якщо цільова функція вихідної задачі задається на максимум, то цільова функція двоїстої до неї задачі задається на мінімум. Перехід до запису двоїстих задач слід виконувати за певним формалізованим алгоритмом. Наявність пар спряжених двоїстих задач ЛП дозволяє для всіх форм запису обрати раціональну стратегію пошуку розв'язань з огляду на обчислювальну складність рішення. Всі можливі перетворення вихідної задачі повинні покращувати розв'язок систем рівнянь математичного опису.

3. Мета і завдання дослідження

Метою дослідження є отримання формального алгоритму переходу до двоїстої задачі та строге доведення цих правил. Це надасть можливість для розв'язку задачі лінійного програмування обирати більш просту серед таких пар двоїстих задач.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

– довести для існуючих пар двоїстих задач їх спряжений характер;

– представити у загальній формі запису операції переходу до двоїстої задачі від прямої задачі.

4. Означення двоїстості для стандартної форми задачі лінійного програмування

Припустимо, що пряма (вихідна) задача лінійного програмування подана у стандартній формі запису [17].

Назвемо наступну задачу ЛП стандартною задачею:

$$\mathrm{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_I=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \Omega_I : \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j \le b_i,\ i=1,\ldots,m, \\ x_j \ge 0,\ j=1,\ldots,n, \end{array}\right.$$

або у матричній формі запису:

$$\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_I = CX \to \max, \\ \Omega_I : AX \le B, \qquad . \\ X \ge 0. \end{array}\right.$$

Двоїстою або спряженою до неї задачею називають задачу вигляду:

$$\mathbf{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{II}=\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\ \Omega_{II} : \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i\,j} y_i \ge c_j,\ j=1,2,\ldots,n, \\ y_i \ge 0, i=1,2,\ldots,m, \end{array}\right.$$

або у матричній формі запису:

$$\mathbf{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{II} = YB - \min, \\ \Omega_{II} : YA \ge C^T, \\ Y \ge 0. \end{array}\right.$$

Для зручності введемо та прокоментуємо наступні позначення:

$\mathbf{c} = C = c = \left[c_1, c_2, \ldots, c_n\right]$,

$C \in \mathbf{R}^n$ – коефіцієнти цільової функції W_I прямої задачі ЛП;

$$\mathbf{x} = X = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]^{\mathrm{T}},$$

$X \in \mathbf{R}^n$ – змінні(невідомі) величини (план) прямої задачі ЛП;

I – умовне позначення прямої задачі;

II – умовне позначення двоїстої задачі;

$$A = \left[a_{i\,j}\right]_{(m\times n)} = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \cdots & a_{1\,j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{23} & \cdots & a_{2\,j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3\,j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i\,1} & a_{i\,2} & a_{i\,3} & \cdots & a_{i\,j} & \cdots & a_{i\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & a_{m\,3} & \cdots & a_{m\,j} & \cdots & a_{m\,n} \end{bmatrix}$$ – матриця коефіцієнтів

системи обмежень прямої задачі;

$$\mathbf{b} = B = b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \left[b_1, b_2, \ldots, b_m\right]^T,\ B \in \mathbf{R}^m$$ – коефіцієнти правих частин системи обмежень прямої задачі;

$$\mathbf{y} = Y = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left[y_1, y_2, \ldots, y_m\right]^T,\ Y \in \mathbf{R}^m$$ – змінні(невідомі) величини двоїстої задачі ЛП.

Введемо для розгляду системи коваріантних та контраваріантних векторів [17]

$$\mathbf{a}_j = a_j = \begin{bmatrix} a_{1\,j} \\ a_{2\,j} \\ \vdots \\ a_{n\,j} \end{bmatrix} = \left[a_{1\,j}, a_{2\,j}, \ldots, a_{n\,j}\right]^T \in \mathbf{R}^m,\ j = 1, 2, \ldots, m,$$ – вектор-стовпчики

(коваріантні вектори) матриці A системи обмежень Ω_I прямої задачі;

$\mathbf{a}^i = a^i = \left[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right] \in \mathbf{R}^n,\ i = 1, 2, \ldots, n$ – вектор-рядочки (контраваріантні) матриці A системи обмежень Ω_{I} прямої задачі.

В такому разі, матриця A коефіцієнтів системи може бути представлена у векторному вигляді:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix} = \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^m\right]^{\mathrm{T}} = \left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right] \in \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^n,$$

а пара двоїстих задач має третю форму запису:

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_I = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \to \max, \\ \Omega_I : (\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) \le \mathbf{b}, \qquad \text{– пряма задача;} \\ \mathbf{x} \ge 0, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{II} = (\mathbf{b}, \mathbf{y}) \to \min, \\ \Omega_{II} : (\mathbf{a}^i, \mathbf{y}) \ge \mathbf{c}, \qquad \text{– двоїста задача до наведеної прямої.} \\ \mathbf{y} \ge 0. \end{array}\right.$$

Підсумовуючи, остаточно маємо три форми запису означення двоїстої задачі до стандартної задачі ЛП:

$$\mathrm{I} : \left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_I = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \Omega_I : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \ i = 1, \ldots, m, \\ x_j \ge 0, \ j = 1, \ldots, n, \end{array}\right. \xrightarrow{def \quad Dual} \mathrm{II} : \left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{II} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\ \Omega_{II} : \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \ j = 1, 2, \ldots, n, \\ y_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, m, \end{array}\right.$$

$$\mathrm{I} : \left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_I = CX \to \max, \\ \Omega_I : AX \le B, \\ X \ge 0, \end{array}\right. \xrightarrow{def \quad Dual} \mathrm{II} : \left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{II} = Y\,B - \min, \\ \Omega_{II} : Y\,A \ge C^{\,T}, \\ Y \ge 0, \end{array}\right.$$

$$\mathrm{I} : \left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_I = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \to \max, \\ \Omega_I : (\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) \le \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \ge 0, \end{array}\right. \xrightarrow{def \quad Dual} \mathrm{II} : \left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{II} = (\mathbf{b}, \mathbf{y}) \to \min, \\ \Omega_{II} : (\mathbf{a}^i, \mathbf{y}) \ge \mathbf{c}. \end{array}\right.$$

Спряженість або двоїстість наведеного означення будемо обґрунтовувати певною послідовністю операцій, які у разі циклічного застосування повинні призвести до прямої задачі, тобто

$$\mathrm{I} \xrightarrow{def \quad Dual} \mathrm{II} \xrightarrow{def \quad Dual} \mathrm{I},$$

де $\xrightarrow{def \quad Dual}$ – набір правил переходу до двоїстої задачі.

Ретельний аналіз означення двоїстої задачі для стандартної форми представлення прямої задачі, дозволяє визначити необхідні для переходу до двоїстої задачі операції $\xrightarrow{def \quad Dual}$:

– екстремальні вимоги цільових функцій прямої та двоїстої задач протилежні за смислом:

$$\mathrm{W}_I \to \max \xrightarrow{def \quad Dual} \mathrm{W}_{II} \to \min;$$

– для задачі на $\max$ цільової функції присутні в системі обмежень нерівності повинні мати знак $\le$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,$$

– складові цільової функції двоїстої задачі є компонентами вектора правих частин системи обмежень прямої задачі ЛП;

– матриця A^{T} системи обмежень двоїстої задачі Ω_{II} є транспонованою до матриці A системи обмежень прямої задачі Ω_{I}, оскільки $YA=A^TY^T$;

– частини системи обмежень двоїстої задачі: Ω_{II} : $(\mathbf{a}^i, \mathbf{y}) \ge \mathbf{c}$ є коефіцієнтами цільової функції $\mathrm{W}_I=(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \to \max$ прямої задачі;

– кожному обмеженню – нерівності системи обмежень прямої задачі ставиться у відповідність невід'ємна двоїста невідома

$$\Omega_I : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \xrightarrow{def \quad Dual} y_j \ge 0, \ i = 1, \ldots, m;$$

– кожній невід'ємній невідомій прямої задачі ЛП ставиться у відповідність обмеження–нерівність двоїстої

$$x_j \ge 0 \xrightarrow{def \quad Dual} \Omega_{II} : \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Зауважимо, що різні форми запису задач ЛП є еквівалентними – зберігають множину розв'язків. Добитися цього можливо за умови використання прийомів еквівалентного перетворення для переходу від однієї форми задач до іншої.

Так, певне рівняння системи обмежень задачі ЛП еквівалентне системі двох нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j \le b_i, \\ -\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j \le -b_i. \end{cases}$$

Довільні за знаком змінні можуть бути представлені у вигляді різниці 2-х невід'ємних змінних:

$$x_j = u_j - v_j, \quad u_j \ge 0, \; v_j \ge 0.$$

Перехід від обмежень – нерівностей до обмежень – рівнянь виконують додаванням невід'ємної (балансової) змінної:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j \le b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j + x_{n+i} = b_i, \; x_{n+i} \ge 0, \; i = 1, \ldots, k.$$

Для спрощення перетворення задач ЛП в різні форми запису також використовують перехід від максимізації до мінімізації цільової функції і навпаки:

$$\mathrm{W}_I = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \Leftrightarrow \mathrm{W}_I = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min.$$

Пересвідчимось в тому, що введені операції та перетворення виконують ланцюг спряженості для наведеної вище пари задач

$$\mathrm{I} \xrightarrow{def \quad Dual} \mathrm{II} \xrightarrow{def \quad Dual} \mathrm{I}.$$

Представимо двоїсту задачу у вигляді задачі на максимум та, застосовуючи правила переходу й еквівалентні перетворення, доведемо спряженість пари задач – двоїста задача від двоїстої дає вихідну пряму задачу.

$$\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{II}} = -Y\,B - \max, \\ \mathbf{II}\!: \Omega_{\mathrm{II}} : -Y\,A \le -\,C^{\mathrm{T}}, \\ Y \ge 0, \end{array} \xrightarrow{def \quad Dual} \begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{I}} = -\left(C^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} X - \min, \\ \mathbf{I}\!: \quad \Omega_{\mathrm{I}} : -AX \le -\,B, \\ X \ge 0, \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{I}} = C\,X - \max, \\ \mathbf{I}\!: \Omega_{\mathrm{I}} : -AX \le -\,B, \\ X \ge 0. \end{array}$$

Таким чином підтверджено, що головною ознакою двоїстості пар задач ЛП є можливість зведення їх одна до одної за означенням (двоїста до двоїстої є прямою задачею)

4. 1. Модельний приклад № 1

До прямої задачі лінійного програмування

$$
\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l}
\mathrm{W}_I=-4x_1+2x_2-3x_3-8x_4+x_5-x_6+5x_7-\max,\\
\Omega_I:\begin{cases}
3x_1-4x_3-7x_4+5x_5-4x_6-x_7\le 12,\\
x_1-x_2+3x_3-2x_4+7x_6+9x_7\le 3,\\
5x_1-3x_2+8x_4-5x_5+9x_6+4x_7\ge 2,\\
7x_1-5x_2-9x_3+x_4-3x_5-x_7\ge 3,
\end{cases}\\
x_j\ge 0,\ j=1,\ldots,7
\end{array}\right.
$$

скласти двоїсту задачу.

Розв'язок.

Для початку переходу до двоїстої задачі підготуємо систему обмежень. Для задачі на максимум необхідна наявність нерівностей вигляду ≤. З огляду на це, потрібно поміняти знак третьої та четвертої нерівності на протилежний за смислом, множенням на (–1).

$$
\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l}
\mathrm{W}_I=-4x_1+2x_2-3x_3-8x_4+x_5-x_6+5x_7-\max,\\
\Omega_I:\begin{cases}
3x_1-4x_3-7x_4+5x_5-4x_6-x_7\le 12,\\
x_1-x_2+3x_3-2x_4+7x_6+9x_7\le 3,\\
-5x_1+3x_2-8x_4+5x_5-9x_6-4x_7\le -2,\\
-7x_1+5x_2+9x_3-x_4+3x_5+x_7\le -3,
\end{cases}\\
x_j\ge 0,\ j=1,\ldots,7.
\end{array}\right.
$$

Перехід до двоїстої задачі зручно виконувати в табл. 1.

Дотримуючись алгоритму переходу до двоїстої задачі заповнюємо табл. 1. Представлення прямої задачі в стандартній формі має наступну двоїсту задачу:

$$
\mathbf{II}:\left|\begin{array}{l}
\mathrm{W}_{\mathrm{II}} = 12y_1 + 3y_2 - 2y_3 - 3y_4 \ \to \ \min, \\
\Omega_{\mathrm{II}}:\begin{cases}
3y_1 + y_2 - 5y_3 - 7y_4 \ge -4, \\
-y_2 + 3y_3 + 5y_4 \ge 2, \\
-4y_1 + 3y_2 + 9y_4 \ge -3, \\
-7y_1 - 2y_2 - 8y_3 + y_4 \ge -8, \\
5y_1 + 5y_3 + 3y_4 \ge -1, \\
-4y_1 + 7y_2 - 9y_3 \ge -1, \\
-y_1 + 9y_2 - 4y_3 + y_4 \ge 5,
\end{cases} \\
y_i \ge 0,\, i = 1, \ldots, 4.
\end{array}\right.
$$

Таблиця 1

Перехід до двоїстої задачі для модельного прикладу № 1

$Y \backslash X$	$x_1 \ge 0$	$x_2 \ge 0$	$x_3 \ge 0$	$x_4 \ge 0$	$x_5 \ge 0$	$x_6 \ge 0$	$x_7 \ge 0$	?	B
$y_1 \ge 0$	3	0	–4	–7	5	–4	–1	$\le$	12
$y_2 \ge 0$	1	–1	3	–2	0	7	9	$\le$	3
$y_3 \ge 0$	–5	3	0	–8	5	–9	–4	$\le$	–2
$y_4 \ge 0$	–7	5	9	1	3	0	1	$\le$	–3
?	$\ge$	$\ge$	$\ge$	$\ge$	$\ge$	$\ge$	$\ge$		
C	–4	2	–3	–8	1	–1	5		

Для отримання повного набору операцій по переходу до двоїстих задач, розглянемо наступну пару задач ЛП та доведемо їх спряженість.

$$
\mathrm{I}:\left|\begin{array}{l} W_I = CX \text{ - max}, \\ \Omega_I : AX = B, \end{array}\right. \xrightarrow{def\ \ Dual} \mathrm{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W_I} = YB - \min, \\ \Omega_{\mathrm{II}} : YA = C^{\mathrm{T}}. \end{array}\right.
$$

Доведення.

$$\mathrm{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{I}} = C\,X - \max, \\ \Omega_{\mathrm{I}} : A X = B, \end{array}\right. \xrightarrow{X=X''-X',\,X''\ge 0,\,X'\ge 0} \mathrm{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{I}} = C\left(X''-X'\right)-\max,\\ \Omega_{\mathrm{I}}:\begin{cases}A\left(X''-X'\right)\le B,\\ -A\left(X''-X'\right)\le -B,\end{cases}\\ X''\ge 0,\, X'\ge 0,\end{array}\right. \xrightarrow{def\quad Dual}$$

$$\xrightarrow{def\quad Dual} \mathrm{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{II}} = \left(Y''-Y'\right)B-\min,\\ \Omega_{\mathrm{II}}:\begin{cases}\left(Y''-Y'\right)A\ge C^{T},\\ \left(Y''-Y'\right)\left(-A\right)\ge -C^{T},\end{cases}\\ Y''\ge 0, Y'\ge 0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \mathrm{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{I}} = YB-\min,\\ \Omega_{\mathrm{II}}: YA = C^{\mathrm{T}}.\end{array}\right.$$

Доведена двоїстість цієї пари задач, дозволяє сформулювати наслідки з означення двоїстості для стандартної задачі ЛП:

– кожному обмеженню – рівнянню прямої задачі ставиться у відповідність довільна за знаком двоїста невідома;

$$\mathrm{I}:\Omega_{\mathrm{I}} : A X = B \xrightarrow{def\quad Dual} \mathrm{II}: Y.$$

де Y – двоїста змінна довільна за знаком;

– довільній за знаком змінній прямої задачі ставиться у відповідність обмеження – рівняння двоїстої задачі;

$$\mathrm{I}: X \xrightarrow{def\ Dual} \mathrm{II}:\Omega_{\mathrm{II}}: YA = C^{\mathrm{T}}.$$

де X – змінна прямої задачі довільна за знаком:

Застосовуючи аналогічні перетворення, можливо довести спряженість основних несиметричних форм пар двоїстих задач

$$\mathrm{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{I}} = CX - \max, \\ \Omega_{\mathrm{I}} : AX \le B, \end{array}\right. \xrightarrow{def\ Dual} \mathrm{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{II}} = YB-\min,\\ \Omega_{\mathrm{II}}: YA = C^{\mathrm{T}},\\ Y\ge 0.\end{array}\right.$$

$$\mathrm{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{I}} = C\,X - \max, \\ \Omega_{\mathrm{I}} : A X = B, \\ X\ge 0,\end{array}\right. \xrightarrow{def\ Dual} \mathrm{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{II}} = YB-\min,\\ \Omega_{\mathrm{II}}: YA \ge C^{\mathrm{T}},\end{array}\right.$$

$$\mathrm{I}:\left|\begin{array}{l} W_{\mathrm{I}} = C\,X - \min, \\ \Omega_{\mathrm{I}} : A\,X \ge B, \end{array}\right. \xrightarrow{def \quad Dual} \mathrm{II}:\left|\begin{array}{l} W_{\mathrm{II}} = YB - \max, \\ \Omega_{\mathrm{II}} : YA = C^{\mathrm{T}}, \\ Y \ge 0. \end{array}\right.$$

Що і треба було довести – основні несиметричні форми пар двоїстих задач є спряженими.

4. 3. Модельний приклад № 2

До прямої задачі лінійного програмування

$$\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l} W_I = 4x_1 + 9x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - 54 \to \max, \\ \Omega_I : \begin{cases} -x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -41, \\ 4x_2 + x_3 - x_5 = 28, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 9, \end{cases} \\ x_j \ge 0, \;\; j = 1,\dots,5 \end{array}\right.$$

скласти двоїсту задачу.

Розв'язок.

Маємо канонічну форму запису прямої задачі. Для переходу до двоїстої задачі складаємо табл. 2.

Таблиця 2

Перехід до двоїстої задачі для модельного прикладу № 2

$Y\backslash X$	$x_1 \ge 0$	$x_2 \ge 0$	$x_3 \ge 0$	$x_4 \ge 0$	$x_5 \ge 0$	?	B
y_1	–1	–5	–1	–1	1	=	–41
y_2	0	4	1	0	–1	=	28
y_3	1	0	0	–1	1	=	9
?	≥	≥	≥	≥	≥		
C	4	9	1	2	–1		

Дотримуючись алгоритму переходу до двоїстої задачі у випадку представлення прямої задачі в канонічній формі, маємо наступну двоїсту задачу:

$$
\mathbf{II}: \left| \begin{array}{l} W_{II} = -41y_1 + 28y_2 + 9y_3 \;\; \to \;\; \min, \\ \Omega_{II}: \begin{cases} -y_1 + y_3 \geq 4, \\ -5y_1 + 4y_3 \geq 9, \\ -y_1 + y \geq 1, \\ -y_1 - y_3 \geq 2, \\ y_1 - y_3 + y_3 \geq -1, \end{cases} \\ y_i \geq 0, \;\; i = 1, \; 2, \; 3. \end{array} \right.
$$

Отримана форма запису двоїстої задачі відповідає прямій задачі. Тобто у разі представлення прямої задачі в канонічній формі можна отримати форму двоїстої задачі.

4. 4. Модельний приклад № 3

До прямої задачі лінійного програмування

$$
\mathbf{I}: \left| \begin{array}{l} W_I = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \min, \\ \Omega_I: \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 \geq 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 7x_4 \geq 3, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 9x_4 \geq 8 \end{cases} \end{array} \right.
$$

скласти двоїсту задачу.

Розв'язок.

Для переходу до двоїстої задачі складаємо табл. 3.

Таблиця 3

Перехід до двоїстої задачі для модельного прикладу № 3

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3	x_4	?	B
$y_1 \geq 0$	4	–5	3	–1	$\geq$	3
$y_2 \geq 0$	–1	2	4	–7	$\geq$	2
$y_3 \geq 0$	3	–1	–1	–7	$\geq$	3
$y_4 \geq 0$	1	8	–5	–9	$\geq$	8
?	=	=	=	=		
C	1	–3	5	2		

Дотримуючись алгоритму переходу до двоїстої задача маємо наступну двоїсту задачу:

$$\mathbf{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{II}} = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 8y_4 \;\to\; \max, \\ \Omega_{\mathrm{II}}:\begin{cases} 4y_1 - y_2 + 3y_3 + y_4 \;= 1, \\ -5y_1 + 2y_2 - y_3 + 8y_4 \;= \text{-}3, \\ 3y_1 + 4y_2 - y_3 - 5y_4 \;= 5, \\ -y_1 - 7y_2 - 7y_3 - 9y_4 \;= 2, \end{cases} \\ y_i \ge 0,\; i = 1,\; 2,\; 3,\; 4, \end{array}\right. ,$$

яка поставлена у відповідність вихідній (прямій) задачі. Підтверджено, що двоїста задача відповідає прямій задачі. Тобто у разі представлення прямої задачі в канонічній формі можна отримати форму двоїстої задачі.

4. 5. Модельний приклад № 4

До прямої задачі лінійного програмування

$$\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_I = 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max, \\ \Omega_I:\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 \le 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 \le 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

скласти двоїсту задачу.

Розв'язок.

Для переходу до двоїстої задачі складаємо табл. 4.

Таблиця 4

Перехід до двоїстої задачі для модельного прикладу № 4

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3	x_4	?	B
$y_1 \ge 0$	4	–5	3	–1	≤	3
$y_2 \ge 0$	–1	2	4	–7	≤	2
?	=	=	=	=		
C	2	8	–1	5		

Дотримуючись алгоритму переходу до двоїстої задачі, маємо наступну двоїсту задачу:

$$
\mathbf{II}: \left|
\begin{array}{l}
\mathrm{W}_{\mathrm{II}} = 3y_1 + 2y_2 \;\; \to \;\; \min, \\
\Omega_{\mathrm{II}}: \begin{cases} 4y_1 - y_2 \;= 2, \\ -5y_1 + 2y_2 \;= 8, \\ 3y_1 + 4y_2 = \text{-}1, \\ -y_1 - 7y_2 \;= 5, \end{cases} \\
y_i \ge 0, \;\; i = 1, 2,
\end{array}
\right.
$$

яка поставлена у відповідність вихідній (прямій) задачі. Означені вище спряжені пари двоїстих задач є основою для узагальнення властивостей двоїстості в системах лінійного програмування у разі представлення прямої задачі в загальній формі.

5. Двоїста задача для загальної форми прямої задачі

Наведені пари двоїстих задач дозволяють виконати узагальнення означення двоїстості в задачах лінійного програмування на випадок представлення прямої задачі в загальній формі.

Нехай маємо загальну задачу лінійного програмування

$$
\mathbf{I}: \left|
\begin{array}{l}
\mathrm{W}_{\mathrm{I}} = C\,X \to \max, \\
\Omega_{\mathrm{I}}: \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \le \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \right., \\
x_j \ge 0, \;\; j = 1, \; 2, \ldots, l,
\end{array}
\right.
$$

або в розгорнутій формі запису

$$
\mathbf{I}: \left|
\begin{array}{l}
\mathrm{W}_{\mathrm{I}} = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\
\Omega_{\mathrm{I}}: \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \; 2, \; 3, \ldots k, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k+1, k+2, k+3, \ldots m, \end{cases} \\
x_j \ge 0, \;\; j = 1, \; 2, \ldots, l,
\end{array}
\right.
$$

двоїстою до неї будемо називати задачу вигляду

$$
\mathbf{II}:\left|\begin{array}{l}
\mathrm{W}_{II} = Y\,B \to \min, \\
\Omega_{\mathrm{II}}:\left\{ \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \geq \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right., \\
y_i \geq 0,\ i = 1,\ 2, \ldots, k,
\end{array}\right.
$$

або в іншій формі запису

$$
\mathbf{II}:\left|\begin{array}{l}
\mathrm{W}_{II} = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i \to \min, \\
\Omega_{\mathrm{II}}:\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij} \geq c_j, & j = 1,\ 2,\ 3, \ldots l, \\ \sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij} = c_i, & i = l+1,\ l+2,\ l+3, \ldots n, \end{cases} \\
y_i \geq 0,\ i = 1,\ 2, \ldots, k.
\end{array}\right.
$$

Модельний приклад № 5

До прямої задачі лінійного програмування

$$
\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l}
\mathrm{W}_{\mathrm{I}} = 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \min, \\
\Omega_{\mathrm{I}}:\begin{cases} -3x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 + 8x_5 \geq 24, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 7x_5 \leq 11, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 21, \end{cases} \\
x_3 \geq 0,\ x_5 \geq 0,
\end{array}\right.
$$

скласти двоїсту задачу.

Розв'язок.

Для переходу до двоїстої задачі підготуємо систему обмежень прямої задачі – для задачі на мінімум необхідна наявність нерівностей тільки $\geq$. Змінюємо знак другої нерівності на протилежний.

$$\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W_I} = 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \min, \\ \Omega_\mathrm{I}:\begin{cases} -3x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 + 8x_5 \ge 24, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 \ge -11, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 21, \end{cases} \\ x_3 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0. \end{array}\right.$$

Перехід до двоїстої задачі виконуємо в табл. 5.

Таблиця 5

Перехід до двоїстої задачі для модельного прикладу № 5

$Y\backslash X$	x_1	x_2	$x_3 \ge 0$	x_4	$x_5 \ge 0$	?	B
$y_1 \ge 0$	–3	–5	9	–1	8	$\ge$	24
$y_2 \ge 0$	–1	—2	1	–3	7	$\ge$	–11
y_3	1	4	1	–2	–1	=	8
y_4	–1	3	6	–5	–3	=	21
?	=	=	$\le$	=	$\le$		
C	7	–4	3	–2	1		

Двоїста задача має вигляд

$$\mathbf{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W_{II}} = 24y_1 - 11y_2 + 8y_3 + 21y_4 \ \to \ \max, \\ \Omega_\mathrm{II}:\begin{cases} -3y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 7, \\ -5y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 3y_4 = -4, \\ 9y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 \le 7, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 5y_4 = 2, \\ 8y_1 + 7y_2 - y_3 - 3y_4 \le 7 \end{cases} \\ y_1 \ge 0,\ \ y_2 \ge 0. \end{array}\right.$$

Дослідимо випадок наявності недодатних невідомих у прямій задачі та порушення відповідності знака нерівності типу екстремуму цільової функції.

Доведемо, що кожній недодатній невідомій $x \le 0$ прямої задачі ставиться у відповідність обмеження – нерівність, для max – $\ge$, та для min – $\le$.

Пара задач ЛП є двоїстою.

$$\mathrm{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_I = C\,X - \max, \\ \Omega_\mathrm{I}: A\,X \ge B, \\ X \ge 0, \end{array}\right. \xrightarrow{def\quad Dual} \mathrm{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{II} = YB - \min, \\ \Omega_\mathrm{II}: YA \le C^T, \\ Y \le 0. \end{array}\right.$$

Дійсно,

$$\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{I} = C\,X - \max, \\ \Omega_\mathrm{I}: A\,X \ge B, \\ X \ge 0, \end{array}\right. \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} \mathrm{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{I} = C\,X - \max, \\ \Omega_\mathrm{I}: -A\,X \le -B, \\ X \ge 0, \end{array}\right. \xrightarrow{def\quad Dual}$$

$$\xrightarrow{def\quad Dual} \mathbf{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{II} = Y'(-B) - \min, \\ \Omega_\mathrm{II}: Y'(-A) \ge C^T, \\ Y' \ge 0, \end{array}\right. \overset{Y'=-Y}{\Leftrightarrow} \mathrm{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{II} = YB - \min, \\ \Omega_\mathrm{II}: YA \le C^T, \\ Y \le 0. \end{array}\right.$$

Таким чином доведено, що в разі порушення відповідності знаку нерівності типу оптимуму цільової функції, двоїсті відповідні невідомі мають бути недодатними $y \le 0$.

Аналогічно встановлюється, що кожній недодатній невідомій $x \le 0$ прямої задачі ставиться у відповідність обмеження – нерівність у двоїстій задачі, протилежне за знаком основному означенню. На цих підставах наведені пари задач є двоїстими

$$\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{I} = C\,X - \max, \\ \Omega_\mathrm{I}: A\,X \le B, \\ X \le 0 \end{array}\right. \xrightarrow{def\quad Dual} \mathbf{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{II} = YB - \min, \\ \Omega_\mathrm{II}: YA \le C^T, \\ Y \ge 0, \end{array}\right.$$

$$\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{I} = C\,X - \max, \\ \Omega_\mathrm{I}: A\,X \ge B, \\ X \le 0, \end{array}\right. \xrightarrow{def\quad Dual} \mathbf{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{II} = YB - \min, \\ \Omega_\mathrm{II}: \ YA \le C^T, \\ Y \le 0, \end{array}\right.$$

$$\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{I} = C\,X - \min, \\ \Omega_\mathrm{I}: A\,X \ge B, \\ X \le 0, \end{array}\right. \xrightarrow{def\quad Dual} \mathbf{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_\mathrm{II} = YB - \max, \\ \Omega_\mathrm{II}: YA \ge C^T, \\ Y \ge 0. \end{array}\right.$$

Таким чином, доведено, що кожній недодатній невідомій $x \le 0$ прямої задачі ставиться у відповідність обмеження – нерівність у двоїстій задачі, яке протилежне за знаком основному означенню. На цих підставах наведені пари задач є двоїстими до вихідних задач.

6. Двоїста задача для довільної форми прямої задачі ЛП

Узагальнюючи доведення та наслідки можливо отримати загальний алгоритм переходу до двоїстої задачі для довільної форми запису прямої задачі лінійного програмування.

Означення

Для довільної форми представлення прямої задачі лінійного програмування

$$
\mathrm{I}:\left|\begin{array}{l}
\mathrm{W_I} = C\,X \to \max, \\
\Omega_{\mathrm{I}}:\left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \right., \\
x_j \ge 0, \quad j = 1,\ 2,\ldots,k, \\
x_j \le 0, \quad j = k+1,\ k+2,\ldots,l, \\
x_j, \quad j = l+1,\ l+2,\ldots,n,
\end{array}\right.
$$

або у розгорнутій алгебраїчній формі запису

$$
\mathbf{I}:\left|\begin{array}{l}
\mathrm{W_I} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \max, \\
\Omega_{\mathrm{I}}:\left\{\begin{array}{ll}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1,\ 2,\ 3,\ldots,s, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, & i = s+1, s+2, s+3,\ldots,t, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = t+1, t+2, t+3,\ldots,m,
\end{array}\right. \\
x_j \ge 0, \quad j = 1,\ 2,\ldots,k, \\
x_j \le 0, \quad j = k+1,\ k+2,\ldots,l, \\
x_j\ , \quad j = l+1,\ l+2,\ldots,n,
\end{array}\right.
$$

двоїстою до неї будемо називати задачу вигляду:

$$\mathbf{II}:\left|\begin{array}{l}
\mathrm{W}_{II}=Y\,B\to\min,\\
\Omega_{\mathrm{II}}:\left\{\begin{pmatrix}Y_1 & Y_2 & Y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\ge\\ \le\\ =\end{bmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}\right.,\\
y_i\ge 0,\qquad i=1,\ 2,\ldots,s,\\
y_i\ge 0,\qquad i=s+1,\ s+2,\ldots,t,\\
y_i,\qquad\quad\ i=t+1,\ t+2,\ldots,m,
\end{array}\right.$$

або у розгорнутій алгебраїчній формі запису

$$\mathbf{II}:\left|\begin{array}{l}
\mathrm{W}_{\mathrm{II}}=\sum_{i=1}^{m}b_i\,y_i-\min,\\
\Omega_{\mathrm{II}}:\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}y_i\,a_{ij}\ge c_j, & j=1,\ 2,\ 3,\ldots k,\\ \sum_{i=1}^{m}y_i\,a_{ij}\le c_j, & j=k+1,\ k+2,\ k+3,\ldots l,\\ \sum_{i=1}^{m}y_i\,a_{ij}=c_i, & i=l+1,\ l+2,\ l+3,\ldots n,\end{cases}\\
y_i\ge 0,\qquad i=1,\ 2,\ldots,s,\\
y_i\le 0,\qquad i=s+1,\ s+2,\ldots,t,\\
y_i,\qquad\quad\ i=t+1,\ t+2,\ldots,m.
\end{array}\right.$$

Модельний приклад № 6

Скласти двоїсту задачу до наведеної прямої задачі лінійного програмування

$$\mathrm{W}_{\mathrm{I}}=7x_1-4x_2+9x_3-2x_4-\max,$$

$$\begin{cases}-2x_1-3x_2+5x_3+x_4=1,\\ 3x_1+4x_2-8x_3-2x_4\ge 21,\\ x_1-2x_2-3x_3+4x_4\le 12,\end{cases}$$

$$x_2\le 0, x_4\ge 0.$$

Розв'язок.

Перехід до двоїстої задачі виконуємо в табл. 6

Таблиця 6
Перехід до двоїстої задачі для модельного прикладу № 6

$Y\backslash X$	x_1	$x_2 \le 0$	x_3	$x_4 \ge 0$	?	B
y_1	–2	–3	5	1	=	1
$y_2 \le 0$	3	4	–8	–2	≥	21
$y_3 \ge 0$	1	–2	–3	4	≤	12
?	=	≤	=	≥		
C	7	–4	9	–2		

Двоїста задача має вигляд

$$\mathbf{II}:\left|\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mathrm{II}} = y_1 + 21y_2 + 12y_3 \quad \to \quad \min, \\ \Omega_{\mathrm{II}}:\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 + y_3 = 7, \\ -3y_1 + 4y_2 - 2y_3 \le -4, \\ 5y_1 - 8y_2 - 3y_3 = -9, \\ y_1 - 2y_2 + 4y_3 \ge -2, \end{cases} \\ y_2 \le 0, \;\; y_3 \ge 0, \end{array}\right.$$

яка поставлена у відповідність вихідній (прямій) задачі. Тобто доведено, що для довільної форми прямої задачі лінійного програмування існує загальний алгоритм переходу до двоїстої задачі.

7. Обговорення результатів дослідження двоїстих задач

Як відомо, розв'язання більшості задач ЛП здійснюється завдяки специфічним умовам задач або за рахунок спрощення запису задач через використання існуючих обмежень у формі рівностей або нерівностей [5]. Інколи вдається сформулювати завдання ітераційного пошуку розв'язку систем рівнянь [12] або виконати декомпозиції систем за допомогою графів [13]. Такі способи постановки задачі ЛП і розв'язку систем лінійних рівнянь застосовують прямі описи систем з побудовою унікальних алгоритмів отримання рішення задачі [15]. Незважаючи на широкий перелік різних форм відображення запису задач ЛП залишається актуальним визначення способів узагальнення пошуку рішень. Показано, що з практичної точки зору запропонований підхід дозволяє розширити можливості вибору форми представлення задач ЛП з метою спрощення обчислювальної складності оптимізаційних задач такого класу [18]. Пропонується на етапі формулювання задачі обрати найпростішу форму запису задач, у тому числі з урахуванням існуючих спряжених двоїстих відображень задачі.

Двоїсті спряжені пари відображень задач ЛП утворюються через інверсію цільової функції і змінних задачі. Відомі такі правила побудови двоїстої задачі:

– кожному i-му обмеженню вихідної задачі відповідає змінна y_i двоїстої задачі; і навпаки, кожному j- му обмеженню двоїстої задачі відповідає змінна x_j вихідної задачі;

– якщо одна з пари двоїстих задач сформульована на максимум цільової функції, то друга – на мінімум і навпаки;

– обмеження-нерівності слід записувати зі знаком «≥» – при мінімізації цільової функції;

– коефіцієнти цільової функції однієї із задач є вільними членами системи обмежень другої задачі;

– матриці, складені з коефіцієнтів обмежень вихідної і двоїстої задач, є взаємно транспонованими.

Оптимальні розв’язки двоїстих задач тісно пов’язані між собою, що дозволяє зробити висновок, що у загальному випадку немає потреби виконувати пошук рішення за описом як прямої так і двоїстої спряженої задачі. Достатньо визначити рішення тільки по одній формі опису.

Для оптимальних рішень прямої і двоїстої задачі, коли суворо виконується нерівність, обмеженням відповідають нульові змінні, а ненульовим змінним, що входять в опорний план, відповідають умови нечіткої нерівності обмеження, що реалізується, як рівність. Ці властивості подвійних рішень дозволяють суттєво скоротити час вирішення, якщо доводиться розв’язувати задачу, з числом обмежень набагато більшим числа змінних. Тоді можна, вирішивши двоїсту задачу, знайти її опорний план, після чого, відібравши в прямій задачі тільки обмеження, що відповідають опорному плану, вирішити для них звичайну систему лінійних рівнянь.

Прикладною цінністю запропонованого підходу є застосування отриманого результату для забезпечення можливості вдосконалення складних систем, що описуються системами лінійних рівнянь з наявністю систем лінійних обмежень [19]. Велика кількість математичних моделей в управлінні проектами має опис лінійних задач оптимізації. З огляду на це, наведені теоретичні відомості застосовуються для розв’язку їх спряжених задач, які мають практичну інтерпретацію. Узагальнення методу взаємної спряженості математичних відображень двоїстої задачі для довільної форми представлення прямої задачі дозволить легко отримувати коректні пари відомих двоїстих задач. Це дозволило запропонувати та довести істинність алгоритму побудови двоїстої задачі для довільної форми представлення прямої задачі. Основним недоліком запропонованого метода або обмеженістю метода є можливість його використання тільки для лінійних задач.

8. Висновки

1. Для існуючих пар двоїстих задач строго доведено їх спряжений характер, як головного критерію складання пар двоїстості. Формування двоїстої задачі ґрунтується на твердженні – двоїста задача від двоїстої є прямою (вихідною) задачею. Для різних пар двоїстих задач строго доведено виконання такого твердження.

2. Строго визначені операції переходу до двоїстої задачі від прямої задачі, представленої у загальній формі запису. З огляду на це, перехід до двоїстої за-

дачі носить нескладний формальний порядок. Це дозволяє зробити висновок, що у загальному випадку немає потреби виконувати пошук рішення за описом як прямої так і двоїстої спряженої задачі. Достатньо визначити рішення тільки по одній формі опису задачі лінійного програмування.

Література

1. Drozd, J., Drozd, A. (2013). Models, methods and means as resources for solving challenges in co-design and testing of computer systems and their components. The International Conference on Digital Technologies 2013. doi: https://doi.org/10.1109/dt.2013.6566307
2. Сигал, И. Х., Иванова, А. П. (2003). Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М., 240.
3. Гетманцев, В. Д. (2001). Лінійна алгебра і лінійне програмування. Київ: Либідь, 250.
4. Teschl, G., Teschl, S. (2008). Mathematik für Informatiker. Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra. Springer, 519. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-540-77432-7
5. Biloshchytskyi, A., Myronov, O., Reznik, R., Kuchansky, A., Andrashko, Y., Paliy, S., & Biloshchytska, S. (2017). A method to evaluate the scientific activity quality of HEIs based on a scientometric subjects presentation model. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6 (2 (90)), 16–22. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.118377
6. Титов, С. Д., Чернова, Л. С. (2017). Вища та прикладна математика. Ч. 1. Х.: Факт, 336.
7. Nozicka, F., Guddat, J., Hollatz, H. (1972). Theorie der Linearen Optimierung. Berlin, 378.
8. Lau, D. (2011). Algebra und Diskrete Mathematik 1. Springer. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-19443-6
9. Biloshchytskyi, A., Kuchansky, A., Andrashko, Y., Biloshchytska, S., Kuzka, O., Shabala, Y., Lyashchenko, T. (2017). A method for the identification of scientists' research areas based on a cluster analysis of scientific publications. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5 (2 (89)), 4–11. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.112323
10. Biloshchytskyi, A., Kuchansky, A., Biloshchytska, S., Dubnytska, A. (2017). Conceptual model of automatic system of near duplicates detection in electronic documents. 2017 14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM). doi: https://doi.org/10.1109/cadsm.2017.7916155
11. Unger, N., Dempe, S. (2010). Lineare Optimierung. Springer. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9659-9
12. Kolesnikov, O., Gogunskii, V., Kolesnikova, K., Lukianov, D., Olekh, T. (2016). Development of the model of interaction among the project, team of project and project environment in project system. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5 (9 (83)), 20–26. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.80769

13. Wu, C., Nikulshin, V. (2000). Method of thermoeconomical optimization of energy intensive systems with linear structure on graphs. International Journal of Energy Research, 24 (7), 615–623. doi: https://doi.org/10.1002/1099-114x(20000610)24:7<615::aid-er608>3.3.co;2-g

14. Kuchansky, A., Biloshchytskyi, A., Andrashko, Y., Biloshchytska, S., Shabala, Y., Myronov, O. (2018). Development of adaptive combined models for predicting time series based on similarity identification. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 1 (4 (91)), 32–42. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.121620

15. Gogunskii, V., Kolesnikov, O., Kolesnikova, K., Lukianov, D. (2016). “Lifelong learning” is a new paradigm of personnel training in enterprises. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 4 (2 (82)), 4–10. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.74905

16. Demin, D. (2017). Improvement of approaches to the construction of the training process of sportsmen, considered within the framework of the realization of informal education processes. ScienceRise: Pedagogical Education, 9 (17), 28–46. doi: https://doi.org/10.15587/2519-4984.2017.111110

17. Lax, P. D. (2013). Linear Algebra and Its Applications. Wiley, 392. URL: https://www.wiley.com/en-us/Linear+Algebra+and+Its+Applications%2C+2nd+Edition-p-9781118626924

18. Drozd, J., Drozd, A., Maevsky, D., Shapa, L. (2014). The levels of target resources development in computer systems. Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2014). doi: https://doi.org/10.1109/ewdts.2014.7027104

19. Chernov, S., Titov, S., Chernova, L., Gogunskii, V., Chernova, L., Kolesnikova, K. (2018). Algorithm for the simplification of solution to discrete optimization problems. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3 (4 (93)),