

Синтез та класифікація періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини

Л. М. Куценко, В. В. Ванін, О. В. Шоман, Л. Л. Запольський,
П. М. Яблонський, С. В. Васильєв, В. Я. Даниленко, О. І. Сухарькова,
С. Ю. Руденко, М. М. Журавський

Продовжено дослідження можливостей геометричного моделювання нехаотичних періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини та її різновидів. В літературі хитною пружиною (swinging spring) називають різновид математичного маятника, який складається з точкового вантажу, приєднаного до невагомої пружини. Другий кінець пружини фіксується нерухомо. Розглядаються маятникові коливання пружини у вертикальній площині за умови збереження прямолінійності її осі. Шукана траєкторія вантажу хитної пружини моделюється з використанням рівнянь Лагранжа другого роду.

Актуальність теми визначається необхідністю дослідження умов відмежування від хаотичних коливань елементів механічних конструкцій, до складу яких входять пружини, а саме визначення раціональних значень параметрів для забезпечення періодичних траєкторій їх коливань. Хитні пружини можна використати як механічні ілюстрації при дослідженні складних технологічних процесів динамічних систем, коли нелінійно зв'язані коливальні компоненти системи обмінюються енергією між собою.

Одержані результати дозволяють додати до переліку числових параметрів хитної пружини ще й періодичні криві як "параметри" в графічній формі. Тобто визначити числові значення параметрів, які б забезпечили існування наперед заданої форми періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини. Розглянуто приклад обчислення маси вантажу за відомими жорсткістю пружини, її довжиною без навантаження, початковими умовами ініціалізації коливань, а також (увага) формою періодичної траєкторії цього вантажу. Одержано періодичні траєкторії руху вантажу для модифікацій хитної пружини - таких як підвищеної до рухомого візка і вісь якої збігається з математичним маятником. А також двох хитних пружин зі спільним рухомим вантажем і з різними точками кріплення.

Одержані результати проілюстровано комп'ютерними анімаціями коливань відповідних хитних пружин та їх різновидів.

Результати можна використати як парадигму для вивчення нелінійних зв'язаних систем, а також при розрахунках варіантів механічних пристроїв, де пружини впливають на коливання їх елементів. А також у випадках, коли в технологіях використання механічних пристроїв необхідно відмежуватися від хаотичних переміщень вантажів і забезпечити періодичні траєкторії їх руху

Ключові слова: маятникові коливання, траєкторія руху, хитна пружина, рівняння Лагранжа другого роду

1. Вступ

У сучасному розумінні складний технологічний процес можна трактувати як динамічну систему, що складається з нелінійно зв'язаних коливальних компонентів. При цьому, в рамках динамічної системи її компоненти можуть обмінюватися енергією між собою. У роботах [1–3] розглянуто підхід до розв'язання класу задач, пов'язаних з феноменом обміну енергією між компонентами. При цьому досліджуються питання залежності цього дійства від параметрів керування системою. Метод полягає в тому, щоб визначити загальну енергію системи й правильно оцінити енергетичні величини в часі, а також їх зв'язок для кожного з компонентів.

Для ілюстрації такого підходу використовують *двовимірний пружинний маятник* як механічну модель дослідження декількох нелінійно зв'язаних систем. Такий різновид пружинного маятника в ідеалізованому вигляді складається з «точкового» вантажу масою m , прикріпленого до кінця невагомої пружини жорсткістю k і довжиною h у ненавантаженому стані. Інший кінець пружини закріплений нерухомо. Утворена в такий спосіб коливальна система має рухатися тільки у вертикальній площині, при цьому *зберігаючи вісь пружини прямолінійною*. Точковий вантаж одночасно виконує два види коливань: *подібних пружині* – коли переміщається уздовж прямолінійної осі пружини, і *подібних маятнику* – коли здійснює коливання сумісно з її віссю. Такий різновид коливальної системи в літературі одержав назву *хитної пружини* (swinging spring) [4]. На практиці хитні пружини можуть виконувати роль механічних ілюстрацій, де аналізуються поперечні (маятникові) коливання і поздовжні (пружинні) коливання. У випадку, коли відношення частот зазначених коливань відрізнятимуться приблизно в два рази, то хитна пружина буде в стані *резонансу*.

В роботах [1–3] наведена велика кількість можливих впроваджень ідеї коливань хитної пружини. Наприклад, коливання хитних пружин мають безпосереднє відношення до багатьох механічних динамічних систем. Були виявлені ефекти порушення стійкості й керованості швидкохідних кораблів в процесі розрахунків їх динаміки в умовах несприятливих хвиль. При співвідношенні 1:2 частот кормових і бокових коливань відбувається втрата динамічної стійкості [5]. Коливання хитних пружин допомагають дослідити і динаміку надзвукових літаків, коли виявляються ефекти порушення їх стійкості й керованості. Виявилося, що найбільш інтенсивне розгойдування бічних коливань має місце, коли коливання за кутом атаки відбуваються із частотою вдвічі більшої частоти бічних коливань [4]. Ці приклади пояснюють, коли у рамках динамічної системи (корабель або літак) доцільно враховувати обмін енергією між її компонентами (подовжніми і поперечними коливаннями).

Видозмінена модель хитної пружини – модель гнучкої нитки – важливу роль відіграє у будівельній механіці. Адже гнучка нитка – це своєрідна пружина, що діє тільки на розтягнення. У типовій двовимірній моделі гнучка нитка одночасно може здійснювати поперечні коливання у своїй площині (аналог куткових коливань хитної пружини з вантажем) і маятникові коливання, що поєднують опорні закріплення (аналог вертикальних коливань) [6]. Прикладом є дрони високовольтних ліній, на стан яких впливають пориви вітру. При спів-

відношенні частот 1:2 зазначених коливань відбувається втрата динамічної стійкості, і тоді виникають поперечні коливання нитки, амплітуда яких може досягати досить великих значень. Можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати при розрахунку різноманітних конструкцій будівельної механіки (вісячих мостів, вантово-балочних систем, канатних доріг, ліній електропередачі, різноманітних антен тросових системи для втримання об'єктів, гнучких шлангів, тощо) [4].

Зрозуміло, що стан *резонансу* хитної пружини має відбуватися при певній комбінації значень параметрів хитної пружини. А саме, коли період вертикальних коливань буде приблизно вдвічі меншим за період горизонтальних коливань [7]:

$$2T_y = T_x,$$

де

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad T_y = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Тут m – маса вантажу, k – жорсткість пружини, h – довжина пружини у невантаженому стані, g – прискорення земного тяжіння.

Крім умов резонансу існує ще одна можливість охарактеризувати хитну пружину. А саме, виділити *періодичні траєкторії* з можливих рухів під час коливань вантажу хитної пружини [8, 9]. Для цього необхідно виявити закономірності утворення періодичних траєкторій залежно від параметрів хитної пружини. А також класифікувати одержані періодичні траєкторії за типом схем механічних пристроїв, що їх утворюють. І кожній періодичній траєкторії бажано поставити у відповідність певне число, яке б характеризувало її геометричну форму. Крім того, важливими будуть дослідження різновидів конструкцій, до складу яких входять хитні пружини.

Отже, доцільними будуть дослідження, спрямовані на геометричне моделювання періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини, а також різновидів конструкцій хитних пружин.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Способи одержання розв'язку динамічної системи, в основі якої знаходяться ідеї хитної пружини, звичайно використовують координати, які визначають рух пружини й маятника [1–3]. При цьому передбачається можливість запису гамільтоніана у вигляді суми трьох членів, що відповідають енергіям, пов'язаних з рухами: пружини, маятника й компонента їхнього зв'язку. У результаті з'являється можливість з'ясувати, як енергія розподіляється між розглянутими трьома енергетичними величинами. Також з'являється можливість з'ясувати, як розподіл енергії змінюється відповідно до повної енергії й керуючим параметром, що являє собою відношення частот простого маятника й маси пружини. За

допомогою отриманих аналітичних виразів аналізується обмін енергією для окремих траєкторій. Також одержують глобальні характеристики розподілу енергії хитної пружини шляхом обчислення просторових і середніх за часом компонентів енергії для великої кількості траєкторій (періодичних, квазіперіодичних і хаотичних) на всім протязі фазового простору.

У роботі [8] вивчаються зміни в поведінці хитної пружини, коли під контролем параметра один відгук стає нестійким і замінюється іншим. Вибірка Пуанкаре використовується для зведення проблеми опису стійкості граничного циклу до більш простої задачі визначення стійкості нерухомої точки відображенням Пуанкаре. В роботі [9] досліджено вплив амплітуди й частоти базового руху на періодичну реакцію системи й аналізуються біфуркаційні характеристики періодичного розв'язку. Установлено, що біфуркація Хопфа може відбуватися в періодичному відгуку системи, що відповідає деяким базовим частотам і амплітуди. У статті [10] динаміка пружинного маятника досліджується з використанням асимптотичних методів. Методи теорії нелінійних нормальних форм коливань дозволили дослідити динаміку маятника не тільки для малих, але і для значних амплітуд коливань. В роботі [11] проведені експериментальні спостереження й наведені прості пояснення руху вантажу пружини, у тому числі добре відомий випадок, коли частота коливань у вертикальному напрямку вдвічі більше, ніж для руху маятника. В роботах [12, 13] наведено теоретичне дослідження плоских малих нелінійних коливань хитної пружини з нелінійною залежністю натягу пружини від її подовження. Використовується метод гамільтонової нормальної форми. Рішення гамільтонових рівнянь нормальної форми показали, що періодична перебудова коливань між вертикальною й горизонтальною модами відбувається тільки у випадку резонансів 1:1 і 2:1. У всіх інших випадках, як при наявності резонансу, так і при його відсутності, коливання відбуваються із двома постійними частотами. В роботі [14] перетікання енергії між подовжними і маятниковими коливаннями розглядається як пульсація. Пульсація і ступінчаста прецесія є характерними особливостями динаміки хитної пружини. Для визначення повного аналітичного рішення використано гамільтонову редукцію. В роботі [15] досліджуються коливання хитної пружини з рухомою точкою підвісу. У статті [16] хитний маятник описано як механічну систему із двома ступенями свободи. Для цього з використанням рівнянь Якобі – Леві – Чивіті складено та чисельно розв'язано скалярне диференціальне рівняння. В роботі [17] досліджено періодичний процес перекачування енергії хитної пружини від однієї моди до іншої. Знайдений аналітичний опис з високою точністю відображає процес при будь-яких початкових відхиленнях маятника. Проведено порівняння даного алгоритму з алгоритмами класичного методу нормальної форми. У роботі [18] показано, що інтегральне наближення просторової хитної пружини, налаштованої на резонанс 1:1:2, має монохромію, а ступінчастий кут прецесії площини коливання резонансного пружинного маятника є числом обертання інтегрального наближення. В роботі [19] коливання хитної пружини аналізується з позицій енергообміну в рамках параметричного механізму. Зокрема, хитна пружина, із двома ступенями свободи є автопараметричною системою, що являє собою основу для вивчення нелінійних зв'язаних сис-

тем. В роботі [20] використовується інваріантна нормальна форма, яка дозволила у рамках єдиного підходу не розділяти коливання хитної пружини на випадки автономні - не автономні, чи резонансні – нерезонансні. Робота [21] присвячена дослідженню зв'язку можливої траєкторії вантажу хитної пружини з фігурами Ліссажу.

Але ці глибокі теоретичні роботи часто не дають чітких алгоритмів побудови нехаотичних періодичних траєкторій вантажу хитної пружини. Для інженерної практики крім теоретичних досліджень необхідні способи побудови реальних нехаотичних *періодичних траєкторій* вантажів хитних пружин. Деякі з них описані в роботі [22], де наведено приклади періодичних траєкторій, а також в [23], де проведено дослідження умов побудови періодичних траєкторій. У роботі [24] наведені приклади періодичних траєкторій хитних пружин. В роботі [25] наведено приклад побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини. В роботі [26] описано динаміку хитної пружини двома різними способами: за допомогою рівнянь Лагранжа й застосуванням другого закону Ньютона. У роботі [27] наведена велика кількість періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. При цьому вивчаються рухи пружинного маятника в залежності від двох його параметрів управління (відношення частот пружини і маятника). Показано, що в межах дуже малих і дуже великих значень параметрів траєкторія вантажу пружинного маятника переважно регулюється, а зміни параметрів більшості початкових умов приводять до хаотичних траєкторій. В роботі [28] наведено *maple*-програму побудови траєкторії вантажу хитної пружини. В роботі [29] наведено спосіб побудови зазначених траєкторій. В роботі [30] на основі складеної програми проілюстровано параметричний резонанс хитної пружини, який проявляється в передачі енергії від вертикальних коливань вантажу до горизонтальних й навпаки. Показано, що швидкість і амплітуда передачі енергії істотно залежать від початкових умов.

В роботах [31, 32] для побудови періодичних траєкторій вантажів різновидів математичних маятників наведено спосіб проєкційного фокусування. В роботі [33] розглянуті приклади реалізації цього способу. В роботі [34] наведено спосіб знаходження значень набору параметрів для забезпечення нехаотичної періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини. В роботі [35] наведено комп'ютерні анімації коливань відповідних хитних пружин, які ілюструють одержані результати.

В результаті огляду літературних джерел [1–30] були виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, зокрема стосовно розробки універсального способу побудови періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини та класифікації цих траєкторій залежно від основних параметрів хитної пружини.

3. Ціль та задачі дослідження

Метою є класифікація та синтез періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини та її деяких різновидів.

Для досягнення поставленої мети маємо вирішити наступні задачі:

– скласти таблицю геометричних форм періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини, які відповідають заданим значенням жорсткості k та маси m ;

- за допомогою відношення горизонтальних і вертикальних періодів коливань вантажу визначити числа, які характеризуватимуть одержані геометричні форми періодичних траєкторій руху;
- класифікувати періодичні траєкторії руху для:
 - а) вантажу хитної пружини, вісь якої коливається сумісно з математичним маятником;
 - б) вантажу, розташованого в спільній точці кріплення двох хитних пружин;
 - в) вантажу хитної пружини, підвішеної до рухомого візка.
- побудувати фазові траєкторії функцій узагальнених координат хитної пружини і її різновидів та надати оцінки діапазону змін їх величин та швидкостей руху вантажу.

4. Визначення періодичних траєкторій вантажу хитної пружини та її деяких різновидів

4.1. Складання таблиці геометричних форм періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини залежно від її параметрів

В процесі побудови періодичних траєкторій спиратимемося на роботи [31–35]. Тому, проміжні результати будемо по можливості опускати, і наводитимемо лише готові результати.

Для всіх задач нехай виконуються умови ідеалізації руху вантажу:

- параметри і початкові умови задаються в умовних числових одиницях;
- маятникові коливання пружини відносно нерухомого підвісу здійснюються у вертикальній площині Oxy ;
- вісь невагомої пружини в процесі коливань залишається прямолінійною;
- маса вантажу зосереджена в точці, розташованій на осі пружини з незакріпленого кінця;
- опори у вузлах і опір повітря під час коливань відсутні;
- процес розсіювання енергії відбувається повільно в порівнянні з характерними масштабами часу (коливальна система є консервативною).

Визначимо траєкторії переміщення по вертикальній площині вантажу хитної пружини залежно від маси вантажу, початкової довжини пружини у ненавантаженому стані, жорсткості пружини і початкових умов для виникнення коливань.

Схему хитної пружини, відповідно до [34], зображено на рис. 1.

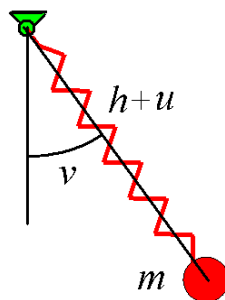


Рис. 1. Схема хитної пружини

У якості першої узагальненої координатної функції $v(t)$ оберемо значення кута, який вісь пружини утворює з вертикальною віссю Oy . Другу узагальнену координатну функцію $u(t)$ пов'яжемо з подовженням пружини в часі; через h позначимо довжину пружини в ненавантаженому стані. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами:

$$x = (h + u) \sin v; \quad y = -(h + u) \cos v. \quad (1)$$

Лагранжیان задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій:

$$L = 0.5m \left(\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + (h + u) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right) - 0.5ku^2 - 9.81m(h + u)(1 - \cos v) - 9.81mu. \quad (2)$$

Для складання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду використаємо співвідношення (тут точка означає похідну по часу):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0. \quad (3)$$

В результаті систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$(u + h) \frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{du}{dt} + 9.81 \sin v = 0;$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - (u + h) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{ku}{m} - 9.81 \cos v = 0. \quad (4)$$

Постановка задачі. Визначити значення жорсткості k пружини, яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу маси m хитної пружини довжиною h у ненавантаженому стані. У початковому положенні хитна пружина розташована вертикально, тобто $v(0)=0$. Ініціювання коливань здійснюється за допомогою імпульсу, наданого вантажу пружини у напрямку осі Ox : $dv(0)=0.5$. Величину 0.5 можна характеризувати як початкову швидкість зміни в часі величини кута $v(t)$.

Застосовуючи алгоритми і програми, описані в роботах [31–34] розв'язуємо систему рівнянь (4) зі значеннями параметрів і з початковими умовами $v(0)=0$; $dv(0)=0.5$; $u(0)=1$; $du(0)=0$. В результаті розв'язання системи рівнянь (4) одержуємо інтегральні криві і фазові траєкторії. Фазові траєкторії характеризуються кількістю пікселів на їх зображеннях. На рис. 2 наведено графіки зміни кількості пікселів N_p залежно від значення жорсткості k для «одиничних» значень $m=1$ і $h=1$. Одержано екстремальні локально мінімальні значення.

Це дозволило (після уточнення) визначити шість головних критичних значень коефіцієнтів жорсткості k : 7.99; 9.55; 12.67; 18.12; 22.96; 28.84.

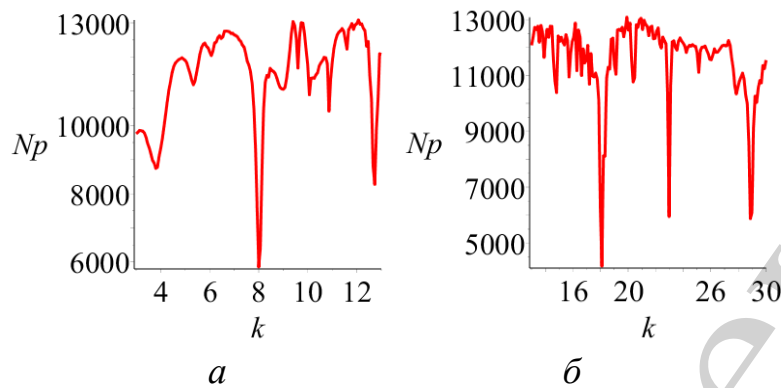


Рис. 2. Графіки зміни кількості пікселів залежно від k для $m=1$: a – у межах $3 < k < 13$; b – у межах $13 < k < 30$

На рис. 3 наведені миттєві положення хитної пружини і періодичні траєкторії руху вантажу масою $m=1$ залежно від значень коефіцієнта жорсткості k . Звернемо увагу, що зображення одержаних геометричних форм траєкторій руху вантажу відповідають локальним мінімумам кількостям пікселів на рис. 2. На сайті [36] наведено комп'ютерні анімації відповідних коливань.

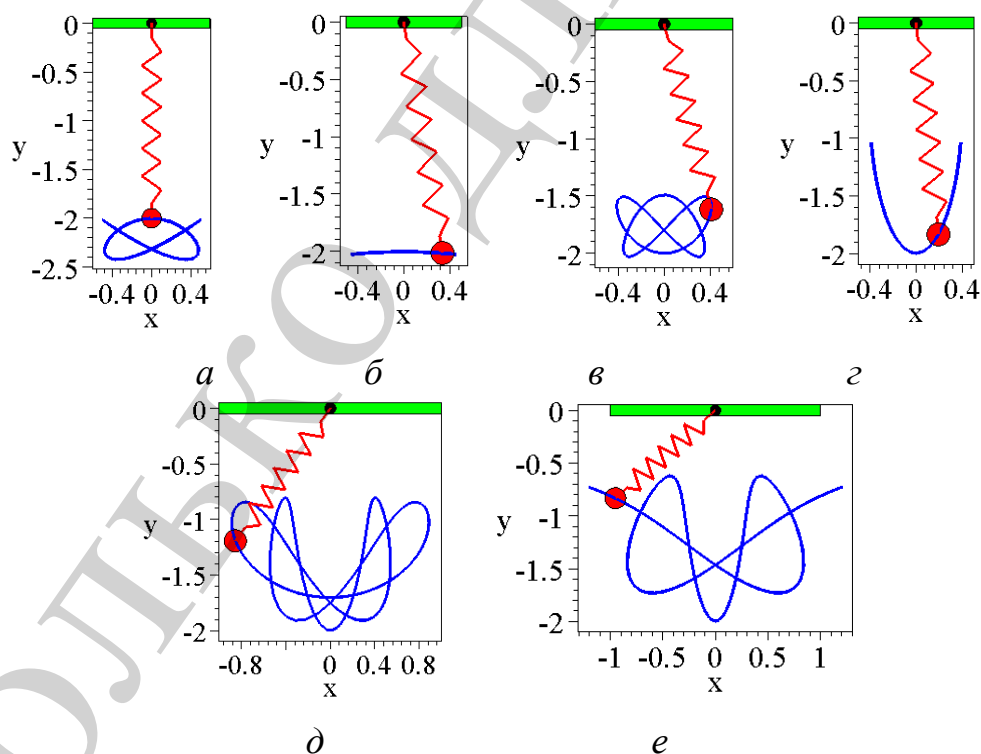


Рис. 3. Періодичні траєкторії вантажу на пружині для: $a - k=7.99$; $b - k=9.55$; $v - k=12.67$; $z - k=18.12$; $\partial - k=22.96$; $e - k=28.84$

На рис. 4 наведено зображення фазових траєкторій функцій узагальнених координат, відповідних періодичним траєкторіям рис. 3. Побудовані на координатних фазових площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$, які на рисунку зображено сумісно. Червоним кольором позначено фазову траєкторію функції $u(t)$, а блакитним – фазову траєкторію функції $v(t)$. Нагадаємо, що функція $u(t)$ описує довжину пружини, а функція $v(t)$ – кут відхилення пружини від вертикалі.

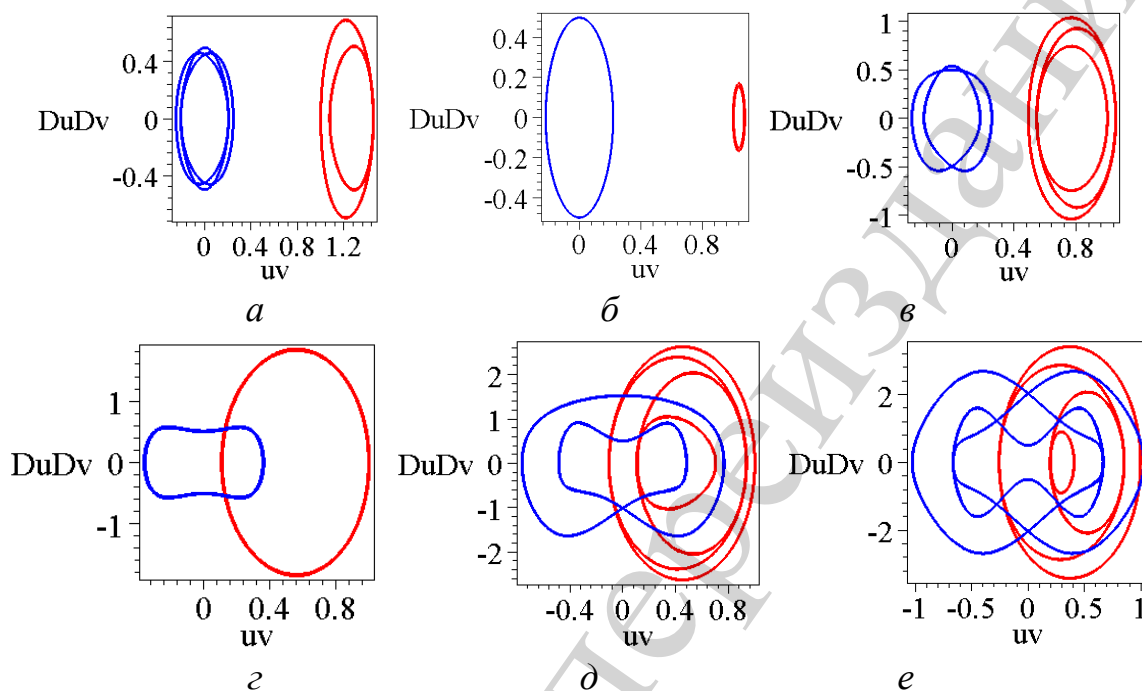


Рис. 4. Фазові траєкторії на фазових площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$, для: $a - k=7.99$; $1 < u(t) < 1.4$; $-0.6 < Du(t) < 0.6$; $-0.3 < v(t) < 0.3$; $-0.45 < Dv(t) < 0.45$; $б - k=9.55$; $0.9 < u(t) < 1$; $-0.2 < Du(t) < 0.2$; $-0.3 < v(t) < 0.3$; $-0.44 < Dv(t) < 0.44$; $в - k=12.67$; $0.6 < u(t) < 0.9$; $-1.1 < Du(t) < 1.1$; $-0.35 < v(t) < 3.5$; $-0.6 < Dv(t) < 0.6$; $г - k=18.12$; $0.2 < u(t) < 1$; $-1.8 < Du(t) < 1.8$; $-0.4 < v(t) < 0.4$; $-0.5 < Dv(t) < 0.5$; $д - k=22.96$; $0 < u(t) < 1$; $-2.5 < Du(t) < 2.5$; $-0.8 < v(t) < 0.8$; $-1.5 < Dv(t) < 1.5$; $e - k=28.84$; $0 < u(t) < 1$; $-3 < Du(t) < 3$; $-1 < v(t) < 1$; $-2.5 < Dv(t) < 2.5$.

Отже, за допомогою фазових траєкторій можна визначити діапазони зміни функцій узагальнених координат, а також швидкості їх зміни (рис. 4).

$$1 < u(t) < 1.4; -0.6 < Du(t) < 0.6; -0.3 < v(t) < 0.3; -0.45 < Dv(t) < 0.45 \text{ (рис. 4, а);}$$

$$0.9 < u(t) < 1; -0.2 < Du(t) < 0.2; -0.3 < v(t) < 0.3; -0.44 < Dv(t) < 0.44 \text{ (рис. 4, б);}$$

$$0.6 < u(t) < 0.9; -1.1 < Du(t) < 1.1; -0.35 < v(t) < 3.5; -0.6 < Dv(t) < 0.6 \text{ (рис. 4, в);}$$

$$0.2 < u(t) < 1; -1.8 < Du(t) < 1.8; -0.4 < v(t) < 0.4; -0.5 < Dv(t) < 0.5 \text{ (рис. 4, г);}$$

$$0 < u(t) < 1; -2.5 < Du(t) < 2.5; -0.8 < v(t) < 0.8; -1.5 < Dv(t) < 1.5 \text{ (рис. 4, д);}$$

$$0 < u(t) < 1; -3 < Du(t) < 3; -1 < v(t) < 1; -2.5 < Dv(t) < 2.5 \text{ (рис. 4, e).}$$

На наступному етапі виявимо пропорції між коефіцієнтом жорсткості пружини k і масою вантажу m , які б забезпечили *однакові* за геометричною формою траєкторії руху вантажів (довжина $h=1$ пружини у ненавантаженому стані є відомою). Для цього необхідно виразити величину маси вантажу m як функцію коефіцієнта жорсткості k . Початковими умовами ініціювання коливань задамо вертикальне положення підвішеної пружини $v(0)=0$, якій надано початкову кутову швидкість $Dv(0)=0.5$. Нехай $u(0)=1$; $du(0)=0$.

Періодичну траєкторію визначимо для змінної маси m , зафіксувавши значення жорсткості пружини. Використовуючи методику, наведену в роботах [31–34], побудуємо графік зміни кількості пікселів на зображенні фазових траєкторій залежно від маси m , наприклад, для значення $k=18.12$ (рис. 5). Локально мінімальні екстремальні значення графіка дозволяють визначити критичні значення маси m : 0.627; 0.788; 1; 1.43; 1.88; 2.24.

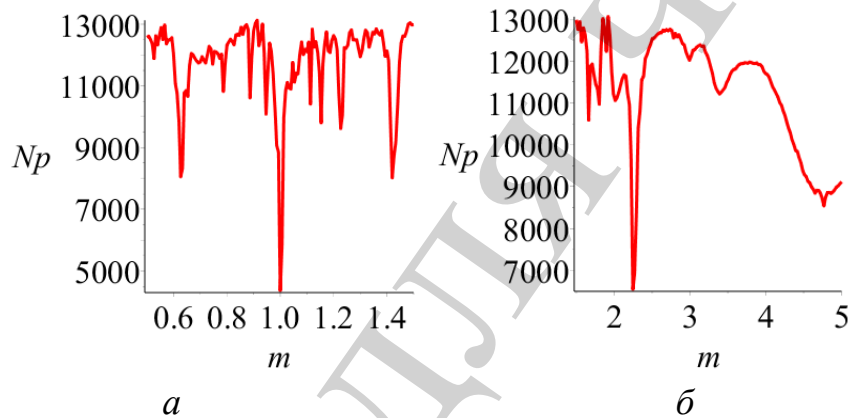


Рис. 5. Графіки зміни кількості пікселів залежно від m для $k=18.12$: *a* – у межах $0.5 < m < 1.5$; *б* – у межах $1.5 < m < 5$

На рис. 6 зображено миттєві положення хитної пружини жорсткості $k=18.12$, а також періодичні траєкторії руху вантажу для обчислених величин мас вантажів. Бачимо, що періодичні траєкторії на рис. 6 подібні за геометричними формами траєкторіям з рис. 3. Це вказує на існування певної закономірності «генерування» періодичних траєкторій.

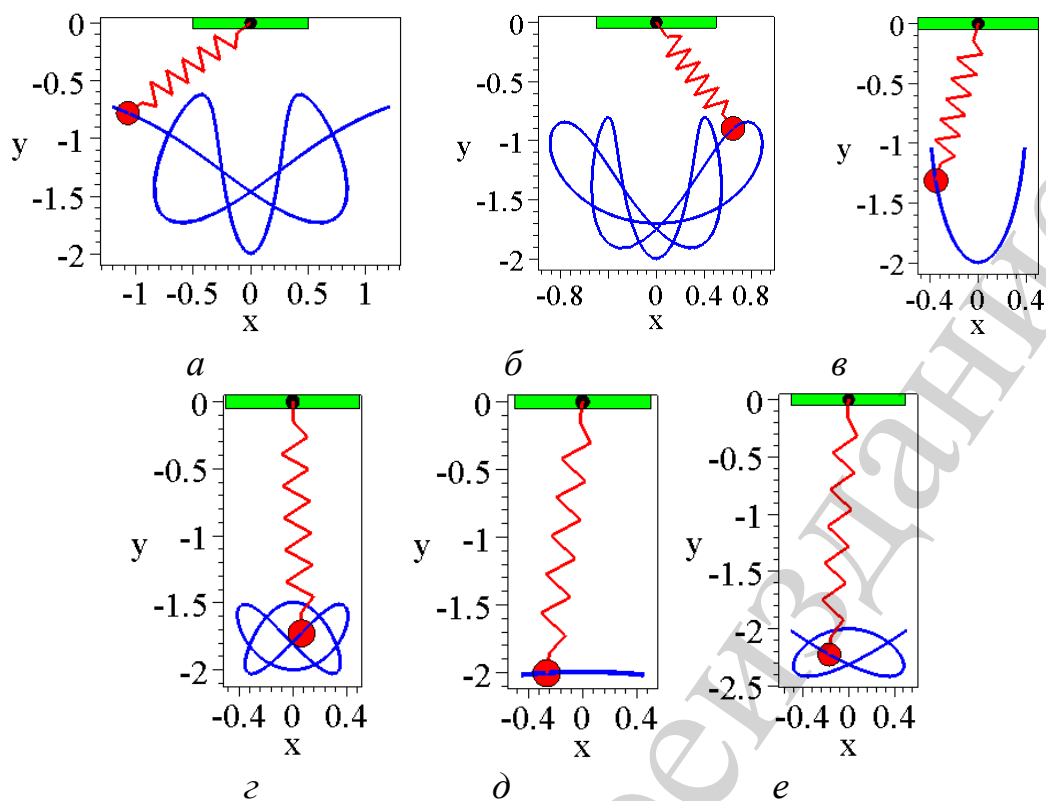


Рис. 6. Періодичні траєкторії вантажу на пружині для: $a - m=0.627$; $b - m=0.788$; $v - m=1$; $z - m=1.43$; $d - m=1.88$; $e - m=2.26$

Зміст рис. 3 і рис. 6 переконує у тому, що ряд геометричних форм періодичних траєкторій повторюються у певній послідовності. Для перевірки цього спостереження і для узагальнення методики розглянемо інший варіант коливання пружини, наприклад, при жорсткості $k=28.84$.

На рис. 7 наведено графік зміни кількості пікселів на зображенні фазових траєкторій залежно від маси m для значення $k=28.84$. Локально мінімальні екстремальні значення графіка дозволяють визначити критичні значення маси m : 1; 1.26; 1.59; 2.28; 3; 3.6.

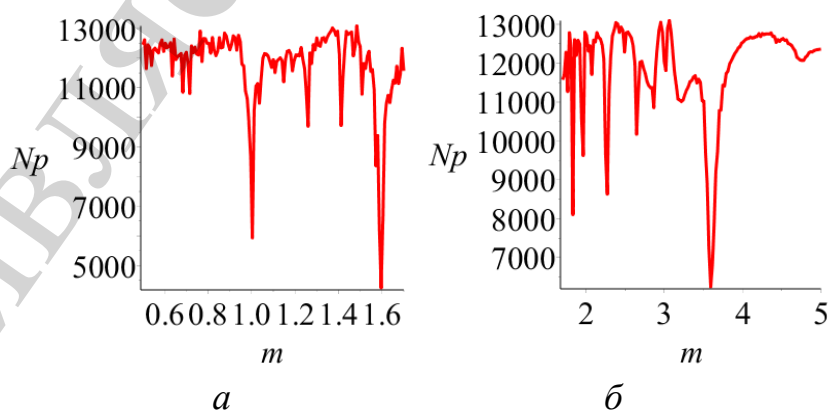


Рис. 7. Графіки зміни кількості пікселів залежно від m для $k=28.84$: $a -$ у межах $0.5 < m < 1.6$; $b -$ у межах $1.6 < m < 5$

Виявляється, що побудовані періодичні траєкторії руху вантажу матимуть вигляд однакових за формою, зображеним на рис. 6. Але при інших значеннях маси: $m=1$ (а); $m=1.26$ (б); $m=1.59$ (в); $m=2.28$ (г); $m=3$ (д); $m=3.6$ (е). Це спостереження сприяло побудові таблиці для класифікації величин параметрів m і k , які б забезпечили існування періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини ($h=1$).

Розглянемо класифікацію періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Ідентифікувати геометричну форму періодичних траєкторій будемо за допомогою відношення періодів вертикальних $T_y = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$ і горизонтальних

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

коливань вантажу.

В табл. 1 наведено значення відношення горизонтальних періодів коливань до вертикальних залежно від геометричної форми траєкторій руху, стосовно періодичних траєкторій на рис. 3, 6. Також наведено значення мас вантажів m для відповідних значень коефіцієнта жорсткості k . Всі значення в умовних одиницях.

Таблиця 1.

Значення мас вантажів для періодичних траєкторій, відповідних жорсткостям k







Значення коефіцієнтів жорсткості □	7.99	9.5	12.67	18.12	22.96	28.87	Значення відношень періодів □
Форма траєкторії □							
	0.276	0.33	0.44	0.63	0.8	1	1.71
	0.35	0.415	0.554	0.793	1	1.25	1.525
	0.44	0.23	0.7	1	1.26	1.58	1.36
	0.63	0.75	1	1.423	1.8	2.27	1.14
	0.83	1	1.32	1.9	2.4	3	0.986
	1	1.18	1.58	2.26	2.85	3.6	0.9

Табл. 1 дозволяє визначати значення мас вантажів і форм траєкторій лише для дискретних значень k . Для того, щоб визначити допустиме значення маси m для довільного $10 < k < 35$ з метою одержати певну траєкторію вантажу (наприклад, для перевірки – зображену на рис. 6, а) використаємо інтерполяційну формулу для двох точок з координатами (28.84, 1) і (18.12, 0.627). Після обчислень одержуємо функцію

$$m(k) = 0.0348k - 0.00348.$$

Аналогічно одержуємо інші функції:

$$m(k) = 0.044k - 0.00923;$$

$$m(k) = 0.055k + 0.00272;$$

$$m(k) = 0.0792k - 0.00675;$$

$$m(k) = 0.104k - 0.0131;$$

$$m(k) = 0.127k - 0.0588, \tag{5}$$

які відповідатимуть траєкторіям вантажу, зображених на рис. 6, б–е.

Отже, для обчислення величини маси m при її переміщенні вздовж періодичної траєкторії при заданій величині коефіцієнта жорсткості k , необхідно скористатись однією з формул (5). При цьому з'явилася можливість не лише побудувати періодичну траєкторію, але і наперед *обрати* одну з геометричних форм траєкторій, зображених на рис. 6.

Наприклад, для коефіцієнта жорсткості $k = 22.96$, щоб одержати періодичні траєкторії, зображені на рис. 6, а–е, необхідно обрати величини мас, відповідно $m = 0.8$; $m = 1$; $m = 1.27$; $m = 1.8$; $m = 2.38$; $m = 2.85$.

Цим проілюстровано можливість не лише побудувати періодичну траєкторію, але і обрати одну з них, зображену на рис. 6. Таким чином, було розв'язано, у певному розумінні, обернену задачу визначення періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Далі розглянемо інші класи періодичних траєкторій.

4. 2. Клас періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини, вісь якої коливається сумісно з математичним маятником

Розглянемо різновид хитної пружини, поєднаної з математичним маятником. Нехай віссю хитної пружини є математичний маятник довжиною R і вантажем масою M (рис. 8). Визначимо траєкторію переміщення по вертикальній площині Ox вантажу хитної пружини залежно від її параметрів.

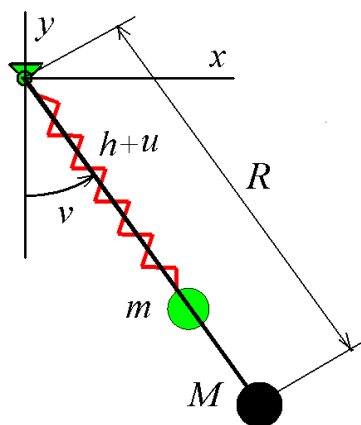


Рис. 8. Схема хитної пружини, поєднаної з маятником

У якості першої узагальненої координатної функції $v(t)$ оберемо значення кута, який вісь хитної пружини утворює з вертикальною віссю Oy . Другу узагальнену координатну функцію $u(t)$ пов'яжемо з подовженням пружини в часі; через h позначимо довжину хитної пружини в ненавантаженому стані. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу пружини можна обчислити за формулами (1):

Лагранжіан системи:

$$L = 0.5MR^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + 0.5m \left(\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + u^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right) + 9.81(mu + MR) \cos v - 0.5k(u - h)^2. \quad (6)$$

Для складання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду використаємо співвідношення (3). В результаті систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$m \frac{d^2u}{dt^2} - mu \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - 9.81m \cos v + k(u - h) = 0; \quad (7)$$

$$(MR^2 + mu^2) \frac{d^2v}{dt^2} + 2mu \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + 9.81 \sin v (MR + mu) = 0.$$

Постановка задачі. Визначити значення маси M математичного маятника довжиною R , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу маси m хитної пружини жорсткістю k і довжиною h у ненавантаженому стані. У початковому положенні коливальна система розташована вертикально, тобто $v(0)=0$. Ініціювання коливань здійснюється за допомогою імпульсу, наданого вантажу пружини у напрямку осі Ox : $dv(0)=1.5$. Величину 1.5 можна характеризувати як початкову швидкість зміни в часі величини кута $v(t)$. Початкові зна-

чення для параметра u подовження пружини оберемо у вигляді $u(0)=1; du(0)=0$.

Застосовуючи алгоритми і програми, описані в роботах [31–34] розв'язуємо систему рівнянь (7) чисельним методом Рунге-Кутти із початковими умовами $v(0)=0; dv(0)=1,5; u(0)=2; du(0)=0$. Для визначення величини критичного значення M можна скористатися графіком насиченості зображення ліній фазової траєкторії [34]. Для параметрів $R=8, m=15, k=150$ і $h=2.5$ застосовуючи знайдене значення M забезпечимо періодичність траєкторії вантажу хитної пружини. На рис. 9 зображено періодичні траєкторії залежно від маси M математичного маятника. На рис. 10 зображено сумісно фазові траєкторії, побудовані на координатних фазових площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$. Позначені червоним і блакитним кольором, відповідно. Для підтвердження величини знайденого критичного значення M можна скористатися графіком насиченості зображення ліній фазової траєкторії [34]. На сайті [36] наведено комп'ютерні анімації відповідних коливань.

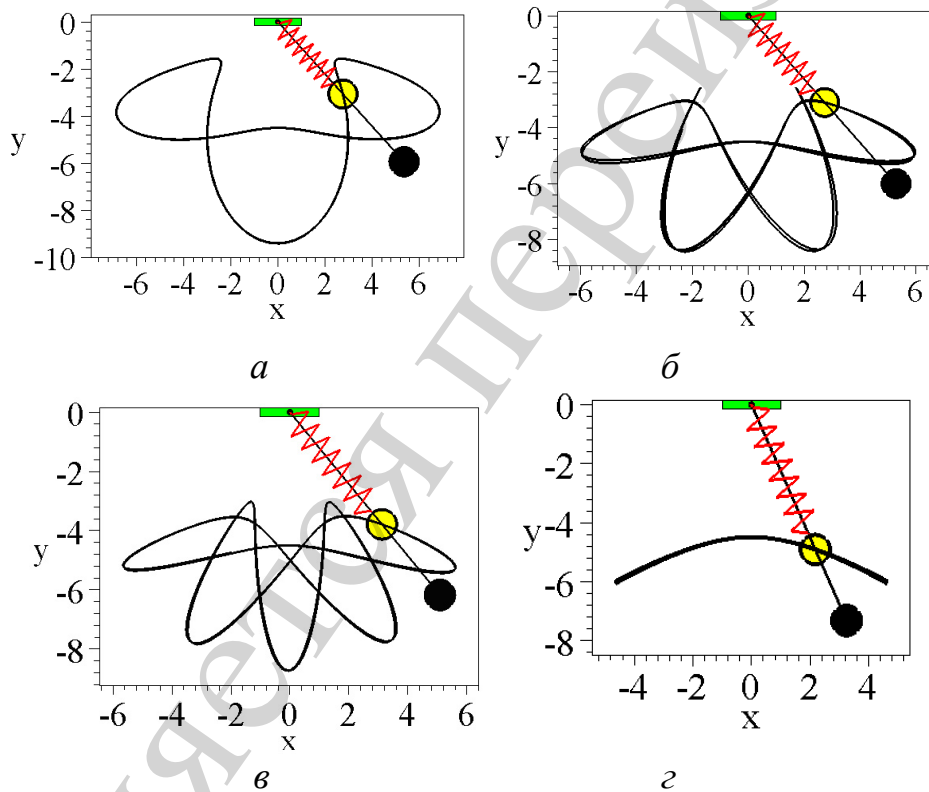


Рис. 9. Періодичні траєкторії руху вантажу хитної пружини для: $a - M=20.4$;
 $б - M=7.17$; $в - M=5.26$; $г - M=2.19$

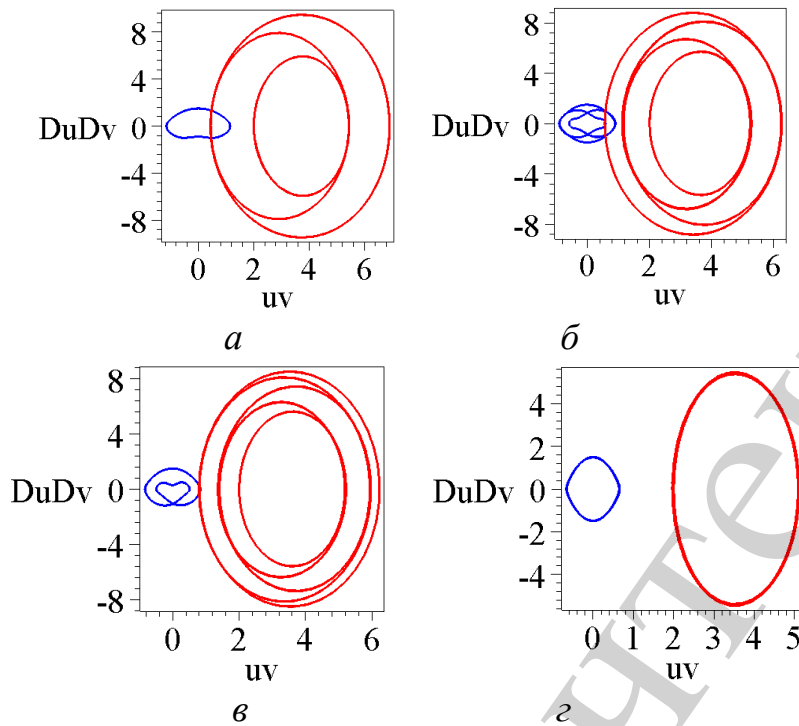


Рис. 10. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$ для: *a* – $M=20.4$; $0.5 < u(t) < 7$; $-8.5 < Du(t) < 8.5$; $-1 < v(t) < 1$; $-1 < Dv(t) < 1.5$; *б* – $M=7.17$; $1 < u(t) < 7$; $-8.5 < Du(t) < 8.5$; $-1 < v(t) < 1$; $-1 < Dv(t) < 1$; *в* – $M=5.26$; $1 < u(t) < 6.1$; $-8.2 < Du(t) < 8.2$; $-1 < v(t) < 1$; $-1 < Dv(t) < 1.5$; *г* – $M=2.19$; $2 < u(t) < 5$; $-5 < Du(t) < 5$; $-1 < v(t) < 1$; $-1.5 < Dv(t) < 1.5$

За допомогою фазових траєкторій можна визначити діапазони зміни функцій узагальнених координат, а також швидкості їх зміни (рис. 10).

$0.5 < u(t) < 7$; $-8.5 < Du(t) < 8.5$; $-1 < v(t) < 1$; $-1 < Dv(t) < 1.5$ (рис. 10, *a*);

$1 < u(t) < 7$; $-8.5 < Du(t) < 8.5$; $-1 < v(t) < 1$; $-1 < Dv(t) < 1$ (рис. 10, *б*);

$1 < u(t) < 6.1$; $-8.2 < Du(t) < 8.2$; $-1 < v(t) < 1$; $-1 < Dv(t) < 1.5$ (рис. 10, *в*);

$2 < u(t) < 5$; $-5 < Du(t) < 5$; $-1 < v(t) < 1$; $-1.5 < Dv(t) < 1.5$ (рис. 10, *г*).

4. 3. Клас періодичних траєкторій спільного рухомого вантажу двох хитних пружин

Розглянемо коливальну систему, складену з пари хитних пружин. Побудуємо траєкторію переміщення по вертикальній площині Oxy вантажу, спільного для цих хитних пружин (рис. 11). Параметрами будуть маса вантажу m , однакові початкові довжини h пружин у ненавантаженому стані, однакові жорсткості пружин k і початкові умови для виникнення коливань. Крім того, необхідно задати відстань H між кріпленнями пружин.

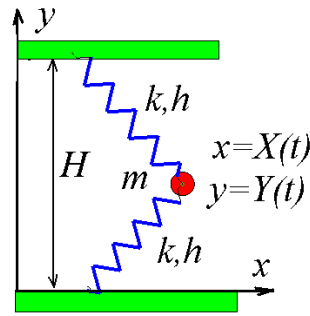


Рис. 11. Схема системи двох хитних пружин

У якості узагальнених координатних функції $X(t)$ і $Y(t)$ оберемо значення декартових координат на вертикальній площині Oxy . Маємо лагранжіан

$$L = 0.5m \left(\left(\frac{dY}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 \right) - 0.5k \left(\sqrt{X^2 + Y^2} - h \right)^2 - 0.5k \left(\sqrt{X^2 + (Y - H)^2} - h \right)^2 - 9.81mY. \quad (8)$$

Для складання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду використаємо співвідношення (3). В результаті систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$mpq + 2pqki - kuh(q + p) = 0,$$

$$mpq \frac{d^2Y}{dt^2} + 2pqkY - kYqh - kpqH - kphY + kphH + 9.81mpq = 0,$$

де

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad q = \sqrt{X^2 + Y^2 - 2YH + H^2}. \quad (9)$$

Постановка задачі. Визначити значення маси m , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення спільного вантажу системи двох хитних пружин з коефіцієнтом жорсткості k і довжиною h у ненавантаженому стані кожна.

У початковому положенні вантаж системи хитних пружин нехай має координати $X(0)=2$ і $Y(0)=3$. Ініціювання коливань здійснюється за рахунок енергії пружин. Тобто будуть відсутні імпульси, наданих вантажу пружин у напрямку осей: $dX(0)=0$ і $dY(0)=0$. Нехай $H = 5$; $k=15$ і $h=2.5$.

Застосовуючи алгоритми і програми, описані в роботах [31–34] розв'язуємо систему рівнянь (9) чисельним методом Рунге-Кутти із початковими умовами $X(0)=2$ і $Y(0)=3$; $dX(0)=0$ і $dY(0)=0$. Для заданих параметрів k і h необхідно обрати значення маси m , щоб забезпечити періодичність руху траєкто-

рії вантажу хитної пружини. На рис. 12 наведено зображення класу періодичних траєкторій залежно від значення маси вантажу m . На рис. 13 наведено суміщені фазові траєкторії, побудовані на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$. Зображені червоним і блакитним кольором, відповідно. Для підтвердження величини знайденого критичного значення M можна скористатися графіком насиченості зображення ліній фазової траєкторії [34]. На сайті [36] наведено комп'ютерні анімації відповідних коливань.

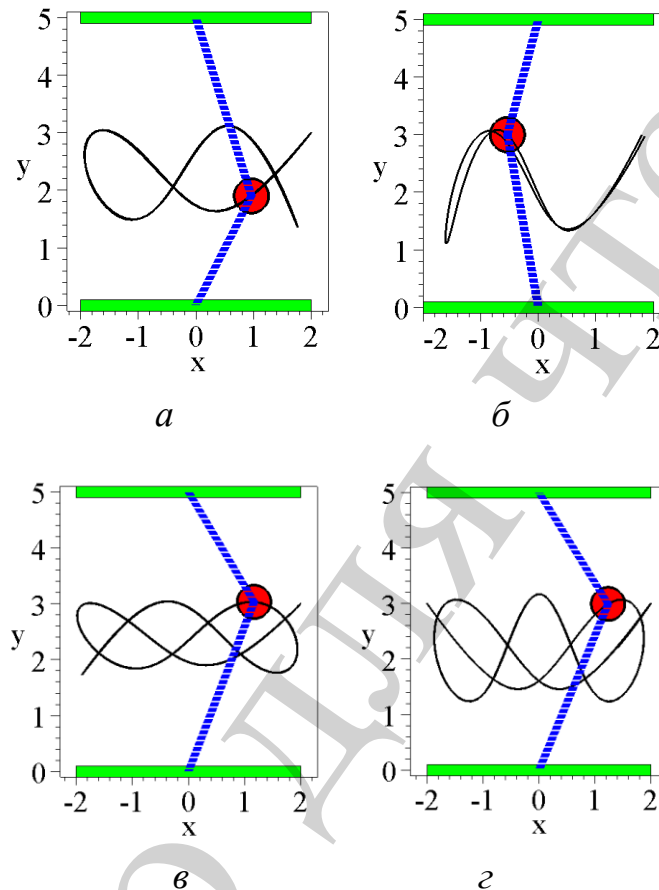


Рис. 12. Періодичні траєкторії руху спільного вантажу двох хитних пружин для:
 $a - m=0.53$; $б - m=0.89$; $в - m=0.2$; $г - m=0.758$

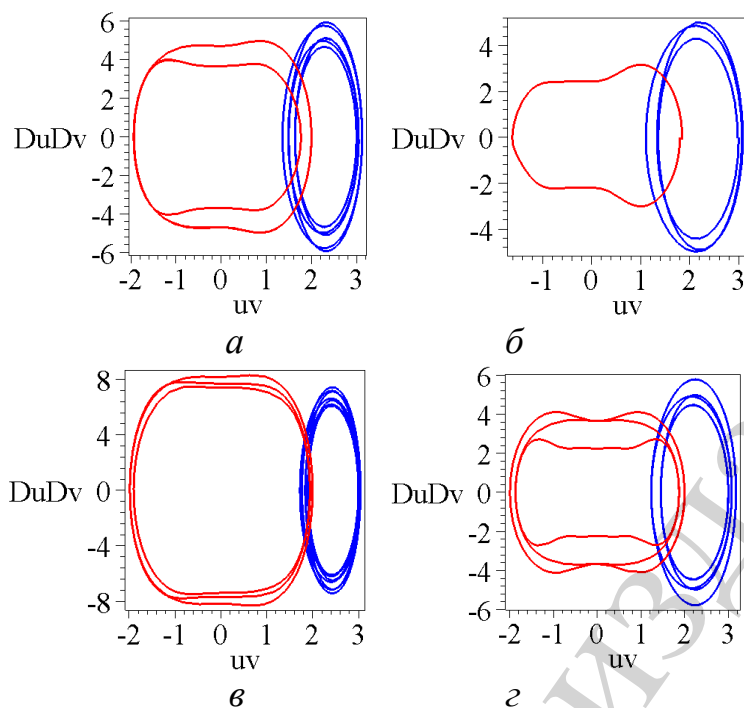


Рис. 13. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$ для: *a* – $m=0.53$; $-2 < u(t) < 2$; $-5 < Du(t) < 5$; $1.5 < v(t) < 3$; $-6 < Dv(t) < 6$; *б* – $m=0.89$; $-2 < u(t) < 2$; $-3 < Du(t) < 3$; $1.5 < v(t) < 3$; $-5 < Dv(t) < 5$; *в* – $m=0.2$; $-2 < u(t) < 2$; $-8 < Du(t) < 8$; $1.8 < v(t) < 3$; $-7 < Dv(t) < 7$; *г* – $m=0.758$; $-2 < u(t) < 2$; $-4 < Du(t) < 4$; $1.5 < v(t) < 3,2$; $-6 < Dv(t) < 6$.

За допомогою фазових траєкторій можна визначити діапазони зміни функцій узагальнених координат, а також швидкості їх зміни (рис. 13).

$-2 < u(t) < 2$; $-5 < Du(t) < 5$; $1.5 < v(t) < 3$; $-6 < Dv(t) < 6$ (рис. 13, *a*);

$-2 < u(t) < 2$; $-3 < Du(t) < 3$; $1.5 < v(t) < 3$; $-5 < Dv(t) < 5$ (рис. 13, *б*);

$-2 < u(t) < 2$; $-8 < Du(t) < 8$; $1.8 < v(t) < 3$; $-7 < Dv(t) < 7$ (рис. 13, *в*);

$-2 < u(t) < 2$; $-4 < Du(t) < 4$; $1.5 < v(t) < 3,2$; $-6 < Dv(t) < 6$ (рис. 13, *г*).

4. 4. Клас періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини, підвішеної до рухомого візка

Застосуємо хитну пружину у якості рушія при горизонтальному переміщенні моделі візка, розташованого на «естакаді». Для цього утворимо коливальну систему, підвісивши хитну пружину під візок (рис. 14). Покажемо, що для моделювання поступального руху візка необхідно забезпечити переміщення вантажу пружини по періодичній траєкторії. А також необхідний імпульс, наданий візку у напрямку передбачуваного руху. Наведемо спосіб визначення траєкторії переміщення по вертикальній площині Oxy вантажу хитної пружини, підвішеної до рухомого візка. Параметрами будуть: значення маси візка M , маси

вантажу m , початкова довжина пружини у ненавантаженому стані h , жорсткість пружини k і початкові умови для виникнення коливань.

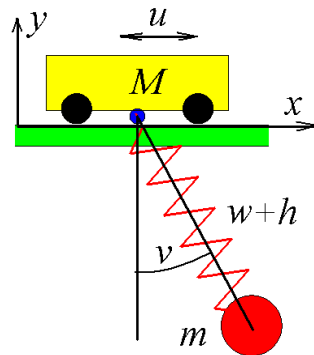


Рис. 14. Схема хитної пружини, підвішеної до рухомого візка

У якості першої узагальненої координатної функції $u(t)$ оберемо величину переміщення візка у горизонтальному напрямку. Другою узагальненою координатною функцією $v(t)$ буде значення кута, який вісь хитної пружини утворюватиме з вертикальною віссю Oy . Третю узагальнену координатну функцію $w(t)$ пов'яжемо зі зміною довжини пружини в часі; через h позначимо довжину хитної пружини в ненавантаженому стані. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами:

$$x = u + (h + w) \sin v; \quad y = -(h + w) \cos v. \quad (10)$$

Лагранжیان задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій:

$$L = 0.5(M + m) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - 0.5k(w - h)^2 + \left(0.5m \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + w^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + 2 \frac{du}{dt} \times + \right. \\ \left. \times \left(\frac{dw}{dt} \sin v + w \frac{dv}{dt} \cos v \right) \right) + 9,81mw \cos v. \quad (11)$$

Для складання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду використаємо співвідношення (3). В результаті систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$(m + M) \frac{d^2 u}{dt^2} + \\ + \left(0.5m \frac{d^2 w}{dt^2} \sin v + 4 \frac{dw}{dt} \frac{dv}{dt} \cos v + 2w \frac{d^2 v}{dt^2} \cos v - 2w \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \sin v \right) = 0;$$

$$\begin{aligned}
& 0.5m \left(4w \frac{dv}{dt} \frac{dw}{dt} + 2w^2 \frac{d^2v}{dt^2} + 2w \frac{d^2u}{dt^2} \cos v + 2 \frac{du}{dt} \frac{dw}{dt} \cos v - \right. \\
& \left. - 2w \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \sin v \right) - m \frac{du}{dt} \times \left(\frac{dw}{dt} \cos v - w \frac{dv}{dt} \sin v \right) + 9,81mw \sin v = 0; \tag{12} \\
& 0.5m \left(2 \frac{d^2w}{dt^2} + 2 \frac{d^2u}{dt^2} \sin v + 2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \cos v \right) - 0.5m \left(2w \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + 2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \cos v \right) - \\
& - 9,81m \cos v + k(w - h) = 0.
\end{aligned}$$

Постановка задачі. Визначити довжину h хитної пружини у ненавантаженому стані, коливання якої забезпечили б поступальний рух візка у горизонтальному напрямку за умови, що траєкторія руху вантажу буде періодичною. Рухом процесу руху являтимуться коливання хитної пружини, підвішеної до візка, а також початковий імпульс, наданий візу у напрямку осі Ox . Наявність такого імпульсу є обов'язковим для поступального переміщення візка. Без впливу імпульсу візок буде здійснювати коливальні рухи вздовж осі Ox відносно початкового положення. Параметри коливальної системи оберемо такі: маса візка $M=500$; маса вантажу хитної пружини $m=86.8$; жорсткість пружини $k=750$.

У початковому положенні хитна пружина розташована горизонтально, тобто $v(0)=\pi/2$. Ініціювання коливань здійснюється маятниковими рухами хитної пружини, а також за допомогою початкового імпульсу $du(0)=1$, наданого візку у напрямку осі Ox . Початкові значення для параметра w подовження пружини оберемо у вигляді $w(0)=5$; $dw(0)=0$. Тобто початкова довжина хитної пружини дорівнює п'яти умовним одиницям.

Згідно з методикою, описаною в роботах [31–34] спочатку чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (12) із початковими умовами $u(0)=1$; $du(0)=1$; $v(0)=\pi/2$; $dv(0)=0$; $w(0)=5$; $dw(0)=0$. Способом проєкційного фокусування обираємо таке значення параметра h , яке б забезпечило періодичність траєкторії вантажу хитної пружини. Для знаходження критичного значення h будуються інтегральні криві фазових просторів $\{u, Du, t\}$, $\{v, Dv, t\}$ і $\{w, Dw, t\}$, а також фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$. За допомогою фазових траєкторій можна визначити діапазони зміни координатних функцій параметрів в процесі коливання хитної пружини. Для підтвердження величини знайденого критичного значення h можна скористатися графіком насиченості зображення ліній фазової траєкторії [34].

Після обчислення h необхідно це значення підставити в систему рівнянь Лагранжа другого роду (12) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$; $v(t)$ і $w(t)$. За допомогою цих розв'язків на площині Oxy визначається наближене зображення траєкторії руху вантажу хитної пружини. На рис. 15 зображені періодичні траєкторії переміщення вантажів хитних пружин залежно від одержаних значень h .

На сайті [36] наведено комп'ютерні анімації відповідних коливань. Анімації ілюструють геометричні моделі переміщення візка праворуч.

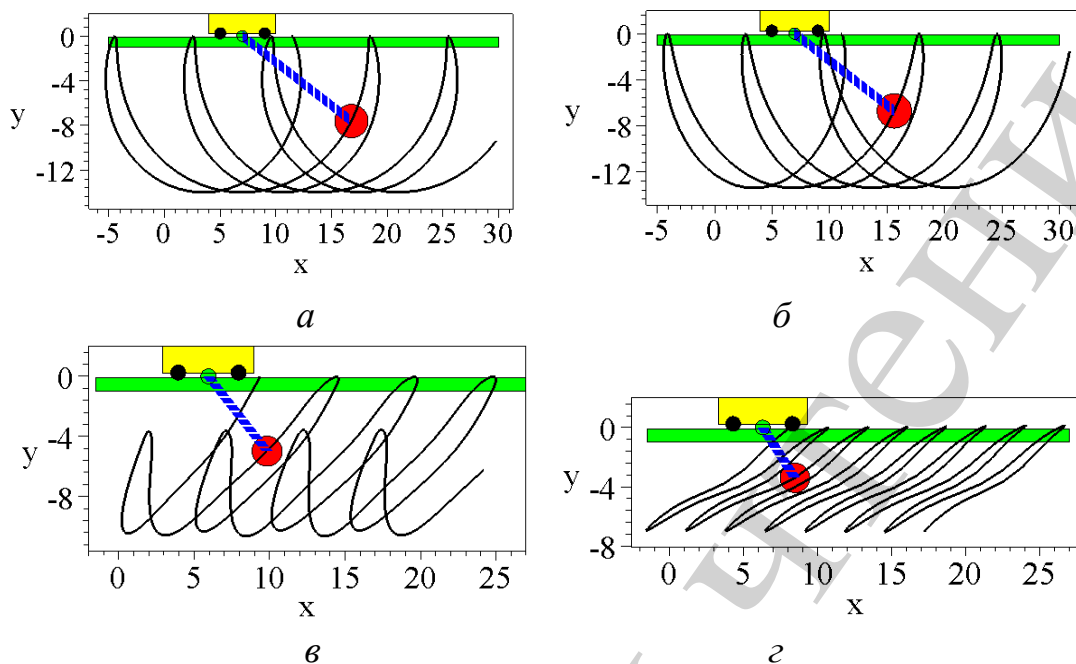


Рис. 15. Періодичні траєкторії руху вантажу хитної пружини для:
 $a - h=5.44$; $б - h=5$; $в - h=3.3$; $г - h=2.08$

На рис. 16 наведено фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$ і $\{w, Dw\}$, зображені червоним, блакитним і чорним кольором, відповідно.

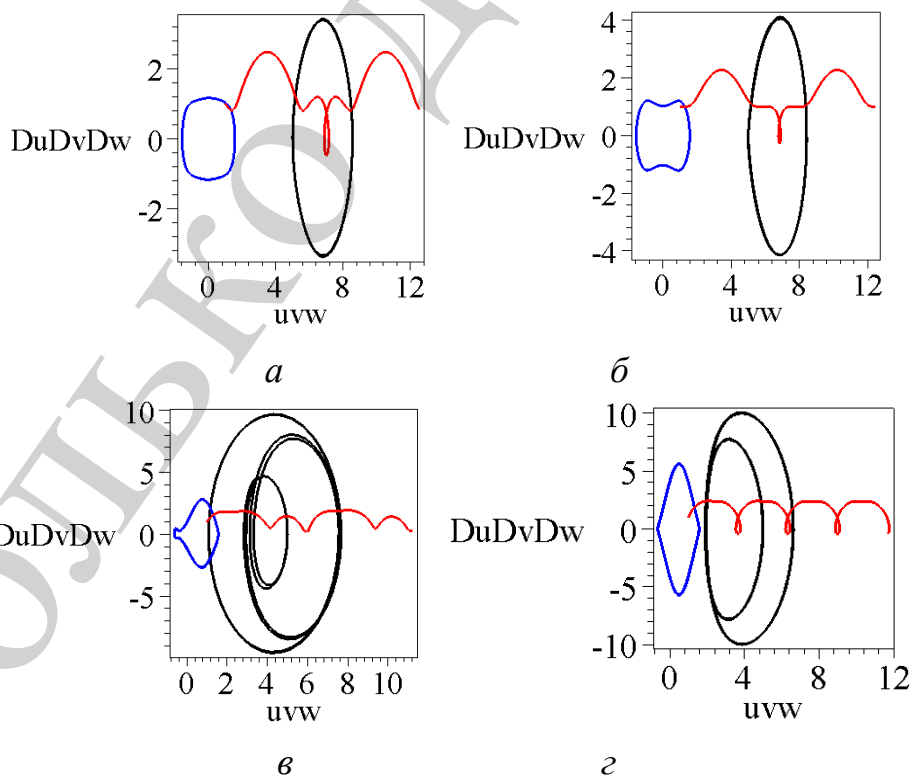


Рис. 16. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$ і $\{w, Dw\}$ для:
 $a - h=5.44$; $1 < u(t) < 12$; $-0.5 < Du(t) < 2.5$; $-1 < v(t) < 1$; $-1 < Dv(t) < 1$; $3 < w(t) < 9$;

$$\begin{aligned}
 & -3 < Dw(t) < 3; \bar{b} - h = 5; 1 < u(t) < 12; -0.5 < Du(t) < 2.5; -1 < v(t) < 1; -1 < Dv(t) < 1; 3 < w(t) < 9; \\
 & -4 < Dw(t) < 4; \bar{v} - h = 3.3; 1 < u(t) < 11; 0 < Du(t) < 0.5; -1 < v(t) < 2; -2 < Dv(t) < 2; 1 < w(t) < 8; \\
 & -10 < Dw(t) < 10; \bar{z} - h = 2.08; 1 < u(t) < 12; 0.5 < Du(t) < 2; -0.5 < v(t) < 3; -5.5 < Dv(t) < 5.5; \\
 & 3 < w(t) < 7; -10 < Dw(t) < 10.
 \end{aligned}$$

Характер руху геометричної моделі візка можна визначити за допомогою графіка похідної координатної функції $u(t)$ (рис. 17).

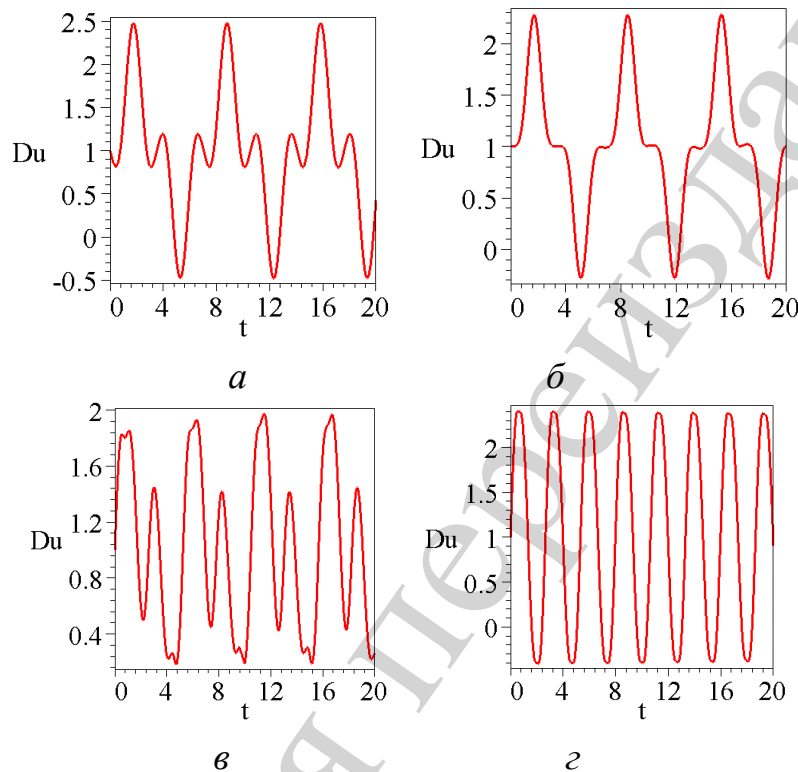


Рис. 17. Графіки похідної координатної функції $u(t)$ для: $a - h=5.44$; $б - h=5$; $в - h=3.3$; $з - h=2.08$

За допомогою фазових траєкторій можна визначити діапазони зміни функцій узагальнених координат, а також швидкості їх зміни (рис. 16).

$1 < u(t) < 12$; $-0.5 < Du(t) < 2.5$; $-1 < v(t) < 1$; $-1 < Dv(t) < 1$; $3 < w(t) < 9$; $-3 < Dw(t) < 3$ (рис. 16, a);

$1 < u(t) < 12$; $-0.5 < Du(t) < 2.5$; $-1 < v(t) < 1$; $-1 < Dv(t) < 1$; $3 < w(t) < 9$; $-4 < Dw(t) < 4$ (рис. 16, $б$);

$1 < u(t) < 11$; $0 < Du(t) < 0.5$; $-1 < v(t) < 2$; $-2 < Dv(t) < 2$; $1 < w(t) < 8$; $-10 < Dw(t) < 10$ (рис. 16, $в$);

$1 < u(t) < 12$; $0.5 < Du(t) < 2$; $-0.5 < v(t) < 3$; $-5.5 < Dv(t) < 5.5$; $3 < w(t) < 7$; $-10 < Dw(t) < 10$ (рис. 16, $з$).

Для повноти класифікації наведемо інші періодичні траєкторії вантажу хитної пружини, підвішеної до рухомого візка.

Постановка задачі. Визначити масу m хитної пружини з довжиною h у невантаженому стані, підвішеної до рухомого візка масою M , яка б забезпечила періодичний коливальний характер руху цього візка відносно початкового його положення. Оберемо параметри коливальної системи такі: маса візка $M=10$; жорсткість пружини $k=35$, довжина $h=3$. Узагальнені координатні функції і послідовність розв'язання задачі оберемо як в попередньому прикладі.

Нехай у початковому положенні хитна пружина розташована горизонтально, тобто $v(0)=\pi/2$. Ініціювання коливань здійснюється лише завдяки маятниковим рухам хитної пружини. Переконаємося, що без початкової умови $du(0)=1$ візок буде рухатися лише ліворуч чи праворуч, і не буде поступально пересуватися у напрямку осі Ox . У попередньому прикладі візок поступально рухався праворуч у тому числі і завдяки такому початковому імпульсу. Початкові значення для параметра w подовження пружини оберемо у вигляді $w(0)=3$; $dw(0)=0$. Тобто початкова довжина хитної пружини дорівнює трьом умовним одиницям.

Отже, задачу розв'язуємо з початковими умовами $u(0)=0$; $du(0)=0$; $v(0)=\pi/2$; $dv(0)=0$; $w(0)=3$; $dw(0)=0$. Згідно з методикою, описаною в роботах [31–34] визначаємо можливі маси m вантажу хитної пружини, які забезпечують періодичні траєкторії: 5.06; 4.59; 3.85 і 1.91 (рис. 18).

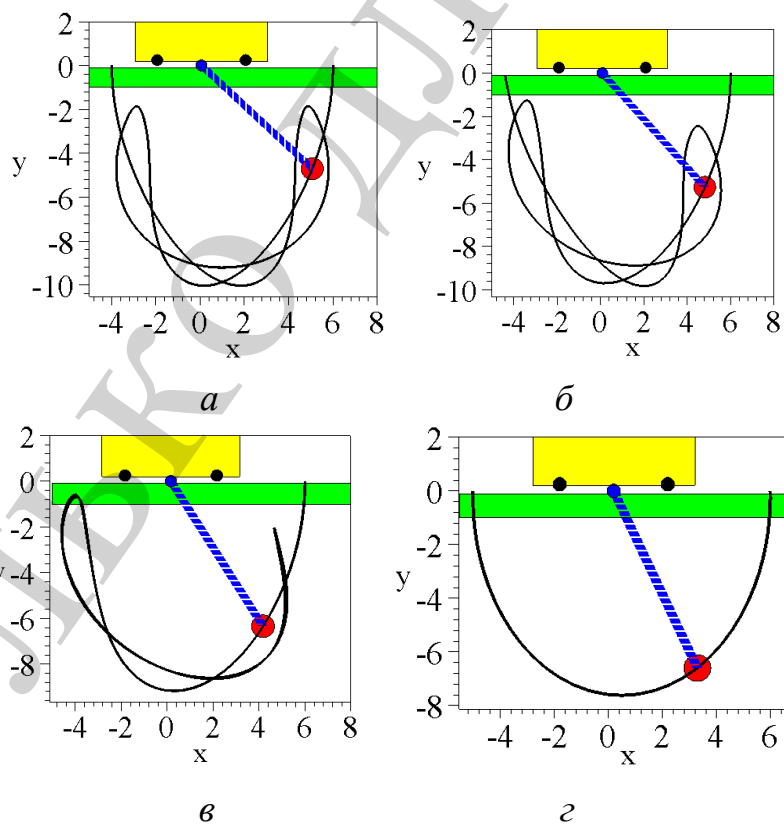


Рис. 18. Періодичні траєкторії руху вантажу хитної пружини для:
 $a - m_2=5.06$; $б - m_2=4.59$; $в - m_2=3.85$; $г - m_2=1.91$

На рис. 19 наведено фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$ і $\{w, Dw\}$, зображені червоним, блакитним і чорним кольором, відповідно.

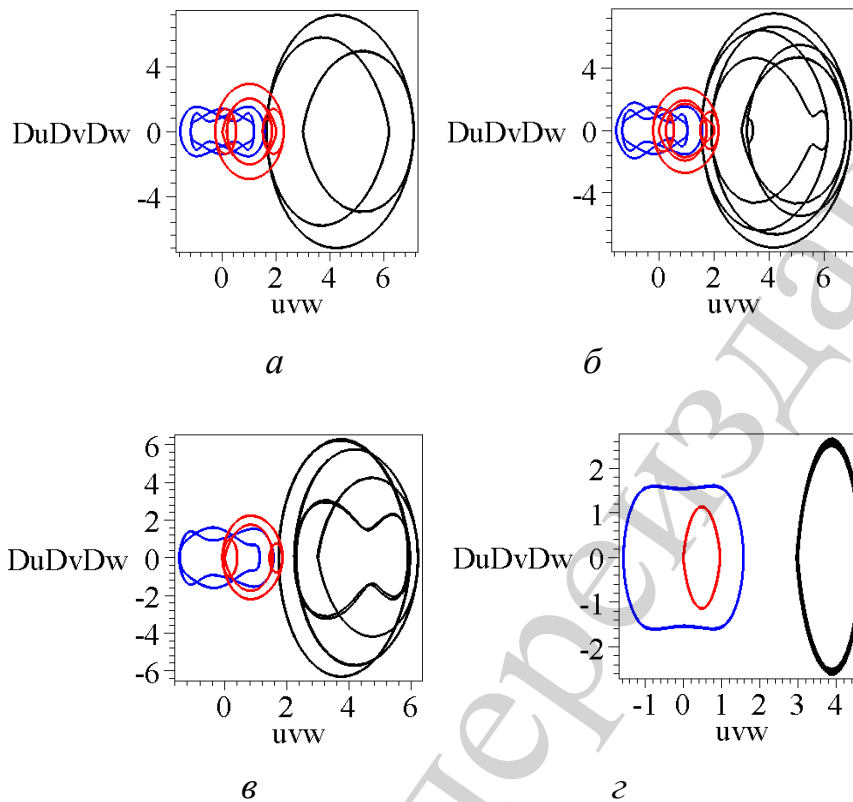


Рис. 19. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$ і $\{w, Dw\}$ для:
 $a - m_2=5.06$; $б - m_2=4.59$; $в - m_2=3.85$; $г - m_2=1.91$

За допомогою одержаних фазових траєкторій можна визначити діапазони зміни функцій узагальнених координат, а також швидкості їх зміни.

6. Обговорення класифікації та результатів моделювання траєкторії переміщення вантажу хитної пружини та її деяких модифікацій

Розроблена класифікація та складена таблиця періодичних траєкторій дозволяють розв'язувати обернені задачі. А саме – долучити до переліку числових параметрів хитної пружини ще й періодичні криві як параметри в графічній формі. Величини відношення горизонтальних і вертикальних періодів коливань хитної пружини дозволяють визначити числові значення таких параметрів, які б забезпечили існування наперед заданої з шести вказаних форм періодичної траєкторії руху вантажу.

Крім того, розроблений спосіб побудови періодичних траєкторій дозволяє оцінювання їх довжин шляхом підрахунку кількості пікселів, що складають зображення траєкторії. Тобто у випадку необхідності з'явилася можливість вказати періодичну траєкторію певної довжини, яку слід враховувати під час дослідження динамічних систем, між частинами яких відбувається «перекачка» енергії.

Наведені в роботі оцінки меж та швидкостей зміни маятникових кутів, а також відповідних подовжень та швидкостей подовжень пружини, дозволяють досліджувати модифікації хитної пружини, наприклад, у вигляді підвішеної до рухомого візка. Відсутність системного підходу до моделювання періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини та її різновидів затрудняло алгоритмічну реалізацію аналогічних впроваджень.

Отримані результати можна пояснити можливістю застосування варіаційного принципу Лагранжа до розрахунку механічних коливань типу хитної пружини. Це дозволило використати рівняння Лагранжа другого роду для опису руху її вантажу.

До ще не реалізованих можливостей геометричного моделювання при дослідженні коливань конкретних хитних пружин належить розгляд їх резонансного стану. Виникає питання: чи може резонансний стан хитної пружини проявлятися періодичною траєкторією руху її вантажу? Який вигляд матиме така періодична траєкторія? Відповіді та такі питання є важливими, адже при цьому найбільш ефективно відбувається кутове розгойдування хитної пружини за рахунок енергії цієї пружини. Розвиток випадкового поперечного збурення проходить до фіксованого значення амплітуди, оскільки запаси енергії пружини кінцеві. Після досягнення такої амплітуди в ході коливань хитної пружини знову відбувається розтягування (або стискання) пружини. Необхідно дослідити діапазон варіювання параметрів з максимумом, що відповідає співвідношенню $\frac{mg}{kh} = \frac{1}{4}$, де m – маса вантажу, k – жорсткість пружини, h – довжина пружини у ненавантаженому стані, $g=9,81$. Необхідно перевірити, за яких умов виконується це співвідношення з прийнятною точністю і як це впливає на зображення періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини. Необхідно визначити кількість можливих періодичних траєкторій для певного набору вхідних параметрів, а також класифікувати зображення періодичних траєкторій та виконати градацію з врахуванням збільшення їх довжин.

Цікаво буде дослідити із зазначених позицій нелінійні зв'язані системи із взаємодіючими підсистемами на прикладах задач техніки. Сходинкою до цієї мети буде дослідження механічних пристроїв, де пружини впливатимуть на траєкторії коливання їх вантажів. Деякі приклади таких пристроїв наведено в даній статті. До них ще доцільно додати механізми з пружинами і з рухомими вантажами, схеми які мають вигляд:

– маятника, закріпленого до вертикальної пружини у напрямному пристрої;

- варіантів подвійного маятника, одним з елементів якого є хитна пружина;
- маятника під рухомим візком, на положення якого впливає пружина.

Труднощі розвитку досліджень в цьому напрямку виникнуть при спробі визначати резонансний стан хитної пружини, яка входить до таких пристроїв. А також у разі дослідження коливань просторової хитної пружини.

7. Висновки

1. Показано, що існує принаймні *шість* геометричних форм періодичних

траєкторій руху вантажу хитної пружини, які відповідають заданим коефіцієнтам жорсткості k та значенням маси m .

2. За допомогою відношення горизонтальних і вертикальних періодів коливань вантажу вдалося визначити шість чисел 1.71; 1.525; 1.36; 1.14; 0.986; 0.9, які відповідають одержаним геометричним формам періодичних траєкторій руху.

3. Виявлено класи періодичних траєкторій руху для:

а) вантажу хитної пружини, вісь якої коливається сумісно з математичним маятником (наприклад, з параметрами $R=8$; $m=15$; $k=150$; $h=2.5$; $M=2.19$ і початковими умовами $v(0)=0$; $dv(0)=1.5$; $u(0)=2$; $du(0)=0$);

б) вантажу, розташованого в спільній точці кріплення двох хитних пружин (наприклад, з параметрами $H=5$; $k=15$; $h=2.5$; $m=0.758$ і початковими умовами $X(0)=2$ і $Y(0)=3$; $dX(0)=0$ і $dY(0)=0$);

в) вантажу хитної пружини, підвішеної до рухомого візка (наприклад, з параметрами $M=500$; $m=86.8$; $k=750$; $h=2.08$ і початковими умовами $u(0)=1$; $du(0)=1$; $v(0)=\pi/2$; $dv(0)=0$; $w(0)=5$; $dw(0)=0$).

4. Для всіх розглянутих варіантів побудовано фазові траєкторії функцій узагальнених координат хитної пружини та її різновидів та надано оцінки діапазону змін їх величин та швидкостей руху вантажу.

Література

1. Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm / de Sousa M. C., Marcus F. A., Caldas I. L., Viana R. L. // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2018. Vol. 509. P. 1110–1119. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.06.089>

2. De Sousa M. C. de S., Marcus F. A. M., Caldas I. L. C. Energy distribution in a spring pendulum // *Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Science and Complexity*. 2016. doi: <https://doi.org/10.20906/cps/nsc2016-0022>

3. Energy Distribution in Spring Pendulums / De Sousa M. C., Marcus F. A., Caldas I. L., Viana R. L. // URL: <https://www.researchgate.net/publication/316187700>

4. Булдакова Д. А., Кирюшин А. В. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники // *Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ»*, 2015. Т. 6, № 2. С. 238–243. URL: http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2015/TGU_6_104.pdf

5. An Investigation of Head-Sea Parametric Rolling and its Influence on Container Lashing Systems / France W. N., Levadou M., Treacle T. W., Paulling J. R., Michel R. K., Moore C. // *SNAME Annual Meeting 2001 Presentation*. 2001. 24 p.

6. Control of Wind-Induced Vibration of Transmission Tower-Line System by Using a Spring Pendulum / Zhang P., Ren L., Li H., Jia Z., Jiang T. // *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Vol. 2015. P. 1–10. doi: <https://doi.org/10.1155/2015/671632>

7. Christensen J. An improved calculation of the mass for the resonant spring pendulum // *American Journal of Physics*. 2004. Vol. 72, Issue 6. P. 818–828. doi: <https://doi.org/10.1119/1.1677269>

8. Bayly P. V., Virgin L. N. An Empirical Study of the Stability of Periodic Motion in the Forced Spring-Pendulum // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1993. Vol. 443, Issue 1918. P. 391–408. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1993.0152>
9. Li-Juan Z., Hua-Biao Z., Xin-Ye L. Periodic solution and its stability of spring pendulum with horizontal base motion // *Acta Physica Sinica*. 2018. Vol. 67, Issue 24. doi: <http://doi.org/10.7498/aps.67.20181676>
10. Клименко А. А., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика пружинного маятника // *Динамические системы*. 2009. Вып. 27. С. 51–65.
11. Cross R. Experimental investigation of an elastic pendulum // *European Journal of Physics*. 2017. Vol. 38, Issue 6. P. 065004. doi: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa8649>
12. Петров А. Г. О вынужденных колебаниях качающейся пружины при резонансе // *Доклады Академии наук*. 2015. Т. 464, № 5. С. 553–557.
13. Петров А. Г., Шундерюк М. М. О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине // *Механика твердого тела*. 2010. № 2. С. 27–40.
14. Lynch P., Houghton C. Pulsation and precession of the resonant swinging spring // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 190, Issue 1-2. P. 38–62. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.09.043>
15. Алдошин Г. Т., Яковлев С. П. Динамика качающейся пружины с подвижным подвесом // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2012. Вып. 4. С. 45–52.
16. Awrejcewicz J., Sendkowski D., Kazmierczak M. Geometrical approach to the swinging pendulum dynamics // *Computers & Structures*. 2006. Vol. 84, Issue 24-25. P. 1577–1583. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.01.003>
17. Зарипов М. Н., Петров А. Г. Нелинейные колебания качающейся пружины // *Докл. РАН*. 2004. Т. 399, № 3. С. 347–352.
18. Dullin H., Giacobbe A., Cushman R. Monodromy in the resonant swing spring // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 190, Issue 1-2. P. 15–37. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.10.004>
19. Gendelman O. V. Transition of Energy to a Nonlinear Localized Mode in a Highly Asymmetric System of Two Oscillators // *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. 2001. P. 237–253. doi: https://doi.org/10.1007/978-94-017-2452-4_13
20. Петров А. Г. Нелинейные колебания качающейся пружины при резонансе // *Известия Российской Академии Наук. Механика Твердого Тела*. 2006. № 5. С. 18–28.
21. The Spring Pendulum (Optional) URL: <http://homepage.math.uiowa.edu/~stroyan/CTLC3rdEd/ProjectsOldCD/estroyan/cd/46/index.htm>
22. Broucke R., Baخa P. A. Periodic solutions of a spring-pendulum system // *Celestial Mechanics*. 1973. Vol. 8, Issue 2. P. 261–267. doi: <https://doi.org/10.1007/bf01231426>
23. Hitzl D. L. The swinging spring – Invariant curves formed by quasi-periodic solutions. III // *Astron and Astrophys*. 1975. Vol. 41, Issue 2. P. 187–198.

24. Hitzl D. L. The swinging spring – Families of periodic solutions and their stability. I // *Astronomy and Astrophysics*. 1975. Vol. 40, Issue 1-2. P. 147–159.
25. Simulation of Nonlinear Spring Pendulum. URL: https://nl.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33168-springpendulum?s_tid=srchtitle
26. El péndulo elástico. URL: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/pendulo_elastico/pendulo_elastico.html
27. Van der Weele J. P., de Kleine E. The order – chaos – order sequence in the spring pendulum // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1996. Vol. 228, Issue 1-4. P. 245–272. doi: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(95\)00426-2](https://doi.org/10.1016/0378-4371(95)00426-2)
28. Gavin H. P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints // CEE 541. Structural Dynamics. 2014.
29. Ganis L. The Swinging Spring: Regular and Chaotic Motion. 2013. URL: http://depts.washington.edu/amath/wordpress/wp-content/uploads/2014/01/leah_ganis_pres.pdf
30. Spring Pendulum. URL: <http://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am34/Mathematica/ch3/pendulum.html>
31. Семків О. М. Метод визначення особливих траєкторій коливань вантажу 2d-пружинного маятника // *Вестник Харківського національного автомобільно-дорожного університету*. 2015. Вып. 71. С. 36–44.
32. Development of projection technique for determining the non-chaotic oscillation trajectories in the conservative pendulum systems / Semkiv O., Shoman O., Sukharkova E., Zhurilo A., Fedchenko H. // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Vol. 2, Issue 4 (86). P. 48–57. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95764>
33. Geometric modeling of the unfolding of a rod structure in the form of a double spherical pendulum in weightlessness / Kutsenko L., Semkiv O., Asotskiy V., Zapolskiy L., Shoman O., Ismailova N. et. al. // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. Vol. 4, Issue 7 (94). P. 13–24. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139595>
34. Development of a method for computer simulation of a swinging spring load movement path / Kutsenko L., Semkiv O., Kalynovskyi A., Zapolskiy L., Shoman O., Virchenko G. et. al. // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 1, Issue 7 (97). P. 60–73. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.154191>
35. Куценко Л. М., Пікрасов М. М., Запольський Л. Л. Ілюстрації до статті “Геометричне моделювання періодичної траєкторії вантажу хитної пружини”. 2018. URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/7637>
36. Куценко Л. М., Пікрасов М. М., Васильєв С. В. Ілюстрації до статті "Класифікація елементів сім'ї періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини". 2019. URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/8658>