

Моделювання резонансу хитної пружини на основі синтезу траєкторії руху її вантажу

Л. М. Куценко, В. В. Ванін, О. В. Шоман, П. М. Яблонський,
Л. Л. Запольський, Н. І. Грицина, С. Ю. Назаренко, В. Я. Даниленко,
Є. М. Сівак, С. М. Шевченко

Наведено спосіб побудови резонансних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Хитною пружиною (*swinging spring*) називають різновид математичного маятника, який складається з точкового вантажу, приєднаного до невагомої пружини. Другий кінець пружини фіксується нерухомо. Розглядаються маятниковоподібні коливання пружини у вертикальній площині за умови збереження прямолінійності її осі. Розрахунки виконано на базі розв'язків системи диференціальних рівнянь, з компонентами, у які входять значення частот вертикальних і горизонтальних переміщень точки на пружині.

Актуальність теми визначається необхідністю дослідження технологічних процесів динамічних систем, коли нелінійно зв'язані коливальні компоненти системи обмінюються енергією між собою. За допомогою феномена хитної пружини ілюструється обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями. При цьому також враховується вплив початкових умов ініціювання коливань. Особливе значення має дослідження стану резонансу хитної пружини - коли частота поздовжніх коливань відрізняється в кратну кількість разів від частоти поперечних коливань. Крім розповсюдженого "класичного" випадку (резонансу 2:1) є необхідність розв'язувати задачі з іншими значеннями відношення частот. В результаті було знайдено геометричні форми траєкторії руху вантажу хитної пружини, які відповідають особливостям стану її резонансу.

Одержані результати дозволяють за допомогою комп'ютера синтезувати траєкторію руху вантажу хитної пружини, яка відповідатиме заданому відношенню частот поздовжніх і поперечних коливань. Для цього, крім основних параметрів (маси вантажу, жорсткості пружини та її довжини в ненавантаженому стані), ще залучаються початкові значення параметрів ініціювання коливань. А саме, «стартові» координати положення вантажу, та початкові швидкості рухів вантажу в напрямку координатних осей. Розглянуто приклади побудови траєкторій руху вантажу для випадків резонансів типу 2:1, 7:3, 9:4 і 11:2. Одержані результати проілюстровано комп'ютерними анімаціями коливань відповідних хитних пружин для різних випадків резонансу.

Результати можна використати як парадигму для вивчення нелінійних зв'язаних систем, а також при розрахунках варіантів механічних пристроїв, де пружини впливають на коливання їх елементів. А також у випадках, коли у технологіях використання механічних пристроїв необхідно відмежуватися від хаотичних рухів вантажів і забезпечити періодичні траєкторії їх переміщень

Ключові слова: хитна пружина, резонанс хитної пружини, маятникові коливання, траєкторії руху вантажу

1. Вступ

Продовжені дослідження, розпочаті в роботах [1, 2]. Розглянуто підхід до розв'язання класу задач, коли в рамках певної динамічної системи її нелінійно зв'язані коливальні компоненти можуть обмінюватися енергією між собою. У роботах [3–6] наведено багато прикладів таких задач. При цьому досліджуються питання залежності дійства обміну енергією від параметрів керування системою. Проблема полягає в тому, щоб визначити загальну енергію системи й правильно оцінити енергетичні величини в часі, а також їх зв'язок для кожного з компонентів.

Для ілюстрації такого підходу використовують *двовимірний пружинний маятник* як механічну модель дослідження декількох нелінійно зв'язаних систем. Двовимірний пружинний маятник в ідеалізованому вигляді складається з «точкового» вантажу маси m , прикріпленого до кінця невагомої пружини жорсткістю k і довжиною h у ненавантаженому стані. Інший кінець пружини закріплений нерухомо. Утворена в такий спосіб коливальна система має рухатися тільки у вертикальній площині, при цьому *зберігаючи вісь пружини прямолінійною*. Точковий вантаж одночасно приймає участь у двох видах коливань: подібних пружині – коли переміщається вздовж прямолінійної осі пружини, і подібних маятнику – коли здійснює коливання сумісно з її віссю. Такий різновид коливальної системи в літературі одержав назву хитної пружини (swinging spring) [7].

За допомогою хитної пружини наочно ілюструється обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями. При цьому повинен враховуватися також вплив початкових умов ініціювання коливань. Особливе значення має дослідження умови виникнення стану резонансу хитної пружини. Тобто коли частота поздовжніх коливань відрізнятиметься в кратну кількість разів від частоти поперечних коливань. Крім розповсюдженого "класичного" випадку (резонансу 2:1) доцільно розв'язувати задачі з іншими значеннями відношення частот. Наприклад, виникає необхідність [8] побудувати траєкторії руху вантажу для випадків таких резонансів: 2:1, 7:3, 9:4, 11:2 та інших. Знайдені геометричні форми траєкторії руху вантажу хитної пружини з заданими параметрами допоможуть визначити характеристики розв'язку обраної задачі.

В роботах [3–6] наведена велика кількість можливих впроваджень на базі застосування ідеї коливань хитної пружини. Значна частка з цього переліку має безпосереднє відношення до порушення стійкості й керованості літаків або швидкохідних кораблів в процесі їх руху. При розрахунках переміщення динамічної системи у просторі (корабля або літака) необхідно враховувати обмін енергією між поперечними і шляховими (поздовжніми) коливаннями як компонентами системи. В більшості випадків частоти цих коливань приймають як співвідношення 2:1. Але для ретельніших досліджень доцільно розглядати інші відношення частот. Особливо це стосується досліджень динаміки коливань лі-

таків типу «голландський крок»» (Dutch roll) [9]. Такі коливання виникають у випадку великої поперечної стійкості літака в порівнянні з малою шляховою стійкістю. Тоді бічний рух літака характеризуватиметься взаємозалежними коливаннями за креном і ковзанням. Причому, коливання за ковзанням відстають по фазі від коливань за креном, що пов'язано зі слабкою шляховою й надмірною поперечною стійкістю. Крен літака є причиною виникнення ковзання літака, усунення якого відбувається із запізнюванням через слабку шляхову стійкість. Ковзання, яке при цьому виникає, провокує необхідність аварійного крену літака в протилежну сторону через підвищену поперечну стійкість, і процес повторюється. Для гасіння коливань на літаках застосовуються демпфери нишпорення, розрахунок яких доцільно виконувати із залученням поняття перекачування енергій хитної пружини у стані резонансу.

Зрозуміло, що стан *резонансу* хитної пружини має відбуватися при певній комбінації значень параметрів хитної пружини. У тривіальному випадку - коли період вертикальних коливань буде приблизно вдвічі меншим за період горизонтальних коливань:

$$2T_y = T_x,$$

де

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad T_y = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}},$$

де m – маса вантажу, k – жорсткість пружини, h – довжина пружини у ненавантаженому стані, g – прискорення земного тяжіння. Або – як двоїсте твердження – коли частота вертикальних коливань $\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}}$ буде приблизно вдвічі більшою за частоту горизонтальних коливань $\omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}}$: $2\omega_x = \omega_y$.

Але на стан резонансу хитної пружини ще мають впливати і початкові значення параметрів ініціювання коливань. В цьому можна переконатися, якщо стан резонансу інтерпретувати за допомогою траєкторії руху вантажу хитної пружини. Зазначимо – іноді і періодичної, знайденої серед можливих траєкторій руху [10]. Для її знаходження необхідно розробити універсальний спосіб синтезу множини траєкторій залежно від параметрів хитної пружини, а такою, що важливо, від параметрів ініціювання її коливань. І увагу слід зосередити на випадках, коли траєкторіями будуть періодичні криві.

Зважаючи на наведене, доцільними будуть дослідження, спрямовані на геометричне моделювання траєкторій руху вантажу хитної пружини, які відповідатимуть умовам заданого типу резонансу. Тобто умовам, коли частота вертикальних коливань "точкової" маси на хитній пружині буде в кратну кількість

раз більшою за частоту горизонтальних коливань і буде врахована максимальна кількість параметрів коливання хитної пружини.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

У статтях [1, 2] наведено огляди робіт, присвячених тематиці хитних пружин – у тому числі і з врахуванням стану їх резонансу. Тому тут наведемо роботи, які доповнюють поняття резонансу. Зазначимо, що рух вантажу хитної пружини помітно складніший порівняно з вантажем математичного маятника, тому ефект від використання хитної пружини у якості механічної інтерпретації буде очікувано більш глибоким. Наприклад, проведені лабораторні експерименти з хитною пружиною дають нове розуміння руху планетарних хвиль в атмосфері Землі [11, 12].

Розглянемо на вертикально розташованій площині з декартовими координатами Oxy коливальну систему типу "хитна пружина". Система складається з невагомої пружини, до якої з одного кінця прикріплено вантаж маси m , а інший кінець зафіксовано в точці O початку координат. Вважається, що під час маятниковоподібних коливань вісь пружини зберігає пряmolінійність. Жорсткість пружини позначимо як k , через h позначимо довжину пружини без вантажу, а через H – довжину пружини з вантажем у рівноважному (вертикальному) стані.

Рівняння руху хитної пружини матиме вигляд:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -T \sin v; \\ m\ddot{y}(t) &= -T \cos v - mg, \end{aligned} \quad (1)$$

де T – натяг пружини, v – кут відхилення пружини від вертикалі, g – прискорення земного тяжіння. Тоді змінна довжина пружини буде функцією часу з очевидною фізичною інтерпретацією:

$$u(t) = \sqrt{x(t)^2 + [H - y(t)]^2}. \quad (2)$$

Враховуючи, що

$$T = k[u(t) - h]; \quad k[H - h] = mg; \quad (3)$$

$$\sin v = \frac{x(t)}{u(t)}; \quad \cos v = \frac{H - y(t)}{u(t)},$$

одержимо рівняння руху хитної пружини у вигляді [13]

$$\ddot{x}(t) + \omega_x^2 x(t) = \lambda x(t) y(t), \quad (4)$$

$$\ddot{y}(t) + \omega_y^2 y(t) = \lambda x(t)^2 / 2,$$

де

$$\omega_x = \frac{g}{H}; \quad \omega_y = \frac{k}{m}; \quad \lambda = k \frac{h}{H^2}.$$

Частота ω_x визначає коливання математичного «лінійного маятника», а значення ω_y описує частоту, з якою "точкова" маса на пружині коливається вертикально. Якщо $\lambda=0$, то рівняння (4) можна розв'язати незалежно, але маятникові й пружинні рухи будуть зв'язані через нелінійні умови [13]. Вичерпне дослідження всіх можливих рухів хитної пружини наведено в роботі [14] у термінах параметра μ , визначеного як

$$0 \leq \mu^2 = \frac{\omega_x}{\omega_y} \leq 1. \quad (5)$$

Проміжні випадки для μ були вивчені з використанням перетинів Пуанкаре і біфуркаційних діаграм. В роботі [14] надано описи для всіх комбінацій можливих рухів хитної пружини.

Посилаючись на роботу [13] розглянемо випадок, коли "пружинний" рух хитної пружини домінує над її "маятникоподібним" рухом. Тобто, коли $x(t) \ll y(t)$. В цьому випадку

$$\ddot{x}(t) + \omega_x^2 x(t) = \lambda x(t) y(t); \quad (6)$$

$$\ddot{y}(t) + \omega_y^2 y(t) \approx 0,$$

звідки

$$\ddot{x}(t) + \omega_x^2 x(t) = \lambda x(t) y(t); \quad (7)$$

$$y(t) = y(0) \cos(\omega_y t).$$

Остаточо маємо

$$\ddot{x}(t) + \left[\omega_x^2 - \lambda y(0) \cos(\omega_y t) \right] x(t) = 0. \quad (8)$$

Рівняння (40) відоме як рівняння Матьє [15], і його розв'язки нестійкі у випадках, коли

$$\frac{\omega_Y}{\omega_X} = \frac{2}{n}, n=1, 2, 3... \quad (9)$$

Співвідношення (9) надає послідовність можливих умов виникнення резонансу хитної пружини і пояснює необхідність аналізувати відношення частот коливання "пружинних" ω_Y і "маятникових" ω_X для визначення резонансного стану хитної пружини.

В роботі [13] наведено варіант визначення резонансного стану хитної пружини за допомогою співвідношення між параметрами h і H :

$$\frac{H}{H-h} = \frac{4}{n^2} \text{ або } H = \frac{H}{H-n^2} h. \quad (10)$$

У тривіальних випадках нестійкість руху хитної пружини можна спостерігати в лабораторних експериментах при $n=1$, тобто $\omega_Y=2\omega_X$ та $H=4h/3$. Докладний виклад теорії хитної пружини з позицій лабораторних експериментів для зазначених випадків можна знайти в роботі [16]. В роботах [11, 17] проблема коливання хитної пружини була вивчена у випадку тривимірного простору з координатами x, y, z . В роботі [18] показано, що знайдені математичні вирази можна використовувати для опису великомасштабних рухів прошарків атмосфери Землі, а також у випадку примусово демпфування хитної пружини. Це означає, зокрема, що лабораторні експерименти із хитною пружиною можуть надати нове розуміння динаміки первинних резонансних кластерів у довільних нелінійних хвильових системах, яким притаманні трьоххвилові резонанси.

Цікавою суміжною проблемою з хитною пружиною є дослідження маятника Уїлберфорса [19] з метою перевірити, чи його рівняння руху ідентичні тим, які описують динаміку деяких загальних резонансних кластерів [13]. Маятник Уїлберфорса складається з масивного вантажу, підвішеного на довгій пружині, яка може вільно повертатися відносно своєї вертикальної осі. Такий маятник, на відміну від хитної пружини, не здійснює маятниковоподібні коливання. При відповідному налаштуванні маятник Уїлберфорса демонструє процес передачі енергії між режимом «вертикальних» коливань вантажу (догори і донизу) і режимом «обертювих» коливань вантажу навколо осі пружини. Аналіз нормальних мод для маятника Уїлберфорса можна знайти в [20] разом з докладним описом можливих лабораторних експериментів й прикладів чисельного моделювання.

В роботі [21] на аналітичному рівні було досліджено умову резонансу між двома режимами коливань, який визначається тотожністю

$$\omega_{\text{angle}} = \omega_{\text{vertical}}. \quad (11)$$

Експериментально продемонстровано, що у випадку виконання умови резонансу (11), «ні довжина, ні діаметр дроту, ні крок навивки пружини, ні число її обертів не вплинуть на стан резонансу» [21]. Це спостереження є надзвичайно

важливим, адже тоді маятник Уїлберфорса допускає математичний опис набагато ближчий до «фізичного» маятника Уїлберфорса, порівняно, наприклад, з описом математичного маятника відносно фізичного лінійного маятника. В роботі [13] обговорюються можливі впровадження такого підходу в області нелінійного резонансного аналізу хвильових турбулентних систем, виконаних в лабораторних умовах.

В роботі [22] на основі складеної програми проілюстровано параметричний резонанс хитної пружини, який проявляється в передачі енергії від вертикальних коливань вантажу до горизонтальних й навпаки. Показано, що швидкість і амплітуда передачі енергії істотно залежать від початкових умов. В роботі [23] проілюстровано "перетікання" енергії між подовжніми і поперечними коливаннями точки на хитній пружині. Але в роботі відсутня програмна реалізація цього ефекту. В циклі робіт [24–28] наведено дослідження резонансу 2:1 хитної пружини та його зв'язку з траєкторією руху вантажу хитної пружини. Але автори обмежилися дослідженням лише одного варіанту резонансу.

В роботах [29–31] наведено комп'ютерні анімації коливань відповідних хитних пружин, які ілюструють розглянутий спосіб.

Підводячи підсумок зазначимо, що відомі способи дослідження резонансу хитної пружини базуються на тотожності типу

$$\mu\omega_x = \omega_y,$$

де $\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота вертикальних коливань, а $\omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}}$ – частота горизонтальних коливань деякої точки на пружині. Тут і далі m [кг] – маса вантажу, k [Н/м] – жорсткість пружини, h [м] – довжина пружини у ненавантаженому стані, g [м/с²] – прискорення земного тяжіння. У формулі $\mu\omega_x = \omega_y$ μ – коефіцієнт пропорційності між частотами, який, власне, і визначає тип резонансу.

Але у зазначених роботах не враховуються ще два параметри хитної пружини, які суттєво впливають на її коливання. А саме, параметри у вигляді початкових відстаней точкового вантажу хитної пружини від координатних осей обраної системи координат, а також початкових швидкостей зміни положення вантажу у напрямку координатних осей. Контролювати вплив цих параметрів на стан резонансу зручно за допомогою графічного компонента коливань – траєкторії руху вантажу хитної пружини. Для впроваджень необхідно визначити значення параметрів, які забезпечать періодичну траєкторію руху. Адже саме періодичну траєкторію доцільно використовувати при впровадженнях хитної пружини. В цьому полягає проблема досліджень, яка раніше не була розв'язана.

З наведеного аналізу випливає, що необхідно розробити універсальний спосіб синтезу траєкторії переміщення вантажу хитної пружини залежно від особливостей стану її резонансу. А саме, враховуючи не лише основні параметри хитної пружини (жорсткість, довжину у ненавантаженому стані та масу вантажу), але і початкові умови ініціювання коливань.

3. Ціль та задачі дослідження

Метою є геометричне моделювання резонансу хитної пружини на основі побудови траєкторії руху її вантажу з врахуванням не лише основних параметрів хитної пружини, але і початкових умов виникнення коливань.

Для досягнення поставленої мети маємо вирішити наступні задачі:

– описати процес руху хитної пружини з врахуванням перетікання горизонтальних коливань у вертикальні і навпаки, що характерно для резонансного стану хитної пружини;

– описати траєкторію руху вантажу хитної пружини за допомогою системи диференціальних рівнянь з компонентами, у які входять значення частот вертикальних і горизонтальних переміщень точки на пружині;

– визначити множину траєкторій руху вантажу хитної пружини, яка відповідатиме заданим відношенням вертикальних і горизонтальних частот коливань вантажу (для прикладу – 2:1, 7:3, 9:4 і 11:2);

– визначити значення змінних параметрів, за яких траєкторія руху вантажу хитної пружини матиме вигляд періодичної.

4. Визначення траєкторій вантажу хитної пружини за умови її резонансу

4.1. Феномен "перетікання" енергії під час коливань хитної пружини в стані її резонансу типу 2:1

Розглянемо хитну пружину з вантажем масою m , жорсткістю k і довжиною L_0 у ненавантаженому стані. У полі тяжіння із прискоренням вільного падіння $g=9,81$ період коливання такої пружини становить $T_y = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Положення рівноваги вантажу при цьому зміститься донизу на висоту $\Delta L=mg/k$. При такому подовженні пружини сила пружності компенсує силу ваги. Але період вертикальних коливань відносно нового положення рівноваги з розтягнутою пружинкою залишиться тим же. Період горизонтальних коливань розтягнутої хитної пружини виражається через прискорення вільного падіння g і її повну довжину $L=L_0+\Delta L$, тобто $T_x = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Аналіз додаткового розтягнення пружини в полі тяжіння дозволяє з'ясувати [23] співвідношення між періодами:

$$\frac{T_x}{T_y} = \sqrt{\frac{L_0 + \Delta L}{L_0}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta L}{L_0}} > 1. \quad (12)$$

Отже, у хитної пружини період горизонтальних коливань завжди більше періоду вертикальних: $T_x > T_y$. Хитна пружина є найпростішим прикладом реалізації резонансу Фермі. Такий резонанс виникає тоді, коли періоди вертикальних і горизонтальних коливань будуть зв'язані наближеним співвідношенням $T_x=2T_y$. Або, використовуючи частоти незалежних коливань по вертикалі ω_y й горизонталі ω_x , співвідношенням $\omega_y=2\omega_x$. Тобто горизонтальні й вертикальні коливання починають ніби перетікати одне в інше. Енергія коливань буде пере-

качуватися з вертикальних коливань у горизонтальні й навпаки. При цьому, що є дивним, строго вертикальні коливання виявляються нестійкими.

Виникнення співвідношення $T_x:T_y=2:1$ можна пояснити так [23]. На декартовій площині Oxy позначимо через $X(t)$ і $Y(t)$ координати відхилення в часі t вантажу від положення рівноваги. При такому відхиленні потенціальна енергія виростає на величину

$$\Delta U = \frac{k}{2} \left(\left(\sqrt{(L-Y)^2 + X^2} - L_0 \right)^2 - (\Delta L)^2 \right) + mgY. \quad (13)$$

Якщо обрати координати X і Y істотно меншими L , то вираз (2) наближено дорівнюватиме

$$\Delta U \approx \frac{k}{2} Y^2 + \frac{mg}{2L} X^2 - \frac{L_0}{L^2} X^2 Y = U_Y + U_X + U_{XY} \quad (14)$$

плюс інші складові, які характеризуються більш високими ступенями відхилень. Величини U_Y і U_X – це потенціальні енергії, які виникають внаслідок вертикальних і горизонтальних коливань. А величина $U_{XY} = -\frac{L_0}{L^2} X^2 Y$ – це особлива добавка, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями. Завдяки такій взаємодії коливання по вертикалі впливатимуть на горизонтальні коливання й навпаки.

Для пояснення зручно ввести нові позначення

$$\omega_x^2 = \frac{g}{L}; \quad \omega_y^2 = \frac{k}{m}; \quad c = \frac{L_0}{2L^2} \omega_y^2$$

і розглянути систему рівнянь коливань по горизонталі й вертикалі:

$$\ddot{X} + \omega_x^2 X = 2cXY; \quad (15)$$

$$\ddot{Y} + \omega_y^2 Y = cX^2.$$

Без прямих частин в рівняннях (15) одержуємо описи незалежних коливань по вертикалі й горизонталі із частотами ω_y і ω_x . А добавки в прямих частинах вказують на існування сили, яка змушує додатково розгойдувати коливання. Якщо частоти ω_y і ω_x довільні, то ця сила мала і не виявляється ні в якому істотному ефекті. Але якщо виконується співвідношення $\omega_y=2\omega_x$, то настає стан резонансу. Адже сила, яка є рушієм коливань, для обох типів коливань містить компоненту з тією же частотою, що й саме коливання. У результаті ця сила сприятиме розгойдуванню одного типу коливань і придушенню іншого типу [23]. Саме так горизонтальні й вертикальні коливання перетікають одне у інше.

Для підтвердження "перетікання" енергії між подовжними і поперечними коливаннями точки на хитній пружині було складено комп'ютерну програму. Наведемо три приклади, які ілюструють зазначений ефект. Для цього оберемо значення параметрів хитної пружини, які б наближено задовольняли стану її резонансу. Наприклад, $m=0,35$; $k=150$; $L_0=0,1$. Тоді

$$\omega_Y = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20,702; \quad \omega_X = \sqrt{\frac{g}{L_0}} = 9,905,$$

звідки $\omega_Y/\omega_X=2,09$. Тобто наближено умова виникнення резонансу типу 2:1 виконується. Повну довжину пружини оберемо $L=0,5$. Систему диференціальних рівнянь (15) розв'язуємо чисельно методом Рунге-Кутта. Графіки будуюмо за допомогою 5000 одержаних точок.

Приклад 1. Систему рівнянь (15) розв'язуємо з такими початковими умовами: $x_0=0,1$; $Dx_0=0$; $y_0=-0,2$; $Dy_0=0$. Тобто для точки з початковими координатами руху $X(0)=0,1$; $Y(0)=-0,2$ і відсутністю надання їм швидкостей в напрямках координатних осей.

На рис. 1 наведено траєкторію руху точки з координатами $X(t)$, $Y(t)$ за час $T=35$. На рис. 2 зображено графіки відхилень вантажу для відповідних координат. На рис. 3 наведено графіки потенціальних енергій для коливань вздовж відповідних координат, а також графік добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями.

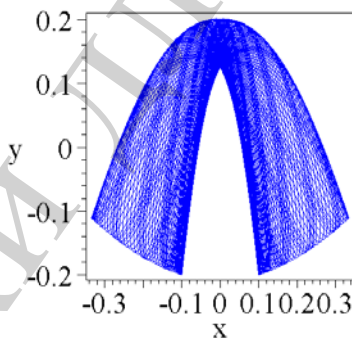


Рис. 1. Траєкторія руху точки для прикладу 1

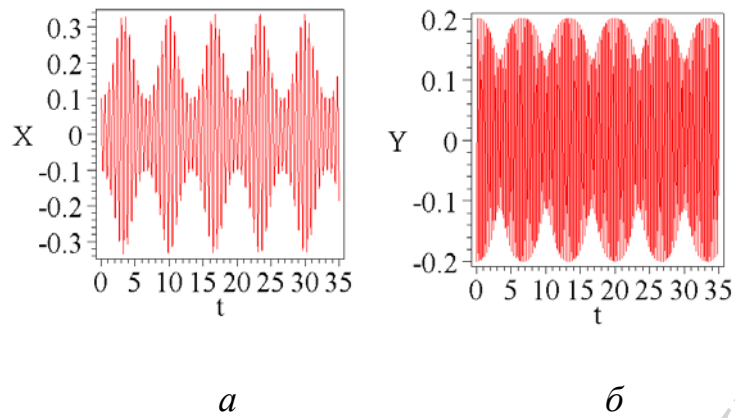


Рис. 2. Графіки відхилень вантажу: *a* – для координати X ; *б* – для координати Y

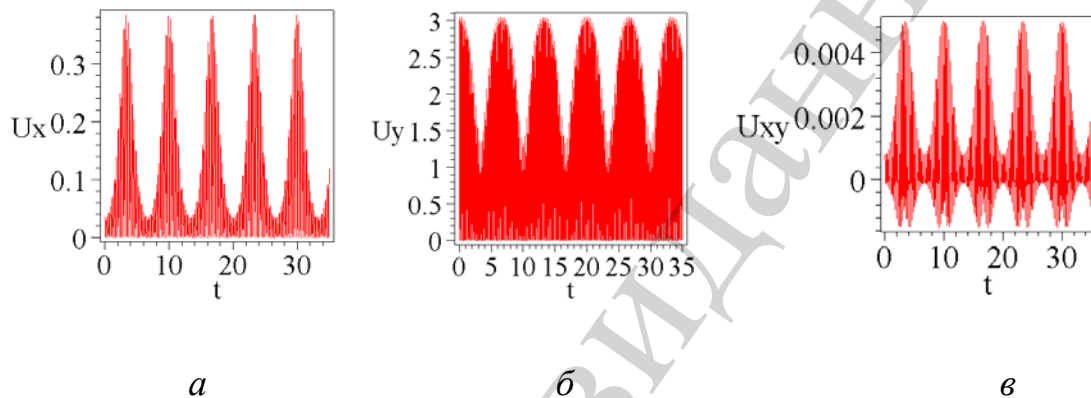


Рис. 3. Графіки потенціальних енергій для: *a* – коливань вздовж координати X ; *б* – коливань вздовж координати Y ; *в* – добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями

Приклад 2. Систему рівнянь (4) розв'язуємо з такими початковими умовами: $x_0=0.001$; $Dx_0=0$; $y_0=-0.2$; $Dy_0=0$. Тобто для точки, яка перед початком руху розташована "майже" на осі Oy .

На рис. 4 наведено траєкторію руху точки з координатами $X(t)$, $Y(t)$ за час $T=35$. На рис. 5 зображено графіки відхилень вантажу для відповідних координат. На рис. 6 наведено графіки потенціальних енергій для коливань вздовж відповідних координат, а також графік добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями.

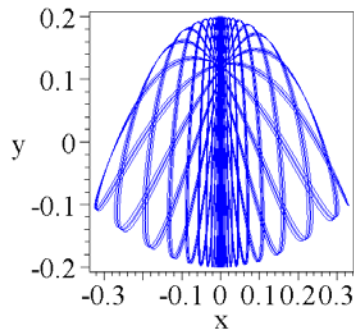


Рис. 4. Траєкторія руху точки для прикладу 2

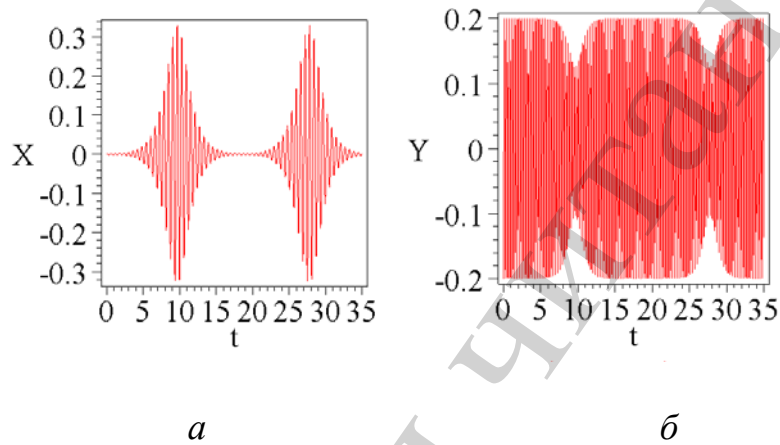


Рис. 5. Графіки відхилень вантажу: *а* – для координати X ; *б* – для координати Y

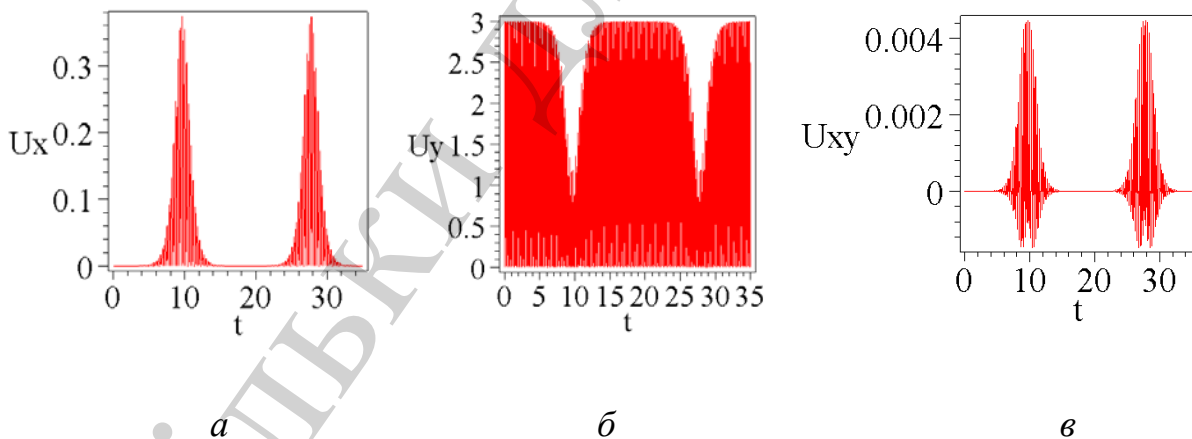


Рис. 6. Графіки потенціальних енергій для: *а* – коливань вздовж координати X ; *б* – коливань вздовж координати Y ; *в* – добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями

Приклад 3. Систему рівнянь (4) розв'язуємо з такими початковими умовами: $x_0=0$; $Dx_0=0,25$; $y_0=-0.2$; $Dy_0=0$. Тобто для точки, яка розташована на осі Oy , і якій для руху надали імпульс величиною 0,25 умовних одиниць.

На рис. 7 наведено траєкторію руху точки з координатами $X(t)$, $Y(t)$ за час $T=35$. На рис. 8 зображено графіки відхилень вантажу для відповідних коорди-

нат. На рис. 9 наведено графіки потенціальних енергій для коливань вздовж відповідних координат, а також графік добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями.

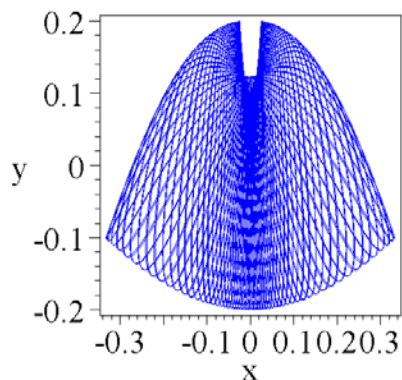


Рис. 7. Траєкторія руху точки для прикладу 3.

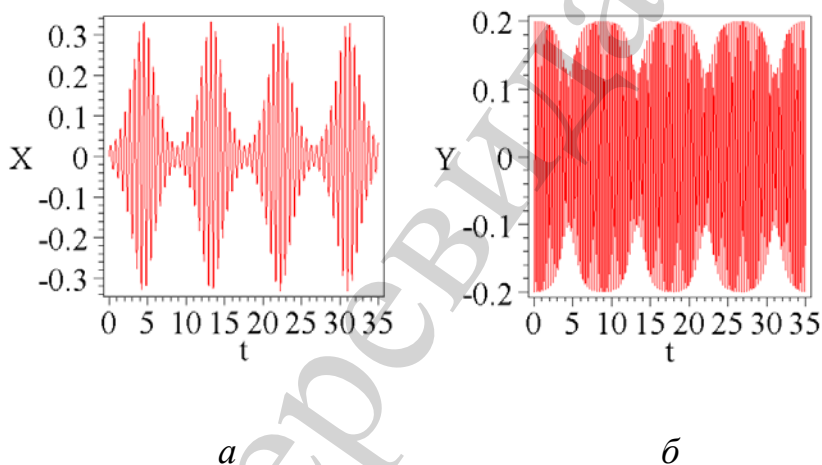


Рис. 8. Графіки відхилень вантажу: *a* – для координати X ; *б* – для координати Y

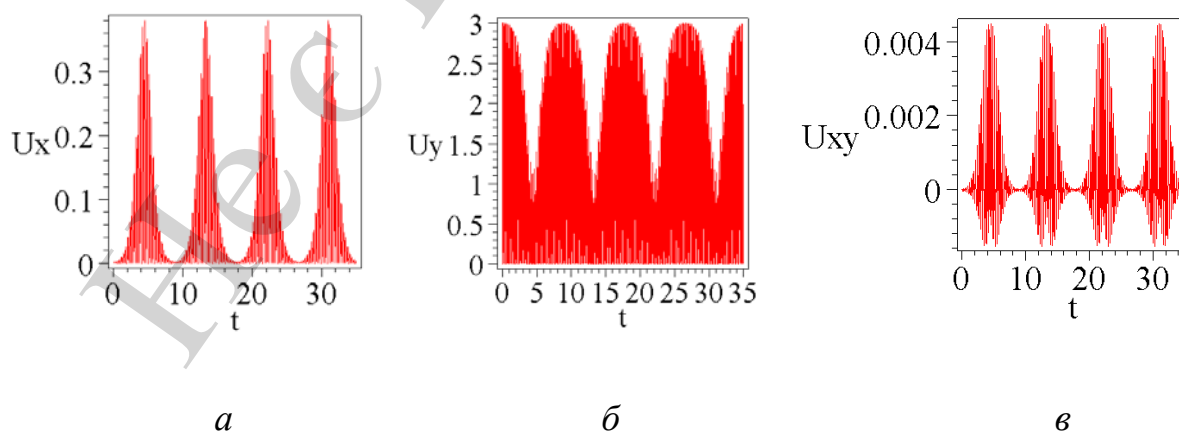


Рис. 9. Графіки потенціальних енергій для: *a* – коливань вздовж координати X ; *б* – коливань вздовж координати Y ; *в* – добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями

Звертаємо увагу на те, що коли вибір параметрів хитної пружини буде довільним, траєкторія руху її вантажу може не підпорядковуватися ніякому закону. Траєкторія руху може навіть заповнювати деяку область на площині. Далі розглянемо спосіб знаходження конкретних періодичних траєкторій руху вантажу. При цьому послідовність досліджень буде наступна.

На першому етапі для обраного типу резонансу $\mu\omega_x = \omega_y$ за допомогою складеної програми визначаються значення параметрів m , h і k , які б забезпечили цей резонанс. Нехай точковий вантаж має координати (X_0, Y_0) . Тоді критерій існування резонансу базується на зображенні двох графіків функцій $X(t)$ і $Y(t)$, які описують відстань точкового вантажу до відповідних координатних осей. Одержані графіки повинні мати таку особливість: максимальні значення одного графіка мають досягатися при мінімальних значеннях другого графіка.

На другому етапі обирається один з параметрів (наприклад Y_0 або DY_0) у якості змінної величини. Далі у вигляді комп'ютерної анімації будується [1, 2] множина траєкторій руху вантажу, залежно від параметра Y_0 . В результаті обираються значення параметра Y_0 , які відповідають періодичним траєкторіям руху вантажу хитної пружини, зображених на відповідних кадрах анімації.

4. 2. Множина траєкторій руху вантажу хитної пружини для резонансу коливань типу 2:1

В процесі побудови зображень траєкторій хитної пружини спиратимемося на роботи [1, 2]. Проміжні результати будемо опускати, і наводитимемо лише готові результати. Траєкторію переміщення по вертикальній площині Oxy вантажу хитної пружини визначимо з системи диференціальних рівнянь (15) залежно від маси вантажу m , початкової довжини пружини у ненавантаженому стані h , жорсткості пружини k і початкових умов для виникнення коливань. Повну довжину пружини позначимо L .

Вважається, що для всіх задач виконується головна умова ідеалізації руху вантажу: процес розсіювання енергії відбувається повільно в порівнянні з характерними масштабами часу (тобто коливальна система є консервативною).

Нагадаємо, що через $\omega_y = \sqrt{k/m}$ позначено частоту поздовжніх коливань точки на невідхиленій пружині, а через $\omega_x = \sqrt{g/h}$ позначено частоту бічних коливань точки на осі пружини як математичному маятнику ($g=9.81$).

Множину траєкторій будуємо за умови зміни початкових значень x_0, Dx_0, y_0, Dy_0 положення точки на площині Oxy . Систему диференціальних рівнянь (15) тут і далі будемо розв'язувати чисельно методом Рунге-Кутта. Графіки будуємо за допомогою 1500 одержаних точок.

Оберемо значення параметрів хитної пружини: $m=1.91$; $h=0.5$; $k=150$; $L=1.5$. Тоді $\omega_y / \omega_x = 2$. Тобто умова резонансу типу 2:1 буде виконуватися

Випадок 1. Нехай $x_0=0.6$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$, а параметр y_0 змінюється в межах $0.1 < y_0 < 0.6$. На рис. 10 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0.6$. У випадку довільно обраних параметрів траєкторія вантажу хитної пружини може заповнювати деяку область площини. За допомогою обрання значення параметра y_0 можна досягти того, що траєкторія матиме ви-

гляд періодичної кривої. Вибір y_0 впливає на співвідношення амплітуд графіків відхилень коливань. На рис. 11 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною. В роботі [31] це проілюстровано за допомогою побудованої комп'ютерної анімації.

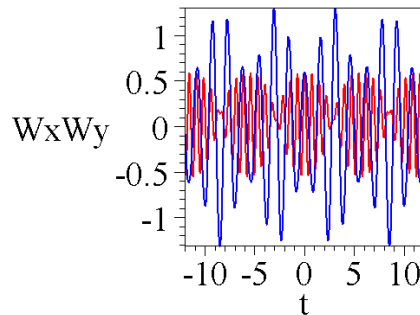


Рис. 10. Графіки відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0.6$ (випадок 1)

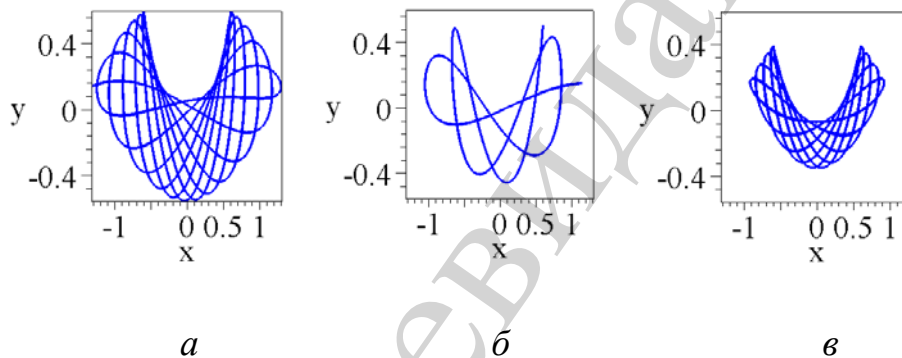


Рис. 11. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 1: *a* – $y_0=0.6$; *б* – $y_0=0.5$; *в* – $y_0=0.39$

Випадок 2. Для порівняння наведемо розв'язок з параметрами $x_0=0.1$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$, а параметр y_0 змінюється в межах $0.1 < y_0 < 0.6$. На рис. 12 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0.6$. На рис. 13 зображено варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

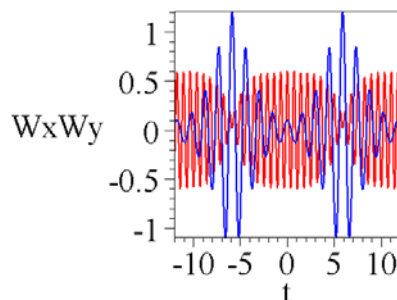


Рис. 12. Графіки відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0.6$ (випадок 2)

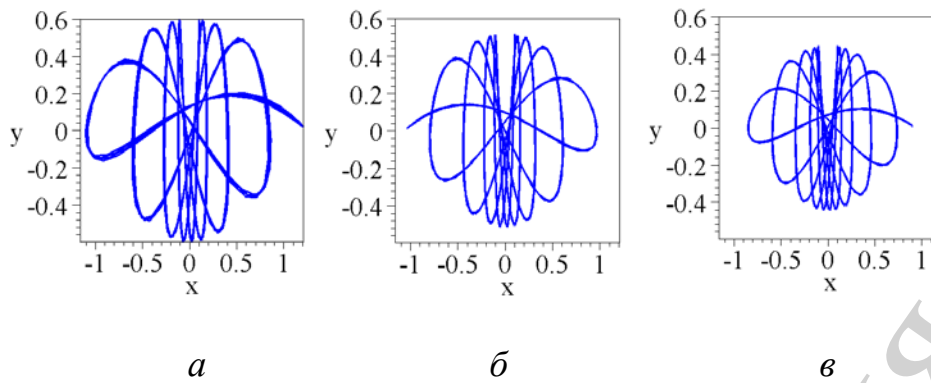


Рис. 13. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 2: $a - y_0=0.6$; $б - y_0=0.52$; $в - y_0=0.445$

Випадок 3. Нехай змінною величиною буде початкова швидкість вздовж осі Oy , яка змінюється в межах $0.1 < Dy_0 < 6$. Наведемо розв'язок з параметрами $x_0=1$; $Dx_0=0$; $y_0=0$. На рис. 14 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=4.112$. На рис. 15 зображено варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

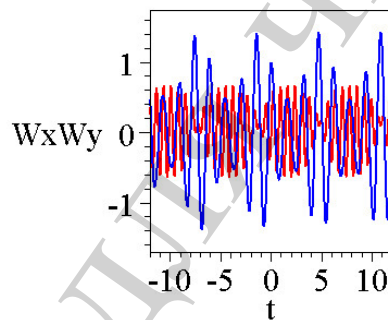


Рис. 14. Графіки відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=4.112$ (випадок 3)

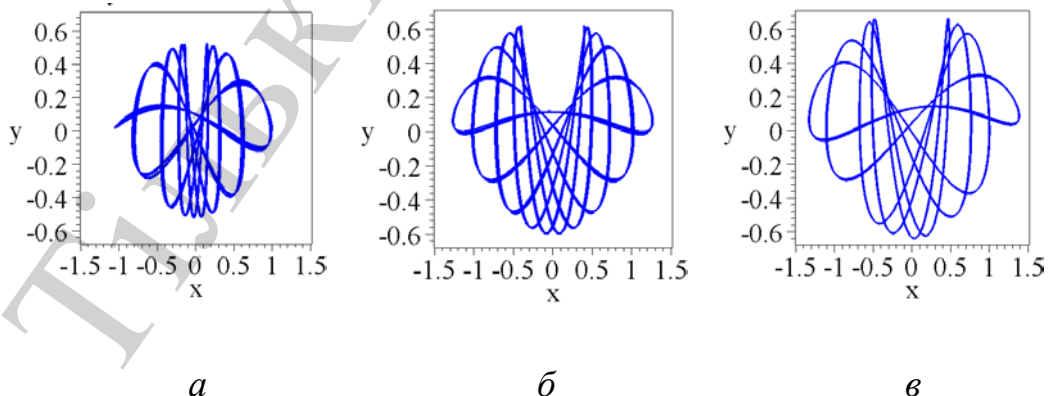


Рис. 15. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 3: $a - Dy_0=1.428$; $б - Dy_0=3.463$; $в - Dy_0=4.122$

Випадок 4. Нехай змінною величиною також буде початкова швидкість вздовж осі Oy , яка змінюється в межах $0.1 < Dy_0 < 6$. Наведемо розв'язок з параметрами $x_0=0.25$; $Dx_0=0$; $y_0=0$. На рис. 16 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=4.17$. На рис. 17 зображено варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

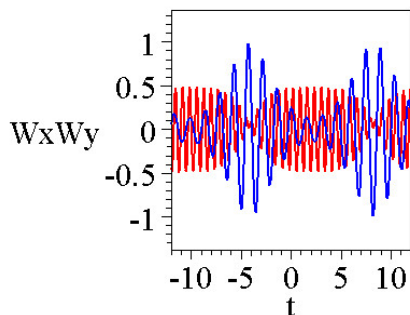


Рис. 16. Графіки відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=4.17$ (випадок 4)

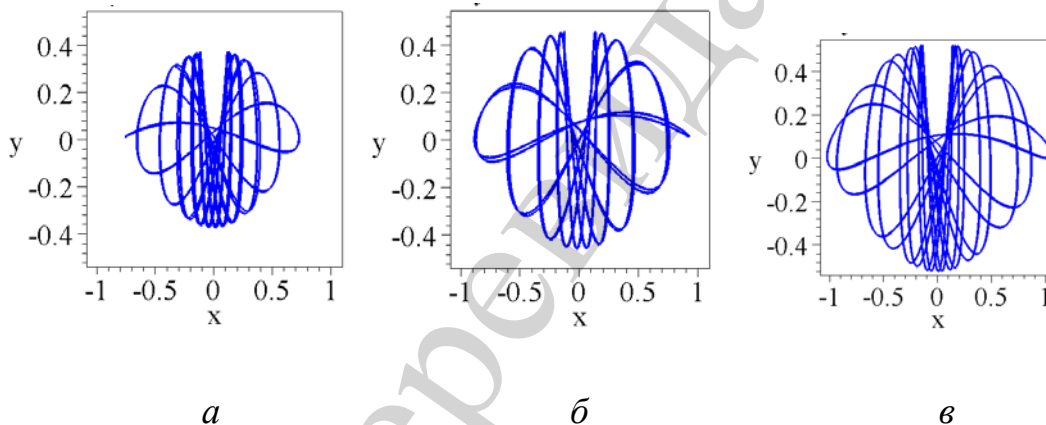


Рис. 17. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 4: *а* – $Dy_0=3.139$; *б* – $Dy_0=3.935$; *в* – $Dy_0=4.525$

Отже, за виглядом одержаних періодичних траєкторій легко порівнювати особливості одного і того ж типу резонансу.

4. 3. Множина траєкторій руху вантажу хитної пружини для резонансу коливань 7:3

Множину траєкторій будемо за умови зміни початкових значень x_0 , Dx_0 , y_0 , Dy_0 положення точки на площині $0xy$. Оберемо значення параметрів хитної пружини: $m=0.28$; $h=0.1$; $k=150$; $g=9.81$. Тоді частота вертикальних коливань буде

$$\omega_Y = \sqrt{\frac{k}{m}} = 23.11;$$

а частота горизонтальних коливань

$$\omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}} = 9.9.$$

Звідси $\omega_y / \omega_x = 7 / 3$. Тобто умова резонансу типу 7:3 буде виконуватися.

Випадок 1. Нехай $x_0=0.1$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$; $L=0.5$, а параметр y_0 змінюється в межах $0.2 < y_0 < 0.6$. На рис. 18 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0.6$. На рис. 19 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

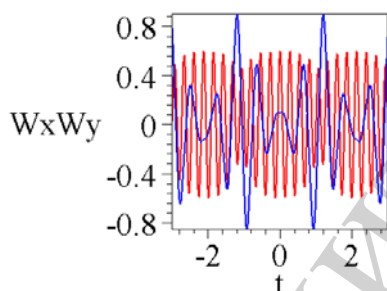


Рис. 18. Графіки відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0.6$ (випадок 1)

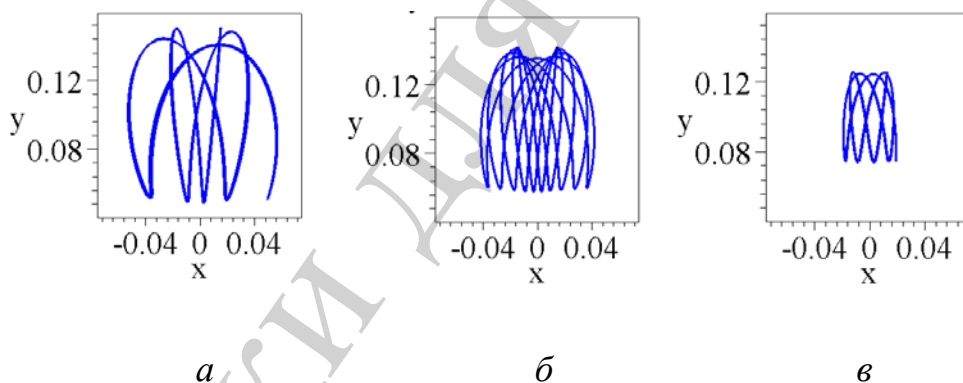


Рис. 19. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 1: а – $y_0=0.516$; б – $y_0=0.426$; в – $y_0=0.264$

Випадок 2. Нехай $x_0=1$; $Dx_0=0$; $y_0=0$; $L=1.3$, а параметр Dy_0 змінюється в межах $0.2 < Dy_0 < 6.5$. На рис. 20 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=6.5$. На рис. 21 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

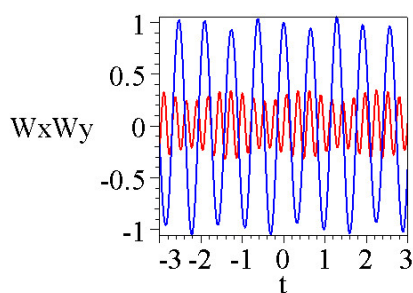


Рис. 20. Графіки відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=6.5$ (випадок 2)

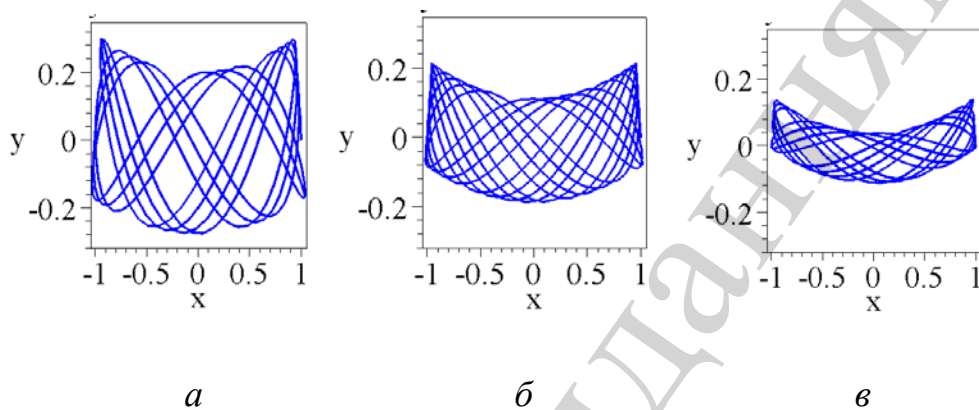


Рис. 21. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 2: *a* – $Dy_0=5.332$; *б* – $Dy_0=3.223$; *в* – $Dy_0=1.2431$

В роботі [8] йдеться про доцільність побудови траєкторій руху вантажу для резонансу 7:3.

4. 4. Множина траєкторій руху вантажу хитної пружини для резонансу коливань 9:4

Оберемо значення параметрів хитної пружини: $m=4.893$; $h=9$; $k=27$; $g=9.81$. Тоді частота вертикальних коливань буде

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2.35;$$

а частота горизонтальних коливань

$$\omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}} = 1.04.$$

Звідси $\omega_y / \omega_x = 9 / 4$. Тобто умова резонансу типу 9:4 буде виконуватися.

Випадок 1. Нехай $x_0=0.2$; $Dx_0=0$; $y_0=0$; $L=5$, а параметр Dy_0 змінюється в межах $0.1 < Dy_0 < 1.5$. На рис. 22 наведено вигляд графіків відхилень точки від ві-

дповідних осей для $Dy_0=1.42$. На рис. 23 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

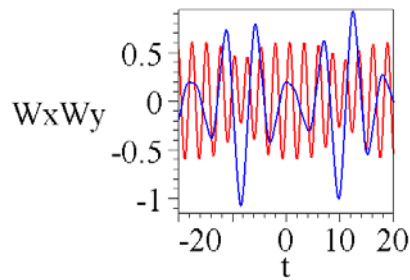


Рис. 22. Графіки відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=1.42$ (випадок 1)

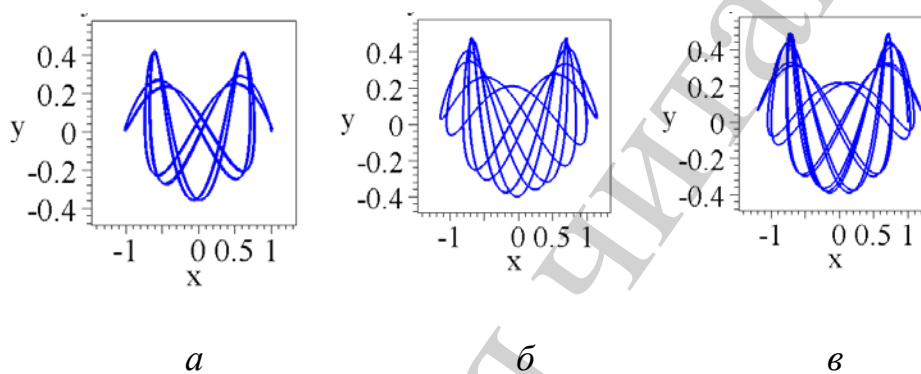


Рис. 23. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 1: *a* – $Dy_0=0.142$; *б* – $Dy_0=0.513$; *в* – $Dy_0=0.569$

Випадок 2. Нехай $x_0=0.1$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$; $L=5$, а параметр y_0 змінюється в межах $0.1 < y_0 < 1.52$. На рис. 24 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0.52$. На рис. 25 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

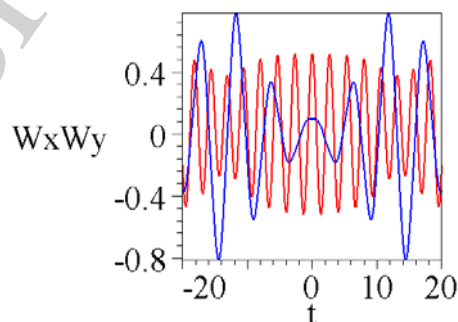


Рис. 24. Графіки відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0.52$ (випадок 2)

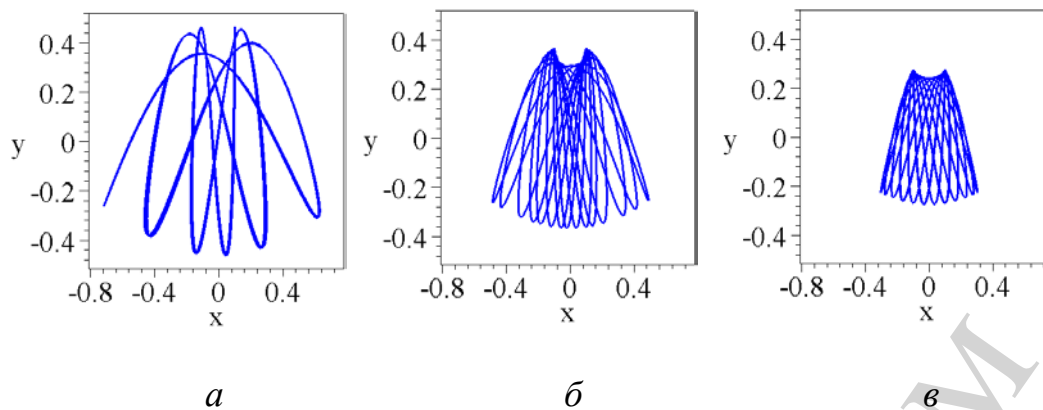


Рис. 25. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 2: *a* – $y_0=0.46$; *б* – $y_0=0.37$; *в* – $y_0=0.27$

В роботі [8] йдеться про доцільність побудови траєкторій руху вантажу для резонансу 9:4.

4. 5. Множина траєкторій руху вантажу хитної пружини для резонансу коливань 11:2

Оберемо значення параметрів хитної пружини: $m=37.51$; $h=9$; $k=207$; $g=9.81$. Тоді частота вертикальних коливань буде

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5.45;$$

а частота горизонтальних коливань

$$\omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}} = 0.99.$$

Звідси $\omega_y / \omega_x = 11/2$. Тобто умова резонансу типу 11:2 буде виконуватися.

Випадок 1. Нехай $x_0=0.1$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$; $L=5$, а параметр y_0 змінюється в межах $0.1 < y_0 < 0.52$. На рис. 26 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0.52$. На рис. 27 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

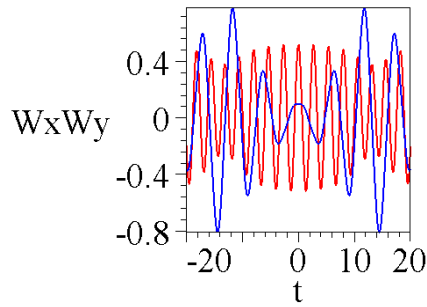


Рис. 26. Графіки відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0.52$ (випадок 1)

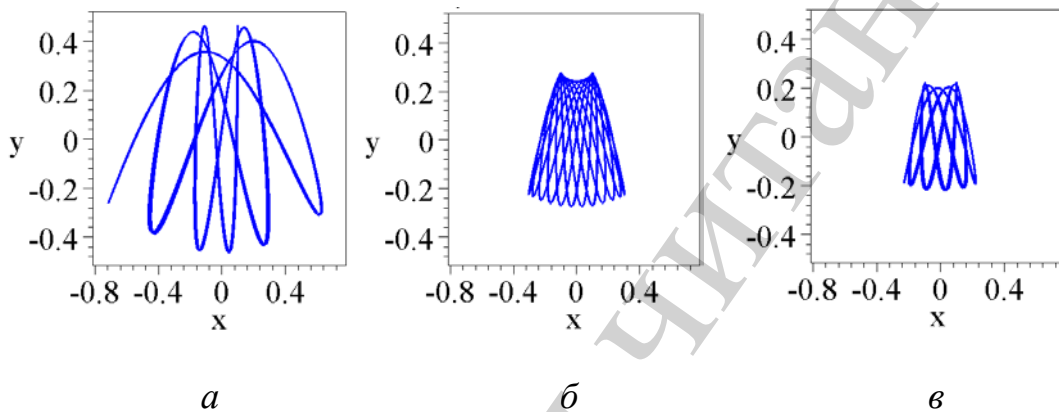


Рис. 27. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 1: $a - y_0=0.457$; $б - y_0=0.3898$; $в - y_0=0.226$

Випадок 2. Нехай $x_0=0.1$; $Dx_0=0$; $y_0=0$; $L=5$, а параметр Dy_0 змінюється в межах $0.1 < Dy_0 < 1.65$. На рис. 28 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=1.65$. На рис. 29 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

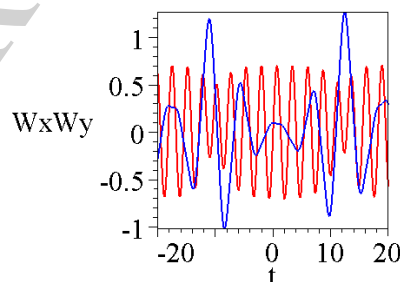


Рис. 28. Графіки відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=1.65$ (випадок 2)

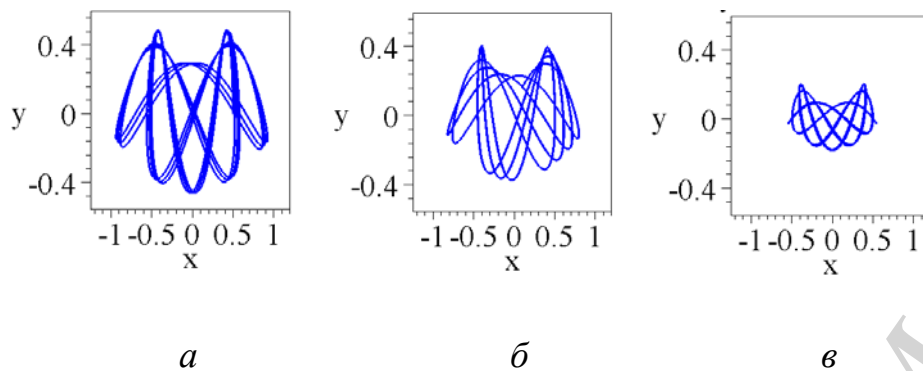


Рис. 29. Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 1: *a* – $Dy_0=1.0455$; *б* – $Dy_0=0.8285$; *в* – $Dy_0=0.2628$

Звертаємо увагу на те, що за виглядом одержаних періодичних траєкторій можна порівнювати особливості одного і того ж типу резонансу. В роботі [8] йдеться про доцільність побудови траєкторій руху вантажу для резонансу 11:2. В на сайті [31] наведено комп'ютерні анімації, які ілюструють одержані результати.

5. Обговорення геометричного моделювання резонансу хитної пружини на основі побудови траєкторій руху її вантажу

Ідею використання хитних пружин у якості механічної моделі доцільно розвивати для аналізу сучасних технологічних процесів як динамічних систем. Ці системи можуть складатися з нелінійно зв'язаних коливальних компонентів, які обмінюються енергією між собою. Коливання хитної пружини доцільно розглядати у сукупності з геометричним компонентом – траєкторією руху її вантажу. У результаті чого з'явилася можливість характеризувати резонанс коливання хитної пружини за допомогою періодичних траєкторій, виділених з можливих рухів під час коливань вантажу хитної пружини. Причому, для синтезу траєкторії необхідно використовувати не лише головні параметри хитної пружини, але й параметри початкових умов ініціювання коливань. Адже в цьому випадку найбільш ефективно відбувається кутове розгойдування хитної пружини за рахунок енергії цієї пружини. Розвиток випадкового поперечного збурення проходить до фіксованого значення амплітуди, оскільки запаси енергії пружини є вичерпними. Після досягнення такої амплітуди в ході коливань хитної пружини знову відбувається розтягування (або стискання) пружини.

У роботі [32] наведено феноменологічний спосіб побудови контуру вертикального перетину поверхні рідини у ємності, яка коливається завдяки руху цієї ємності. Зазначені контури називають хвилями Фарадея. Спосіб оснований на механічній «маятниковій» аналогії процесу коливання рідини. А саме, хвилі Фарадея інтерпретуються як траєкторії руху вантажу математичного маятника (не пружини), підвішеного до рухомого візка. Обговорюються питання складання формул, які б наближено пов'язали параметри рідини з параметрами маятника під візком. Базуючись на ідеї цього прикладу розглянемо наступне.

У якості гіпотези сформулюємо передумову використання моделі хитної пружини. Для відшукування розв'язку розглянутого класу задачі необхідно в її

постановці визначити дві (як приклад) нелінійно зв'язані коливальні компоненти, які обмінюються енергією між собою. Далі слід визначити головні параметри системи (які суттєво впливають на розв'язок), та поставити їх у відповідність параметрам хитної пружини - її жорсткості, довжині у ненавантаженому стані та масі вантажу. А також параметрам, які визначають початкові умови коливань хитної пружини - початковому куту відхилення пружини та швидкості його зрушення. Тоді шуканий розв'язок поставленої задачі можна пов'язати з періодичною траєкторією руху вантажу хитної пружини. І серед множини періодичних траєкторій руху необхідно шукати траєкторію найменшої довжини. Порівнювати особливості резонансних траєкторій можна за умови щільності пікселів, які складають зображення певної траєкторії. Згідно загальному принципу "мінімальної енергії" логічно вважати, що саме випадок з найкоротшою періодичною траєкторією (вірніше, з одним її періодом) буде цікавим при реалізації конкретного впровадження. Одержану періодичну траєкторію руху вантажу завжди можна представити у цифровому вигляді як послідовність координат точок, що її складають.

Із зазначених позицій цікаво буде дослідити нелінійні зв'язані системи із взаємодіючими підсистемами на прикладах задач техніки. Важливу роль у будівельній механіці відіграє видозмінена модель хитної пружини – модель гнучкої нитки. Адже гнучка нитка – це своєрідна пружина, яка діє тільки на розтягнення. У типовій двовимірній моделі гнучка нитка одночасно може здійснювати поперечні коливання у своїй площині (аналог кутових коливань хитної пружини з вантажем) і маятникові коливання, що поєднують опорні закріплення (аналог вертикальних коливань). Напрямоком можливих досліджень можуть бути дроти високовольтних ліній, на стан яких впливають пориви вітру. При співвідношенні частот 1:2 зазначених коливань відбувається втрата динамічної стійкості, і тоді виникають поперечні коливання нитки, амплітуда яких може досягати досить великих значень. Зазначимо, що можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати при розрахунку різноманітних конструкцій будівельної механіки. Наприклад, висячих мостів, вантово-балочних систем, канатних доріг, різноманітних антен тросових системи для втримання об'єктів, гнучких шлангів, тощо.

Труднощі розвитку досліджень в цьому напрямку виникнуть при спробі визначати резонансний стан у разі дослідження коливань просторової хитної пружини.

6. Висновки

1. Феномен "перетікання" енергії між подовжніми і поперечними коливаннями точки на хитній пружині показано на прикладі з параметрами: $m=0,35$; $k=150$; $h=0,1$; $L=0,5$. Тоді

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20,702; \quad \omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}} = 9,905,$$

звідки слідує, що наближена умова $\omega_y/\omega_x=2,09$ резонансу виконується.

2. Для хитної пружини з параметрами $m=1.91$; $h=0.5$; $k=150$; $L=1.5$; $x_0=1.2$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$ у випадку резонансу $\omega_y / \omega_x = 2$ за допомогою одержаних побудов знайдено значення $y_0=0.6$; $y_0=0.5$; $y_0=0.39$, які відповідають періодичним траєкторіям вантажу.

3. Для конкретних резонансів типу 7:3, 9:4 і 11:2 з використанням комп'ютерної анімації одержано значення параметрів хитної пружини, які відповідають періодичним траєкторіям руху її вантажу.

4. Знайдено значення параметрів, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини матиме вигляд періодичної у випадку резонансу, наприклад, для:

а) 2:1 – $m=1.9113$; $h=0.5$; $k=150$; $L=1.5$; $x_0=1.2$; $y_0=0.5$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$;

б) 7:3 – $m=0.2808$; $h=0.1$; $k=150$; $L=0.5$; $x_0=0.2$; $y_0=0.516$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$;

в) 9:4 – $m=4.893$; $h=9$; $k=27$; $L=5$; $x_0=1$; $y_0=0$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0.142$;

г) 11:2 – $m=37.5127$; $h=9$; $k=207$; $L=5$; $x_0=0.1$; $y_0=0.52$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$.

Література

1. Development of a method for computer simulation of a swinging spring load movement path / Kutsenko L., Semkiv O., Kalynovskyi A., Zapolskiy L., Shoman O., Virchenko G. et. al. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. Vol. 1, Issue 7 (97). P. 60–73. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.154191>

2. Synthesis and classification of periodic motion trajectories of the swinging spring load / Kutsenko L., Vanin V., Shoman O., Zapolskiy L., Yablonskiy P., Vasyliiev S. et. al. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. Vol. 2, Issue 7 (98). P. 26–37. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.161769>

3. Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm / De Sousa M. C., Marcus F. A., Caldas I. L., Viana R. L. // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. Vol. 509. P. 1110–1119. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.06.089>

4. De Sousa M. C. de S., Marcus F. A. M., Caldas I. L. C. Energy distribution in a spring pendulum // Proceedings of the 6th International Conference on Non-linear Science and Complexity. 2016. doi: <https://doi.org/10.20906/cps/nsc2016-0022>

5. Energy Distribution in Spring Pendulums / De Sousa M. C., Marcus F. A., Caldas I. L., Viana R. L. // 2017. URL: https://www.researchgate.net/publication/316187700_Energy_Distribution_in_Spring_Pendulums

6. Булдакова Д. А., Кирюшин А. В. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники // Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ». 2015. Т. 6, № 2. С. 238–243.

7. Ganis L. The Swinging Spring: Regular and Chaotic Motion. 2013. URL: http://depts.washington.edu/amath/wordpress/wp-content/uploads/2014/01/leah_ganis_pres.pdf

8. Sanders J. A., Verhulst F., Murdock J. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. Springer, 2007. 434 p. doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-48918-6>

9. Колебания типа «голландский шаг» возникают, когда поперечная устойчивость самолёта велика, по сравнению с путевой устойчивостью. URL: <http://studopedia.org/index.php?vol=3&post=13634>
10. Li-Juan Z., Hua-Biao Z., Xin-Ye L. Periodic solution and its stability of spring pendulum with horizontal base motion // *Acta Physica Sinica*. 2018. Vol. 67, Issue 24. doi: <http://doi.org/10.7498/aps.67.20181676>
11. Lynch P. The swinging spring: a simple model of atmospheric balance / J. Norbury, I. Roulstone (Eds.) // *Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics*. Vol. II: Geometric Methods and Models. Cambridge University Press, 2002. P. 64–108.
12. Lynch P., Houghton C. Pulsation and precession of the resonant swinging spring // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 190, Issue 1-2. P. 38–62. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.09.043>
13. Kartashova E. Nonlinear resonance analysis. Theory, Computation, Applications. Cambridge University Press, 2010. 241 p. doi: <https://doi.org/10.1017/cbo9780511779046>
14. Kuznetsov S. V. The Motion of the Elastic Pendulum // *Regular and Chaotic Dynamics*. 1999. Vol. 4, Issue 3. P. 3–12. doi: <https://doi.org/10.1070/rd1999v004n03abeh000110>
15. Клименко А. А., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика пружинного маятника // *Динамические системы*. 2009. Вып. 27. С. 51–65.
16. Cross R. Experimental investigation of an elastic pendulum // *European Journal of Physics*. 2017. Vol. 38, Issue 6. P. 065004. doi: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa8649>
17. Lynch P. Resonant motions of the three-dimensional elastic pendulum // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002. Vol. 37, Issue 2. P. 345–367. doi: [https://doi.org/10.1016/s0020-7462\(00\)00121-9](https://doi.org/10.1016/s0020-7462(00)00121-9)
18. Lynch P. On resonant Rossby-Haurwitz triads // *Tellus A*. 2009. Vol. 61, Issue 3. P. 438–445. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1600-0870.2009.00395.x>
19. Cross-camera tracking and frequency analysis of a cheap Slinky Wilberforce pendulum / Devaux P., Piau V., Vignaud O., Grosse G., Olarte R., Nuttin A. // *Emergent Scientist*. 2019. Vol. 3. P. 1. doi: <https://doi.org/10.1051/emsci/2018006>
20. Berg R. E., Marshall T. S. Wilberforce pendulum oscillations and normal modes // *American Journal of Physics*. 1991. Vol. 59, Issue 1. P. 32–38. doi: <https://doi.org/10.1119/1.16702>
21. Köpf U. Wilberforce's pendulum revisited // *American Journal of Physics*. 1990. Vol. 58, Issue 9. P. 833–837. doi: <https://doi.org/10.1119/1.16376>
22. Dobrushkin V. Spring Pendulum. URL: <http://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am34/Mathematica/ch3/pendulum.html>
23. Иванов И. Колебания пружинного маятника. 2015. URL: https://elementy.ru/problems/1006/kolebaniya_pruzhinного_mayatnika
24. Richterek L. Dynamicke modelovani modelovani v programu gnu octave. 2007. URL: <http://muj.optol.cz/richterek/lib/exe/fetch.php?media=texty:dynmod.pdf>
25. Lepil O., Richterek L. Dynamicke modelovani. Slovanské gymnázium Olomouc, 2007. 161 p. URL: <https://www.researchgate.net/publication/40356351>

26. Havránek A. Pružné kyvadlo – vyšetřování bifurkace metodami newtonovské mechaniky. URL: <https://web.vscht.cz/pokornp/h/PrzkvHerb2.doc>
27. Dvořák L. Pružné kyvadlo: od teoretické mechaniky k pokusům a zase zpátky // Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 2006. Vol. 51, Issue 4. P. 312–327.
28. Havránek A., Čertík O. Pružné kyvadlo // Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 2006. Vol. 51, Issue 3. P. 198–216.
29. Куценко Л. М., Пікрасов М. М., Запольський Л. Л. Ілюстрації до статті "Геометричне моделювання періодичної траєкторії вантажу хитної пружини". 2018. URL: <http://repositc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/7637>
30. Куценко Л. М., Пікрасов М. М., Васильев С. В. Ілюстрації до статті "Класифікація елементів сім'ї періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини". 2019. URL: <http://repositc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/8658>
31. Куценко Л. М., Пікрасов М. М., Шевченко С. М. Ілюстрації до статті "Моделювання резонансу хитної пружини на основі синтезу траєкторії руху її вантажу". 2019. URL: <http://repositc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/8950>
32. Калиниченко В. А., Аунг Найнг Со А. Н. С. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 12. doi: <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-12-1138>