УДК: 519.866: 330.4
DOI: 10.15587/1729-4061.2019.170516

Алгоритмізація методів базисних матриць у дослідженні балансових міжгалузевих еколого-економічних моделей

В. І. Кудін, А. М. Онищенко, І. М. Онищенко

Еколого-економічні моделі (типу Леонтьєва-Форда) відіграють особливу роль в розв'язанні принципових проблем перспективного планування з врахуванням природокористування. На їх основі може бути реалізована задача обґрунтування величини затрат на охорону навколишнього середовища з врахуванням соціально-економічного ефекту та розподілу їх у територіально-галузевому розрізі. На основі запропонованої балансової моделі окреслено типові узагальнення ("розширення") моделі, які, загалом, збільшують її розмірність, але не "випадають" з класу лінійних. Зокрема, досліджено вплив на зміни обсягів валових галузевих випусків в наслідок зміни структурних галузевих пропорцій, що відповідає зміні технологічного укладу функціонування еколого-економічної системи у галузевому розрізі.

З метою розв'язання поставленої задачі розвинуто застосування алгоритмів методу базисних матриць, оснащені технологією визначення розв'язків системи матричних лінійних рівнянь відповідно до змін та проведення узагальнень моделі. При цьому зміни можуть зазнавати окремі елементи чи група елементів, один чи група рядків (стовпців), в блоках підматриць матриці. Запропоновані алгоритми реалізовані для випадку змін матриці обмежень вихідної системи без перерахунку (заново).

Розглянуто різноманітні варіанти змін в моделі та їх вплив на новий розв'язок у випадку "збурення" в підматрицях матриці обмежень (групи елементів, що утворюють блок) моделі. Зокрема, при "включенні" ("виключенні") нових блоків підматриць, тобто збільшенні (чи зменшенні) розмірності початкової матриці обмежень математичної моделі.

Такі моделі подаються лінійною системою, зокрема, системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

Такий підхід відкриває можливість проводити направлені зміни в моделі з метою досягнення в подальшому бажаних пропорцій "корисної" та "шкідливої" компонент у структурі виробництва (як розв'язок задачі).

Подальший розвиток запропонованої теорії дозволяє перейти до вивчення питань агрегування балансової схеми «витрати-випуск», визначення певного коридору допустимих змін з метою досягнення цільового орієнтиру по обсягам галузевих випусків

Ключові слова: матричні системи, міжнародні екологічні угоди, метод базисних матриць, матричні еколого-економічні моделі

1. Вступ

Процес управління з використанням моделей розглядають як відшукання оптимальних рішень для аналізу поведінки реальної економічної системи без реалізації експерименту з самою системою. Таким чином, використання методів економіко-математичного моделювання дає можливість отримати результат не шляхом експерименту, а запропонувати рекомендації з подальшого розвитку на основі фундаментальних положень наукового аналізу. Зміна моделі, а не реального об’єкту в ході його дослідження, обумовлює можливість оперативно отримати всю необхідну інформацію, яка відображає його внутрішні взаємозв’язки, якісні характеристики та кількісні параметри. Завдяки застосуванню математичних методів в дослідженні економіки побудовано адекватну феноменологічну теорію значної кількості економічних явищ. Окрім застосування класичних на сьогодні математичних методів значна кількість економічних процесів отримує пояснення з позицій якісної теорії диференціальних рівнянь, біфуркацій динамічних систем, нечіткої логіки, нейронних мереж, синергетики тощо. Значний прогрес у міждисциплінарній взаємодії економіки та математики дозволив перейти до включення в економічну систему соціальної політики, покликаної забезпечити узгодженість між економічним розвитком та соціальними стандартами. Окремим аспектом такої політики є екологічна складова, яка на сучасному етапі розвитку цивілізації виходить за рамки національних та територіальних кордонів і набуває масштабу глобального питання. Більшість дослідників погоджуються, що у випадку масштабних змін природного середовища та клімату безпосереднього впливу зазнає економічна система. Як приклад, в першу чергу це стосується природо експлуатуючих галузей, оскільки подібні зміни позначаються на якості ресурсної бази, що зрештою призводить до змін у економіці в цілому.

В теоретичному та прикладному сенсі залишається нагальним розвиток побудови та застосування математичних алгоритмів до аналізу еколого-економічної взаємодії при різноманітних сценаріях впровадження управлінських рішень. При цьому важливим аспектом нової екологічної політики є досягнення оптимальної збалансованості між екологічною та економічною складовими. Така взаємодія передбачає можливість поступального розвитку економіки в умовах скорочення негативного впливу на навколишнє природне середовище.

Разом з цим, процеси світової глобалізації та відсутність кордонів для процесів розповсюдження екологічних проблем висувають актуальним завдання універсалізації розбудовуваних математичних алгоритмів. Це передбачає можливість їх успішного застосування до різних національних економік, а також масштабування. Екологічна складова в таких умовах повинна володіти властивістю доповнюваності – включення додаткових нових видів обмежень.

Врахування таких змін в процесі моделювання обумовлює розширення сфери застосування методів та алгоритмів до проведення аналізу групових уточнень в блоках (квадрантах) матриці моделі на властивості лінійної системи. Слід наголосити на важливості дослідження “наслідування” властивостей системи в результаті збільшення (“розширення”) чи зменшення розмірності (“звуження”) розмірності матриці обмежень (включенням-виключенням блоків матриць, груп рядків чи стовпців). Зокрема, еволюції властивостей розв’язків в ході такого удосконалення моделі процесів, зокрема, еколого-економічних без перерозв’язання задачі спочатку.

В прикладному сенсі залишається нагальним розвиток алгоритмів аналізу еколого-економічної взаємодії при різноманітних групових змінах у моделі, зокрема, при побудові та дослідженні балансових моделей та дослідженні галузевої структури економіки (метод „витрати-випуск”).

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Незважаючи на численні дискусії та суперечності ряду наукових досліджень, Рамковою конвенцією з питань зміни клімату ООН [1] основною причиною глобальної зміни клімату було визнано надмірну концентрацію парникових газів в атмосфері Землі. Це стало підґрунтям для прийняття у 1997 році Кіотського протоколу [2], який конкретизував умови скорочення емісій для окремих країн. Кінцева мета зазначених угод полягає в тому, щоб досягти стабілізації концентрації парникових газів в атмосфері на такому рівні, який би не допускав загрозливого антропогенного впливу на кліматичну систему.

Подальшим кроком в реакції міжнародної спільноти на проблеми негативного впливу зміни клімату на соціально-економічний розвиток стало прийняття Організацією Об’єднаних Націй Паризької угоди (ПУ) з захисту клімату. Її основна мета полягає у зменшенні емісій парникових газів у глобальному вимірі [3].

Окрему позицію в наукових дослідження на сьогодні посідає питання вивчення реалізації положень КП та ПУ. Їх зміст визначає, в першу чергу, поведінку країни на міждержавному рівні в процесі інтернаціональної кооперації. Однак успішна реалізація міжнародної співпраці в рамках міжнародних екологічних угод можлива лише за умов відповідних змін на нижчих ієрархічних рівнях економічної системи. Зрозуміло, що на кожному з виділених рівнів змінюються окремі еколого-економічні елементи, формулювання законів, які встановлюють кількісні та якісні зв’язки між ними, як наслідок останнє призводить до необхідності вибору іншої структури еколого-економічної моделі.

На сьогодні більшість досліджень еколого-економічної взаємодії в процесі реалізації Паризької угоди стосуються передусім концептуальних аспектів її реалізації, історичного досвіду впровадження тих чи інших механізмів оптимального впровадження екологічних обмежень. Так, робота [4] підкреслює важливість Паризької угоди як наступного кроку світової спільноти у питанні скорочення емісій парникових газів і надає ґрунтовну історичну довідку щодо розвитку міжнародної співпраці на шляху побудови сталого розвитку від створення Рамкової конвенції ООН зі зміни клімату до сьогодення. Розкрито взаємозв’язок Угоди з Кіотським протоколом, Маракешським самітом, Дохінською поправкою, а також виділена її особлива роль як інструменту у досягненні мети скорочення емісій парникових газів.

Враховуючи той факт, що найбільш ефективним інструментом вирішення екологічних проблем є економічне заохочення, ряд авторів досліджують теоретико-методологічні засади побудови єдиного еколого-економічного комплексу в рамках Паризької угоди. В дослідженні [5] проведено аналіз зв'язку регіональної, національної та міжнародної політики в майбутній кліматичній співпраці. При цьому запропоновано використовувати окрім суто адміністративних також ринково-економічні механізми досягнення бажаного рівня викидів, як найбільш ефективного засобу заохочення, а їх симбіоз може стати інструментом зниження витрат на реалізацію екологічної політики. Наголошено на необхідності введення на першому етапі мінімальних екологічних обмежень, розробки національних стандартів, метрик, звітності та правил верифікації. Наступним кроком може стати розробка механізмів передачі квот на емісії між сторонами угоди, що встановить правила взаємодії між урядовими та приватними агентами, а також сприятиме побудові різних форм зв'язку між ними, тим самим сприятиме екологічній цілісності та економічній ефективності.

Поміж іншого спектру наукових досліджень, що стосуються реалізації положень Паризької угоди слід зазначити низку праць, присвячених адаптації національних економік до нових екологічних умов. Зрозуміло, що кожна з них відображає реалізацію стосовно своїх особливостей та досить часто є дискусійною. Найбільшого вивчення на сьогодні дістали економіки провідних гравців в питанні скорочення емісій парникових газів: економічно промислово-розвинуті країни, Китайська народна республіка, Індія, Російська федерація [6–10].

Вказані дослідження носять переважно концептуально-теоретичний характер і не дозволяють визначити конкретні кількісні величини реалізації тих чи інших механізмів. Однак їх результати дозволяють перейти до вивчення проблеми на рівні математичного моделювання. Одним з часто застосовуваних підходів в такому випадку можна назвати макроекономічні моделі, основані на теорії Кейнса, наприклад, моделі Oxford та Dri-Wefa [11]. Найчастіше їх використовують для дослідження рівноваги на окремих ринках, циклічних перетворень, конвергенції та стабільності, довгострокового зростання та прогнозування. Однак в таких моделях не використовуються припущення щодо повної зайнятості первинних факторів виробництва та досконалої конкуренції на всіх ринках, що перешкоджає можливості її екстрапоювання на різні види національних економік. Окрім того, параметри таких макроекономічних моделей, як правило, оцінюються на базі часових рядів, що може вносити значні неточності в прогнозні розрахунки.

В [12] досліджено питання оптимальності розподілу відповідальності в рамках Кіотського протоколу на основі апарату нечітких множин та теорії прийняття рішень. Одним з основних недоліків більшості міжнародних угод про охорону навколишнього природного середовища є відсутність конкретних механізмів їх реалізації, в першу чергу, формалізованих правил розподілу відповідальності, зокрема, фінансової, яку можна з певною долею точності визначити. На основі даного прогнозу агенти угоди можуть приймати відповідне рішення про кооперацію. В розвиток запропонованих механізмів розподілу квот, на думку авторів, доцільно розглянути нечіткі постановки моделей розподілу колективних витрат, оскільки параметри, введені при формуванні індивідуальних потенційних доходів агентів є емпіричними, а значить неточними.

Іншим класом еколого-економічних моделей, які дозволяють досліджувати збалансованість загальної системи, можна назвати моделі міжгалузевого балансу, які досліджують взаємний вплив структури економіки на навколишнє природне середовище. До даного класу моделей належать міжгалузева модель Леонтьєва-Форда та її узагальнення [13]. Еколого-економічне моделювання за схемою міжгалузевого балансу дозволяє визначити ціни, балансові фінанси галузей та економічні витрати на регулювання забруднення, прогнозувати вплив зміни доданої вартості на ціни, і відповідно, на обсяги виробництва за умови виконання тієї чи іншої природоохоронної стратегії.

На такій ідеології побудовані прикладні моделі загальної рівноваги [14, 15]. Їх істотною перевагою є те, що вони оперують значними масивами статистичних даних міжгалузевого балансу або системи національних рахунків і таким чином дозволяють максимально повно врахувати структур міжгалузевих зв'язків, а також досліджувати галузеві та макроекономічні ефекти економіки. На початку 90-х років XX ст. прикладні моделі загальної рівноваги стали стандартним інструментом аналізу наслідків від запровадження різноманітних механізмів економічної, соціальної енергетичної або природоохоронної політики. Такі моделі є найбільш застосованими абстракціями, які дозволяють розглянути економічні взаємозв'язки в економічній системі з максимальною повнотою, на підставі об'ємного масиву статистичних даних.

Враховуючи велику розмірність вказаних моделей, їх недоліком є складність реалізації імітаційних експериментів. Така складність обумовлена особливостями матричних структур, що формують модель. Все це дозволяє стверджувати, що доцільним у дослідженні збалансованої еколого-економічної взаємодії є вибір в якості базової моделі балансового або Леонтьєвського типу. Наступним кроком є розробка надійних методів отримання розв'язків в умовах різних видів та масштабів матричних структур, що дозволить реалізувати різні сценарні варіанти впровадження еколого-економічної політики.

Врахування такої властивості в процесі моделювання обумовлює розширення сфери застосування методів та алгоритмів до проведення аналізу групових змін в блоках (квадрантах) матриці моделі на властивості лінійної системи, зокрема, розв'язків в ході удосконалення моделі процесів, зокрема еколого-економічних [13].

В прикладному сенсі залишається нагальним розвиток алгоритмів аналізу еколого-економічної взаємодії (міжгалузевої моделі Леонтьєва-Форда та її узагальнення) при різноманітних групових змінах у моделі, які були започатковані та розроблені при побудові та дослідженні балансових моделей та дослідженні галузевої структури економіки (метод „витрати-випуск").

Це передбачає наявність математичного апарату врахування впливу змін (уточнень) на властивості нової моделі, звичайно, без процедури перерозв'язання задачі заново (спочатку). Слід зазначити, що моделі еколого-економічних процесів (як лінійні системи) мають саме блочну (клітинну) структуру – квадранти матриці обмежень. Зокрема, класична схема міжгалузевого балансу в першому квадранті містить міжгалузеві потоки, які відповідають функціонально-структурним галузевим зв’язкам.

Відомо, що для лінійних моделей розроблено найбільш ефективні обчислювальні процедури та промислові реалізації, наприклад, варіантів сімплекс-методу [16, 17], які умовно поділяються на методи застосовані до прямої задачі та до двоїстої. Визначальною його складовою є точний метод Гауса (повного виключення) розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що використовується на кожній ітерації. В методі Гауса: направлено проводяться еквівалентні перетворення початкової моделі до моделі простої структури (з діагональною матрицею обмежень); обсяг обчислень на ітераціях зменшується від ітерації до ітерації. Слід зазначити, що таке перетворення початкової моделі дещо обмежує проведення построзрахункового аналізу при змінах в моделі.

Основою запропонованого методу штучних базисних матриць [18] та відповідних йому алгоритмів є ідея базисної матриці, що утворюється лінійно-незалежними рядками матриці обмежень. Проводиться процес по-ітераційного “врощування” (заміщення) обмежень допоміжної системи релаксованими обмеженнями основної системи. З детальним викладенням обгрунтування методу, його властивостей, результатів обчислювального експерименту, порівнянь з відомими іншими методами можна ознайомитись в [19, 20]. Запропонований у [18] метод базисних матриць (МБМ), “працює” якби навпаки, проводить ітеративне перетворення моделі простої структури (із відомими властивостями) послідовними включеннями обмежень вихідної системи. Тобто проводиться процес “відновлення” – переходу до початкової згідно формул зв’язку елементів методу на ітераціях. В результаті, встановлюємо величину рангу, знаходимо обернену матрицю, розв’язок, контролюємо обумовленість тощо.

Алгоритми МБМ природно поширюються на аналіз впливу змін в лінійній системі в різних складових моделі (елемент, рядок, стовпець, група рядків (стовпців), “блоків підматриць” матриці обмежень тощо. Часткові дослідження по аналізу впливу таких змін на властивості лінійної системи (без перерозв’язання задачі) були проведені в [21, 22] – елемент, рядок, стовпець матриці обмежень.

Структурно аналіз таких змін корелює вплив змін в окремих елементах, рядках стовпцях технологічних матриць моделі, а також і в формуючих клітинах (блоках). Це обумовлює необхідність розвитку алгоритмів розглянутих в [21, 22] розробкою оцінки впливу зміни в блоках матричної структури на розв’язок системи рівнянь та ряд інших задач.

3. Мета і завдання дослідження

Метою дослідження є розвиток методів та алгоритмів проведення аналізу властивостей процесів, що подаються лінійними моделями. Вважається, що такі моделі можуть зазнають різноманітних удосконалень, змін та уточнень в ході дослідження. Зокрема, дослідити еколого-економічні моделі "витрати-випуск" типу Леотьєва-Форда, що враховують витрати на виконання обмежень за Паризькою угодою та різні варіанти удосконалень.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

– на основі балансової схеми "витрати-випуск" врахувати витрати на виконання обмежень за Паризькою угодою;

– дослідити можливість включення додаткових економічних та екологічних обмежень та нових факторів в модель, а також зміни класичних вихідних припущень щодо технологічної структури;

– розвинути для побудови базових алгоритмів врахування впливу різних "сценаріїв" типових змін в матриці обмежень еколого-економічної моделі (елемент, рядок, стовпець, група рядків чи стовпців, блок елементів підматриці обмежень);

– запропонувати підхід до побудови алгоритмів аналізу впливу змін в елементах матриці обмежень для моделювання процесів, що передбачають включення (виключення) нових блоків матриць, "розширення" (чи "звуження") розмірності початкової матриці обмежень математичної моделі.

4. Розвиток базової концепції моделювання еколого-економічного процесу

Відомо, що:

– більшість досліджуваних процесів за своєю природою є нелінійними, тобто не мають адекватного математичного подання в *класі лінійних моделей* (матричних структур);

– саме для лінійних моделей розроблено найбільш ефективні обчислювальні процедери та промислові реалізації, наприклад, сімплекс-методу [16, 17];

– лінійна модель стає адекватнішою введенням нелінійних залежностей в елементи моделі. Модель при набутті параметрами моделі конкретних значень знову лінійна;

– важливі параметри складного процесу в ході моделювання ("змін") та спрощень знаходять своє відображення ("переходять") в значеннях елементів матричної структури, зокрема, окремих елементів, рядків, стовпців та блоків ("підматриць") матриці обмежень тощо;

– моделювання можна розглядати як серію послідовних уточнень ("змін") деякої групи елементів (підматриця або блок) матриці обмежень або "звужень" ("розширення"), зменшення (збільшення) розмірності матриці обмежень. Тобто певний ітераційний процес розв'язання послідовності взаємопов'язаних задач, що зазнають змін.

Важлива роль при моделюванні процесів економіки та екології (у розв'язанні проблем природокористування) надежить балансовим еколого-економічним моделям Леонтьєвського типу [13]. В рамках таких моделей можна оптимально поєднати групи виробничих та природоохоронних виробництв, а також їх взаємозв'язки. При цьому запропоновано враховувати витрати на виконання емісійних обмежень парникових газів у структурі галузей основного виробництва. Структурно еколого-економічні моделі (згідно [21, 22]) можна змістовно інтерпретувати, як клітинні (блочні). В цій матриці поміж блоками простежуються певні взаємозв'язки. А математично такі моделі подаються лінійними системами.

За критеріями простоти, наглядності, структурованості в якості базової балансової еколого-економічної моделі (для удосконалення) будемо розглядати матричну модель Леонтьєва-Форда:

$$x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1,$$

$$x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2. \qquad (1)$$

Рівняння моделі (1) відображають баланс матеріального та допоміжного (екологічного) виробництв.

В системі (1) $x_1 = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпчик об'ємів виробництва продукції;

$x_2 = \left(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпчик об'ємів знищених забруднюючих речовин;

$y_1 = \left(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпчик об'ємів кінцевої продукції;

$y_2 = \left(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_m^2\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпчик об'ємів незнищених забруднень;

$A_{11} = \left(a_{ij}^{11}\right)_1^n$ – квадратна матриця коефіцієнтів прямих витрат продукції i на виробництво одиниці продукції j;

$A_{12} = \left(a_{ig}^{12}\right)_{i,g=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця витрат продукції i на одиницю знищення забруднювачів g;

$A_{21} = \left(a_{kj}^{21}\right)_{k,j=1}^{m,n}$ – прямокутна матриця випуску забруднювачів k на одиницю виготовленої продукції j;

$A_{22} = \left(a_{kg}^{22}\right)_1^m$ – квадратна матриця випуску забруднювачів k на одиницю знищення забруднювачів g.

В роботі [13] запропоновано враховувати витрати на виконання емісійних обмежень парникових газів у структурі галузей основного виробництва у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + Cy_2 + y_1, \\ x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2, \end{cases} \qquad (2)$$

де Cy_2 – витрати, пов’язані з викидами парникових газів (тобто витрати на обслуговування викидів парникових газів, зокрема, це плата за дозволи на викиди);

$C = \left(c_{ig}^{12}\right)_{i,g=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця витрат продукції i на одиницю викидів забруднювача g.

Для моделі (2) можна окреслити деякі типові варіанти змін та уточнень:

А. Вплив на властивості лінійної системи (без перерозв’язання задачі) змін – елемента, рядка, стовпця матриці обмежень. Було досліджено в [21, 22].

Б. При модифікації моделі “розширенням” виробництва рівняння моделі (1) буде відображать баланс матеріального та допоміжного (екологічного) виробництв з урахуванням структури змін.

Наприклад, в системі (1) $x_1 = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпчик об’ємів виробництва продукції може набути вигляд

$$\overline{x}_1 = (x_1, \tilde{x}_1) = \left(\underbrace{x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1}_{x_1}, \underbrace{x_{n+1}^1 \ldots, x_{n+p}^1}_{\tilde{x}_1} \right)^{\mathrm{T}},$$

тут $\tilde{x}_1$ компоненти “розширення” (“хвиля” зверху) в початковому векторі x_1;

$x_2 = \left(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпчик об’ємів знищених забруднюючих речовин може набути вигляд

$$\overline{x}_2 = (x_2, \tilde{x}_2) = \left(\underbrace{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2}_{x_2}, \underbrace{x_{m+1}^2 \ldots, x_{m+q}^2}_{\tilde{x}_2} \right)^{\mathrm{T}}.$$

Відповідно, $y_1 = \left(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпчик об’ємів кінцевої продукції вигляду

$$\overline{y}_1 = (y_1, \tilde{y}_1) = \left(\underbrace{y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1}_{y_1}, \underbrace{y_{n+1}^1 \ldots, y_{n+p}^1}_{\tilde{y}_1} \right)^{\mathrm{T}};$$

а $y_2 = \left(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_m^2\right)^{T}$ – вектор-стовпчик об’ємів незнищених забруднень

$$\overline{y}_2 = (y_2, \tilde{y}_2) = \left(\underbrace{y_1^2, y_2^2, \ldots, y_m^2}_{y_2}, \ \underbrace{y_{m+1}^2 \ldots, y_{m+q}^2}_{\tilde{y}_2} \right)^{\mathrm{T}};$$

$\overline{A}_{11} = \left(\overline{a}_{ij}^{11}\right)_1^{n+p}$ – квадратна матриця коефіцієнтів прямих витрат продукції i на виробництво одиниці продукції j;

$\overline{A}_{12} = \left(\overline{a}_{ig}^{12}\right)_{i,g=1}^{n+p,m+q}$ – прямокутна матриця витрат продукції i на одиницю знищення забруднювачів g;

$\overline{A}_{21} = \left(\overline{a}_{kj}^{21}\right)_{k,j=1}^{m+q,n+p}$ – прямокутна матриця випуску забруднювачів k на одиницю виготовленої продукції j;

$\overline{A}_{22} = \left(\overline{a}_{kg}^{22}\right)_1^{m+q}$ – квадратна матриця випуску забруднювачів k на одиницю знищення забруднювачів g.

Тоді витрати на виконання емісійних обмежень парникових газів у “розширеній” структурі галузей основного виробництва (згідно (2)) набудуть вигляд:

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = \overline{A}_{11}\overline{x}_1 + \overline{A}_{12}\overline{x}_2 + \overline{C}\,\overline{y}_2 + \overline{y}_1, \\ \overline{x}_2 = \overline{A}_{21}\overline{x}_1 + \overline{A}_{22}\overline{x}_2 - \overline{y}_2, \end{cases}$$

де $\overline{C} = \left(\overline{c}_{ig}^{12}\right)_{i,g=1}^{n+p,m+q}$ – прямокутна матриця витрат продукції i на одиницю викидів забруднювача g.

Неважко переконатись, що і “розширена” модель має клітинну структуру, причому структурні блоки (1) та (2) природньо “переходять” до неї. При проведенні “звуження” моделі (навпаки) така тенденція також простежується.

В. “Включення” наряду з економічним та екологічним факторами в модель інших (чи “виключення”) модифікують модель включенням (виключенням) відповідних блоків підматриць (клітин), тобто “розширення” (“звуження”) моделі. Природно, ускладнення (спрощення) моделі корелює зі збільшенням (зменшенням) розмірності матриці обмежень.

Г. “Накладання” додаткових обмежень (двосторонні обмеження на змінні, умова їх додатності) на компоненти векторів: об’ємів виробництва продукції, об’ємів знищених забруднюючих речовин, об’ємів кінцевої продукції вигляду, об’ємів незнищених забруднень обумовлює модифікацію моделі (ускладнення), проте не виводить її за межі лінійності.

Окреслені типові варіанти модифікацій лінійної моделі вказують на потребу оснащення відповідних алгоритмів дослідження таких моделей (з клітинною структурою) здатністю цю особливість враховувати.

5. Технології аналізу впливу “групових” змін в еколого-економічній моделі на основі алгоритму методу базисних матриць

Застосований в даному дослідженні метод базисних матриць (в подальшому МБМ) є метод типу сімплекс-методів [18], який спрямований саме на аналіз та розв’язання задач, які поставлені вище. Слід зазначити, що це задачі в першу чергу аналізу лінійних систем (зокрема, СЛАР), і є базовими (згідно [16–18]) при проведенні більш складних досліджень та узагальнень.

Згідно [18], підматрицю $A_б$, складену із m лінійно незалежних рядків-нормалей (i_1, i_2,…, i_m) обмежень, будемо називати штучною базисною, а розв′язок u_0 відповідної їм системи рівнянь $A_б u = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})^T$ штучним базисним.

Нехай: e_{ri} – елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $u_0=(u_{01}, u_{01}, \ldots, u_{0m})^T$ – базисний розв’язок; $\alpha_r=(\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rm})$ – вектор розвинення вектору-нормалі обмеження $\alpha_r u \leq c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$; $\Delta_r=\alpha_r u_0 - c_r$ – нев’язка r-го обмеження (1) в вершині. Всі введені елементи в новій базисній матриці $\overline{A}_б$, відмінній від $A_б$ одним рядком, будемо позначати рискою зверху.

Відповідно до Теореми 1 [18], встановлено співвідношення між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень, елементами обернених матриць, базисними розв’язками, нев’язками обмежень в двох суміжних базисних матрицях. На основі них може будуватись схема визначення рангу системи (1) та розв’язку системи рівнянь, послідовними змінами базисних матриць та відповідних штучних розв′язків (алгоритм 1 [18]).

Початкові дослідження по аналізу впливу змін на властивості лінійної системи (без перерозв’язання задачі) були проведені в [21, 22] – елемент, рядок, стовпець матриці обмежень. В подальшому буде розвинуто алгоритми 1 та 2, запропоновані в [21, 22] для аналізу впливу типових змін в блоках матричної структури на розв’язок системи рівнянь, “розширенні” (“звуженні”) матриці обмежень включенням (виключенням) блоків.

6. Дослідження властивостей матричних структур при різних варіантах змін у елементах матриці

Згідно подання, перший блок рівнянь запропонованої моделі (2) відображає економічний баланс – розподіл галузевого валового випуску продукції на виробниче споживання основного та допоміжного виробництв, кінцеве споживання основного виробництва та витрати, пов’язані з виконанням зобов’язань за Паризькою угодою.

Другий блок рівнянь (2) відображає фізичний баланс парникових газів, як суму емісій, спричинених діяльністю основного та допоміжного виробництв, та їх незнищених обсягів.

Економічний зміст змінних моделі вимагає розгляду їх невід’ємних значень. Останнє тісно пов’язано з питанням продуктивності балансових моделей, що дозволяє вести мову про реальне функціонування виробничої системи, здатної забезпечити проміжне споживання, додатні обсяги кінцевого продукту та виконання встановлених обмежень з викидів парникових газів.

Відповідно до [22] конкретизуємо модель у вигляді:

$$Au = C, \tag{3}$$

де $A = \begin{pmatrix} E_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & E_2 - A_{22} \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_m\right)^{\mathrm{T}}$ – $Au = C$ вимірний вектор, x_1, x_2 – “підвектори” u,

$$C = \begin{pmatrix} E_1 & C \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

E_1, E_2 – блочні одиничні матриці відповідної розмірності, 0 – блочна нульова матриця, Cy_2 – витрати, пов’язані з викидами парникових газів. Тобто витрати на обслуговування викидів парникових газів. Зокрема, це плата за дозволи на викиди, а $C = \left(c_{ig}^{12}\right)_{i,g=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця витрат продукції i на одиницю викидів забруднювача g.

Будемо також розглядати систему, змінену (в елементах матриць A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} та C) по відношенню до системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\overline{A}u = \overline{C}. \tag{4}$$

Виділено такі основні варіанти алгоритмів аналізу змін в матриці обмежень лінійної системи:

А. Аналіз впливу змін в рядках матриці обмежень

Нехай початково відомі розв’язок u_0 та обернена матриця A_{σ}^{-1} СЛАР типу (3) основної системи. Для визначенності вважаємо, що в системі “змін” зазнають рядки $i+1, i+2, \ldots, i+i_0$ у вигляді

$$\overline{a}_{i+s}u = \overline{c}_{i+s}, \quad s = \overline{1, i_0},$$

де $\overline{a}_{i+s} = a_{i+s} + a'_{i+s}$, $\overline{c}_{i+s} = c_{i+s} + c'_{i+s}$, $s = \overline{1, i_0}$.

На основі установлених співвідношень в [21] дослідимо властивості СЛАР (4) з квадратною матрицею обмежень при збуреннях в елементах “групи” рядків. Проведемо послідовне (порядкове) заміщення рядків базисних матриць відповідно збуреними та обчислення (зміну) елементів методу на ітераціях. Важливою умовою в ході ітерацій є збереження невиродженості матриці обмежень задачі.

Алгоритм 1

Підготовчий крок. Нехай $s=1$, відомі u_0, A_σ^{-1}, де s – лічильник ітерацій, i_0 – кількість збурених рядків у блоці матриці обмежень СЛАР (4).

Крок 1. Надаємо $k=i+s$. Знаходимо розвинення за рядками матриці A_σ^{-1} нормалі обмеження $\bar{a}_k u=\bar{c}_k$ (зміненого обмеження $\left(a_k+a_k'\right)u=c_k+c_k'$) на основі співвідношення

$$\bar{\alpha}_k=\left(\bar{\alpha}_{k1},\bar{\alpha}_{k2},\ldots,\bar{\alpha}_{km}\right)=\bar{a}_k\times A_b^{-1}=\left(a_k+a_k'\right)\times A_b^{-1},$$

де

$$\bar{\alpha}_{kk}=a_k e_k+a_k' e_k=1+a_k' e_k,\ \bar{\alpha}_{ki}=a_k' e_i,\ A_\sigma^{-1},\ i=\overline{1,m},$$

де e_k, e_i, A_σ^{-1}, $i=\overline{1,m}$ – стовпці матриці A_σ^{-1}. Наприклад, $e_k=\left(A_b^{-1}\right)_k$ – k-й стовпець оберненої матриці.

Крок 2. Знаходимо нев’язку збуреного обмеження

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_k&=\left(a_k+a_k'\right)u_0-\left(c_k+c_k'\right)=\\&=\left(a_k u_0-c_k\right)+\left(a_k' u_0-c_k'\right)=\Delta_k+\Delta_k'=\Delta_k'.\end{aligned}$$

Крок 3. Перевіряємо умову опорності $\bar{\alpha}_{kk}\neq 0$ при проведенні операції заміщення рядка k нормаллю k-го обмеження $\bar{a}_k u=\bar{c}_k$ (в даному випадку $k=i+s$). Знаходимо

$$\lambda=-\frac{\bar{\Delta}_k}{\bar{\alpha}_{kk}}\ \text{та}\ \bar{e}_k=\lambda\times e_k.$$

Крок 4. Формуємо новий розв’язок $\bar{u}_0=u_0+\bar{e}_k$.

Крок 5. Знаходимо стовпці нової оберненої матриці $\bar{A}_\sigma^{-1}$:

$$\bar{e}_k=\frac{e_k}{\bar{\alpha}_{kk}},\ \bar{e}_i=e_i-\frac{e_k}{\bar{\alpha}_{kk}}\times\bar{\alpha}_{ki},\ A_\sigma^{-1},\ i=\overline{1,m}.$$

Вважаємо, що: $u_0^{(k)}=\bar{u}_0$, $A_\sigma^{(k)-1}=\bar{A}_\sigma^{-1}$.

Крок 6. При $s\neq i_0$ покладаємо $u_0=u_0^{(k)}$, $A_\sigma^{-1}=A_\sigma^{(k)-1}$, $s=s+1$, переходимо на Крок 1, в протилежному випадку на наступний крок.

Завершальний крок. Проведення порівняльної характеристики властивостей "зміненої" та основної СЛАР.

Згідно алгоритму за i_0 – ітерацій знаходиться розв'язок "зміненої" задачі (без перерозв'язання спочатку).

Б. Зміни в окремих елементах рядків матриці обмежень

Алгоритм, що розглянуто вище може бути застосованим для аналізу впливу "точкових", тобто в окремих елементах рядка матриці обмежень чи вектору нормалі змін.

Дослідимо властивості елементів методу при переході від СЛАР з незбуреними рядками (3) до СЛАР (4) зі збуреними рядками.

Для визначеності, маємо рядок з (3) матриці A вигляду:

$$a_{i_0} = \left(a_{i_0 1}, a_{i_0 2}, \ldots, a_{i_0 m}\right),$$

що зазнав збурення в компонентах $r_1, r_2, \ldots, r_s$ у вигляді

$$a'_{i_0} = \left(0, \ldots 0, a_{i_0 r_1}, 0, \ldots 0, a_{i_0 r_2}, 0, \ldots 0, a_{i_0 r_s}, 0, \ldots, 0\right).$$

Загалом, збурений рядок можна представити у вигляді $\overline{a}_{i_0} = a_{i_0} + a'_{i_0}$. Врахуємо, що "незбурений" вектор розвинення рядка a_{i_0} за рядками базисної матриці A_b має структуру

$$\alpha_{i_0} = \left(\underbrace{0}_{1}, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i_0}, 0, \ldots, \underbrace{0}_{m}\right).$$

Наслідок 1. Є справедливими наступні співідношення для змінених компонент вектору розвинення:

$$\overline{\alpha}_{i_0} = \left(a_{i_0} + a'_{i_0}\right) A^{-1} = a_{i_0} A^{-1} + a'_{i_0} A^{-1} = \alpha_{i_0} + a'_{i_0} A^{-1} =$$

$$= \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{s} a'_{i_0 r_j} e_{r_j 1}}_{1}, \underbrace{\sum_{j=1}^{s} a'_{i_0 r_j} e_{r_j 2}}_{2}, \ldots, \underbrace{\sum_{j=1}^{s} a'_{i_0 r_j} e_{r_j i_0 - 1}}_{i_0 - 1}, \underbrace{\sum_{j=1}^{s} a'_{i_0 r_j} e_{r_j i_0}}_{i_0}, \underbrace{\sum_{j=1}^{s} a'_{i_0 r_j} e_{r_j i_0 + 1}}_{i_0 + 1}, \ldots, \underbrace{\sum_{j=1}^{s} a'_{i_0 r_j} e_{r_j m}}_{m} \right),$$

$$\Delta_{i_0}\left(u_0\right) = \overline{a}_{i_0} u_0 - c_{i_0} =$$

$$= a_{i_0} u_0 - c_{i_0} + a'_{i_0} u_0 = 0 + a'_{i_0} u_0 = \sum_{j=1}^{s} a_{i_0 r_j} u_{0 r_j}.$$

Неважко переконатись, що формули зазнають спрощень при проведенні обчислень. При роботі алгоритму 1 вище можна враховувати встановлену специфіку змін в моделі.

На основі [21] можна конкретизувати розрахунки всіх елементів міжгалузевої балансової моделі при переході до нової оберненої базисної матриці та розв′язку СЛАР (4), матриця обмежень якої зазнала змін в одному з рядків.

Наслідок 2. Перехід від незбуреної системи СЛАР (3) до “збуреної” системи (4) в множині рядків, проводиться послідовними за кількістю “збурених” рядків ітераціями по заміщенню рядків a_{i_0} базисної матриці A збуреними рядками $\overline{a}_{i_0} = a_{i_0} + a'_{i_0}$, $i_0 \in I_0$. Враховується специфіка збурень в окремих елементах рядка матриці обмежень при перерахунку елементів методу. Зокрема, контролюється виконання умови лінійної незалежності матриці обмежень (згідно алгоритму 1).

В. Аналіз впливу змін в стовпцях матриці обмежень

В процесі моделювання можу $\overline{A}_k^T = A_k^T + A_k'^T$ ть зазнавать змін та уточнень, як окремі елементи, рядки матриці обмежень, а також і стовпці. В [22] проведено дослідження впливу змін k-го стовпця матриці обмежень A у вигляді $\overline{A}_k = A_k + A'_k$ на розв’язок u_0, де $A_k = \left(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}\right)^{\mathrm{T}}$, $A_k = \left(a'_{1k}, a'_{2k}, \ldots, a'_{mk}\right)^{\mathrm{T}}$ (форма збурення A в (3)) − для системи було побудовано допоміжну двоїсту пару задач лінійного програмування.

Зокрема в [22], встановлено:

1. Зі зв’язків прямої та двоїстої задач випливають зв’язки збурень рядків та стовпців матриць. Зокрема, зміна розв’язків (3) при збуренні стовпців матриці у вигляді $\overline{A}_k = A_k + A'_k$ співпадає зі змінами коефіцієнтів розкладу вектору нормалі C^T при зміні рядка k транспонованої матриці A^T у вигляді за схемою метода базисних матриць до відповідно побудованої двоїстої задачі.

2. Зміна елементів оберненої матриці A_b^{-1} (3) при заміщенні k-го стовпця стовпцем матриці у вигляді $\overline{A}_k = A_k + A'_k$ випливає, також, зі зв’язків прямої та двоїстої задач. Встановлено співпаданя з точністю до транспонування зі змінами оберненої $\left(A_b^T\right)^{-1}$ матриці при зміні рядка k матриці A_b^T у вигляді $\overline{A}_k^T = A_k^T + A_k'^T$ за схемою метода базисних матриць двоїстої задачі.

3. Покомпонентний зв'язок векторів розв’язку u_0 та $\overline{u}_0$ при проведенні заміщення k-го стовпця матриці обмежень A_k стовпцем $\overline{A}_k = A_k + A'_k$ описується співвідношенням [22]:

$$\overline{u}_{0k} = \frac{u_{0k}}{1 + \left(A_b^{-1}\right)_k \times A'_k} = \frac{u_{0k}}{\overline{L}_{kk}}, \; i = k,$$

$$\bar{u}_{0i} = u_{0i} - \frac{u_{0k}}{1 + \left(A_b^{-1}\right)_k \times A'_k} \times \left[\left(A_b^{-1}\right)_i \times A'_k \right] =$$

$$= u_{0i} - \frac{u_{0k}}{\bar{L}_{kk}} \times \bar{L}_{ki},\; i \neq k,$$

причому умовою збереження невиродженості розв’язку є виконання умови $1 + \left(A_b^{-1}\right)_k \times A'_k \neq 0.$

Оскільки

$$\bar{L}_k = \left(\bar{L}_{k1}, \bar{L}_{k2}, \ldots, \bar{L}_{km}\right) = A_b^{-1} \times \bar{A}_k = A_b^{-1} \times \left(A_k + A'_k\right),$$

то

$$\bar{L}_{kk} = 1 + L'_{kk} = 1 + \left(A_b^{-1}\right)_k \times A'_k,$$

$$\bar{L}_{ki} = L'_{ki} = \left(A_b^{-1}\right)_i \times A_k,$$

$A_\sigma^{-1},\; i = \overline{1,m},\; \left(A_b^{-1}\right)_k$ – k-й рядок матриці.

4. Оскільки, $\bar{u}_0 = u_0 - \dfrac{u_{0k}}{\bar{L}_{kk}} \times L'_k$ – подання рівняння прямої у параметричній формі, де u_0 – початковий вектор, L'_k – вектор нормалі, $-\dfrac{u_{0k}}{\bar{L}_{kk}}$ – значення параметра зміщення вподовж вектора L'_k (від u_0). Значення компонент вектора L'_k та $-\dfrac{u_{0k}}{\bar{L}_{kk}}$ формує величина збурення в стовпці з номером k.

Технологію впливу змін окремого стовпця на розв’язок СЛАР [22] можна поширити на аналіз впливу змін групи стовпців побудовою відповідної ітеративної процедури врахування впливу змін кожного зі стовпців.

Нехай початково відомі розв’язок u_0 та обернена матриця A_σ^{-1} СЛАР типу (3) основної системи. Для визначенності вважатимемо, що в системі (3) змін зазнають стовпці $k = i+1, i+2, \ldots, i+i_0$, у вигляді $\bar{A}_k = A_k + A'_k$, тобто

$$k = i + s,\; s = \overline{1, i_0},$$

де i_0 – кількість стовпців матриці обмежень, що зазнали змін.

На основі установлених співвідношень можна побудувати алгоритм дослідження властивості СЛАР (4) з квадратною матрицею обмежень при змінах в елементах (проведенням направленого заміщення стовпців базисних матриць відповідно зміненими).

Алгоритм 2

Підготовчий крок. Нехай відомі u_0, A_σ^{-1}. Покладаємо $s=1$, де s – лічильник ітерацій, де A_σ^{-1} – обернена матриця СЛАР (3).

Крок 1. Надаємо $k=i+s$ та проводимо заміщення k-го стовпця матриці обмежень A_σ^{-1} A_k стовпцем $\overline{A}_k = A_k + A_k'$. Знаходимо вектор

$$\overline{L}_k = \left(\overline{L}_{k1}, \overline{L}_{k2}, \ldots, \overline{L}_{km}\right) = A_b^{-1} \times \overline{A}_k = A_b^{-1} \times \left(A_k + A_k'\right),$$

де

$$\overline{L}_{kk} = 1 + L_{kk}' = 1 + \left(A_b^{-1}\right)_k \times A_k',$$

$$\overline{L}_{ki} = L_{ki}' = \left(A_b^{-1}\right)_i \times A_k',$$

A_σ^{-1}, $i=\overline{1,m}$, $\left(A_b^{-1}\right)_k$ – k-й рядок матриці.

Крок 2. При виконанні умови $\overline{L}_{kk} \neq 0$ виконується умова невиродженості матриці обмежень. Формуємо новий розв'язок:

$$\overline{u}_{0k} = \frac{u_{0k}}{1 + \left(A_b^{-1}\right)_k \times A_k'} = \frac{u_{0k}}{\overline{L}_{kk}}, \ i = k,$$

$$\overline{u}_{0i} = u_{0i} - \frac{u_{0k}}{1 + \left(A_b^{-1}\right)_k \times A_k'} \times \left[\left(A_b^{-1}\right)_i \times A_k'\right] = u_{0i} - \frac{u_{0k}}{\overline{L}_{kk}} \times \overline{L}_{ki}, \ i \neq k.$$

Крок 3. Знаходження елементів оберненої матриці A_σ^{-1} – в результаті заміни стовпця системи A_k стовпцем $\overline{A}_k$:

$$\overline{e}_k = \frac{e_k}{\overline{L}_{kk}}, \ \overline{e}_i = e_i - \frac{e_k}{\overline{L}_{kk}} \times \overline{L}_{ki}, \ i = \overline{1,m}, \ A_\sigma^{-1},$$

де стовпець k, e_k – оберненої матриці має вигляд $e_k = \left(e_{1k}, e_{2k}, \ldots, e_{mk}\right)^{\mathrm{T}}$, $k \in I$, згідно [22].

Крок 4. Надаємо $u_0^{(i+s)} = \overline{u}_0$, $A_\sigma^{(i+s)-1} = \overline{A}_\sigma^{-1}$, k, $A_\sigma^{-1} = A_\sigma^{(i+s)-1}$.

Крок 5. Покладаємо $s=s+1$. При $s \neq i_0$ покладаємо $s=s+1$ та переходимо на Крок 1, в протилежному випадку на наступний крок.

Завершальний крок. Проведення порівняльної характеристики властивостей збуреної та основної СЛАР.

Згідно алгоритму, за i_0 – ітерацій, знаходиться розв'язок зміненої задачі (без перерозв’язання спочатку).

Г. Зміни в блоках матриці обмежень СЛАР

Відомо, що математичні моделі дослідження процесів різної природи, зокрема, еколого-економічних, що подаються моделлю Леонтєва-Форда містять структурні особливості у вигляді блочно-клітинної матриці обмежень. Звичайно, що зміни в одних блоках матриці обмежень впливають на результуючі властивості моделі.

Введемо в розгляд блочну матрицю A та A^{-1} (з відомими властивостями) вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ . & . & \dots & . \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1q} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2q} \\ . & . & \dots & . \\ E_{p1} & E_{p2} & \dots & E_{pq} \end{pmatrix},$$

які містять $p \times q$ “підматриць” матриці A та відповідну їй обернену.

Якщо $I = \{1, 2, \dots, m\}$ – номера стовпців матриці A, то будемо вважати

$$I = \left\{ \underbrace{1, 2, \dots, q_1}_{I_1}, \underbrace{q_1 + 1, 2, \dots, q_2}_{I_2}, \underbrace{q_2 + 1, 2, \dots, q_3}_{I_3}, \dots, \underbrace{q_{q-1} + 1, 2, \dots, q_q}_{I_q} \right\},$$

тобто $I_1, I_2, \dots, I_q$ – підмножини розбиття множини номерів індексів I, $Q = \{1, 2, \dots, q\}$ – номера блоків розбиття.

Якщо $J = \{1, 2, \dots, n\}$ – номера рядків матриці A, то тоді, аналогічно вище, можна подати наступне розбиття для рядків так:

$$J = \left\{ \underbrace{1, 2, \dots, p_1}_{J_1}, \underbrace{p_1 + 1, 2, \dots, p_2}_{J_2}, \underbrace{p_2 + 1, 2, \dots, p_3}_{J_3}, \dots, \underbrace{p_{q-1} + 1, 2, \dots, p_q}_{J_p} \right\},$$

$J_1, J_2, \ldots, J_q$ – підмножини розбиття J, $P = \{1, 2, \ldots, p\}$ – номера блоків розбиття.

Для прикладу , проведемо дослідження зв’язків елементів методу, зокрема, обернених матриць та розв’язків при збуренні в блоці A_{ij}, де $i \in P$, $j \in Q$, $A_{ij} \subset A$.

Згідно введених перепозначень можемо записати, що

$$u = \left(u_1, u_2, \ldots, u_m\right) = \left(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(q)}\right),$$

$$u^{(1)} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_{q1}\right), \; I_1 = \left\{1, 2, \ldots, q_1\right\},$$

$$u^{(2)} = \left(u_{q_1+1}, u_{q_1+2}, \ldots, u_{q2}\right),$$

$$I_2 = \left\{q_1 + 1, q_1 + 2, \ldots, q_2\right\},$$

$$u^{(j)} = \left(u^{(j)}_{q_{j-1}+1}, u^{(j)}_2, \ldots, u^{(j)}_{qj}\right),$$

$$I_j = \left\{q_{j-1} + 1, q_{g-1} + 2, \ldots, q_j\right\},$$

$j \in Q$ – підвектори вектору змінних $u = \left(u_1, u_2, \ldots, u_m\right)$.

Відповідно,

$$u_0 = \left(u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0m}\right) = \left(u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \ldots, u_0^{(q)}\right),$$

де $u_0^{(j)} \subset u_0$, $j \in Q$ – підвектор вектору змінних u_0,

$$a_r = \left(a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rm}\right) = \left(a_r^{(1)}, a_r^{(2)}, \ldots, a_r^{(q)}\right),$$

$$r \in J, \; r \in J_i, \; i \in P,$$

де

$$u^{(j)} = \left(u^{(j)}_{q_{j-1}+1}, u^{(j)}_2, \ldots, u^{(j)}_{qj}\right) \subset u,$$

$j \in Q$ – підвектор вектору змінних $u = \left(u_1, u_2, \ldots, u_m\right)$.

Тоді:

$$a_r u - c_r = a_{r1}u_1 + a_{r2}u_2 + \ldots + a_{rm}u_m - c_r =$$
$$= a_r^{(1)}u^{(1)} + a_r^{(2)}u^{(2)} + \ldots + a_r^{(q)}u^{(q)} - c_r,$$

$$r \in J_i,\ r \in J,\ i \in P,$$

Для нев'язки обмеження можемо записати:

$$\Delta_r = a_{r1}u_{01} + a_{r2}u_{02} + \ldots + a_{rm}u_{0m} - c_r =$$
$$= a_r^{(1)}u_0^{(1)} + a_r^{(2)}u_0^{(2)} + \ldots + a_r^{(q)}u_0^{(q)} - c_r,$$

$$r \in J_i,\ r \in J,\ i \in P,$$

а при збуренні:

$$\overline{\Delta}_r = \overline{a}_r u_0 - c_r = \left(a_r + a'_r\right)u_0 - c_r =$$
$$= a_r u_0 - c_r + a'_r u_0 = a'^{(j)}_r u_0^{(j)},$$

$$r \in J_i,\ r \in J,\ i \in P.$$

Для стовпця k, e_k – оберненої матриці вигляду:

$$e_k = \left(\underbrace{e_{1k}, e_{2k}, \ldots, e_{q_1 k}}_{I_1}, \underbrace{e_{q_1+1k}, e_{q_1+2k}, \ldots, e_{q_2 k}}_{I_2}, \ldots, \underbrace{e_{q_q+1k}, e_{q_q+2k}, \ldots, e_{q_{q-1}+q_q k}}_{I_q}\right)^{\mathrm{T}} = \qquad k \in I,$$
$$= \left(e_k^{(1)}, e_k^{(2)}, \ldots, e_k^{(q)}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\alpha_{rk} = a_r e_k = a_r^{(1)}e_k^{(1)} + a_r^{(2)}e_k^{(2)} + \ldots + a_r^{(q)}e_k^{(q)},$$

$$r \in J_i,\ r \in J,\ i \in P.$$

Наслідок 3. При збуренні в елементах блоку A_{ij}, де $i \in P$, $j \in Q$, $A_{ij} \subset A$ елементи методу при обчисленні зазнають спрощень, зокрема

$$\overline{\alpha}_{rk} = \left(a_r + a'_r\right)e_k = a_r e_k + a'_r e_k = \alpha_{rk} + a'^{(j)}_r e_k^{(j)},$$

$$r \in J,\ r \in J_i,\ i \in P,\ j \in Q,\ k \in I;$$

$$\overline{\Delta}_r = \overline{a}_r u_0 - c_r = a_r^{(j)} u_0^{(j)} - c_r,$$

$$r \in J,\ r \in J_i,\ \ j \in Q.$$

Наслідок 4. При збуренні в елементах декількох блоків рядка $r,\ r \in J,\ A_{ij}$, де $i \in P,\ \ j \in Q,\ \ A_{ij} \subset A$ елементи методу при обчисленні зазнають спрощень, зокрема

$$\overline{\alpha}_{rk} = \left(a_r + a'_r\right) e_k = a_r e_k + a'_r e_k = \alpha_{rk} + \sum_{j \in Q_0} a_r'^{(j)} e_k^{(j)},$$

$$r \in J,\ r \in J_i,\ i \in P,\ k \in I;$$

$$\overline{\Delta}_r = \overline{a}_r u_0 - c_r = 0 + \sum_{j \in Q_0} a_r'^{(j)} u_0^{(j)},$$

$$r \in J,\ r \in J_i.$$

Наслідок 5. Результуючий вплив збурень в блоці A_{ij}, де $i \in P,\ \ j \in Q$, $A_{ij} \subset A$ визначається після проведення ітерацій МБМ за кількістю рядків $r \in J_i$.

Елементи методу при обчисленні зазнають спрощень (невязок, відносних оцінок та розкладів рядків за рядками базисної матриці згідно алгоритму 1.

Неважко переконатись, що наведена формалізація подання матриці обмежень (як блочної структури) наглядно вказує порядок застосування алгоритмів 1 чи 2 (їх поєднання).

Д. “Розширення” та “звуження” матриці обмежень СЛАР

Відомо, що математичні моделі дослідження процесів різної природи, зокрема, еколого-економічних, постійно удосконалюються. І природно передбачить, що подання моделі Леонтєва-Форда можуть містити структурні “вдосконалення” у вигляді включень нових блоків підматриць. Тобто початкова матриця може стати частиною “більшої” матриці обмежень (“окаямлення”). Звичайно, що такі зміни в одних блоках матриці обмежень також впливають на результуючі властивості моделі.

Введемо в розгляд допоміжні блочно-клітинні матриці структурно близькі до A та A^{-1}:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11} & \dots & A_{1q} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} & 0 \\ . & . & \dots & . & 0 \\ A_{p1} & A_{p1} & \dots & A_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_{p+1q+1} \end{pmatrix},$$

$$E_0 = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{11} & \dots & E_{1q} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2q} & 0 \\ . & . & \dots & . & 0 \\ E_{p1} & E_{p1} & \dots & E_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_{p+1q+1} \end{pmatrix},$$

де I_{p+1q+1} – одинично-діагональна матриця, A_0 та E_0 містять відповідно, A та A^{-1} (введені раніше, як клітинні).

За відомою клітинною квадратною матрицею A та A^{-1} можна встановити властивості окаямленої $\overline{A}$, $A \subset \overline{A}$ вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ . & . & \dots & . \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix},$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ . & . & \dots & . \\ A_{p+11} & A_{p+12} & \dots & A_{p+1q+1} \end{pmatrix},$$

які містять відповідно $p \times q$, $(p+1)\times(q+1)$ “підматриць”, тобто добавлено “стовпець” блоків-підматриць та “рядок” блоків-підматриць та відповідної СЛАР.

Неважко переконатись, що:

– матриці A_0 та E_0 є прямою та оберненою матрицями;

– якщо матриця A_0, утворена лише діагональними клітинними матрицями $A_{11}, A_{22}, ..., A_{pp}$, $p = q$, то обернені до них будуть утворювать діагональні клітинні матриці $E_{11}, E_{22}, ..., E_{pp}$, $p = q$ оберненої матриці E_0;

– встановлення властивостей $\overline{A}$ (“розширеної” матриці) в припущенні відомих A та A^{-1} грунтується на послідовному застосуванні алгоритмів 2 (за стовпцями) та 1 (за рядками) відповідно;

– формуємо допоміжні матриці A_0 та E_0;

– послідовним заміщенням (“включенням”) “стовпців” блоків підматриць та “рядків” блоків (“розширення”) здійснюється ітераційний перехід від A_0 з оберненою E_0 до $\overline{A}$, $\overline{A}^{-1}$;

– перераховуються елементи методу, зокрема, зміни у розв'язку та оберненій матриці;

– навпаки ("звуження" матриці), тобто встановлення властивостей A та A^{-1} за відомими $\overline{A}, \overline{A}^{-1}$ грунтується на "оберненому" послідовному застосуванні алгоритмів 2 (за стовпцями) та 1 (за рядками), відповідно. Перехід до допоміжних A_0 та оберненої E_0, що включають A та A^{-1} здійснюється послідовним заміщенням ("виключенням") стовпців та рядків з переходом до структури A_0 та E_0. На наступному етапі з них "виокремлюються" A та A^{-1}.

В ході ітерацій відслідковуємо зміни у розв'язку та оберненій матриці.

Е. Включення обмежень на компоненти векторів моделі

"Накладання" двосторонніх обмежень на змінні (гіперпараллелепіпед змінних) зумовлює застосування схеми МБМ [17] на випадок включення додаткових обмежень в модель, тобто аналізу сумісної розв'язності СЛАР та СЛАН (системи лінійних алгебраїчних нерівеностей).

7. Обговорення особливостей аналізу матричних структур алгоритмами методу базисних матриць

Загалом, бачиться доцільним застосування ідеології сімплекс-методу при аналізі впливу змін в лінійній моделі. Оскільки в цьому методі, уже частково, закладена можливість врахування групових змін при проведенні вводу-виводу (рядка чи стовпця) в базис на ітераціях – в залежності від методу реалізації [16–18].

Слід зазначити, що в методі базисних матриць також закладена можливість враховувати вплив змін і рядка, і стовпця у варіантах алгоритму [21, 22], яка природно поширюється і на групу рядків та стовпців.

Врахування впливу змін (уточнень) на властивості нової моделі (звичайно, без процедури перерозв'язання задачі заново (спочатку)) є важливою складовою методу чи алгоритму. Внутрішня структура МБМ органічно вписується в проведення аналізу впливу змін – як наступні ітерації методу. В методі послідовно від ітерації до ітерації "ідемо" від простої "відомої" моделі до заданої, а потім і до зміненої. Наприкдад, у методі Гауса "ідемо" від заданої моделі до моделі простої структури. А далі – нова задача. Тобто особливості методу проявляють себе на різних задачах по різному.

Блочність (клітинність) структури матриці обмежень моделі та закладений в них зміст обумовив розвиток алгоритмів врахування і групових змін не лише у рядках та стовпцях, а також і у окремих підвекторах чи групі елементів – складових рядка чи стовпця.

Універсальність МБМ, як "розв'язувача" СЛАР, СЛАН – надає додаткові можливості для удосконалення моделі включенням обмежень на змінні тощо. В МБМ закладено і узагальнення – для проведення аналізу ЗЛП (задач лнійного програмування) та СНЗП (слобконелінійних за параметрами систем), тобто нелінійних моделей.

Природно, що відомі моделі вдосконалюються та ускладнюються. Наприклад, від економічної моделі Леонтьєва до еколого-економічної моделі Леонтьєва-Форда, також відомі [13] і удосконалення останньої. В методі базисних матриць закладена побудова нових алгоритмів аналізу (врахування, наприклад, “розширення” моделі) при удосконаленні, включенні нових складових аналізу тощо.

Збільшення розмірності матриці обмежень моделі обумовлює потребу проведення аналізу впливу таких змін. Зокрема, перевірка умови невиродженості матриці обмежень. В МБМ закладено і контроль невиродженості матриці обмежень, а також і можливість відновлення невиродженості направленими змінами в матриці обмежень.

Бажано, при моделюванні “опиратись” на досягнутому на попередньому етапі чи моделі. В методі базисних матриць наявна властивість “спадкоємності” аналізу впливу змін при переході від моделі “меншої” до “більшої” та навпаки.

8. Висновки

1. Запропоновано на основі балансової схеми “витрати-випуск” враховувати витрати на виконання обмежень за Паризькою угодою. Окреслено типові узагальнення (“розширення”) моделі, які, загалом, збільшують її розмірність, але не випадають з класу лінійних. Варіанти змін та удосконалень моделі можуть бути досліджені на основі алгоримів 1 та 2. Відповідно, може бути проведено і спрощення (“звуження”) моделі.

2. В роботі обгрунтовано базові алгоритми врахування впливу різних “сценаріїв” типових змін (удосконалень) в матриці обмежень еколого-економічної моделі (елемент, рядок, стовпець, група рядків чи стовпців, блок елементів підматриці обмежень). Ці алгоритми поширено на аналіз “розширень” та “звужень” матриці обмежень. За своєю сутністю вони є ітеративними процедурами уточнення відомого розв’язку незбуреної системи проведенням деякої кількості однотипних ітерацій МБМ.

3. Подальші дослідження доцільно проводити в напрямку включення додаткових економічних та екологічних обмежень та нових факторів, обмежень на компоненти векторів, класичних вихідних припущень щодо технологічної структури.

4. Запропонована технологія МБМ аналізу впливу змін в елементах матриці обмежень може бути удосконалена для моделювання процесів, що передбачають включення (виключення) нових блоків матриць, розширення (чи звуження) розмірності початкової матриці обмежень математичної моделі.

Наразі постає питання проведення направлених змін в моделі (з досягненням заданих обмежень на властивості розв’язків).

Література

1. Рамочная конвенция Организации Объединенных Наций об изменении климата. URL: https://www.un.org/ru/documents/decl_conv/conventions/climate_framework_conv.shtml

2. Киотский протокол к Конвенции об изменении климата. Бонн, 2000. 33 с.

3. Sustainable Innovation Forum. URL: http://www.cop21paris.org

4. Wirth D. The Paris Agreement as a New Component of the UN Climate Regime // International Organisations Research Journal. 2017. Vol. 12, Issue 4. P. 185–214. doi: https://doi.org/10.17323/1996-7845-2017-04-185

5. Stavins R. Linkage of Regional, National, and Sub-National Policies in a Future International Climate Agreement // Towards a Workable and Effective Climate Regime. 2015. P. 283–296.

6. Кокорин А. Новые факторы и этапы глобальной и российской климатической политики // Экономическая политика. 2016. Т. 11, № 1. С. 157–176. doi: https://doi.org/10.18288/1994-5124-2016-1-10

7. State and trends of carbon pricing. URL: http://www.climateaction.org /images/uploads/documents/9781464810015.pdf

8. Greenhouse gas mitigation scenarios for major emitting countries / Kuramochi T. et. al. // NewClimate. 2017.

9. Green F., Stern N. China's changing economy: implications for its carbon dioxide emissions // Climate Policy. 2017. Vol. 17, Issue 4. P. 423–442. doi: https://doi.org/10.1080/14693062.2016.1156515

10. National post-2020 greenhouse gas targets and diversity-aware leadership / Meinshausen M., Jeffery L., Guetschow J., Robiou du Pont Y., Rogelj J., Schaeffer M. et. al. // Nature Climate Change. 2015. Vol. 5, Issue 12. P. 1098–1106. doi: https://doi.org/10.1038/nclimate2826

11. Research on Output Growth Rates and Carbon Dioxide Emissions of the Industrial Sectors of EU-ETS: Final Report. Oxford Economic Forecasting. Oxford, 2006. 67 p.

12. Волошин А. Ф., Горицына И. А. Механизмы распределения квот на выбросы по Киотскому протоколу. URL: http://foibg.com/ibs_isc/ibs-10/ibs-10-p23.pdf

13. Онищенко А. М., Онищенко А. М. Методологія математичного моделювання економіко-екологічної взаємодії в умовах реалізації Кіотського протоколу // Економічна кібернетика. 2011. № 4-6 (70-72). С. 17–26.

14. Climate Technology Strategies 2: The Macro-Economic Cost and Benefit of Reducing Greenhouse Gas Emissions in the European Union / Capros P., Georgakopoulos P., Van Regemorter D., Proost S., Schmidt T. F. N., Koschel H. et. al. Vol. 4. New York: Physica-Verlag Heidelberg, 1999. 224 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-58690-3

15. Böhringer C., Rutherford T. F. The Costs of Compliance: A CGE Assessment of Canada’s Policy Options under the Kyoto Protocol // World Economy. 2010. Vol. 33, Issue 2. P. 177–211. doi: https://doi.org/10.1111/j.1467-9701.2009.01229.x

16. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. М.: Мир, 1991. 360 с.

17. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. М.: Советское радио, 1964. 491 с.

18. Анализ свойств линейной системы методом псевдобазисных матриц / Кудин В. И., Ляшко С. И., Хритоненко Н. В., Яценко Ю. П. // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 4. С. 119–127.

19. Богаенко В. А., Скопецкий В. В., Кудин В. И. Об особенностей организации вычисления на основе метода базисных матриц // Кибернетика и системный анализ. 2012. № 4. С. 146–154.

20. Богаенко В. А., Скопецкий В. В., Кудин В. И. Анализ вычислительных схем моделирования процессов геогидродинамики // Проблемы управления и информатики. 2009. № 4. С. 62–72.

21. Formation of priorities of national mezoekonomical politics under the conditions of implementation on of the Paris agreements / Voloshin O., Kudin V., Onyshchenko A., Khrushch L. // International journal “Information Models and Analyses”. 2017. Vol. 6, Issue 1. P. 68–83.

22. Economic analysis of influence of implementation of international environmental / Voloshin O., Kudin V., Onyshchenko A., Tverdokhlib Y. // International Journal “Information Theories and Applications”. 2018. Vol. 25, Issue 2. P. 17–32.