

УДК 629.341

DOI: 10.15587/1729-4061.2019.170212

**Аналітичні дослідження мультифрактально-інваріантних ознак автотранспортних потоків****О. В. Скидан, Б. А. Шелудченко, С. М. Кухарець, О. В. Медведський, Я. Д. Ярош**

Автотранспортний комплекс формується множиною автотранспортних потоків та автодорожньою мережею. Перехід на новий рівень функціонування автотранспортного комплексу вимагає розробки нових методів формалізації колективної взаємодії всіх учасників дорожнього руху. Це пов'язано зі збільшенням частки автономних автотранспортних засобів у сумісному трафіку. Встановлено, що транспортно-технологічна самоорганізація автотранспортних потоків є мультифрактальною структурою. Така структура достатньо достовірно описується регулярними ієрархічними  $\alpha$ -множинами Кантора стосовно параметра динамічного габариту кожного окремого автотранспортного засобу. Доведено, що основними мультифрактальними ознаками автотранспортних потоків є їх параметр фрагментації та фрактальна розмірність. Наведені ознаки функціонально визначаються інтенсивністю, швидкістю, щільністю трафіка та інтервалом руху автотранспортних засобів. Відповідно, вирізнено три основні режими руху автотранспортних засобів. Відсутність взаємних перешкод між автотранспортними засобами, незначна швидкість та мала інтенсивність трафіку характеризує вільний рух. Цей рух визначає межу колективного та синхронізованого потоків. Колективному руху притаманна вища щільність автотранспортного потоку, а швидкість обмежується можливостями автодороги. Якщо визначального значення набувають показники технічного та експлуатаційного стану автомобільної дороги отримуємо насичений (синхронізований) потік. Аналітичними дослідженнями встановлено логарифмічно-показникову функціональну залежність між параметром фрагментації автотранспортного потоку та фрактальною розмірністю. З'ясовано, що сукупність декількох автотранспортних потоків при багатосмуговій організації трафіків визначає динаміку зміни основних мультифрактальних ознак множини автотранспортних засобів. При цьому, збільшення кількості смуг руху автомобільної дороги призводить до зростання параметра фрагментації та зменшення фрактальної розмірності сукупності автотранспортних потоків. Розглянута можливість створення відповідних навігаційних алгоритмів варіативної оптимізації мультифрактальних ознак автотранспортних потоків. В такому випадку забезпечуються безпечні транспортно-технологічні режими функціонування автотранспортного комплексу. Це ж стосується й умови зростання частки автономних роботизованих безпілотних автотранспортних засобів в складі автотранспортних потоків

*Ключові слова: автотранспортний потік, безпілотний автотранспортний засіб,  $\alpha$ -множина Кантора, мультифрактальність, параметр фрагментації*

## **1. Вступ**

Прискорення стрімкого еволюційного розвитку автотранспортного комплексу наприкінці ХХ-початку ХХІ століття зумовлене багатьма факторами. Це пов'язано із переходом людства від індустріального суспільства до інформаційно-комунікаційної системи його організації. При цьому, одним з визначальних засобів комунікації є автотранспортний комплекс. Автотранспортний комплекс поєднує як множину автотранспортних засобів так і множину об'єктів інфраструктури автодорожньої мережі. З топографічної точки зору – це зона резервно-технологічних смуг автомобільних доріг в межах конкретної природно-техногенної геоекосистеми [1].

Тут свідомо використано визначення «еволюційний розвиток» щодо характеристики розвитку автотранспортного комплексу. При удосконаленні автотранспортних засобів та удосконаленні інфраструктури автодорожньої мережі, до цього часу, використовували принцип поступового покращення властивостей окремих її складових. Це проявлялось у підвищенні потужності двигуна, коригуванні хімічного складу пального, покращенні комфорту салону автомобіля, використанні більш сучасних матеріалів при будівництві покриттів автодоріг, тощо.

Однак жодного якісного «стрибка», переходу на принципово новий рівень функціонування автотранспортного комплексу не відбувалось. Дійсно, як за принципом роботи, так і за характером виконуваних функцій, сучасний автомобіль практично не відрізняється від автомобіля початку ХХ століття. Автомобільна дорога в більшості випадків лише стала ширшою і міцнішою порівняно з тим часом, коли нею рухався гужовий транспорт.

Лише зараз розвивається ідея створення повністю автономних роботизованих автотранспортних засобів. Ось чому має відбутись перехід на якісно новий рівень функціонування всього автотранспортного комплексу [2]. В перспективі неминучим є масове застосування безпілотних автотранспортних засобів. При цьому передбачається їх функціонування в потоках, які насичені, а можливо і повністю складені з множини автономних об'єктів [3]. Тому виникає необхідність розробки принципово відмінних від сучасних форм і методів організації їх колективної взаємодії в складі автотранспортних потоків.

Постає питання про розробку нових методів формалізації колективної взаємодії всіх без винятку учасників дорожнього руху. В першу чергу це стосується конкретного автономного транспортного засобу. Його варто розглядати у взаємодії як з аналогічними автономними об'єктами, так і з множиною різноманітних об'єктів інфраструктури автодорожньої мережі [4].

## **2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми**

Як зазначено в роботі [5], в загальному розумінні автотранспортним потоком є впорядкований автодорожньою мережею рух автотранспортних

засобів. Характерними ознаками автотранспортного потоку, які наведено в роботі [6], є його інтенсивність, швидкість та щільність, а також певні специфічні параметри, які представлено у роботі [7]. Як встановлено в роботі [8], специфічні параметри визначають особливі характеристики потоків автотранспортних засобів, їх взаємний вплив і перерозподіл в просторі і часі. Однак, наведені вище ознаки автотранспортного потоку є суто емпіричними і не дозволяють аналітично формалізувати параметри потоків для дослідження їх динамічних властивостей

В роботі [9] наведено спробу топологічної формалізації, автотранспортного потоку, як множини ( $C$ ) автотранспортних засобів, що складається з протилежно напрямлених підмножин ( $C_1$  і  $C_2$ ). Сумісний рух вздовж деякої ділянки автомобільної дороги характеризується такими фізичними ознаками як габарит ( $G$ ), динамічний габарит ( $DG$ ), інтервал руху ( $I$ ) транспортних засобів. При цьому, як зазначається в роботі [10], рух автотранспортного засобу в складі автотранспортних потоків значно відрізняється від руху відособленого транспортного засобу. Це зумовлює зміну навантажувально-швидкісних режимів роботи двигунів, показників витрат палива та викидів шкідливих речовин, що доведено в роботі [11]. А основними чинниками впливу автотранспортних потоків на навколишнє середовище, як визначено в роботі [7], є: склад і структура потоку, швидкість, навантажувальний режим, інтенсивність і щільність руху, технічний стан і експлуатаційні властивості окремих фізичних одиниць потоку, хімічний склад палива тощо.

В роботі [11] визначено, що окрім суто технічних чинників автотранспортного потоку, визначальним чинником є і характеристики автотранспортної мережі. До цих характеристик належить показник автотранспортної ємності території природно-техногенної геоекосистеми. Суттєвими, також, є ландшафтні особливості трасування, конструкційні параметри автомобільної дороги та пошкодження дорожнього покриття (технічний стан). Щодо експлуатаційних показників визначальним є відповідність рівня інтенсивності автотранспортного потоку і питомого навантаження на дорожні покриття. Важливим є наявність газо-пилізахисної інфраструктури в межах резервно-технологічної смуги. Окрім того, як зазначено в [8], необхідно врахувати локальну варіативність усталеного функціонального стану автотранспортного потоку на ділянках автомобільної дороги з особливими умовами руху. Це перехрестя та вузли автотранспортної мережі, спуски-підйоми, серпантини, тунелі, мостові переходи, екодуки тощо.

Однак, з точки зору формалізації наведеного вище означення, автотранспортним потоком можна вважати лише множину автотранспортних засобів [12]. Вказана множина за певним визначенням значущим аргументом (аргументами) є неперервною функцією за деякою траєкторією, яку окреслено трасою автомобільної дороги [13]. В загальному випадку неперервність функції  $f(x)$  визначається такими трьома умовами [8]:

- функція  $f(x)$  має бути обов'язково визначена в точці  $x_0$ ;
- існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ;

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо хоча б одна умова, з трьох вищенаведених, порушується в будь-якій точці, то функція  $f(x)$  має в даній точці розрив. При цьому, розрив функції  $f(x)$  може бути як усувним (завдяки операції до визначення функції до неперервної), так і неусувним розривом. Це так звана точка розриву (стрибок), яка виникає для  $f(x)$  у випадку якщо  $\lim_{x \rightarrow (a-0)} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (a+0)} f(x) f(x)$ , що і визначено у роботі [8].

Таким чином, виникає потреба формалізації інтенсивності впливу автотранспортних потоків на рівновагу природно-техногенної геоекосистеми. При цьому, нижньою границею, яка визначає колективний рух автотранспортних засобів як автотранспортного потоку, має бути деяка площа в координатній системі  $q \sim \rho \sim f(q, \rho)$ . Тому необхідно встановити мінімальні значення  $q$  та  $\rho$ , за яких функція  $f(q, \rho)$  набуває ознак неперервності.

### 3. Мета і завдання дослідження

Метою дослідження є синхронізація режимів руху потоків автомобільного транспорту та забезпечення когерентності роботизованих безпілотних автотранспортних комплексів шляхом оптимізації їх фрактально-інваріантних ознак.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

- встановити вплив автотранспортного комплексу на впорядкування трафіків за характерними ознаками руху автотранспортних засобів;
- визначити динаміку зміни мультифрактальних ознак автотранспортних потоків при багатосмуговій організації трафіку;
- обґрунтувати параметри навігаційних алгоритмів безпечних транспортно-технологічних режимів функціонування автотранспортного комплексу за умови присутності автономних роботизованих об'єктів.

### 4. Матеріали та методи дослідження автотранспортних потоків

Дослідження виконувались на підставі класичних методів фрактального числення та канторовського методу визначення фрактальних розмірностей. При цьому враховувалась ієрархічність структур канторовських  $\alpha$ -множин.

Розглянемо фрагмент автотранспортного потоку (рис. 1), як спрямовану сукупність (множину) автотранспортних засобів на автодорозі (за віссю  $x-x$ ). При цьому підмножини  $C_1$  і  $C_2$  рухаються в протилежних напрямках. Будемо вважати, що внесок підмножин  $C_1$  і  $C_2$  дорівнює кількості частки їх по довжині, які припадають на ділянку  $A_x-B_x$  автомобільної дороги. Якщо позначити цю кількість через  $R(t, \chi_{A-B})$ , то  $R(t, \chi_{A-B})$  є неперервною гладкою по  $t$ , а отже має кусочно-неперервні похідні першого і другого порядків [8].

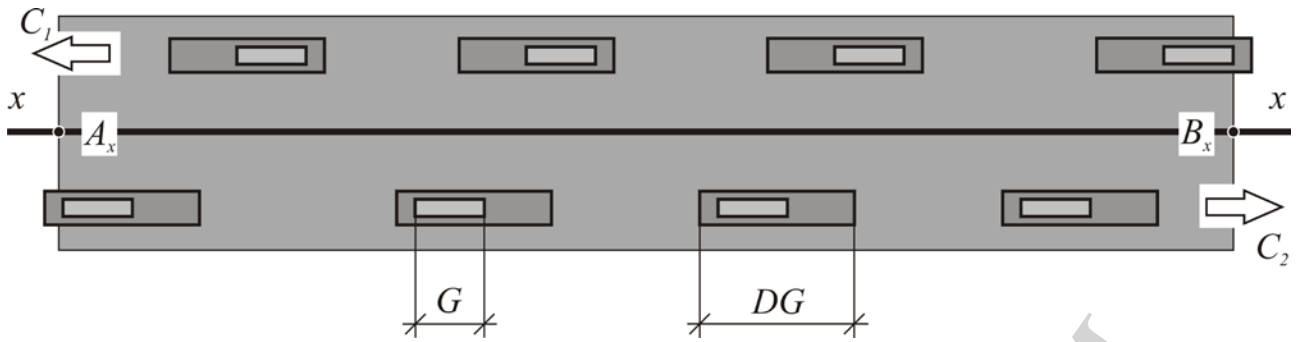


Рис. 1. Фрагмент автотранспортного потоку підмножини ( $C_1$  і  $C_2$ ) який рухаються вздовж  $x-x$

Якщо швидкість  $V$  автотранспортного потоку є відомою функцією його щільності  $\rho$ , отримуємо функцією стану автотранспортного потоку у вигляді [8]:

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, \chi) = \frac{\partial R}{\partial t}(t, \chi) \cdot f[\rho(t, \chi)], \quad (1)$$

де  $\chi$  – масштаб (крок) вимірювання ділянки  $A_x-B_x$  автомобільної дороги, який апріорі обирається меншим за довжину динамічного габариту ( $DG$ ) автотранспортного засобу [5];  $\rho(t, \chi)$  – щільність потоку автотранспортних засобів, яка визначається кількістю автотранспортних засобів на ділянці  $A_x-B_x$  автомобільної дороги протягом період часу  $t$  подолання  $A_x-B_x$  одиничним автотранспортним засобом;  $f[\rho(t, \chi)]$  – функція, яка визначає неперервність трафіку автотранспортних засобів і має задовольняти умовам щільності потоку автотранспортних засобів.

Відповідно (1) необхідно розрізнити три основних режими руху автотранспортних засобів [7]:

– вільний рух – характеризується малими інтенсивностями, відсутністю взаємних перешкод поміж окремими автотранспортними засобами і відповідною швидкістю  $V_c$ . Незначна щільність автотранспортних засобів зумовлює нещільну кореляцію поміж  $V_c$  та  $\rho$ ;

– колективний рух (колективний потік) – визначається зростанням щільності  $\rho$  автотранспортного потоку, колективна швидкість  $V_k$  автотранспортних засобів визначається проектною пропускною здатністю автодороги. Кореляційний зв'язок  $V_c$  та  $\rho$  є достатньо щільним;

– насичений (синхронізований) потік – характеризується суттєвим взаємовпливом окремих автотранспортних засобів, швидкість автотранспортного потоку  $V_n$  тісно корелює з інтенсивністю  $q$  та щільністю  $\rho$ . Характерною рисою синхронізованого автотранспортного потоку є суттєве варіювання значення середньої швидкості потоку. Визначального значення набуває технічний та експлуатаційний стани автомобільної дороги.

Категорії автомобільної дороги визначаються деяким бальним показником  $K$ , який набуває значень  $K=1a$ ;  $1б$ ;  $2$ ;  $3$ ;  $4$ ;  $5$  (ДБН України В.2.3-4:2007 «Споруди транспорту. Автомобільні дороги», «ААШТО. A Policy on the Geometric Design of Highways and Streets. – Washington D.C.: American Association of State Highway and Transportation Officials», «FHWA. Flexibility in Highway Design. – Washington, D.C.: Federal Highway Administration» тощо). Результати аналізу функції (1), з урахуванням її кусочно-лінійного характеру, представлено на рис. 2 [8].

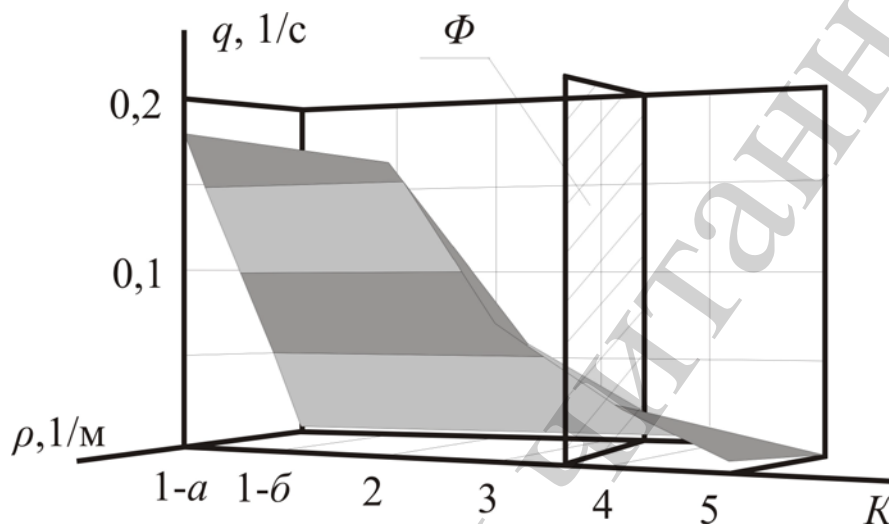


Рис. 2. Поверхня відгуку функціональних ознак стану автотранспортних потоків в координатах: категорія автодороги ( $K$ ); щільність автотранспортного потоку ( $\rho$ ); інтенсивність автотранспортного потоку ( $q$ )

Графічний аналіз висхідного лівостороннього тренду значень  $q$  та  $\rho$  (рис. 2) в напрямку зворотному зростанню координаті  $K$  чітко визначає координати характерної площини  $\Phi$ . Площини  $\Phi$  відокремлює режим вільного руху автотранспортних засобів від колективного та синхронізованого автотранспортних потоків. Координати цієї площини за значеннями  $q$  та  $\rho$  становлять [8]:

$$\begin{cases} q = 0,035, \\ \rho = 0,0021. \end{cases} \quad (2)$$

$$V = \frac{q}{\rho} = \frac{0,035}{0,002} = 17,5. \quad (3)$$

Таким чином встановлено [12] мінімальні значення  $V$ ,  $q$  та  $\rho$ , за яких характер руху автотранспортних засобів набуває ознак колективного руху з подальшою синхронізацією автотранспортного потоку (табл. 1).

Таблиця 1

Мінімальні значення щільності  $\rho$ , інтенсивності  $q$  та швидкості  $V$ , за яких автотранспортний потік набуває характерних ознак [8]

Параметр, який характеризує колективний рух автотранспортних засобів	Мінімальне значення параметру
Інтенсивність автотранспортного потоку, авт./добу	3024
Щільність автотранспортного потоку, авт./км	2,1
Швидкість автотранспортного потоку, км/год	63,0

За результатами розрахунків питомої інтенсивності  $q_i$  автотранспортного потоку встановлено [14] фрактальний характер структурної організації автотранспортних потоків з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича  $D=0,620$ . З деяким наближенням це відповідає фрактальній розмірності «класичної» порожньої недиференційованої множини Кантора з фрактальною розмірністю  $D_k=0,631$  (табл. 2 [14]).

Таблиця 2

Результати визначення значення фрактальної розмірності автошляхової мережі за показником категорії автодороги [8]

Категорія дороги	1-а	1-б	2	3	4	5
Розрахунковий коефіцієнт інтенсивності руху, $q_m$ , [1/м]	$\frac{7000}{30} = 500$	$\frac{7000}{20} = 350$	$\frac{2000}{8} = 250$	$\frac{1000}{7,5} = 133$	$\frac{500}{7} = 71$	$\frac{200}{4,5} = 44$
Розрахунковий безрозмірний комплекс, $D$		0,700	0,714	0,532	0,534	0,620
Усереднене значення безрозмірного комплексу, $\bar{D}$	0,620					
Фрактальна розмірність, $D_k$	0,631					
Модельний коефіцієнт інтенсивності руху, $q_m$ , [1/м]	504	318	200	126	79	50

Встановлення фрактальних ознак організації потоків автомобільного транспорту [14] дозволяє визначити основні принципи їх синхронізації з точки зору когерентності [8]. Це стосується і умови насичення цих потоків автономними роботизованими автотранспортними засобами. Разом з цим

необхідно зазначити про широкі межі варіювання показників інтенсивності  $q$ , щільності  $\rho$  та швидкості  $V$  автотранспортних потоків. Це зумовлює і значні межі варіювання їх фрактальних розмірностей  $D$ . У зв'язку із цим передбачають дослідження їх фрактально-інваріантних ознак для всього ієрархічного діапазону канторовських  $\alpha$ -множин.

### 5. Результати дослідження мільтифрактальних ознак автотранспортного потоку

Розглянемо порядок графо-аналітичної побудови графічної моделі ієрархічної канторовської  $\alpha$ -множини (рис. 3).

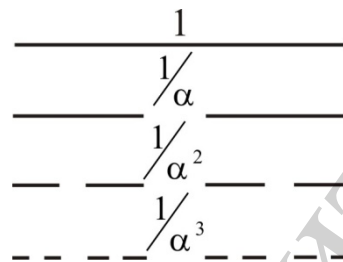


Рис. 3. Перших три кроки ієрархічної побудови канторовської  $\alpha$ -множини.

Для одиничного відрізка, щоб виміряти його довжину  $L_0=1$ , достатньо одиничний масштаб  $\chi_0=1$  прикласти один раз  $N_0=1$ . Отже, д

$$\begin{cases} L_0 = 1, \\ \chi_0 = 1, \\ N_0 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Залишимо з обох кінців відрізка дві частини довжиною  $1/\alpha$ , де за визначенням  $\alpha > 2$ , а залишок (посередині одиничного відрізка) видаляємо. В цьому випадку величину  $\alpha$  можна вважати параметром фрагментації. Обираємо

$$\begin{cases} L_1 = \frac{2}{\alpha}, \\ \chi_1 = \frac{1}{\alpha}, \\ N_1 = 2. \end{cases} \quad (5)$$

Для кожного з отриманих відрізків повторюємо вищезазначену процедуру, як це наведено на рис. 3.

Реальна графічна модель ієрархічної канторовської  $\alpha$ -множини утворюється після нескінченної кількості ітерацій. Тобто, ієрархічна побудова такої моделі передбачає, що  $N \gg 1$ . Відповідно [5, 8, 14] отримуємо:



$$D_1 = 1 + \frac{\log \frac{2}{\alpha}}{\log \alpha}, \quad (6)$$

або з урахуванням властивостей логарифму:

$$D_1 = \frac{\log 2}{\log \alpha}. \quad (7)$$

При цьому, якщо  $\alpha > 2$ , то  $D_1 < 1$ .

Тепер, задаючи параметр фрагментації  $\alpha$  автотранспортного потоку, завжди можна визначити його фрактальну розмірність.

Реальний характер транспортного функціонування певної ділянки автомобільної дороги визначається лінійним розміром  $R$ . Розмір  $R$  складається, як мінімум, з двох протилежно спрямованих автотранспортних потоків з довільними параметрами фрагментації  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ . В наслідок цього маємо різні фрактальні розмірності  $D_1$  та  $D_2$ . Тобто виникає, так звана, мультифрактальність [5] з новою фрактальною розмірністю  $D_x$ . Як було зазначено вище, масштаб вимірювання  $\chi$  зручно обирати у вигляді:

$$\chi = \frac{1}{R}. \quad (8)$$

Підставляючи вираз (8) в формулу Мандельброта-Річардсона [5, 14] у вигляді:

$$\eta \cdot L = C \cdot (\eta \cdot \chi)^{1-D}, \quad (9)$$

де  $\eta$  – масштабний множник [5], отримуємо:

$$\frac{1}{R} \cdot L = C \cdot \left( \eta \cdot \frac{1}{R} \right)^{1-D}. \quad (10)$$

Оскільки масштаб вимірювання визначений, то дужки в (10) можуть бути розкриті. Після відповідних скорочень отримуємо співвідношення, яке пов'язує розміри  $L$  фрактального об'єкту (в даному випадку автотранспортного потоку) і лінійний розмір  $R$  ділянки автомобільної дороги:

$$L \sim R^D. \quad (11)$$

Величина  $R$  для кожного випадку зберігає свій сенс – лінійний розмір ділянки автомобільної дороги де перебуває транспортний потік з фрактальною організацією його структури. Очевидно, що для кожного випадку, під

фрактальною розмірністю необхідно розуміти  $D_1, D_2, D_3$  і так далі.

Розглянемо два протилежно спрямованих фрактальних автотранспортних потоки з різними розмірностями, які зумовлено їх параметрами фрагментації  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ . При вимірюванні кожного фрактального об'єкту окремо, відповідно до (11) на ділянці  $R$ , маємо:

$$\begin{cases} L_1 = R^{D_1}, \\ L_2 = R^{D_2}. \end{cases} \quad (12)$$

Оскільки сумарну довжину фрактальних об'єктів (автотранспортних потоків) можна записати як:

$$L_\Sigma = L_1 + L_2, \quad (13)$$

то

$$R^{D_1} + R^{D_2} = R^{D_x}. \quad (14)$$

При цьому вважаємо, що невизначений масштабний множник  $N(1)$  для кожного доданку в (14) один і той самий.

Отже для випадку двох протилежно спрямованих автотранспортних потоків з довільними параметрами фрагментації  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  отримуємо:

$$R^{\frac{\log 2}{\log \alpha_1}} + R^{\frac{\log 2}{\log \alpha_2}} = (2 \cdot R)^{D_x}. \quad (15)$$

Логарифмуємо праву і ліву частини (15):

$$\log \left[ R^{\frac{\log 2}{\log \alpha_1}} + R^{\frac{\log 2}{\log \alpha_2}} \right] = D_x \cdot \log 2R. \quad (16)$$

Звідси:

$$D_x = \frac{\log \left[ R^{\frac{\log 2}{\log \alpha_1}} + R^{\frac{\log 2}{\log \alpha_2}} \right]}{\log 2R} \quad (17)$$

або

$$D_x = \frac{\log \left[ R^{\frac{\log 2}{\log \alpha_1}} + R^{\frac{\log 2}{\log \alpha_2}} \right]}{\log 2 + \log R}. \quad (18)$$

Більш складним випадком для визначення фрактальних ознак автотранспортних потоків є випадок з багатосмугової організації руху на автомобільних дорогах. Кількість  $m$  смуг руху в цьому випадку, як правило, може набувати значень 2, 3 (на окремих ділянках автомобільних доріг), 4, 6, 8.

Розглянемо випадок  $m$ -рядного трафіку. Будемо вважати, що параметр фрагментації  $\alpha_1$  однаковий для кожного з потоків автотранспортних засобів, які рухаються окремими смугами автомобільної дороги. Відповідно (14) можна визначити сумарну фрактальну розмірність  $D_x$  трафіку як:

$$(m \cdot R)^{\frac{\log 2}{\log \alpha_1}} = (m \cdot R)^{D_x}; \quad (m \neq 0). \quad (19)$$

Як і в попередньому випадку встановимо залежність:

$$D_x = \varphi(\alpha_1). \quad (20)$$

Розділимо (19) на  $m \cdot R^{D_x}$ , отримуємо:

$$\frac{m \cdot R^{\frac{\log 2}{\log \alpha_1}}}{m \cdot R^{D_x}} = \frac{m^{D_x} \cdot R^{D_x}}{m \cdot R^{D_x}}, \quad (21)$$

або

$$R^{\frac{\log 2}{\log \alpha_1} - D_x} = m^{D_x - 1}. \quad (22)$$

Виконаємо логарифмування (22):

$$\left[ \frac{\log 2}{\log \alpha_1} - D \right] \cdot \log R = (D_x - 1) \cdot \log m. \quad (23)$$

Розділимо (23) на  $(-1) \cdot \log R$ , при цьому:  $D_x \neq 1, R \neq 1$ :

$$\frac{\log 2 - D_x \cdot \log \alpha_1}{(D_x - 1) \cdot \log \alpha_1} = \frac{\log m}{\log R}. \quad (24)$$

Позначивши  $\frac{\log m}{\log R} = K$ , отримуємо:

$$\frac{\log 2 - D_x \cdot \log \alpha_1}{(D_x - 1) \cdot \log \alpha_1} = K. \quad (25)$$

Звідси, після відповідних перетворень, знаходимо  $D_x$ :

$$\log 2 - D_x \cdot \log \alpha_1 = K \cdot D_x \cdot \log \alpha_1 - K \cdot \log \alpha_1, \quad (26)$$

$$-\log \alpha_1 - K \cdot D_x \cdot \log \alpha_1 = -K \cdot \log \alpha_1 - \log 2, \quad (27)$$

$$D_x \cdot [\log \alpha_1 + K \cdot \log \alpha_1] = K \cdot \log \alpha_1 + \log 2, \quad (28)$$

$$D_x = \frac{K \cdot \log \alpha_1 + \log 2}{(K + 1) \cdot \log \alpha_1} = \frac{K \cdot \log \alpha_1}{(K + 1) \cdot \log \alpha_1} + \frac{\log 2}{(K + 1) \cdot \log \alpha_1}. \quad (29)$$

Остаточно отримуємо:

$$D_x = \frac{\log 2}{(K + 1) \cdot \log \alpha_1} + \frac{K}{K + 1}. \quad (30)$$

За результатами аналізу взаємовпливу фрактальної розмірності  $D$  та параметра фрагментації  $\alpha$  автотранспортного потоку (7) встановлено логарифмічно-показниковий характер їх функціональної залежності (рис. 4). При цьому, просте сумування декількох канторовських  $\alpha$ -множин призводить до зменшення «сумарної» мультифрактальної розмірності  $D_\Sigma$  сукупності обох трафіків (17). Це справедливо у випадках руху автотранспортних потоків по декількох смугах автомобільної дороги.

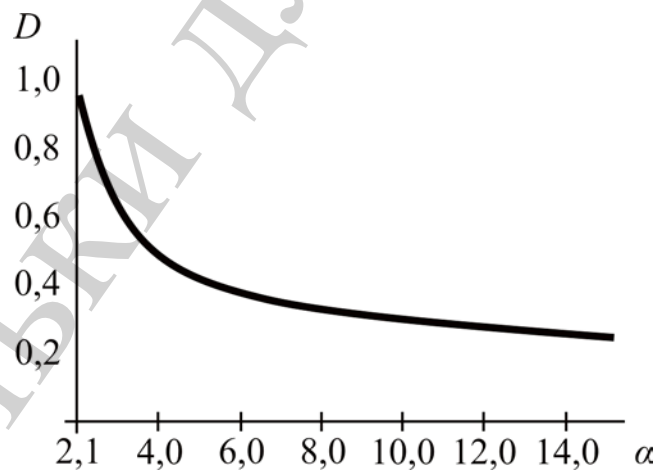


Рис. 4. Залежність фрактальної розмірності  $D$  від параметра фрагментації  $\alpha$  автотранспортного потоку

На рис. 5 подано найпростіший випадок «сумування» двох канторовських  $\alpha$ -множин для протилежно спрямованого трафіку.

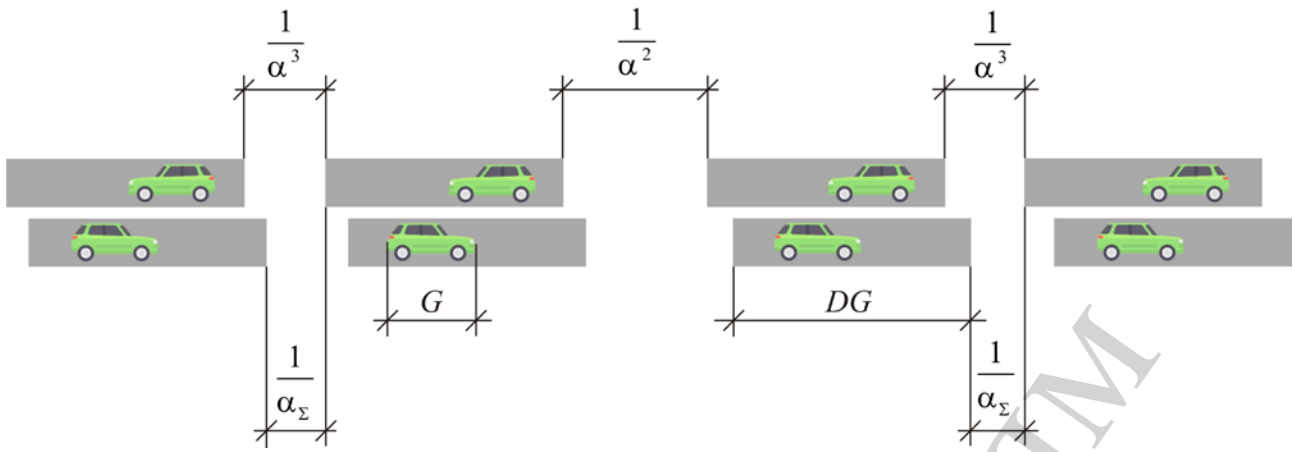


Рис. 5. Сукупність двох протилежно спрямованих автотранспортних потоків, яку визначено третім кроком ієрархічної побудови канторовської  $\alpha$ -множини

За умови наявності однакових параметрів фрагментації  $\alpha=3$  (рис. 5), відповідно до рівняння (14) отримуємо:

$$\left(\frac{1}{\chi}\right)^{n-D_1} + \left(\frac{1}{\chi}\right)^{n-D_1} = \left(2 \cdot \frac{1}{\chi}\right)^{D_\Sigma}, \quad (31)$$

$$\text{або } \alpha^{n-D_1} + \alpha^{n-D_1} = (2 \cdot \alpha)^{n-D_\Sigma},$$

$$\text{або } 2 \cdot (3^{n-0,631}) = 6^{n-D_\Sigma},$$

де  $D_\Sigma$  – мультифрактальна розмірність сукупності двох протилежно спрямованих автотранспортних потоків.

Числовий розв'язок (31) дозволяє встановити значення мультифрактальної розмірності  $D_\Sigma$  сукупності двох протилежно спрямованих трафіків. Мультифрактальна розмірність  $D_\Sigma$  завжди є меншою за фрактальну розмірність  $D_1$  кожного окремо розглянутого автотранспортного потоку. Окрім цього,  $D_\Sigma$  зменшується для кожного наступного кроку ієрархічної побудови канторовської  $\alpha$ -множини:

$$\begin{cases} D_{\Sigma_1} = 0,583, \\ D_{\Sigma_2} = 0,516, \\ D_{\Sigma_3} = 0,485, \\ D_{\Sigma_4} = 0,464, \\ \dots \end{cases} \quad (32)$$

Отже, «сумарний» параметр фрагментації  $\alpha_\Sigma$  для даного випадку становить  $\alpha_\Sigma > 3$ . При цьому «сумарний» параметр фрагментації  $\alpha_\Sigma$  збільшується при кожному наступному кроці ієрархічної побудови канторовської  $\alpha$ -множини:

$$\begin{cases} D_{\Sigma_1} = 3,281, \\ D_{\Sigma_2} = 3,831, \\ D_{\Sigma_3} = 4,179, \\ D_{\Sigma_4} = 4,557, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (33)$$

При моделюванні структури автотранспортних потоків за допомогою канторовських  $\alpha$ -множин, параметр фрагментації  $\alpha$  є функцією інтенсивності  $q$ , швидкості  $V$ , щільності  $\rho$  трафіка та інтервалу руху  $I$  автотранспортних засобів:

$$\alpha = \varphi(q, \rho, V, I). \quad (34)$$

Аналогічні результати можна отримати для випадку (30) багатосмугової ( $m$ -смуґ) організації руху на автомобільних дорогах (рис. 6).

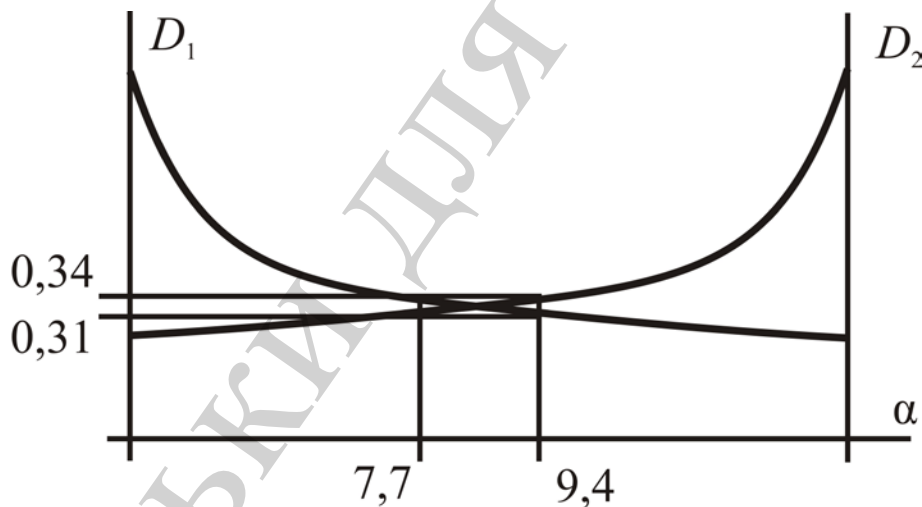


Рис. 6. Результати числового моделювання взаємовпливу двох трафіків на суміжних смугах автомобільної дороги, як ієрархічних канторовських  $\alpha$ -множин.

Стабілізація когерентності двох суміжних автотранспортних потоків враховує градієнти напрямку їх руху та умовний час прийняття оперативних навігаційних рішень. Це час «швидкодії» навігаційно-обчислювального комплексу і механізмів керування транспортним засобом. Вказане стосується випадку насиченості трафіку автономними роботизованими автотранспортними засобами. Тому мають бути дотримані наступні значення параметра фрагментації  $\alpha_\Sigma$  сукупності трафіків та їх мультифрактальної розмірності  $D_\Sigma$ :

$$\begin{cases} \alpha_{\Sigma} \gg 9,4, \\ D_{\Sigma} \ll 0,31. \end{cases} \quad (35)$$

Варіант візуалізації результатів моделювання для чотири-смугової ділянки автомобільної дороги з кількістю  $m=2$  трафіків в кожному з напрямків наведено на рис. 7.

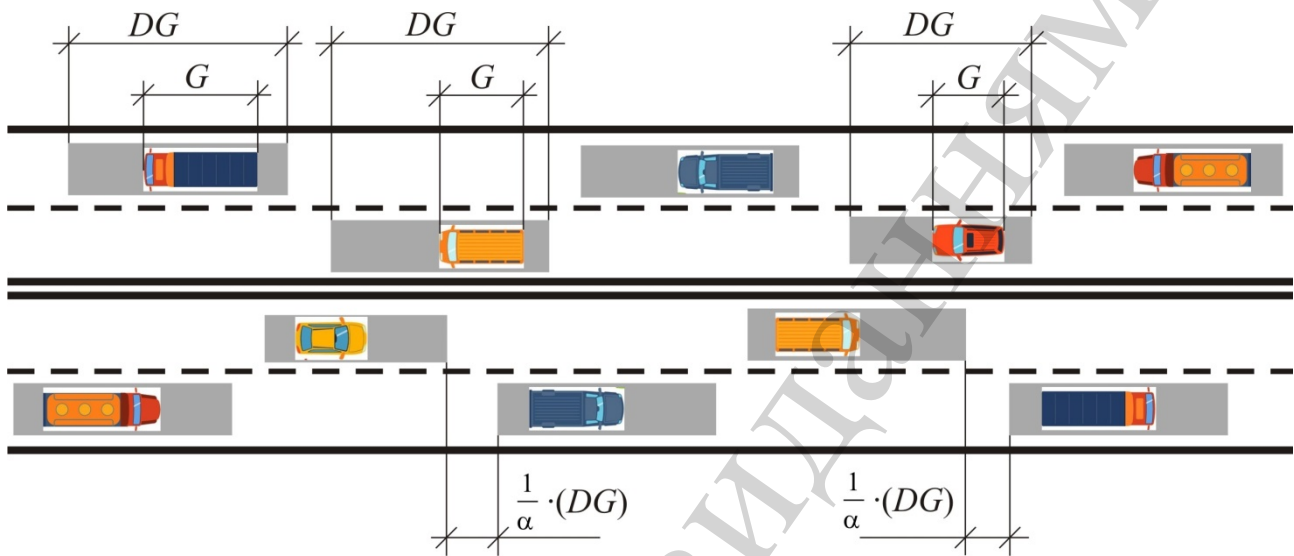


Рис. 7. Варіант моделі структурної організації автотранспортних потоків на чотири-смуговій ділянці автомобільної дороги

Отримані аналітичні залежності властивостей структурної мультифрактальної організації трафіків автотранспортних засобів. Ці залежності є ґрунтовною підставою для подальшої розробки конкретних алгоритмів щодо реалізації безпечних режимів функціонування автотранспортного комплексу. Це актуально в умовах зростання частки автономних роботизованих автотранспортних засобів в складі автотранспортних потоків.

## 6. Обговорення результатів дослідження параметрів безпечного трафіку автотранспортних засобів

Відповідно до сформульованих вище задач дослідження встановлено, що автотранспортний потік є множиною ( $S$ ) автотранспортних засобів, які формують певний спільний трафік. Динаміка трафіка функціонально визначається комплексом фізичних і топологічних ознак, а саме: швидкістю  $V$ , інтенсивністю  $q$  та щільністю  $\rho$  потоку автотранспортних засобів, їх габаритом ( $G$ ), динамічним габаритом ( $DG$ ) та інтервалом руху ( $I$ ). На підставі аналізу питомої інтенсивності  $q_i$  трафіку встановлено фрактальний характер структурної організації автотранспортних потоків з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича  $D=0,620$ , яка є сумірною з фрактальною розмірністю  $D_k=0,631$

«класичної» множини Кантора (табл. 2). Однак широкі межі варіювання показників інтенсивності, щільності та швидкості автотранспортних потоків зумовлюють значні межі варіювання фрактальних розмірностей, що призводить до необхідності дослідження фрактально-інваріантних ознак трафіку для всього ієрархічного діапазону канторовських  $\alpha$ -множин (див. рис.3) з  $\alpha > 2$ . Отже, формується динамічна мультифрактальність трафіку з варійованою фрактальною розмірністю  $D_x$ . Параметр фрагментації автотранспортного потоку  $\alpha$  та фрактальна розмірність  $D_x$  пов'язані логарифмічно-показниковою функціональною залежністю (6), (7).

Аналітичне моделювання динаміки трафіку із застосуванням параметру фрагментації  $\alpha$  дозволяє дослідити структуру трафіку не лише для конкретних трьох режимів (фаз) автотранспортного потоку – вільний рух, колективний рух, синхронізований потік, але і перехідні структури при переходах трафіку з однієї фази в іншу.

Мінімальні значення щільності  $\rho$ , інтенсивності  $q$  та швидкості  $V$  вільного руху трафіку визначають границю початку режимів колективного та синхронізованого потоків. При цьому, найвищий рівень взаємовпливу автотранспортних засобів за швидкістю  $V$ , інтенсивністю  $q$  та щільністю  $\rho$  притаманний насиченому (синхронізованому) потоку.

Аналіз графічних моделей структурної організації автотранспортних потоків (рис. 6, 7) визначає необхідність подальшого розвитку дослідження транспортно-експлуатаційних ознак структури трафіків не лише з урахуванням параметру фрагментації  $\alpha$  канторовського дисконтиніуму, але за такими ознаками, як кількість “заповнених” сегментів в цьому дисконтиніумі та “стадія” (крок) ієрархічної побудови фрактальної множини автотранспортних засобів.

Будь-яка автомобільна дорога складається, як мінімум, з двох протилежно спрямованих автотранспортних потоків. Кожний потік наділений довільними параметрами фрагментації  $\alpha$ , а тому має різні фрактальні розмірності  $D$ . У зв'язку із цим також формується мультифрактальність зі своєю фрактальною розмірністю  $D_x$ . Так, у випадку руху автотранспортних потоків по декількох смугах автомобільної дороги зменшується «сумарна» мультифрактальна розмірність  $D_x$  сукупності обох трафіків. Для кожного наступного кроку ієрархічної побудови канторовської  $\alpha$ -множини «сумарний» параметр фрагментації  $\alpha_\Sigma$  збільшується. Отримані результати дослідження мультифрактальної багатосмугової організації структури трафіків дозволяють формалізувати режими руху автотранспортних потоків з різними значеннями швидкості  $V$ , інтенсивності  $q$  та щільністю  $\rho$  автотранспортних засобів.

Дотримання раціональних параметрів фрагментації сукупності трафіків та їх мультифрактальних розмірностей забезпечує стабілізацію когерентності декількох суміжних автотранспортних потоків (в тому числі і різнонапрямлених). Отримані аналітичні залежності визначають властивості структурної мультифрактальної організації трафіків автотранспортних засобів. В прикладному аспекті результати досліджень можуть бути використані для розробки конкретних алгоритмів безпечних режимів функціонування



автотранспортного комплексу. Особливо це важливо при зростанні частки автономних роботизованих автотранспортних засобів у складі автотранспортних потоків.

## 7. Висновки

1. Встановлено, що мультифрактальна структура автотранспортних потоків достатньо достовірно описується регулярними ієрархічними  $\alpha$ -множинами Кантора стосовно параметра динамічного габариту кожного окремого автотранспортного засобу. Доведено, що до основних мультифрактальних ознак автотранспортних потоків належить параметр фрагментації та фрактальна розмірність, які функціонально визначаються інтенсивністю, швидкістю та щільністю трафіка автотранспортних засобів. Встановлена верхня границя режиму вільного руху транспортних засобів при інтенсивності  $0,035 \text{ с}^{-1}$ , щільності  $0,0021 \text{ м}^{-1}$  та швидкості потоку  $17,5 \text{ м/с}$ . Вищі значення показників характеризують колективний та синхронізований потік.

2. Доведено, що сукупність декількох автотранспортних потоків, в тому числі і протилежно спрямованих, при багатосмуговому трафіку впливає на динаміку варіювання основних мультифрактальних ознак множини автотранспортних засобів. Так, при збільшенні кількості смуг руху автомобільної дороги зростає параметр фрагментації трафіку, а фрактальна розмірність сукупності автотранспортних потоків зменшується. Обґрунтовано значення параметра фрагментації на рівні  $9,4$  та мультифрактальної розмірності –  $0,31$  як необхідну та достатню умову досягнення когерентності двох суміжних автотранспортних потоків.

3. Отримані аналітичні залежності та результати числового моделювання взаємовпливу сукупності декількох трафіків на суміжних смугах автомобільної дороги, як ієрархічних канторовських  $\alpha$ -множин, є підставою для розроблення принципів параметрів навігаційних алгоритмів, які забезпечували б безпечні транспортно-технологічні режими функціонування автотранспортного комплексу за умови насичення трафіків автономними роботизованими об'єктами.

## Література

1. Sheludchenko B. A. Vstup do konstruiuvannya pryrodno-tekhnohennykh heoekosystem (landshaftno-terytorialnyi aspekt). Kamianets-Podilskyi: Vyd-vo PDATU, 2014. 170 p.

2. Revealing heterogeneous spatiotemporal traffic flow patterns of urban road network via tensor decomposition-based clustering approach / Yang S., Wu J., Xu Y., Yang T. // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2019. Vol. 526. P. 120688. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.053>

3. Chen X., He Z., Wang J. Spatial-temporal traffic speed patterns discovery and incomplete data recovery via SVD-combined tensor decomposition // Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 2018. Vol. 86. P. 59–77. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2017.10.023>

4. Kawasaki Y., Hara Y., Kuwahara M. Traffic state estimation on a two-

dimensional network by a state-space model // Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 2019. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2019.03.016>

5. Balhanov V. K. Osnovy fraktal'noy geometrii i fraktal'nogo ischisleniya. Ulan-Ude, 2013. 224 p.

6. Babkov V. F. Landshaftnoe proektirovanie avtomobil'nyh dorog. Moscow: Transport, 1980. 189 p.

7. Lukanin V. N., Trofimenko Yu. V. Promyshlenno-transportnaya ekologiya. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. 273 p.

8. Sheludchenko L. S. Functional characters of the motor vehicle flow // Vehicle and Electronics. Innovative Technologies. 2018. Issue 13. P. 75–79. doi: <https://doi.org/10.30977/VEIT.2018.13.0.75>

9. Mohebifard R., Hajbabaie A. Optimal network-level traffic signal control: A benders decomposition-based solution algorithm // Transportation Research Part B: Methodological. 2019. Vol. 121. P. 252–274. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.01.012>

10. Li L., Li X. Parsimonious trajectory design of connected automated traffic // Transportation Research Part B: Methodological. 2019. Vol. 119. P. 1–21. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2018.11.006>

11. Zhang Y., Ioannou P. A. Stability analysis and variable speed limit control of a traffic flow model // Transportation Research Part B: Methodological. 2018. Vol. 118. P. 31–65. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2018.10.005>

12. Batista S. F. A., Leclercq L., Geroliminis N. Estimation of regional trip length distributions for the calibration of the aggregated network traffic models // Transportation Research Part B: Methodological. 2019. Vol. 122. P. 192–217. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.02.009>

13. Mariotte G., Leclercq L. Flow exchanges in multi-reservoir systems with spillbacks // Transportation Research Part B: Methodological. 2019. Vol. 122. P. 327–349. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.02.014>

14. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman and Company, 1983. 468 p.