

УДК 534.1+517.95

DOI: 10.15587/1729-4061.2019.155148

Аналітичний метод дослідження математичної моделі хвильових процесів з двоточковими умовами за часом

З. М. Нитребич, В. С. Ільків, П. Я. Пукач, О. М. Маланчук, І. В. Когут,
А. П. Сенік

Дослідження та аналіз динамічних процесів у коливальних системах тісно зв'язані зі встановленням точних або наближених аналітичних розв'язків задач математичної фізики, які моделюють такі системи. Математичні моделі поширення хвиль у коливальних системах за певних початкових умов у фіксований момент часу є добре відомими в літературі. Однак хвильові процеси у довгомірних конструкціях за умови дії лише зовнішньої сили і заданих станів процесу у два моменти часу є мало вивченими. Такі процеси змодельовано двоточною за часом задачею для неоднорідного хвильового рівняння в необмеженій області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. У моделі враховано задання лінійної комбінації невідомої амплітуди коливань та швидкості її зміни у два моменти часу. Двоточкова задача загалом є некоректною крайовою задачею, оскільки відповідна однорідна задача має нетривіальні розв'язки. Встановлено клас квазіполіномів як клас існування єдиного розв'язку задачі. Цей клас не містить нетривіальних елементів ядра задачі, що забезпечує єдиність розв'язку задачі. У вказаному класі запропоновано точний метод побудови розв'язку. Суть методу полягає в тому, що розв'язок задачі зображається у вигляді дії диференціального виразу, символом якого є права частина рівняння, на деяку функцію параметрів. Функція спеціальним чином конструюється за рівнянням та двоточковими умовами і має особливості, пов'язані з нулями знаменника – характеристичного визначника задачі.

Метод проілюстровано для опису коливальних процесів нескінченної струни та мембрани.

Головним практичним застосуванням розробленого методу є можливість адекватного математичного моделювання коливальних систем, яке враховує можливість керування параметрами системи. Таке керування параметрами дозволяє здійснювати оптимальний синтез та проектування параметрів відповідних технічних систем з метою аналізу та врахування особливостей динамічних режимів коливань

Ключові слова: коливальні системи, математичні моделі хвильових процесів, диференціально-символьний метод, двоточкова задача, хвильове рівняння

1. Вступ

Адекватне математичне моделювання хвильових процесів у коливальних системах відіграє важливу роль у сучасних підходах до вирішення низки наукових та інженерно-технічних проблем, які виникають у задачах аналізу,

синтезу та оптимізації параметрів машинобудівних конструкцій. Математичне та чисельне моделювання відіграють важливу роль у розумінні суті явищ і процесів, що досліджуються в сучасній механіці та фізиці. Адекватність розглянутих математичних моделей та методів аналізу сприяють інтерпретації існуючих та передбаченню і відкриттю нових явищ. Сучасне промислове обладнання експлуатується в широкому діапазоні параметрів, зокрема, при великих швидкостях, високих тисках і енергіях тощо. Вказані причини вимагають вивчення та аналізу достатньо складних проблем з точки зору сучасного стану розвитку механічної теорії коливань та загальних підходів математичної фізики [1, 2]. Дослідження коливальних і хвильових явищ у пружних конструкціях при дії різного роду збурень (силових, інерційних і кінематичних) складає одну із класичних проблем прикладної механіки [3–5]. Активізація теоретичних досліджень у цьому напрямку зумовлена не лише логікою розвитку основ динаміки деформованих систем, але й інтересами найрізноманітніших практичних застосувань коливальних систем у машинобудуванні, будівництві та інших галузях народного господарства.

Актуальною проблемою сучасного стану досліджень у прикладній механіці залишається розробка нових та розширення існуючих асимптотичних підходів до дослідження математичних моделей коливальних систем. Вказані моделі описуються задачами математичної фізики для випадку одновимірних та двовимірних рівнянь з частинними похідними [6, 7]. Зауважимо, що з одного боку незбурені (лінійні) аналоги таких рівнянь не допускають застосування добре відомого методу відокремлення змінних. З іншого боку, вказані підходи для багатьох класів задач є поки що єдиним із можливих аналітичних методів дослідження складних систем. Асимптотичні методи нелінійної механіки дозволили дослідити широкий клас механічних коливальних систем для випадку нелінійної залежності амплітуди коливань від пружних сил та сил опору.

Однак у більшості випадків лише за наявності точних аналітичних розв'язків лінійних (незбурених) задач [8, 9] можливе подальше застосування асимптотичних методів нелінійної механіки. Проблема знаходження таких розв'язків залишається актуальною дотепер.

Серед задач математичної фізики для диференціальних рівнянь із частинними похідними вигляду

$$L(\partial_t, \partial_x)U(t, x) \equiv [\partial_t^2 + c_1(\partial_x)\partial_t + c_2(\partial_x)]U(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

у якому коефіцієнти рівняння – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_s})$, $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, $s \in \mathbb{N}$, $f(t, x)$ – задана функція, найбільш повно на сьогодні вивчено задачу Коші [8, 9], тобто задачу знаходження розв'язку рівняння (1) в області $(0, \infty) \times \mathbb{R}^s$, що задовольняє початкові умови

$$U(0, x) = \varphi_1(x), \quad \partial_t U(0, x) = \varphi_2(x), \quad (2)$$

де $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ – задані функції.

Якщо б величина $U(t, x)$ та її похідна $\partial_t U(t, x)$ були задані не в один момент часу ($t=0$), а в два (наприклад, при $t=0$ та $t=\tau$, де $\tau > 0$) можливо дуже близькі моменти часу, то одержали б задачу знаходження розв'язку рівняння (1), що в області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^s$ задовольняє такі двоточкові умови за часом

$$U(0, x) = \psi_1(x), \quad \partial_t U(\tau, x) = \psi_2(x) \quad (3)$$

або

$$\partial_t U(0, x) = \psi_1(x), \quad U(\tau, x) = \psi_2(x). \quad (4)$$

Крім умов (3) та (4) розглядають також умови, які поєднують першу умову (3) та другу умову (4) або першу умову (4) і другу умову (3). Всі ці умови, очевидно, є частковим випадком більш загальних локальних двоточкових умов

$$A(\partial_t)U(t, x)|_{t=0} = \psi_1(x), \quad B(\partial_t)U(t, x)|_{t=\tau} = \psi_2(x), \quad (5)$$

де $A(\partial_t) = a_0 + a_1 \partial_t$, $B(\partial_t) = b_0 + b_1 \partial_t$, а комплексні коефіцієнти a_0 , a_1 , b_0 , b_1 задовольняють очевидні умови: $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$.

Двоточкові умови (5) при $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 = b_1 = 0$ мають просту фізичну інтерпретацію – спостереження величини $U(t, x)$ у моменти часу $t=0$ та $t=\tau$.

Двоточкова задача (1), (5) на відміну від задачі Коші (1), (2) володіє новими властивостями. Якщо однорідна задача Коші

$$L(\partial_t, \partial_x)U(t, x) = 0, \quad (6)$$

$$U(0, x) = \partial_t U(0, x) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок $U(t, x) \equiv 0$, то відповідна однорідна задача для рівняння (6) з однорідними умовами

$$A(\partial_t)U(t, x)|_{t=0} = 0, \quad B(\partial_t)U(t, x)|_{t=\tau} = 0 \quad (7)$$

має загалом нетривіальні розв'язки.

Розглянемо, наприклад, однорідну двоточкову задачу для хвильового рівняння

$$[\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s] U(t, x) = 0, \quad (8)$$

$$U(0, x) = 0, \quad U(\tau, x) = 0, \quad (9)$$

де $\Delta_s = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_s}^2$ – s -вимірний оператор Лапласа, а γ – швидкість поширення хвилі. Задача (8), (9) одержується із задачі (6), (7) при

$$c_1(\partial_x) = 0, \quad c_2(\partial_x) = -\gamma^2 \Delta_s, \quad a_0 = b_0 = 1, \quad a_1 = b_1 = 0$$

і має для $s = 1$ та $s = 2$ нетривіальні розв'язки вигляду

$$U(t, x_1) = \sin \frac{\pi t}{\tau} \sin \frac{\pi x_1}{\gamma \tau},$$

$$U(t, x_1, x_2) = x_2 \left\{ \sin \frac{\pi(x_1 - \gamma t)}{\gamma \tau} - \sin \frac{\pi(x_1 + \gamma t)}{\gamma \tau} \right\}.$$

Відзначимо все ж, що деякі однорідні двоточкові задачі подібно до задачі Коші мають лише тривіальне ядро. Наприклад, двоточкова задача для бікалоричного рівняння

$$[\partial_t - \Delta_s]^2 U(t, x) = 0$$

з умовами (9), яка також є частковим випадком задачі (6), (9) при $c_1(\partial_x) = -2\Delta_s$ і $c_2(\partial_x) = \Delta_s^2$, має лише тривіальний розв'язок.

Дослідженню множини нетривіальних розв'язків однорідної задачі (6), (7) присвячені праця [10] для $s=1$, праця [11] для $s=1$ та умов (9), а також стаття [12] для $s \geq 1$.

Таким чином, проблема розширення кола коливальних систем, математичні моделі яких допускають можливість застосування точних аналітичних підходів до дослідження, є достатньо актуальною на сучасному етапі розвитку механічної теорії коливань. Вказана актуальність зростає у міру появи все нових складних механічних систем різної структури та необхідності синтезу та оптимізації параметрів відповідного промислового обладнання. Розроблення диференціально-символьного методу дослідження хвильового процесу, здійснене у цій роботі, є актуальним питанням прикладної механіки.

2. Аналіз літературних джерел та формулювання проблеми

Двоточкові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними, загалом, є некоректними крайовими задачами. Перші дослідження таких

двоточкових та більш загальних n -точкових задач з відомими значеннями $U(t, x)$ в n моментів часу для диференціального рівняння з частинними похідними порядку n за часом містяться у працях [13, 14]. У цих дослідженнях, а також в подальших працях [15–17] для ізотропних та у [18, 19] для анізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними щодо коректності n -точкових (багатоточкових) задач накладалися додаткові умови 2π -періодичності розв'язку за просторовими координатами і проводились оцінки знизу малих знаменників, що притаманні цим задачам.

Встановленню класів коректної розв'язності n -точкових задач в необмежених областях (без додаткових обмежень за просторовими змінними) для окремих рівнянь із частинними похідними присвячені праці [20, 21], а для систем рівнянь із частинними похідними – [22, 23].

Зауважимо, що задачі з багатоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними є узагальненням n -точкових задач для звичайних диференціальних рівнянь – задач Валле-Пуссена [24, 25]. Цим проблемам присвячені, зокрема, дослідження [26, 27] для лінійного випадку, а також [28, 29] для нелінійного випадку.

Недостатньо дослідженою залишається двоточкова задача для рівняння

$$\left[\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s \right] U(t, x) = f(t, x), \quad (10)$$

з умовами (9), яка моделює хвильові процеси різноманітної природи, які відбуваються під дією зовнішньої сили $f(t, x)$, коли задано стани процесу у два моменти часу. Крім умов (9) цікавими є умови (7), коли у два моменти часу $t=0$ та $t=\tau$ задаються лінійні комбінації $U(t, x)$ та $\partial_t U(t, x)$, які будуть однаковими і нульовими.

Зауважимо, що рівняння (10) має широке застосування. Це рівняння описує поширення вимушених коливань струни та мембрани [30, 31], поширення електромагнітних хвиль [32], поширення хвиль у морі [33], сейсмічних хвиль [34, 35]. У медицині рівняння (10) описує поширення пульсуючої хвилі [36, 37], а також процес зміни тиску крові [38]. Потенціал швидкостей в акустичній моделі руху плазми [39] також описується рівнянням (10).

Для задачі (10), (7), яка є некоректною, встановимо клас квазіполіномів як клас існування та єдиності розв'язку задачі. У цьому класі буде усунута проблема малих знаменників, притаманна цим задачам. Для розв'язування задачі доцільним буде застосування диференціально-символьного методу. Зауважимо, що згаданий метод ефективно застосовувався раніше до розв'язування подібних задач з лінійними умовами за виділеною часовою змінною (з початковими умовами в [40, 41], інтегральними умовами в [42], умовами Діріхле в [43] та локальними двоточковими умовами в [44, 45]).

Отже, застосування нового диференціально-символьного методу до розв'язування задачі (10), (7) дасть змогу отримати точні розв'язки задачі та встановити характер хвильових процесів. Треба зауважити, що саме точні розв'язки дають змогу аналізувати параметри вказаних систем та ефективно

керувати ними. Для здійснення цього завдання довелося модифікувати математичну модель процесу з урахуванням довгомірності конструкцій та розробити методику адаптації диференціально-символьного методу до відповідних модифікованих моделей. Відзначимо, що аналіз літературних джерел, проведений вище, показує наступне: такий підхід до дослідження математичних моделей хвильових процесів є новаторським.

Недоліком розробленого методу є неможливість його застосування у випадках, коли просторові розміри відповідного тіла є співмірним з величиною амплітуди коливань. Як показують проведені чисельні експерименти, ефективно та адекватно можна досліджувати динамічні процеси у випадках, коли просторові розміри тіла є величинами на декілька порядків більшими за величину амплітуди коливань.

3. Ціль та задачі дослідження

Проведені дослідження ставили за мету змоделювати поведінку хвильових процесів, що відбуваються під дією зовнішньої сили, у будь-який момент часу в довільній точці простору, якщо відомі дані про процес у два моменти часу. Для побудови розв'язку модельної двоточної за часом задачі буде застосовано диференціально-символьний метод. Це дасть змогу отримати явний розв'язок відповідної двоточної задачі та керувати параметрами математичної моделі з метою виявлення та уникнення динамічних режимів коливань, які для даного технологічного процесу є неможливими або небезпечними (резонансні режими, режим биття коливань тощо).

Для досягнення поставленої мети вирішувались наступні завдання:

– запропонувати метод побудови точного аналітичного розв'язку відповідної двоточної задачі та аналізу параметрів динамічних процесів у математичних моделях широкого класу коливальних систем;

– проілюструвати метод побудови розв'язку та аналізу коливальних процесів у лінійних системах для випадків нескінченної струни та мембрани.

У сукупності проведені дослідження значно розширяють коло математичних моделей хвильових процесів, які допускають точний аналітичний опис. Зручний з точки зору практичних інженерних застосувань диференціально-символьний метод дозволить здійснювати аналіз та синтез параметрів широкого кола технологічних систем, які описуються вказаними моделями.

4. Однозначна розв'язність двоточної задачі у класі квазіполіномів

Для непорожніх множин $M \subseteq \mathbb{C}^s$ та $\mathbb{C}^s \setminus M$ розглянемо клас квазі-поліномів $K_{\mathbb{C}, M}$, тобто клас функцій вигляду

$$g(t, x) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N Q_{kj}(t, x) e^{\beta_j t + \alpha_k \cdot x}, \quad m, N \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^s, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

де $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{C}$ і є попарно різними, вектори $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1s}), \dots, \alpha_m = (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{ms})$ є також попарно різними і належать до множини M , $Q_{11}(t, x), \dots, Q_{mN}(t, x)$ – поліноми з комплексними коефіцієнтами, $\alpha_k \cdot x = \alpha_{k1}x_1 + \dots + \alpha_{ks}x_s$. Множину M підбиратимемо так, щоб клас $K_{\mathbb{C}, M}$ був класом однозначної розв’язності задачі (10), (7).

Подібно як у працях [45, 46] розглянемо цілу функцію вектор-параметра $v = (v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{C}^s$ вигляду

$$\Delta(v) = \frac{\sinh[\gamma \|v\| \tau]}{\gamma \|v\|} (a_0 b_0 - \gamma^2 \|v\|^2 a_1 b_1) + \cosh[\gamma \|v\| \tau] (a_0 b_1 - a_1 b_0). \quad (12)$$

Зауважимо, що $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_s^2}$ і $\Delta(v) = a_0 b_0 \tau + a_0 b_1 - a_1 b_0$ для $\|v\| = 0$, а також той факт, що функція (12) є квазіполіномом щодо τ для довільного $v \in \mathbb{C}^s$.

Нехай L – множина нулів функції (12), тоді покладемо $M = \mathbb{C}^s \setminus L$, а силу $f(t, x)$ у рівнянні (10), яка зумовлює хвильовий процес, вважаємо квазіполіномом, що належить до $K_{\mathbb{C}, M}$, і має вигляд

$$f(t, x) = Q(t, x) e^{\beta t + \alpha \cdot x}, \quad (13)$$

де $Q(t, x)$ – поліном з комплексними коефіцієнтами, $\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \in M$.

Покажемо, що для функції $f(t, x)$ вигляду (13) з класу $K_{\mathbb{C}, M}$ існує єдиний розв’язок задачі (10), (7), який належить до цього ж класу. Цей розв’язок можна знайти за формулою

$$U(t, x) = Q(\partial_\lambda, \partial_v) F(t, x, \lambda, v) \Big|_{\lambda=\beta, v=\alpha}, \quad (14)$$

у якій $Q(\partial_\lambda, \partial_v)$ – диференціальний поліном, який одержується з $Q(t, x)$ заміною t на ∂_λ та x на ∂_v , а також

$$F(t, x, \lambda, v) = \frac{e^{\lambda t} - B(\lambda) e^{\lambda \tau} H_1(t, v) - A(\lambda) H_2(t, v)}{\lambda^2 - \gamma^2 \|v\|^2} e^{v \cdot x}, \quad (15)$$

$$H_1(t, v) = \left(a_0 \frac{\sinh[\gamma \|v\| t]}{\gamma \|v\|} - a_1 \cosh[\gamma \|v\| t] \right) \Delta^{-1}(v),$$

$$H_2(t, v) = \left(b_0 \frac{\sinh[\gamma \|v\|(1-t)]}{\gamma \|v\|} + b_1 \cosh[\gamma \|v\|(1-t)] \right) \Delta^{-1}(v).$$

Функція (14), як результат дії диференціального виразу $Q(\partial_\lambda, \partial_v)$ на (15) і покладання $\lambda = \beta$ та $v = \alpha$, є квазіполіномом із класу $K_{C,M}$. Покажемо спочатку, що цей квазіполіном задовольняє рівняння (10). Справді,

$$\begin{aligned} [\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s] U(t, x) &= [\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s] \left\{ Q(\partial_\lambda, \partial_v) F(t, x, \lambda, v) \right\} \Big|_{\lambda=\beta, v=\alpha} = \\ &= Q(\partial_\lambda, \partial_v) [\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s] F(t, x, \lambda, v) \Big|_{\lambda=\beta, v=\alpha} = \\ &= Q(\partial_\lambda, \partial_v) \frac{[\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s] e^{\lambda t + v x} - B(\lambda) e^{\lambda t} [\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s] (H_1(t, v) e^{v x}) - A(\lambda) [\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s] (H_2(t, v) e^{v x})}{\lambda^2 - \gamma^2 \|v\|^2} \Big|_{\lambda=\beta, v=\alpha} = \\ &= Q(\partial_\lambda, \partial_v) \frac{(\lambda^2 - \gamma^2 \|v\|^2) e^{\lambda t + v x} - 0 - 0}{\lambda^2 - \gamma^2 \|v\|^2} \Big|_{\lambda=\beta, v=\alpha} = Q(\partial_\lambda, \partial_v) e^{\lambda t + v x} \Big|_{\lambda=\beta, v=\alpha} = \\ &= Q(t, x) e^{\lambda t + v x} \Big|_{\lambda=\beta, v=\alpha} = Q(t, x) e^{\beta t + \alpha x} = f(t, x). \end{aligned}$$

У ланцюжку виразів використано комутативність операторів диференціювання, а також рівності

$$[\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s] e^{\lambda t + v x} = (\lambda^2 - \gamma^2 \|v\|^2) e^{\lambda t + v x},$$

$$Q(\partial_\lambda, \partial_v) e^{\lambda t + v x} = Q(t, x) e^{\lambda t + v x},$$

$$[\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s] (H_1(t, v) e^{v x}) = [\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_s] (H_2(t, v) e^{v x}) = 0,$$

які легко перевірити безпосереднім диференціюванням.

Функція (14) задовольняє також умови (7). На підставі рівностей

$$A(\partial_t) H_1(t, v) \Big|_{t=0} = 0, \quad A(\partial_t) H_2(t, v) \Big|_{t=0} = 1$$

маємо

$$\begin{aligned}
A(\partial_t)U(t, x) \Big|_{t=0} &= A(\partial_t)Q(\partial_\lambda, \partial_\nu)F(t, x, \lambda, \nu) \Big|_{\lambda=\beta, \nu=\alpha, t=0} = \\
&= Q(\partial_\lambda, \partial_\nu)A(\partial_t)F(t, x, \lambda, \nu) \Big|_{\lambda=\beta, \nu=\alpha, t=0} = \\
&= Q(\partial_\lambda, \partial_\nu) \frac{A(\lambda)e^{\lambda t} - B(\lambda)e^{\lambda \tau} A(\partial_t)H_1(t, \nu) - A(\lambda)A(\partial_t)H_2(t, \nu)}{\lambda^2 - \gamma^2 \|\nu\|^2} e^{\nu \cdot x} \Big|_{\substack{\lambda=\beta, \\ \nu=\alpha, \\ t=0}} = \\
&= Q(\partial_\lambda, \partial_\nu) \frac{A(\lambda) - 0 - A(\lambda)}{\lambda^2 - \gamma^2 \|\nu\|^2} \Big|_{\lambda=\beta, \nu=\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Аналогічно, використовуючи рівності

$$B(\partial_t)H_1(t, \nu) \Big|_{t=\tau} = 1, \quad B(\partial_t)H_2(t, \nu) \Big|_{t=\tau} = 0,$$

доводимо виконання другої умови з двоточкових умов (7).

Доведення єдиності розв'язку задачі (10), (7) у класі $K_{C, M}$ методом від супротивного зводимо до доведення тривіальності у цьому класі розв'язку задачі (8), (7). Остання властивість випливає з результатів роботи [46].

Зауваження 1. Якщо в рівнянні (10) квазіполіном $f(t, x)$ має більш загальний вигляд (11), то згідно з принципом лінійної суперпозиції розв'язок задачі (10), (7) матиме вигляд такої суми:

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N Q_{kj}(\partial_\lambda, \partial_\nu) F(t, x, \lambda, \nu) \Big|_{\lambda=\beta_j, \nu=\alpha_k}. \quad (16)$$

Зауваження 2. Розв'язки задачі (10), (7) у вигляді (14) та (16) є квазіполіномами. Побудові множин поліномних та квазіполіномних розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними та відповідних крайових задач присвячені численні дослідження [47–49].

5. Вимушені коливання нескінченної струни з двома заданими її профілями

Розглянемо коливання нескінченної тонкої струни під дією зовнішньої сили $f(t, x)$, коли профілі струни в моменти часу $t=0$ та $t=1$ є однаковими (нульовими). Такий процес моделюється двоточною задачею

$$[\partial_t^2 - \gamma^2 \partial_x^2] U(t, x) = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$U(0, x) = U(1, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Для задачі (17) як задачі (10), (7) маємо $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 = b_1 = 0$,

$$\Delta(v) = \frac{\sinh[\gamma v]}{\gamma v}, \quad \Delta(0) = 1,$$

$$L = \left\{ v = \pm i \frac{\pi k}{\gamma}, \quad i^2 = -1, \quad k \in \mathbb{N} \right\}, \quad (18)$$

$$H_1(t, v) = \frac{\sinh[\gamma vt]}{\sinh[\gamma v]}, \quad H_1(t, 0) = t, \quad H_2(t, v) = H_1(1-t, v).$$

Якщо $f(t, x)$ має вигляд (13), у якому $s = 1$ і $\alpha \in M = \mathbb{C} \setminus L$, де L – множина (18), то розв'язок задачі (17) знаходимо за формулою (14), де

$$\begin{aligned} F(t, x, \lambda, v) &= \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda} H_1(t, v) - H_2(t, v)}{\lambda^2 - \gamma^2 v^2} e^{vx} = \\ &= \frac{e^{\lambda t} - \frac{e^{\lambda} \sinh[\gamma vt] + \sinh[\gamma v(1-t)]}{\sinh[\gamma v]}}{\lambda^2 - \gamma^2 v^2} e^{vx}. \end{aligned}$$

Якщо коливальний процес відбувається за рахунок лінійного зовнішнього впливу, тобто $f(t, x) = Q(t, x) = at + bx + c$, де $a, b, c \in \mathbb{R}$ і $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, то $\beta = 0$, $\alpha = 0 \in M = \mathbb{C} \setminus L$, а розв'язок задачі (17) знаходимо за формулою

$$\begin{aligned} U(t, x) &= (a \partial_\lambda + b \partial_v + c) F(t, x, \lambda, v) \Big|_{\lambda=v=0} = \\ &= a F'_\lambda(t, x, 0, 0) + b F'_v(t, x, 0, 0) + c F(t, x, 0, 0) = \\ &= \frac{1}{6} (t-1)t (at + 3bx + 3c + a). \end{aligned}$$

Зокрема, розв'язок задачі (17) для $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$ має вигляд

$$U(t, x) = \frac{1}{6} t(t-1)(5t + 9x + 11).$$

Графік цієї функції (залежності величини амплітуди коливань від часу для кожної точки струни) зображено на рис. 1.

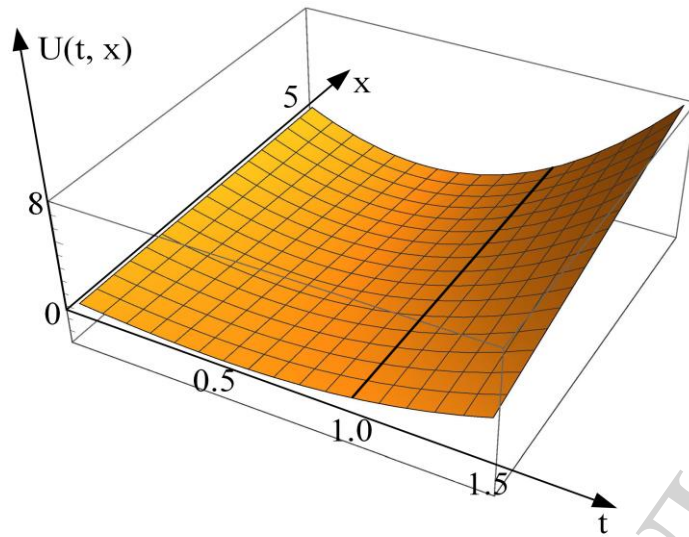


Рис. 1. Графік функції $U(t, x)$ у випадку $a=5, b=3, c=2$

Отже, під дією лінійної зовнішньої сили амплітуда струни має кубічну залежність від часу для фіксованого x та лінійну залежність за змінною x в довільний момент часу $t > 0$.

6. Вимушені коливання нескінченної мембрани з двома заданими профілями

Розглянемо двоточкову задачу (17), якщо $s = 2$, тобто задачу

$$\left[\partial_t^2 - \gamma^2 \Delta_2 \right] U(t, x) = f(t, x), \quad t > 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$U(0, x) = U(1, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (19)$$

яка є математичною моделлю процесу коливань безмежної мембрани під дією зовнішньої сили $f(t, x)$ з відомими однаковими (нульовими) положеннями мембрани в момент часу $t = 0$ та $t = 1$. Для задачі (19) маємо

$$\Delta(v_1, v_2) = \frac{\sinh \left[\gamma \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \right]}{\gamma \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \quad (\Delta(v_1, v_2) = 1 \text{ для } v_1^2 + v_2^2 = 0),$$

$$L = \left\{ v = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2: \quad \gamma^2 (v_1^2 + v_2^2) + \pi^2 k^2 = 0, \quad k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$F(t, x, \lambda, v) = \frac{e^{\lambda t} - e^\lambda H_1(t, v) - H_2(t, v)}{\lambda^2 - \gamma^2 (v_1^2 + v_2^2)} e^{v_1 x_1 + v_2 x_2},$$

$$H_1(t, v_1, v_2) = \frac{\sinh\left[\gamma\sqrt{v_1^2 + v_2^2 t}\right]}{\sinh\left[\gamma\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right]}, \quad H_2(t, v) = H_1(1-t, v).$$

Розглянемо процес коливання нескінченної мембрани в умовах сталої зовнішньої сили, тобто $f(t, x) = Q(t, x) = b$, $b > 0$. Оскільки стала b є квазіполіномом, у якому $\beta = 0$, $\alpha = (0, 0) \in M = \mathbb{C}^2 \setminus L$, то розв'язок задачі (19) шукаємо за формулою

$$\begin{aligned} U(t, x) &= bF(t, x, \lambda, v) \Big|_{\lambda=0, v_1=v_2=0} = bF(t, x, 0, 0, 0) = b \frac{e^{\lambda t} - (1-t) - e^{\lambda} t}{\lambda^2} \Big|_{\lambda=0} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b \frac{te^{\lambda t} - te^{\lambda}}{2\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b \frac{t^2 - t}{2} = \frac{1}{2}bt(t-1). \end{aligned}$$

Одержали, що амплітуда коливань – розв'язок $U(t, x)$ задачі (19) не залежить від просторових координат і має від часу квадратичну залежність, а швидкість зміни амплітуди – похідна $\partial_t U(t, x)$ має лінійну залежність (див. рис. 2, а, б при $b = 5$).

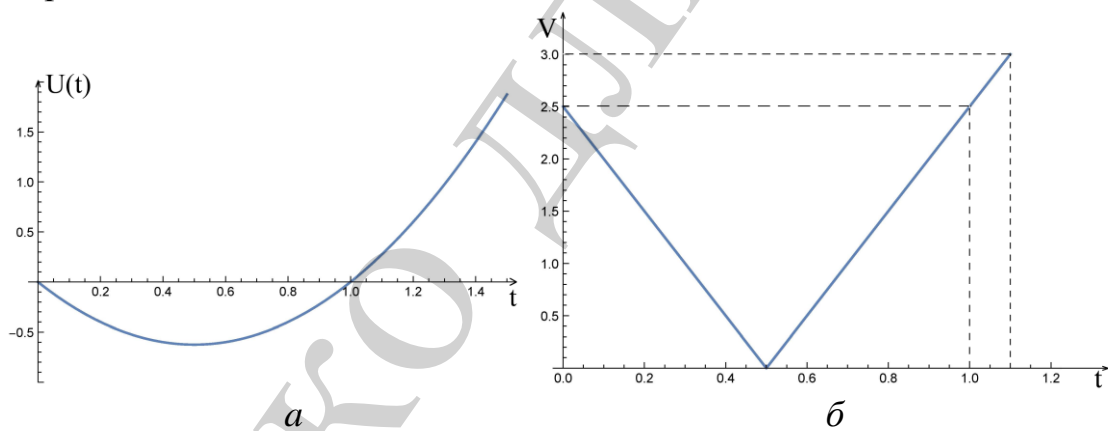


Рис. 2. Графіки функцій: а – для $U = U(t, x)$; б – для $V = |\partial_t U(t, x)|$

У різні моменти часу $t \geq 0$ величина амплітуди $U(t, x)$ є сталою для довільного $x \in \mathbb{R}^2$. Початкова площина мембрани, зберігаючи свою форму, рухається зі швидкістю $|t - 0,5|b$ спочатку вниз, досягаючи мінімуму $-b/8$, а потім ввверх, досягаючи значення b в точці $t = 2$ (рис. 3).

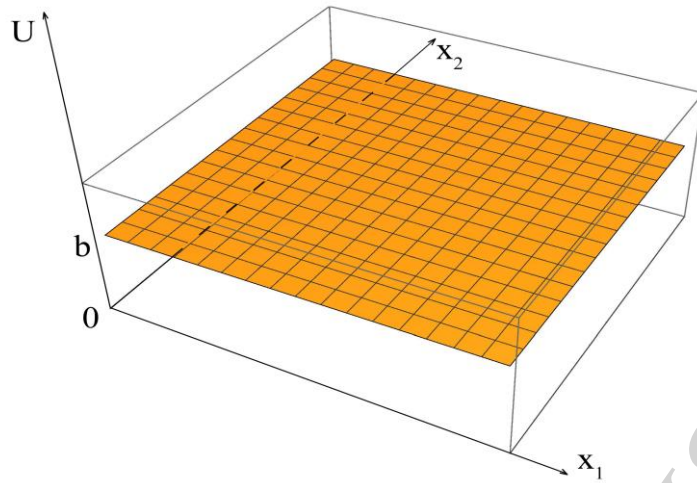


Рис. 3. Графік функції $U(t, x)$ в момент часу $t=2$

Дослідимо тепер коливальний процес у мембрані, якщо зовнішня сила має експоненційний характер, а саме $f(t, x) = te^{3x_1+4x_2}$, тобто $Q(t, x) = t$, $\beta = 0$, $\alpha = (3, 4) \in M$.

За формулою (14) знаходимо

$$\begin{aligned}
 U(t, x) &= \partial_\lambda \left\{ F(t, x, \lambda, \nu) e^{\nu \cdot x} \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu_1=3, \nu_2=4} = \\
 &= e^{3x_1+4x_2} \partial_\lambda \left\{ \frac{e^{\lambda t} \sinh[5\gamma] - e^\lambda \sinh[5\gamma t] - \sinh[5\gamma(1-t)]}{(\lambda^2 - 25\gamma^2) \sinh[5\gamma]} \right\} \Big|_{\lambda=0} = \\
 &= \frac{e^{3x_1+4x_2}}{25\gamma^2} \left(\frac{\sinh[5\gamma t]}{\sinh[5\gamma]} - t \right).
 \end{aligned}$$

Для $\gamma = 1$ і $U(t, x) = \left(\frac{\sinh 5t}{\sinh 5} - t \right) \frac{e^{3x_1+4x_2}}{25}$ отримуємо такі стани квадратної частини мембрани з умовою $x \in [0, 1]^2$ в моменти часу $t = 0$, $t = 0,5$, $t = 1$, $t = 2$ (рис. 4–6).

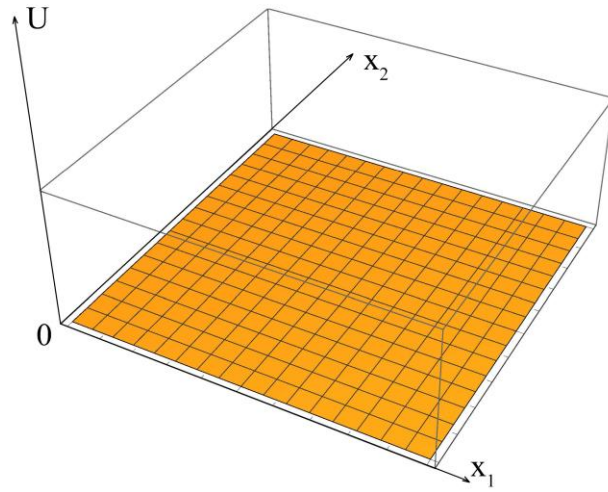


Рис. 4. Графік функції $U=U(t, x)$ у моменти часу $t=0$ та $t=1$

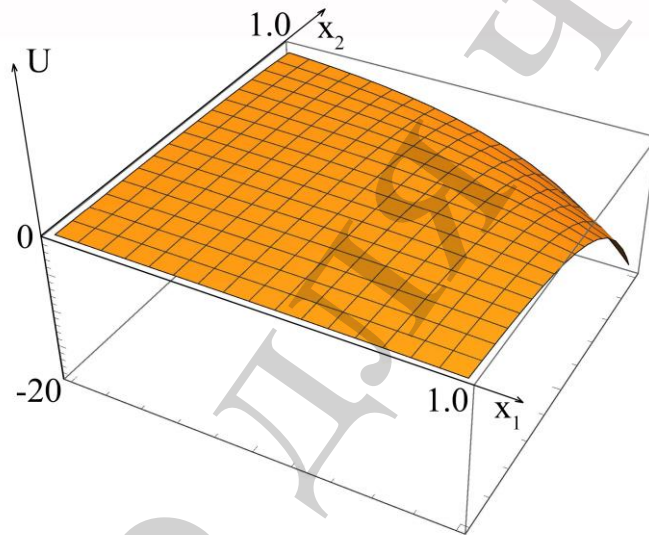


Рис. 5. Графік функції $U=U(t, x)$ у момент часу $t=0,5$

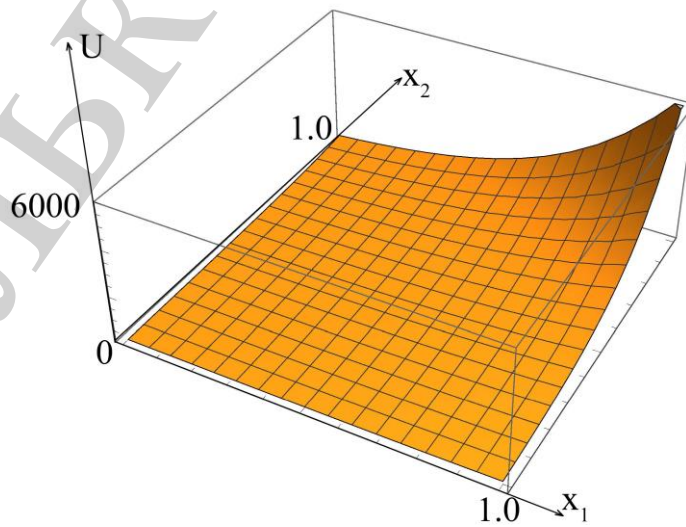


Рис. 6. Графік функції $U=U(t, x)$ у момент часу $t=2$

Найбільшу швидкість і найбільше відхилення від положення рівноваги має кутова точка з координатами $x_1 = x_2 = 1$. Зі зростанням часу початкова площа мембрани деформується, зміщуючись вниз до мінімального положення, потім рухається вверху, збігаючись з початковою площиною, а потім знову деформується, зміщуючись вверху. При цьому для всіх $x \in [0,1]^2$ або $U = 0$, або $U > 0$, або $U < 0$.

Дослідимо коливання мембрани під дією зовнішньої сили

$$f(t, x) = \sin(3x_1 + 4x_2 + t),$$

яка є квазіполіномом вигляду (11), тобто

$$f(t, x) = \frac{1}{2i} e^{(3x_1+4x_2+t)i} - \frac{1}{2i} e^{-(3x_1+4x_2+t)i},$$

де

$$Q_1(t, x) = \frac{1}{2i}, \quad Q_2(t, x) = -\frac{1}{2i},$$

$$\beta_1 = i, \quad \beta_2 = -i,$$

$$\alpha_1 = (3i, 4i), \quad \alpha_2 = (-3i, -4i), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in M.$$

Відповідно до зауваження 1 розв'язок задачі (19) шукаємо за формулою (16):

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \frac{1}{2i} \left\{ F(t, x, \lambda, \nu) e^{\nu \cdot x} \right\} \Big|_{\lambda=i, \nu_1=3i, \nu_2=4i} - \frac{1}{2i} \left\{ F(t, x, \lambda, \nu) e^{\nu \cdot x} \right\} \Big|_{\lambda=-i, \nu_1=-3i, \nu_2=-4i} \\ &= e^{i(3x_1+4x_2)} \frac{e^{\lambda t} \sin[5\gamma] - e^{\lambda} \sin[5\gamma t] - \sin[5\gamma(1-t)]}{2i(\lambda^2 - 25\gamma^2) \sin[5\gamma]} \Big|_{\lambda=i} - \\ &- e^{-i(3x_1+4x_2)} \frac{e^{\lambda t} \sin[5\gamma] - e^{\lambda} \sin[5\gamma t] - \sin[5\gamma(1-t)]}{2i(\lambda^2 - 25\gamma^2) \sin[5\gamma]} \Big|_{\lambda=-i} = \\ &= \frac{\sin[5\gamma] \sin[3x_1 + 4x_2 + t] + \sin[5\gamma(t-1)] \sin[3x_1 + 4x_2] - \sin[5\gamma t] \sin[3x_1 + 4x_2 + 1]}{(25\gamma^2 - 1) \sin[5\gamma]}. \end{aligned}$$

Для $\gamma = 1$ розв'язком задачі (19) є функція вигляду

$$U(t, x) = \frac{\sin[5] \sin[3x_1 + 4x_2 + t] + \sin[5(t-1)] \sin[3x_1 + 4x_2] - \sin[5t] \sin[3x_1 + 4x_2 + 1]}{24 \sin[5]}.$$

Нехай Ouv – система координат, що утворена поворотом координатних осей Ox_1 та Ox_2 на кут φ , для якого $\operatorname{tg} \varphi = 3/4$. Тоді $5u = 3x_1 + 4x_2$, $5v = 3x_1 - 4x_2$ і розв’язок $U(t, x)$ задачі (19) не залежить від змінної v , а залежить лише від t та u , зокрема,

$$U(t, x) = \frac{1}{24} V(t, u),$$

де

$$V(t, u) = \sin[t + 5u] - \frac{\sin[5t] \sin[5u + 1]}{\sin[5]} + \frac{\sin[5t - 5] \sin[5u]}{\sin[5]}.$$

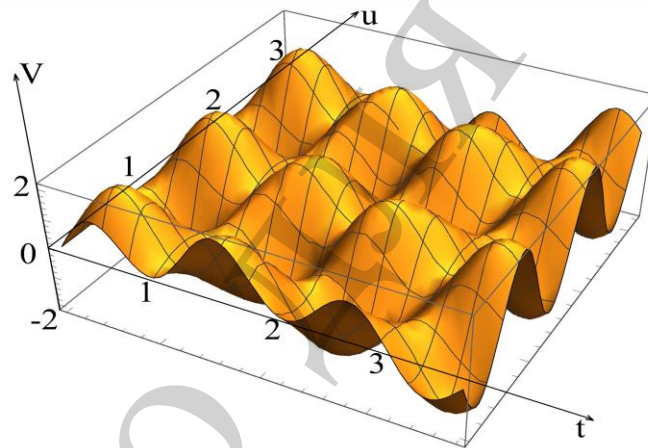


Рис. 7. Графік функції $V(t, u)$

Функція $V(t, u)$, зображена на рис. 7, є двочастотним коливанням з одиничною частотою за часом (фаза $5u$) та частотою 5 (фаза 0, амплітуда $-\sin^{-1}[5] \sin[5u + 1]$ і фаза (-5) та амплітуда $\sin^{-1}[5] \sin[5u]$). За змінною u функція $V(t, u)$ є одночастотним коливанням (частота 5) з фазами $-t$, 1, 0 та амплітудами 1, $-\sin^{-1}[5] \sin[5t]$, $\sin^{-1}[5] \sin[5t - 5]$.

Зауваження. Зазначимо, що описана тут методика дає можливість точних оцінок фізико-механічних параметрів тіла у математичних моделях коливань з метою уникнення, зокрема, резонансних динамічних режимів тощо.

7. Обговорення результатів моделювання хвильових процесів з двоточковими умовами за часом

Запропоновано модифіковану математичну модель поширення хвильових процесів у одно- та двовимірних довгомірних конструкціях. Точні аналітичні розв'язки задач математичної фізики отримано у цій роботі завдяки застосуванню диференціально-символьного методу, який дозволяє конструктивно оцінити вплив параметрів коливальної системи на хвильовий процес.

Перевагою дослідження моделі є те, що для побудови розв'язку задачі використано диференціально-символьний метод, який є новим та ефективним при розв'язуванні задач в необмежених областях з умовами за однією виділеною змінною. Цією виділеною змінною у роботі є часова змінна. Отже, на відміну від наближених підходів, які ґрунтуються на застосуванні чисельних методів, вдалося аналітично описати усі особливості динамічних процесів у вказаних математичних моделях коливань. Зокрема, обґрунтовано можливість точного знаходження параметрів, за яких система перебуває у резонансному режимі, режимі биття коливань тощо.

Розроблена у роботі методика досліджень має і свої обмеження та недоліки. Вона, зокрема, є незастосовною до вивчення математичних моделей тіл, які не можуть бути описані терміном “довгомірні”. Зокрема, мова йде про коливання, максимальні значення амплітуд яких відрізняються від лінійних розмірів об'єкта менше, ніж на порядок.

Дослідження двоточкових задач проілюстровано для випадку коливань нескінченної струни ($s=1$) та нескінченної мембрани ($s=2$). Проведено графічний та числовий аналіз відповідних коливальних процесів, і, що надзвичайно важливо, побудовано точні розв'язки розглянутих задач. Отримані числові результати підтверджують задовільну з точки зору практичних застосувань точність отриманого розв'язку та роблять можливим підбір параметрів технологічних коливальних систем. Такий підбір параметрів, описаних вказаними математичними моделями, забезпечує ефективні режими роботи відповідного обладнання.

Пропонована методика у подальшому може бути використана для дослідження більш складних математичних моделей коливальних систем: нелінійної (збуреної) моделі коливань струни та мембрани, лінійних та нелінійних моделей коливань з урахування дисипативних сил тощо.

8. Висновки

1. Задача знаходження розв'язку рівняння Пуассона, що задовольняє однорідні умови в моменти часу $t = 0$ та $t = \tau$ (задача (10), (7)), є математичною моделлю коливальних процесів із заданими станами процесу у два моменти часу. За допомогою введення до розгляду вказаної задачі уточнено та модифіковано модель лінійних коливань довгомірних тіл.

2. Задача (10), (7) є некоректною крайовою задачею, оскільки відповідна однорідна задача має нетривіальні розв'язки. Тому для однозначної розв'язності задачі було введено клас квазіполіномних функцій спеціального

вигляду, у якому відсутні елементи ядра задачі. Цього вдалося досягнути шляхом вибору множини, що не містить нулів характеристичного визначника. Показано, що у зазначеному класі існує єдиний розв'язок досліджуваної задачі.

3. У роботі для дослідження та аналізу динамічних процесів у математичних моделях деяких коливальних систем запропоновано використувати такий аналітичний диференціально-символьний метод, який дозволяє конструктивно будувати розв'язки відповідних двочкових задач у спеціальних класах квазіполіномних функцій.

4. Отримані у статті аналітичні, числові та графічні результати підтверджують ефективність запропонованого методу при дослідженні хвильових процесів у довгомірних конструкціях, а також адекватність модифікованих математичних моделей реальним прототипам коливальних систем.

Література

1. On nonexistence of global in time solution for a mixed problem for a nonlinear evolution equation with memory generalizing the Voigt-Kelvin rheological model / Pukach P., Il'kiv V., Nytrebych Z., Vovk M. // *Opuscula Mathematica*. 2017. Vol. 37, Issue 45. P. 735. doi: <https://doi.org/10.7494/opmath.2017.37.5.735>
2. Чабан А. Математичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах. Львів: Видавництво Тараса Сороки, 2008. 328 с.
3. Pukach P. Ya., Kuzio I. V. Resonance phenomena in quasi-zero stiffness vibration isolation systems // *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. 2015. Issue 3. P. 62–67.
4. Бондаренко В. И., Самуся В. И., Смоланов С. Н. Мобильные подъемные установки для аварийно-спасательных работ в шахтных стволах // *Горный журнал*. 2005. № 5. С. 99–100.
5. Samusya V., Oksen Y., Radiuk M. Heat pumps for mine water waste heat recovery // *Mining of Mineral Deposits*. 2013. P. 153–157. doi: <https://doi.org/10.1201/b16354-27>
6. Bayat M., Pakar I., Bayat M. Approximate analytical solution of nonlinear systems using homotopy perturbation method // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*. 2014. Vol. 230, Issue 1. P. 10–17. doi: <https://doi.org/10.1177/0954408914533104>
7. Magrab E. B. *An Engineer's Guide to Mathematica*. John Wiley and Sons, 2014. 452 p.
8. Friedman A. *Partial differential equation*. New York: Dover Publications, 2011. 272 p.
9. Pinchover Y., Rubinstein J. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2005. 385 p. doi: <https://doi.org/10.1017/cbo9780511801228>
10. Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics / Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M., Il'kiv V. S., Pukach P. Ya. // *Azerbaijan Journal of Mathematics*. 2017. Vol. 7, Issue 2. P. 180–196.

11. On nontrivial solutions of homogeneous Dirichlet problem for partial differential equations in a layer / Nytrebych Z., Il'kiv V., Pukach P., Malanchuk O. // Kragujevac Journal of Mathematics. 2018. Vol. 42, Issue 2. P. 193–207. doi: <https://doi.org/10.5937/kgjmath1802193n>

12. Malanchuk O., Nytrebych Z. Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables // Open Mathematics. 2017. Vol. 15, Issue 1. doi: <https://doi.org/10.1515/math-2017-0009>

13. Пташник Б. Й. Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1967. № 10. С. 1254–1257.

14. Пташник Б. Й. N-лінійна задача для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Вісник Львівського політехнічного інституту. 1967. № 16. С. 80–87.

15. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1984. 264 с.

16. Ptashnyk B. I., Salyga B. O. An analog of the multipoint problem for partial differential equations with variable coefficients // Ukrainian Mathematical Journal. 1984. Vol. 35, Issue 6. P. 628–635. doi: <https://doi.org/10.1007/bf01056224>

17. Il'kiv V. S., Nytrebych Z. M., Pukach P. Y. Boundary-value problems with integral conditions for a system of Lamé equations in the space of almost periodic functions // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Issue 304. P. 1–12.

18. Ptashnyk B. I., Symotyuk M. M. Multipoint Problem with Multiple Nodes for Partial Differential Equations // Ukrainian Mathematical Journal. 2003. Vol. 55, Issue 3. P. 481–497. doi: <https://doi.org/10.1023/a:1025881429063>

19. Ptashnyk B. I., Symotyuk M. M. Multipoint Problem for Nonisotropic Partial Differential Equations with Constant Coefficients // Ukrainian Mathematical Journal. 2003. Vol. 55, Issue 2. P. 293–310. doi: <https://doi.org/10.1023/a:1025468413500>

20. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // ДАН СССР. 1968. Т. 183, № 5. С. 995–998.

21. Борок В. М., Перельман М. А. О классах единственности, решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. 1973. № 8. С. 29–34.

22. Borok, V. M. Uniqueness classes for the solution of a boundary problem with an infinite layer for systems of linear partial differential equations with constant coefficients // Mathematics of the USSR-Sbornik. 1969. Vol. 8, Issue 2. P. 275–285. doi: <https://doi.org/10.1070/sm1969v008n02abeh001120>

23. Віленць І. Л. Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1974. № 3. С. 195–197.

24. Vallee-Poussin Ch. J. Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n // Journ. Math. de pura et appl. 1929. Vol. 8. P. 125–144.

25. Picone M. On the exceptional values of a parameter on which an ordinary linear differential equation of the second order depends. Pisa: Scuola Normale Superiore, 1910. 144 p.
26. Agarwal R. P., Kiguradze I. On multi-point boundary value problems for linear ordinary differential equations with singularities // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2004. Vol. 297, Issue 1. P. 131–151. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.05.002>
27. Akram G., Tehseen M., Siddiqi S. Solution of a Linear Third order Multi-Point Boundary Value Problem using RKM // *British Journal of Mathematics & Computer Science*. 2013. Vol. 3, Issue 2. P. 180–194. doi: <https://doi.org/10.9734/bjmcs/2013/2362>
28. Graef J. R., Kong L., Kong Q. Higher order multi-point boundary value problems // *Mathematische Nachrichten*. 2010. Vol. 284, Issue 1. P. 39–52. doi: <https://doi.org/10.1002/mana.200710179>
29. Gupta C. P., Trofimchuk S. Solvability of a multi-point boundary value problem of Neumann type // *Abstract and Applied Analysis*. 1999. Vol. 4, Issue 2. P. 71–81. doi: <https://doi.org/10.1155/s1085337599000093>
30. Olver P. J. Introduction to partial differential equations. Springer, 2014. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-02099-0>
31. Friedman A. The wave equation for differential forms // *Pacific Journal of Mathematics*. 1961. Vol. 11, Issue 4. P. 1267–1279. doi: <https://doi.org/10.2140/pjm.1961.11.1267>
32. Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M. The Feynman Lectures on Physics. Mainly electromagnetism and matter. New York: New millennium ed., 1963. 566 p.
33. Li B. Wave Equations for Regular and Irregular Water Wave Propagation // *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*. 2008. Vol. 134, Issue 2. P. 121–142. doi: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-950x\(2008\)134:2\(121\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-950x(2008)134:2(121))
34. Lamoureux M. P. The mathematics of PDEs and the wave equation. Calgary: Seismic Imaging Summer School, 2006. 39 p.
35. Lie K. A. The wave equation in 1D and 2D. Dep. of Informatics University of Oslo, 2005. 48 p.
36. Chalyi A. V. Medical and biological physics. Vinnytsia: Nova knyga, 2017. 476 p.
37. Hughes T. J. R., Lubliner J. On the one-dimensional theory of blood flow in the larger vessels // *Mathematical Biosciences*. 1973. Vol. 18, Issue 1-2. P. 161–170. doi: [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(73\)90027-8](https://doi.org/10.1016/0025-5564(73)90027-8)
38. Благітко Б., Заячук І., Пирогов О. Математична модель поширення пульсової хвилі у великих кровоносних судинах // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2006. № 4. С. 7–11.
39. Нахушев А. М. Уравнения математической физики. Москва: Высшая школа, 1995. 304 с.
40. Nitrebich Z. M. An operator method of solving the Cauchy problem for a homogeneous system of partial differential equations // *Journal of Mathematical*

Sciences. 1996. Vol. 81, Issue 6. P. 3034–3038. doi: <https://doi.org/10.1007/bf02362589>

41. Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M. On an operational method of solving initial-value problems for partial differential equations induced by generalized separation of variables // *Journal of Mathematical Sciences*. 1999. Vol. 97, Issue 1. P. 3879–3887. doi: <https://doi.org/10.1007/bf02364928>

42. Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M. Problem with integral condition for a partial differential equation of the first order with respect to time // *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. Vol. 181, Issue 3. P. 293–304. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0685-7>

43. Nitrebich Z. M. A boundary-value problem in an unbounded strip // *Journal of Mathematical Sciences*. 1996. Vol. 79, Issue 6. P. 1388–1392. doi: <https://doi.org/10.1007/bf02362789>

44. On the solvability of two-point in time problem for PDE / Nytrebych Z., Malanchuk O., Il'kiv V., Pukach P. // *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017. Issue 38. P. 715–726.

45. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation // *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 224, Issue 4. P. 541–554. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3434-0>

46. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the problem two-point in time for a nonhomogeneous partial differential equation // *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 227, Issue 1. P. 68–80. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3574-2>

47. Бондаренко Б. А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных. Ташкент: Фан, 1987. 148 с.

48. Hayman W. K., Shanidze Z. G. Polynomial solutions of partial differential equations // *Methods and Applications of Analysis*. 1999. Vol. 6, Issue 1. P. 97–108. doi: <https://doi.org/10.4310/maa.1999.v6.n1.a7>

49. Hile G. N., Stanoyevitch A. Heat polynomial analogues for equations with higher order time derivatives // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2004. Vol. 295, Issue 2. P. 595–610. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.03.039>