

УДК 514.18

DOI: 10.15587/1729-4061.2019.154191

Розробка способу комп'ютерного моделювання періодичної траєкторії переміщення вантажу хитної пружини

Л. М. Куценко, О. М. Семків, А. Я. Калиновський, Л. Л. Запольський,
О. В. Шоман, Г. А. Вірченко, В. Л. Мартинов, М. М. Журавський,
В. Я. Даниленко, Н. П. Ісмаїлова

Продовжено дослідження геометричного моделювання нехаотичних періодичних траєкторій руху вантажів різновидів математичних маятників. Розглядаються маятникові коливання у вертикальній площині підвішеної невагомої пружини, зберігаючої при цьому пряmolінійність своєї осі. В літературі такий вид маятника називають хитною пружиною (swinging spring). Шукана траєкторія вантажу хитної пружини за допомогою комп'ютера моделюється з використанням значень маси вантажу, жорсткості пружини та її довжини в ненавантаженому стані. Крім того, використовуються такі початкові величини параметрів ініціювання коливань хитної пружини: кут відхилення осі пружини від вертикалі, швидкість зміни величини цього кута, а також параметр подовження пружини та швидкість зміни подовження. Розрахунки виконано за допомогою рівняння Лагранжа другого роду. Також розглянуто варіанти знаходження періодичних траєкторій точкового вантажу хитної пружини з рухомою (вздовж координатних осей) точкою кріплення.

Актуальність теми визначається необхідністю дослідження та удосконалення нових технологічних схем механічних пристроїв, до складу яких входять пружини. Зокрема, дослідження умов відмежування від хаотичних коливань елементів механічних конструкцій та визначення раціональних значень параметрів для забезпечення періодичних траєкторій їх коливань.

Наведено спосіб знаходження значень набору параметрів для забезпечення нехаотичної періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини. Ідею способу пояснено на прикладі знаходження періодичної траєкторії руху другого вантажу подвійного маятника.

Наведено варіанти розрахунків для одержання періодичних траєкторій руху вантажу, коли задані параметри:

– жорсткість пружини та її довжина без навантаження, але невідома величина маси вантажу;

– величина маси вантажу та довжина пружини без навантаження, але невідома жорсткість пружини;

– величина маси вантажу та жорсткість пружини, але невідома довжина пружини без навантаження.

Також розглянуто знаходження значень набору параметрів для забезпечення умовно періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення.

Побудовано фазові траєкторії функції узагальнених координат (значень кутів відхилення осі пружини від вертикалі та подовження хитної пружини) за допомогою яких можна оцінити діапазони зазначених величин та швидкостей їх зміни.

Результати можна використати як парадигму для вивчення нелінійних зв'язаних систем, а також при розрахунках варіантів механічних пристроїв, де пружини впливають на коливання їх елементів. Коли в технологіях використання механічних пристроїв необхідно відмежуватися від хаотичних переміщень вантажів, а забезпечити періодичні траєкторії їх руху

Ключові слова: маятникові коливання, періодичної траєкторії руху, хитна пружина, рівняння Лагранжа другого роду

1. Вступ

Для пояснення складних процесів, що відбуваються в природі, часто застосовують наочні механічні інтерпретації. Зокрема, для коливальних процесів у якості моделей використовують маятникові аналоги [1].

Класичним прикладом вважається модель оберненого маятника з віброуючою точкою кріплення. Фізичну модель цього маятника покладено в основу теорії динамічної стабілізації. Ключова ідея теорії полягає у необхідності розділяти рух на «швидкі» і «повільні» складові, що нашло відображення у понятті ефективного потенціалу. За допомогою методу ефективного потенціалу пояснено принцип стійкості високочастотного генератора «ніготронома» [2]. До речі, для того щоб не виникало проблем з секретністю при публікації методу, було залучено фізичну модель маятника з віброуючим підвісом, яка б ілюструвала принцип стійкості генератора. Цим самим було розпочате математичне дослідження маятника з віброуючим підвісом.

Не менш вражаючі механічні інтерпретації пов'язані з іншим видом маятника. У ідеалізованому вигляді маятник має вигляд вертикально підвішеної невагомої пружини, до кінця якої прикріплено точковий вантаж. Пружина крім подовжніх коливань здійснює коливання подібно маятнику у вертикальній площині, зберігаючи при цьому прямолінійність своєї осі. Помічено, що якщо вантаж одночасно здійснює коливання вздовж осі пружини і маятникові коливання, то зазначена дія відкриває феномен коливань пружини із зовсім несподіваної сторони. У поводженні такої коливальної системи були виявлені цікаві й глибокі фізичні закономірності [3].

Модель пружини, що коливається подібно маятнику, – в літературі її називають хитною пружиною (swinging spring) – знаходить широке застосування у якості механічної моделі більш складних процесів у природі й техніці. Мова йде про процеси із внутрішніми нелінійно пов'язаними системами надання різних коливальних компонентів. При цьому, що істотно, складові компоненти системи обмінюються енергією між собою. У роботі [1] представлено аналіз таких енергетичних обмінів з метою з'ясування того, як це залежить від параметрів керування системою. Для ілюстрації автори використовують хитну пружину як парадигму для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Для хитної пружини ідентифікуються три енергетичні компоненти, схожі на рухи пружини, маятни-

ка, а також зв'язку між ними. Представлена процедура може бути застосована, в принципі, до довільних нелінійних зв'язаних систем, щоб показати, як зв'язок опосередкує внутрішні енергетичні обміни і як розподіл енергії змінюється відповідно до параметрів системи.

Особливість феномена хитної пружини проілюструємо графічно. Для цього порівняємо траєкторії переміщення точкового вантажу у двох випадках - хитної пружини (рис. 1, а) й параметричного маятника (рис. 1, б).

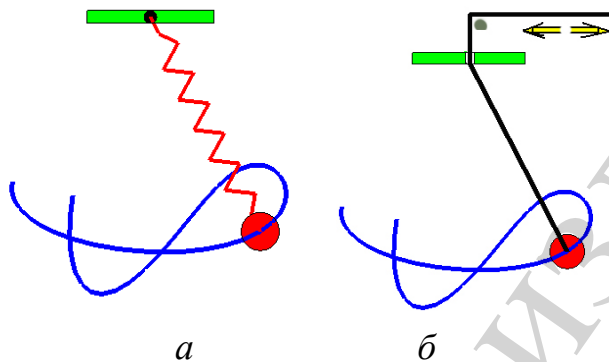


Рис. 1. Аналогія між кутовими коливаннями:

а – хитної пружини; б – математичного параметричного маятника

Для параметричного маятника вплив параметра проявляються в зміні довжини маятника, який здійснюється завдяки зовнішньому джерелу енергії. При цьому цікавим є випадок, коли у нижнім положенні довжину небагато збільшувати, а в крайніх положеннях її небагато скорочувати. Тоді максимальне розгойдування досягатиметься у випадку, коли частота зміни параметра системи (довжини підвісу) у два рази перевищуватиме власну частоту коливань системи. Прикладом є коливання дитячих гойдалок. Для тривалої підтримки їхніх коливань необхідно швидко присідати в момент найбільшого відхилення гойдалок від положення рівноваги й також швидко вставати при проходженні нижнього положення.

Однак існує принципова відмінність між маятником «хитна пружина» і маятником «гойдалка». У хитній пружині відсутнє зовнішнє джерело енергії, і маятники такого виду повинні самі «забезпечувати» існування подібних коливань. З дослідів слідує, що наростання кутових коливань хитної пружини супроводжуються загасанням подовжніх коливань. Потім відбувається зворотне явище – розгойдування подовжніх коливань за рахунок зменшення енергії кутових коливань. Далі весь процес постійно повторюється. Повторюване послідовне перекачування енергії від одних коливань до інших відбувається доти, поки всі коливання не загаснуть через тертя.

Нелінійні зв'язані системи із взаємодіючими підсистемами присутні в багатьох областях – від фізики й техніки до біології й соціальних наук. Приклади зв'язаних систем містять у собі хвильове об'єднання у фізиці плазми, накачки лазерів, біологічних осциляторних мережах, нейронних мережах і генетичних ланцюгах (відповідні посилання на літературу наведено в роботі [1]).

Для практичних впроваджень інтерес представляє дослідження особливостей коливань хитної пружини. Наприклад, з використанням моделі хитної пружини в роботі [4] досліджується атмосферний баланс планети, в роботі [5] – коливання молекули вуглекислого газу, в роботі [6] – коливання високовольтних проводів, а в роботі [7] моделюються вібрації гелікоптера. Опис коливань пружини подібний рівнянням задач «хижак-жертва» [8]. Список можна продовжувати. При цьому у всіх на перший погляд розрізнених впровадженнях є спільна особливість – можливість їх дослідження на основі моделі хитної пружини. При цьому ключовим моментом є визначення умов забезпечення нехаотичних періодичних траєкторій вантажу хитної пружини. Такі дослідження дозволяють відмежуватися від хаотичних рухів елементів механічних пристроїв, до складу яких входять пружинні елементи. Періодична траєкторія переміщення вантажу хитної пружини ілюструє розв'язок відповідних диференціальних рівнянь, що описують її коливання. Адже ці рівняння мають природу, аналогічну диференціальними рівняннями суміжних за змістом впроваджень. Одержана геометрична форма періодичної траєкторії переміщення вантажу хитної пружини у просторі параметрів конкретної задачі допоможе ілюструвати розв'язки цієї задачі. Тобто розгляд моделі хитної пружини дозволить аналізувати характер розв'язків в суміжних за змістом задачах, і виявляти серед них, у певному розумінні, оптимальні варіанти. Подібно тому, як в механіці для аналізу коливальних процесів механізмів застосовують фігури Ліссажу.

Отже, на актуальність обраної теми вказує необхідність розробки інженерного способу знаходження значень набору параметрів для забезпечення нехаотичної періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Історія виникнення досліджень, присвячених коливанням хитної пружини, розпочалася із квантово-механічного пояснення ефекту розщеплення ліній у спектрі комбінаційного розсіювання на молекулі C_2 . Тоді ж було висловлено припущення, що ефект має не квантову, а класичну механічну природу коливань. А саме – ефект обумовлений внутрішніми особливостями коливань молекули, де частота коливань одного типу приблизно вдвічі перевищує частоту коливань другого типу. Вчені вирішили перевірити це на моделі хитної пружини. Розрахований рух такої системи показав, що при співвідношенні частот 2:1 повинно наставати періодично повне перекачування енергії з вертикальних коливань у горизонтальні й назад.

Доцільність дослідження хитної пружини виникла у зв'язку з виявленими можливостями їх «нестандартних» використань як в теоретичному плані, так і на практиці. Однак більшість досліджень зосереджуються на аналітичних апроксимаціях для слабозв'язаних систем і енергетичних обмінів, які виникають, коли підсистеми перебувають у резонансі. Ефективним механізмом енергообміну є параметричний механізм [9]. Зокрема, хитна пружина із двома ступенями свободи є автопараметричною системою, що являє собою основу для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Крім того, хитна пружина має значення завдяки можливості якісного подання багатьох нелінійних сполучених систем.

Серед цих подань назвемо класичний аналог для коливальних мод трьохатомних молекул, який реалізує резонанс Фермі в інфрачервоному й комбінаційному спектрах [1].

Коливання хитних пружин мають безпосереднє відношення до динаміки літаків і кораблів. Були виявлені ефекти порушення стійкості й керованості швидкохідних кораблів і надзвукових літаків. Виявилось, що найбільш інтенсивне розгойдування бічних коливань має місце, коли коливання за кутом атаки відбуваються із частотою вдвічі більшої частоти бічних коливань [10]. У будівельній механіці важливу роль грає видозмінена модель хитної пружини – модель гнучкої нитки. Гнучка нитка – це своєрідна пружина, що діє тільки на розтягнення. У типовій двовимірній моделі гнучка нитка одночасно може здійснювати поперечні коливання у своїй площині (аналог кутових коливань хитної пружини з вантажем) і маятникові коливання, що поєднують опорні закріплення (аналог вертикальних коливань) [6, 11]. При співвідношенні частот цих коливань 1:2 відбувається втрата динамічної стійкості, коли виникають поперечні коливання нитки, амплітуда яких може досягати досить великих значень. Можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати при розрахунку різноманітних конструкцій (висячих мостів, вантово-балкових систем, канатних доріг, ліній електропередачі, різних космічних тросових системи для втримання об'єктів, гнучких шлангів, різноманітних антен, тощо) [3].

В роботах [12, 13] наведено теоретичне дослідження плоских малих нелінійних коливань хитної пружини з нелінійною залежністю натягу пружини від її подовження. Використовується метод гамільтонової нормальної форми. Рішення гамільтонових рівнянь нормальної форми показали, що періодична перестройка коливань між вертикальною й горизонтальною модами відбувається тільки у випадку резонансів 1:1 і 2:1. У всіх інших випадках, як при наявності резонансу, так і при його відсутності, коливання відбуваються із двома постійними частотами.

У роботі [14] вивчаються зміни в поведінці хитної пружини, коли під контролем параметра один відгук стає нестійким і замінюється іншим. Вибірка Пуанкаре використовується для зведення проблеми опису стійкості граничного циклу до більш простої задачі визначення стійкості нерухомої точки відображення Пуанкаре. В роботі [15] розглянуто зв'язок нормальних мод коливань хитного маятника. Наводяться коментарі про експерименти, пов'язані з порушенням нормальних режимів. В роботі [16] досліджено системи хитної пружини поблизу резонансу за допомогою «повільного флуктуаційного» наближення, яке полягає в застосуванні тригонометричних поліномів і збереженні тільки члена з найповільнішої частотою. У роботі [17] показано, що інтегральне наближення просторової хитної пружини, налаштованої на резонанс 1:1:2, має монохромію, а ступінчастий кут прецесії площини коливання резонансного пружинного маятника є числом обертання інтегрального наближення. Стаття [18] присвячена коливанням хитного маятника, точка підвісу якого рухома уздовж вертикальної лінії. Періодичні рішення рівняння одержують з використанням детермінантів Хілла. Розроблена обчислювальна процедура використовується для визначення комбінацій параметрів системи, для яких можливі пері-

одичні рішення. У роботі [19] досліджується просторова хитна пружина, яка має резонанс 2:1:1, наближено описаний лагранжіаном. В описах використано гамільтонові скорочення та методи виведення зразків. В результаті отримано формулу, яка описує ступінчасту прецесію азимутального кута. У роботі [20] перетікання енергії між подовжніми і маятниковими коливаннями розглядається як пульсація. Пульсація і ступінчаста прецесія є характерними особливостями динаміки хитної пружини. Для визначення повного аналітичного рішення використано гамільтонову редукцію. У статті [21] динаміка пружинного маятника досліджується з використанням асимптотичних методів. Методи теорії нелінійних нормальних форм коливань дозволили дослідити динаміку маятника не тільки для малих, але і для значних амплітуд коливань.

Але всі наведені роботи мають переважно теоретичне спрямування. Для інженерної практики необхідні способи побудови реальних нехаотичних періодичних траєкторій вантажів хитних пружин. Деякі з них описані в роботі [22], де наведено приклади періодичних траєкторій, а також в [23], де проведено дослідження умов побудови періодичних траєкторій. У роботі [24] наведено програму мовою Математика, за допомогою якої можна будувати періодичні траєкторії подвійного маятника. Робота [25] присвячена дослідженню зв'язку можливої траєкторії вантажу хитної пружини з фігурами Ліссажу. В роботі [26] наведено `maple`-програму побудови траєкторії вантажу хитної пружини. Інший спосіб побудови траєкторій руху вантажу хитної пружини запропоновано в роботі [27]. В роботі [28] наведені приклади періодичних траєкторій хитних пружин. В роботі [29] досліджуються коливання хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Але у відомих роботах відсутній універсальний підхід до побудови періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Також відсутні аналізи коливань за допомогою фазових траєкторій функцій, які входять до опису узагальнених координат відповідної коливальної системи.

В роботі [30] для побудови періодичних траєкторій вантажів різновидів математичних маятників наведено спосіб проєкційного фокусування. В роботі [31] розглянуті приклади реалізації цього способу.

В результаті огляду літературних джерел [1–29] були виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, що дозволило сформулювати наступну проблему досліджень. Розробити спосіб знаходження значень набору параметрів, які б забезпечили нехаотичну періодичну траєкторію руху точкового вантажу хитної пружини – тобто вантажу на підвішеній вертикально пружині, яка здійснює маятникові коливання.

3. Ціль та задачі дослідження

Метою є розробка способу комп'ютерного моделювання періодичної траєкторії переміщення точкового вантажу хитної пружини.

Для досягнення поставленої мети маємо вирішити наступні задачі:

- ідею способу пояснити на прикладі тестової задачі – побудови періодичної траєкторії руху другого вантажу подвійного маятника;
- навести варіанти розрахунків для одержання періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини, коли задані:

- довжина без навантаження та жорсткість, але невідомою є значення маси вантажу;
- довжина без навантаження та величина маси вантажу, але невідомою є жорсткість пружини;
- величина маси вантажу та жорсткість, але невідомою є довжина пружини без навантаження;
- визначити набір параметрів для забезпечення умовно періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення;
- побудувати фазові траєкторії функцій узагальнених координат хитної пружини (значень кутів відхилення осі пружини від вертикалі та подовження) з метою оцінки діапазону змін зазначених величин та їх швидкостей;
- одержані результати проілюструвати комп'ютерними анімація коливань відповідних хитних пружин.

4. Розробка геометричної моделі періодичних траєкторій вантажу хитної пружини

4.1. Побудова періодичних траєкторій руху вантажу подвійного маятника способом проєкційного фокусування

В роботі [30] розглянуто спосіб "проєкційного фокусування", призначений для побудови періодичних траєкторій вантажів різновидів маятників. Наведемо пояснення способу на прикладі визначення нехаотичної траєкторії руху другого вантажу подвійного маятника. Зазначений приклад розглядається у більшості підручників з теоретичної механіки. І саме подвійний маятник там часто використовують для ілюстрації хаотичних коливань. Тому буде особливо цікавим розв'язок задачі про періодичні траєкторії руху другого вантажу подвійного маятника.

Задамо умови ідеалізації коливань подвійного маятника:

- обидві ланки є невагомими і не деформуються;
 - маси вантажів зосереджена у відповідних точках на кінцях ланок;
 - опори у вузлах і опір повітря під час коливань відсутні;
 - коливання здійснюється у вертикальній площині, якій належить точка підвісу;
 - процес розсіювання енергії відбувається повільно в порівнянні з характерними масштабами часу (коливальна система є консервативною);
 - параметри і початкові умови задаються в умовних числових одиницях.
- Схему подвійного маятника зображено на рис. 2.

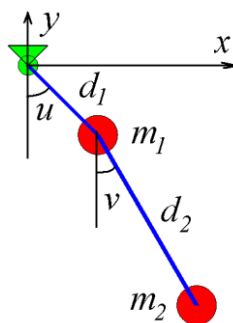


Рис. 2. Схema подвійного маятника

У якості узагальнених координат $u(t)$ і $v(t)$ оберемо кути, які ланки маятника утворюють з вертикальною віссю Oy . Тоді віртуальні координати вузлових точок можна обчислити за формулами:

$$x_1 = d_1 \sin u; \quad y_1 = -d_1 \cos u; \quad (1)$$

$$x_2 = d_1 \sin u + d_2 \sin v; \quad y_2 = -d_1 \cos u - d_2 \cos v.$$

Лагранжیان задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій ($g=9.81$):

$$L = 0.5m_1 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt} \right)^2 + 0.5m_2 \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt} \right)^2 - m_1 g y_1 - m_2 g y_2. \quad (2)$$

Для складання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду використаємо співвідношення (тут точка означає похідну по часу):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0. \quad (3)$$

В результаті систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) d_1 \frac{d^2 u}{dt^2} + m_2 d_2 \frac{d^2 v}{dt^2} \cos(u - v) + \\ m_2 d_2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \sin(u - v) + (m_1 + m_2) g \sin u = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$d_2 \frac{d^2 v}{dt^2} + d_1 \frac{d^2 u}{dt^2} \cos(u - v) - d_1 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \sin(u - v) + g \sin v = 0.$$

Для ілюстрації можливостей способу проекційного фокусування розглянемо побудову періодичної траєкторії другого вантажу подвійного маятника у вигляді такої задачі.

Постановка задачі. Побудувати періодичну траєкторію подвійного маятника з довжинами ланок d_1 та d_2 і з масами m_1 і m_2 у якості вантажів на кінцях ланок. У початковому положенні всі ланки розташовані вертикально, тобто $u(0)=0$ і $v(0)=0$. Ініціювання коливань здійснюється за допомогою імпульсів, наданих вантажам маятників у двох обернених напрямках, спрямованими вздовж осі Ox (рис. 3). Тобто $du(0)=-F$ і $dv(0)=F$, де F - величина, яку можна характеризувати як початкову швидкість зміни в часі величини відповідного кута.

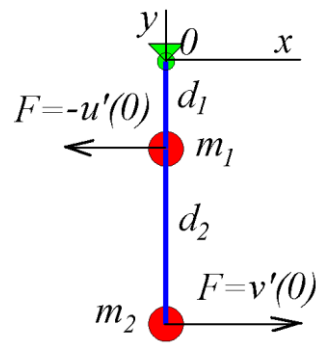


Рис. 3. Ініціювання коливань подвійного маятника

Розв'язання задачі з одночасним пояснення способу проєкційного фокусування. Для визначення значення параметра F , яке б забезпечило періодичну траєкторію руху другого вантажу подвійного маятника, застосуємо спосіб проєкційного фокусування [30]. Для цього чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (3) із обраними початковими умовами $u(0)=0$; $du(0)=-F$; $v(0)=0$; $dv(0)=F$ та параметрами $m_1=m_2=1$; $d_1=1,5$; $d_2=1$. Змінну величину F "назначимо" керуючим параметром коливання подвійного маятника.

Далі будемо зображення інтегральної кривої у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ залежно від значення керуючого параметра F . При довільних значеннях F у фазовому просторі імовірноше утвориться "заплутана" інтегральна крива (рис. 4, а). При алгоритмічній реалізації це буде багатоланкова ломана, яка сполучатиме N близьких точок з координатами (u_i, Du_i, t_i) (де $i=1..N$). Точки у фазовому просторі одержуються в результаті чисельного розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду.

Спроеціюємо одержану інтегральну криву на фазову площину $\{u, Du\}$, де її проєкцією буде фазова траєкторія узагальненої координатної функції $u(t)$ (теж саме можна здійснити і для координатної функції $v(t)$). У разі зміни керуючого параметра F має змінюватися і характер фазової траєкторії. При певному критичному значенні $F=F_0$ характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – перетвориться у "сфокусовану" криву. На фазовій площині в процесі прямування параметра F до критичного значення F_0 в режимі комп'ютерної анімації можна спостерігати ніби оптичний ефект "наведення на різкість" плутанини фазових траєкторій (рис. 4, б).

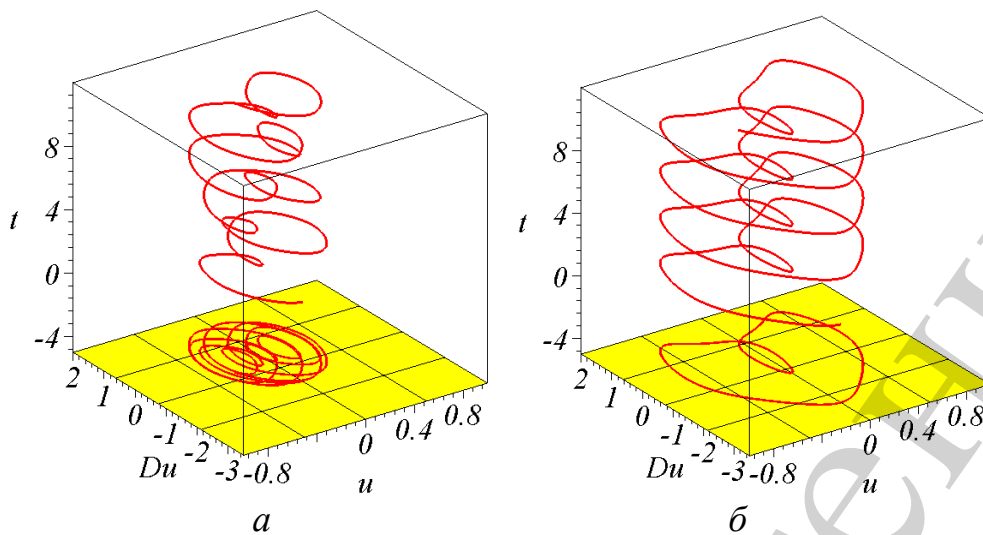


Рис. 4. Фазові траєкторії як проєкції інтегральних кривих:
 а – для довільного значення керуючого параметра F ;
 б – для критичного значення F_0 керуючого параметра

Для узгодження графічних властивостей фазових кривих з числовими було застосовано поняття насиченості (або щільності) зображення лінії. Властивість насиченості зображення ліній характеризується кількістю умовних точок площини (пікселів), побудованих засобами комп'ютерної графіки. Мірою насиченості буде кількість пікселів, за допомогою яких унаочнюється лінія з прийнятною для практики похибкою. При цьому пошук значення керуючого параметра F здійснюється так, щоб зображення фазових траєкторій було мінімальної насиченості, яке можна порівняти зі згаданим фокусуванням в смислі «наведення на різкість». На практиці такий підхід було реалізовано з застосуванням бібліотеки обробки графічної інформації ImageTools пакету maple [31].

Згідно умовам розглянутої задачі на рис. 5 побудовано графік залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення керуючого параметра F . З графіка слідує, що мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $F_0=2,556$. Уточнення цього значення здійснено шляхом зменшення інтервалу, де знаходиться F_0 .

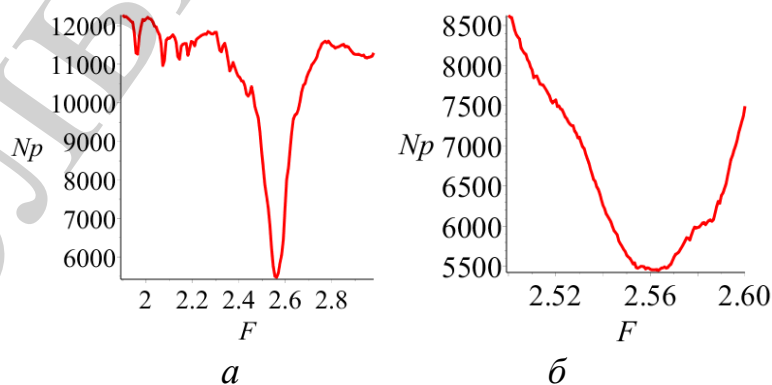


Рис. 5. Залежність кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення F : а – для $1,9 \leq F \leq 2,9$; б – для $2,5 \leq F \leq 2,6$

Після обчислення F_0 необхідно його значення підставити на місце F в систему рівнянь Лагранжа другого роду (3) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1 \dots S$). Для побудови траєкторії руху другого вантажу на площині Oxy слід у вирази (1) віртуальних координат (x_2, y_2) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення траєкторії переміщення другого вантажу на площині Oxy .

Для реалізації цієї ідеї було складено програму побудови фазової траєкторії як ортогональної проекції інтегральної лінії з фазового простору на фазову координатну площину, одночасного обчислення критичного значення керуючого параметра, с наступним визначенням траєкторії руху другого вантажу. Визначався час інтегрування системи рівнянь. Він відповідає мінімальному часу, за який другий вантаж повернеться в початкове положення.

Одержані розв'язки задачі. Нехай довжини ланок подвійного маятника $d_1=1,5$ і $d_2=1$. Тоді періодичні траєкторії руху другого вантажу маятника залежатимуть від співвідношення значень мас вантажів згідно таких випадків.

Випадок 1. Для довільних однакових значень мас $m_1=m_2$ при $F=2,556$ одержимо близькі за геометричною формою періодичні траєкторії другого вантажу. Їх вигляд зображено на рис. 6.

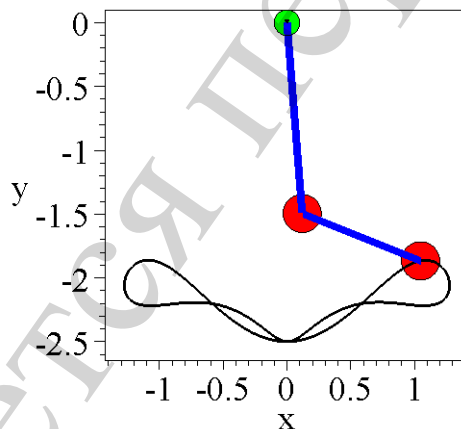


Рис. 6. Вигляд траєкторії другого вантажу при значенні $F=2,556$ у випадках, коли $m_1=m_2$

Фазові траєкторії функцій узагальнених координат зображені на рис. 7. Час інтегрування $T \approx 3$.

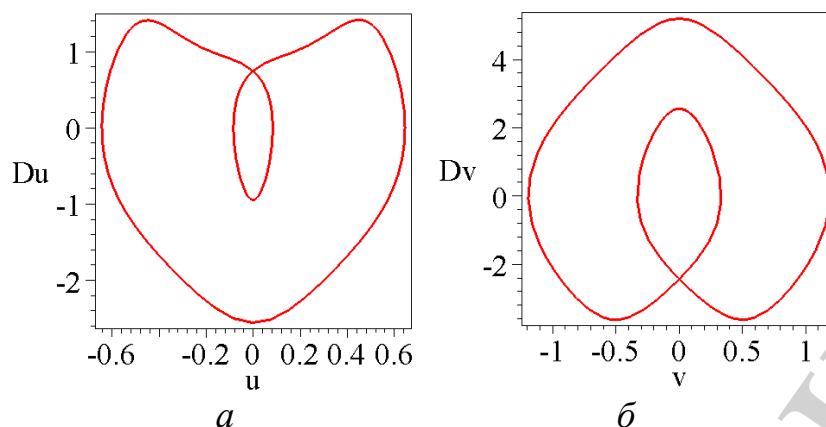


Рис. 7. Вигляд фазових траєкторій функцій узагальнених координат для випадку 1 при $m_1=m_2$ і $F=2,556$: a – для $u(t)$; b – для $v(t)$

Випадок 2. Коли $m_1=km_2$, то одержимо близькі за геометричною формою періодичні траєкторії другого вантажу у вигляді, зображеному на рис. 8. При цьому, величини F визначаються з табл. 1.

Таблиця 1

Значення параметрів для забезпечення періодичної траєкторії у випадку $m_1=km_2$

Значення k	2	3	4	5	6
Значення F	3,752	3,388	3,188	3,052	2,964

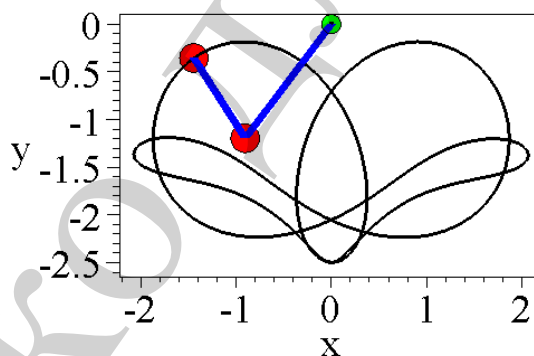


Рис. 8. Вигляд траєкторії другого вантажу у випадку, коли $m_1=km_2$

Вигляд фазових траєкторій функцій узагальнених координат для випадку 2 зображені на рис. 9. Час інтегрування $T \approx 5,4$.

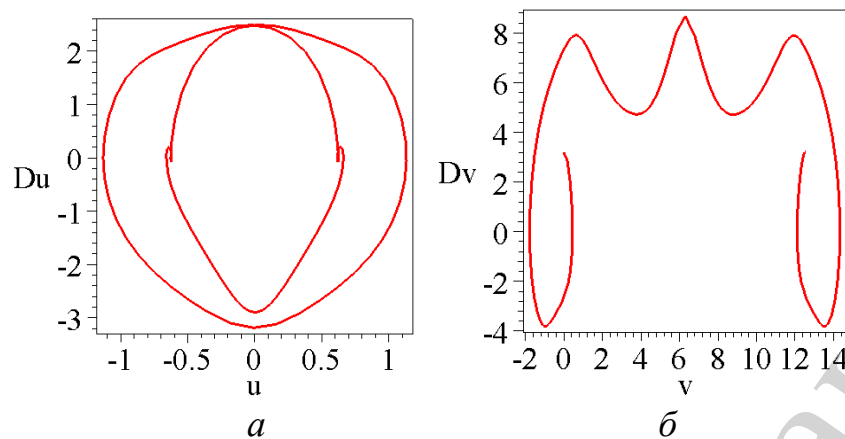


Рис. 9. Вигляд фазових траєкторій функцій узагальнених координат для випадку при $m_1=km_2$ і значенні F з таблиці 1: a – для $u(t)$; b – для $v(t)$

Випадок 3. Коли $km_1=m_2$, то одержимо близькі за геометричною формою періодичні траєкторії другого вантажу у вигляді, зображеному на рис. 10. При цьому, величини F визначаються з табл. 2.

Таблиця 2

Значення параметрів для забезпечення періодичної траєкторії у випадку $km_1=m_2$

Значення k	2	3	4	5	6
Значення F	4,844	6,32	7,36	8,3	9,2

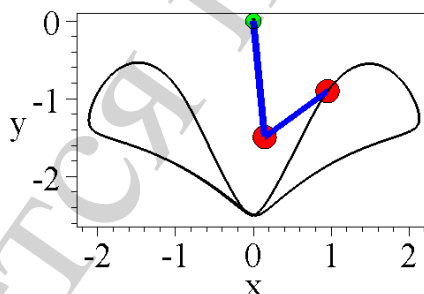


Рис. 10. Вигляд траєкторії другого вантажу у випадку, коли $km_1=m_2$

Вигляд фазових траєкторій функцій узагальнених координат для випадку 3 зображені на рис. 11. Час інтегрування $T \in [3,4]$.

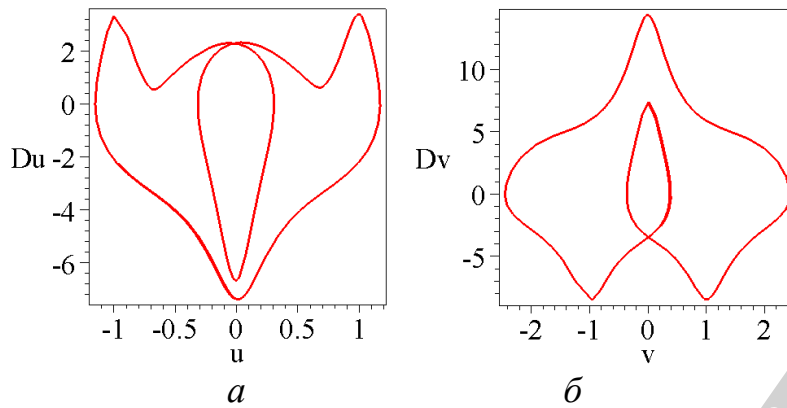


Рис. 11. Вигляд фазових траєкторій функцій узагальнених координат для випадку при $km_1=m_2$ і значенні F з таблиці 2: a – для $u(t)$; b – для $v(t)$

Одержані фазові траєкторії дозволяють визначити діапазони зміни величин кутів, а також швидкостей зміни значень цих кутів.

4. 2. Обчислення періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини

Наведемо спосіб визначення траєкторії переміщення по вертикальній площині Oxy вантажу хитної пружини залежно від маси вантажу, початкової довжини пружини у ненавантаженому стані, жорсткості пружини і початкових умов для виникнення коливань.

Задамо умови ідеалізації коливань хитної пружини:

- коливання здійснюється у вертикальній площині, якій належить точка кріплення (підвісу);
- маса вантажу зосереджена в одній точці, розташованій на осі пружини з незакріпленого кінця;
- пружина є невагомою і вісь пружини залишається прямолінійною в процесі коливань;
- опори у вузлах і опір повітря під час коливань відсутні;
- процес розсіювання енергії відбувається повільно в порівнянні з характерними масштабами часу (коливальна система є консервативною);
- параметри і початкові умови задаються в умовних числових одиницях.

Схему хитної пружини зображено на рис. 12.

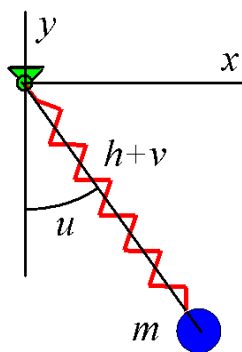


Рис. 12. Схеми хитної пружини

У якості першої узагальненої координатної функції $u(t)$ оберемо значення кута, який вісь хитної пружини утворює з вертикальною віссю Oy . Другу узагальнену координатну функцію $v(t)$ пов'яжемо з подовжньою зміною довжини пружини в часі; через h позначимо довжину хитної пружини в ненавантаженому стані. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами:

$$x = (h + v) \sin u; \quad y = -(h + v) \cos u. \quad (5)$$

Лагранжیان задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій ($g=9.81$):

$$L = 0.5m \left(\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + (h + v) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right) - 0.5kv^2 - mg(h + v)(1 - \cos u) - mgv. \quad (6)$$

Для складання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду використаємо співвідношення (тут точка означає похідну по часу):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0. \quad (7)$$

В результаті систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$(v + h) \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{du}{dt} + g \sin u = 0; \quad (8)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - (v + h) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{kv}{m} - g \cos u = 0.$$

Постановка задачі. Визначити значення маси m , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу хитної пружини жорсткістю k і довжиною h у ненавантаженому стані. У початковому положенні хитна пружина розташована вертикально, тобто $u(0)=0$. Ініціювання коливань здійснюється за допомогою імпульсу, наданого вантажу пружини у напрямку осі Ox : $du(0)=1,5$. Величину 1,5 можна характеризувати як початкову швидкість зміни в часі величини кута u . Початкові значення для параметра v подовження пружини оберемо у вигляді $v(0)=1$; $dv(0)=0$.

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (8) із початковими умовами $u(0)=0$; $du(0)=1,5$; $v(0)=1$; $dv(0)=0$. Обранням параметрів m , k і h маємо забезпечити періодичність траєкторії вантажу хитної пружини.

Приклад 1. Нехай $k=30$ і $h=1$. В якості керуючого параметра коливання хитної пружини оберемо значення маси m . На рис. 13 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення

$m=3,332$. В результаті одержано фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$ (рис. 14), за допомогою яких можна визначити в процесі колювання хитної пружини діапазони зміни величини кута та його швидкості (координатна функція $u(t)$), а також подовження пружини та швидкості подовження (координатна функція $v(t)$).

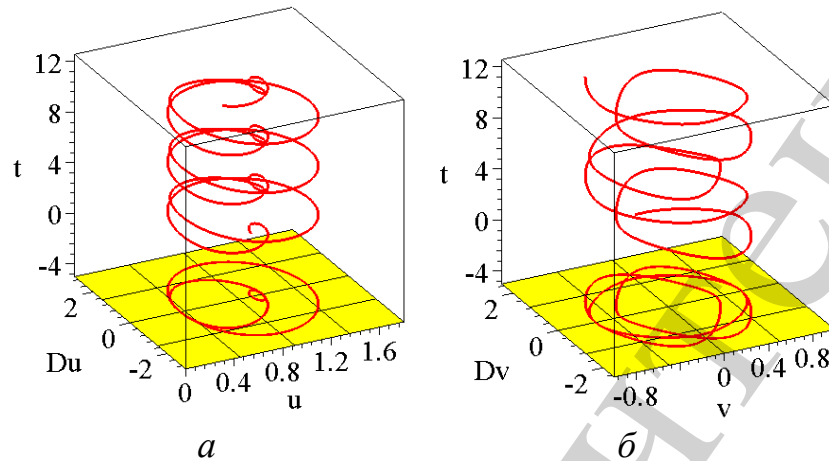


Рис. 13. Інтегральні криві для критичного значення $m=3,332$ у фазових просторах: $a - \{u, Du, t\}$; $б - \{v, Dv, t\}$

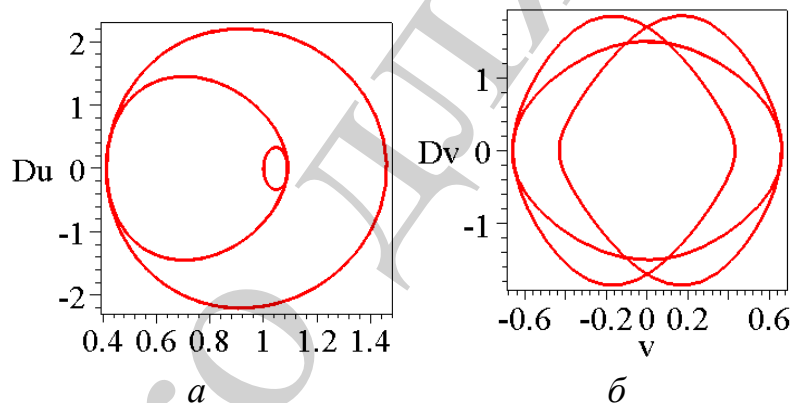


Рис. 14. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$ для: $a -$ координатної функції $u(t)$; $б -$ координатної функції $v(t)$

Для підтвердження величини знайденого критичного значення $m=3,332$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії. На рис. 15 наведено графік залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення керуючого параметра m . Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $m_0=3,332$.

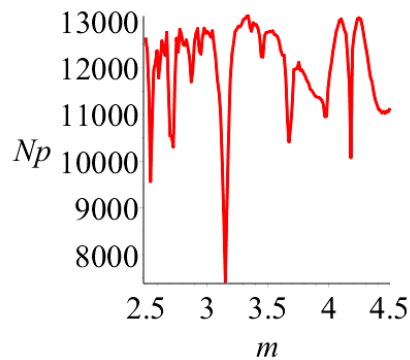


Рис. 15. Графік залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення m

Після обчислення m_0 необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (8) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1\dots S$). Для побудови траєкторії руху другого вантажу на площині Oxy слід у виразі (5) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy траєкторії руху вантажу хитної пружини (рис. 16).

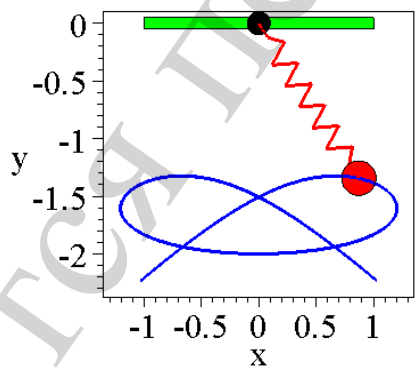


Рис. 16. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 1

Приклад 2. Нехай $m=1$ і $h=1$. В якості керуючого параметра оберемо значення жорсткості k . На рис. 17 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $k=14,4$. На рис. 18 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити діапазони їх змін.

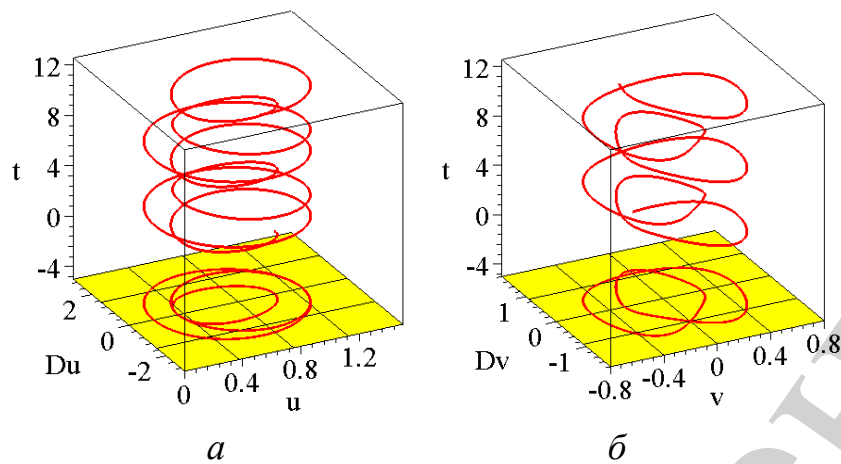


Рис. 17. Інтегральні криві для критичного значення $k=14,4$. у фазових просторах: $a - \{u, Du, t\}$; $b - \{v, Dv, t\}$

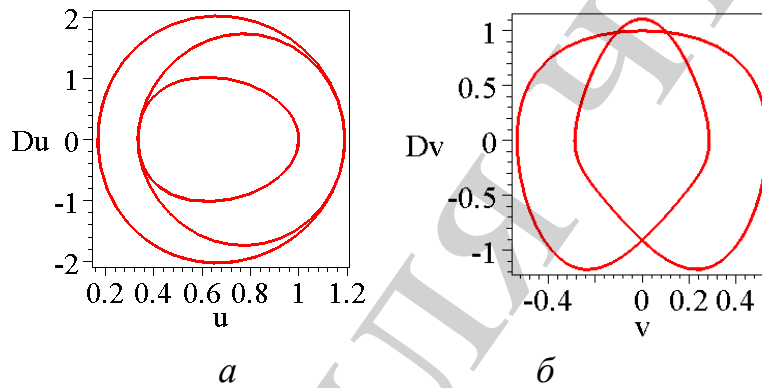


Рис. 18 Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$: $a -$ координатної функції $u(t)$; $b -$ координатної функції $v(t)$

Для підтвердження значення $k=14,4$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 19). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $k_0=14,4$.

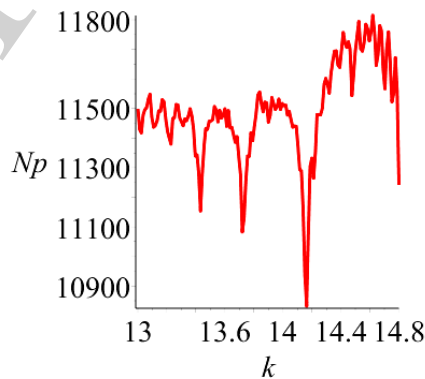


Рис. 19. Графік залежності кількості пікселів Np зображення фазової траєкторії від значення t

Після обчислення $k_0=14,4$ необхідно його значення підставити на місце k в систему рівнянь Лагранжа другого роду (8) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1\dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у вирази (5) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy траєкторії руху вантажу хитної пружини (рис. 20).

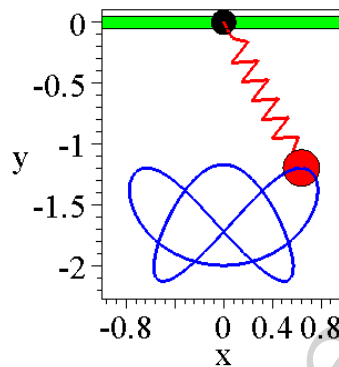


Рис. 20. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 2

Приклад 3. Нехай $m=1$ і $k=10$. В якості керуючого параметра оберемо довжину h хитної пружини без навантаження. На рис. 21 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $h=0,39$. На рис. 22 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін.

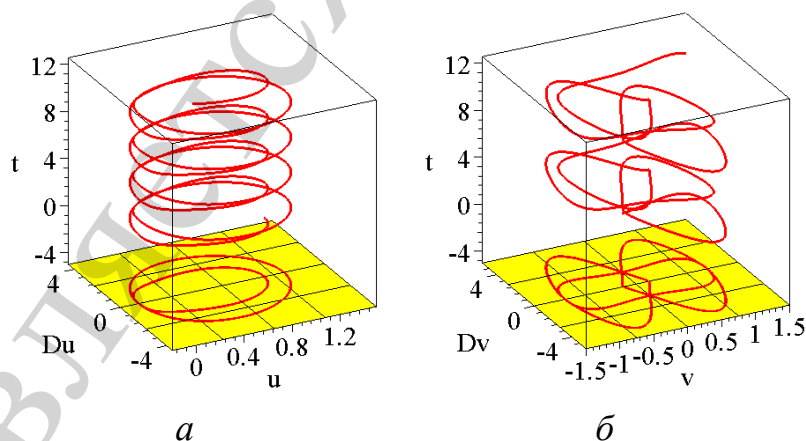


Рис. 21. Інтегральні криві для критичного значення $h=0,39$ у фазових просторах: *a* – $\{u, Du, t\}$; *б* – $\{v, Dv, t\}$

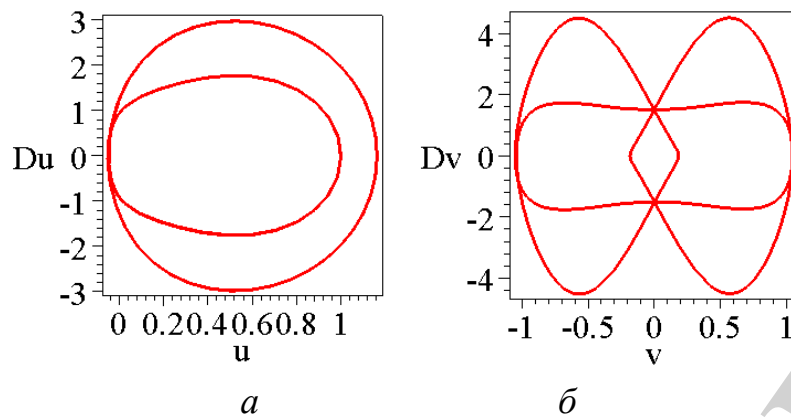


Рис. 22. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$:
 a – координатної функції $u(t)$; b – координатної функції $v(t)$

Для підтвердження значення $h=0,39$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 23). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $h_0=0,39$.

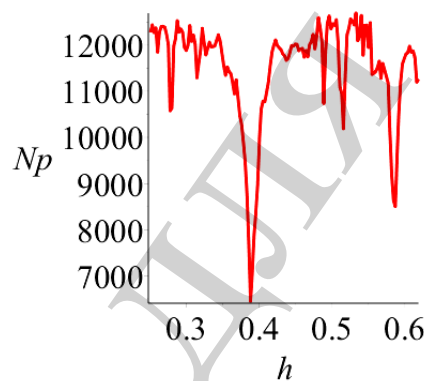


Рис. 23. Графік залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення h

Після обчислення $h_0=0,39$ необхідно його значення підставити на місце h в систему рівнянь Лагранжа другого роду (8) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1\dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у вирази (5) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини (рис. 24).

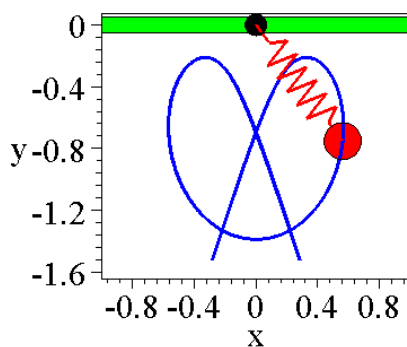


Рис. 24. Траєкторії руху вантажу хитної пружини для прикладу 3

Отже, знайдені способом проєкційного фокусування критичні значення керуючого параметра можна підтвердити за допомогою графіка насиченості зображення лінії фазової траєкторії. Тобто графіка залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення керуючого параметра.

4. 3. Розрахунок періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини з рухомою точки підвісу.

Наведено спосіб визначення траєкторії переміщення по вертикальній площині вантажу хитної пружини у випадку, коли точка її підвісу є рухомою. Тоді до уже розглянутих раніше параметрів (маси вантажу, початкової довжини пружини у ненавантаженому стані, жорсткості пружини і початкових умов для виникнення коливань) необхідно додати опис закону руху точки підвісу у вигляді функції $f(t)$. Зазначимо, що у випадку рухомої точки підвісу з причини суттєвої нелінійності коливальної системи можна очікувати не лише строгих періодичних траєкторій вантажу хитної пружини, а і умовно періодичних. Тобто таких траєкторій переміщення вантажу, які не виходитимуть за межі певної смуги на площині Oxy .

Для опису коливань хитної пружини у якості першої узагальненої координатної функції $u(t)$ оберемо значення кута, який вісь хитної пружини утворює з вертикальною віссю Oy . Другу узагальнену координатну функцію $v(t)$ пов'яжемо з подовжньою зміною пружини в часі; через h позначимо довжину хитної пружини в ненавантаженому стані (рис. 2).

В даній роботі розглянуто два випадки руху точки підвісу – вздовж осі Ox та вздовж осі Oy .

Випадок 1. Нехай точка підвісу хитної пружини рухається вздовж осі Ox за законом $x=f(t)$. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами (5). Лагранжیان задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій ($g=9.81$):

$$\begin{aligned}
L = & 0.5m \left(\left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + (h+v) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right) + \\
& + m \frac{df}{dt} \left(\frac{dv}{dt} \sin u + (h+v) \frac{du}{dt} \sin u \right) - \\
& - 0.5kv^2 + mg(h+v) \cos u.
\end{aligned} \tag{9}$$

Для складання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду використаємо співвідношення (7). В результаті систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d^2f}{dt^2} \sin u - (h+v) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + kv - g \cos u &= 0; \\
(h+v) \frac{d^2u}{dt^2} - \left(\frac{df}{dt} \right)^2 \cos u + 2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \sin u &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Приклад 4. Визначимо значення маси m , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу хитної пружини жорсткістю k і її довжиною h у ненавантаженому стані. У початковому положенні хитна пружина розташована вертикально, тобто $u(0)=0$. Ініціювання коливань здійснюється за допомогою імпульсу, наданого вантажу пружини у напрямку осі Ox : $du(0)=1$. Це значення можна характеризувати як початкову швидкість зміни в часі величини кута u . Початкові значення для параметра v подовження пружини мають вигляд $v(0)=2$; $dv(0)=0$. Нехай $k=50$ і $h=2$. Закон руху точки кріплення задамо функцією $f(t)=\sin(2t)$. В якості керуючого параметра коливання хитної пружини оберемо значення маси m вантажу.

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (8) із початковими умовами $u(0)=0$; $du(0)=1$; $v(0)=2$; $dv(0)=0$. На рис. 25 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m=5,142$. Час інтегрування $T=16$. На рис. 26 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін. Бачимо, що фазові траєкторії не вдається "сфокусувати" як у попередніх прикладах. Тому для коректності одержані далі траєкторії руху вантажу хитної пружини вважатимемо умовно періодичними.

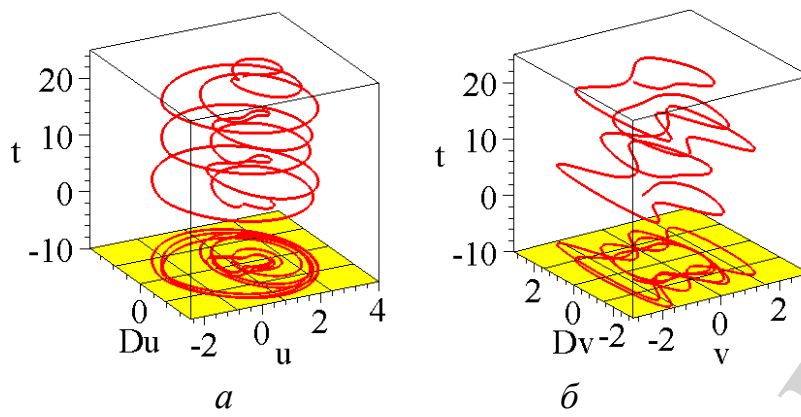


Рис. 25. Інтегральні криві для критичного значення $m=5,142$ у фазових просторах: $a - \{u, Du, t\}$; $б - \{v, Dv, t\}$

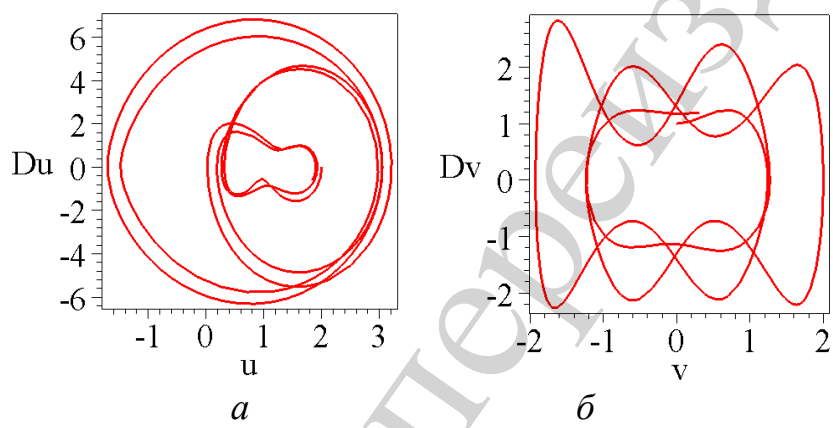


Рис. 26. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$:
 a – координатної функції $u(t)$; $б$ – координатної функції $v(t)$

Для підтвердження значення $m=5,142$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 27). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $m_0=5,142$.

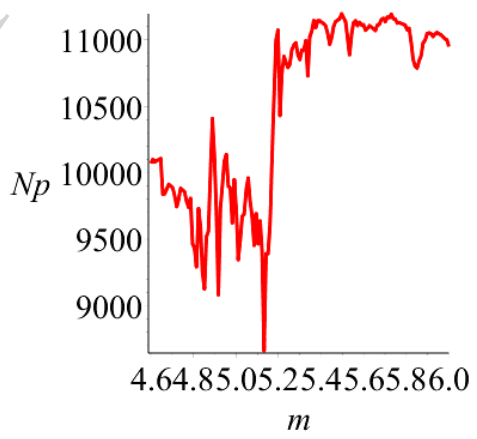


Рис. 27. Графік залежності кількості пікселів Np зображення фазової траєкторії від значення m

Після обчислення $m_0=5,142$. необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (8) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1\dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у вирази (5) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для випадку 1 (рис. 28). Оскільки фазові траєкторії не вдалося "сфокусувати" як у попередніх прикладах, то одержану траєкторію руху вантажу хитної пружини будемо вважати умовно періодичною. Зоровий аналізатор підтверджує природність коливань хитної пружини з рухомою точкою підвісу, у чому можна переконатися з комп'ютерних анімацій на сайті [32].

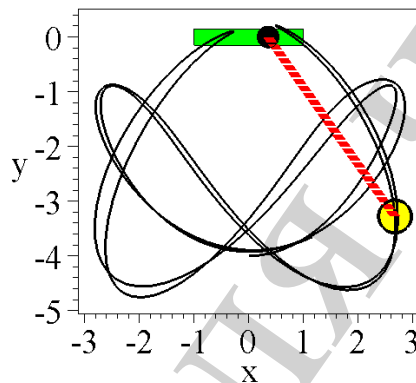


Рис. 28. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 4

Приклад 5. Змінимо напрямок дії імпульсу ініціювання руху хитної пружини на протилежний, тобто оберемо $du(0)=-1$. Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (8) з початковими умовами $u(0)=0$; $du(0)=-1$; $v(0)=2$; $dv(0)=0$.

На рис. 29 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m=16,571$. Час інтегрування $T=16,7$. На рис. 30 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін.

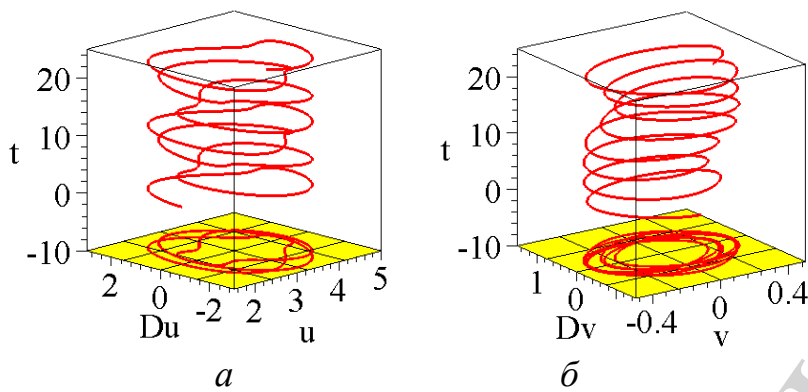


Рис. 29. Інтегральні криві для критичного значення $m=16,571$ у фазових просторах: $a - \{u, Du, t\}$; $b - \{v, Dv, t\}$

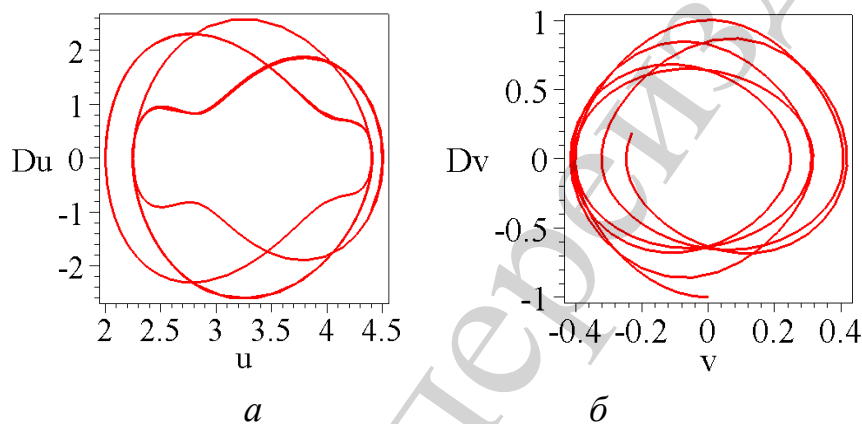


Рис. 30. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$:
 $a -$ координатної функції $u(t)$; $b -$ координатної функції $v(t)$

Для підтвердження значення $m=16,571$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 31). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $m_0=16,571$.

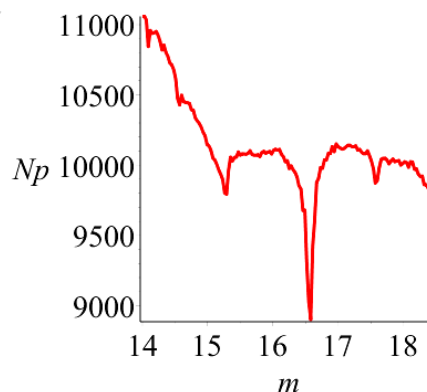


Рис. 31. Графік залежності кількості пікселів Np зображення фазової траєкторії від значення m

Після обчислення $m_0=16,571$. необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (8) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1\dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у вирази (5) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для випадку 1 (рис. 32).

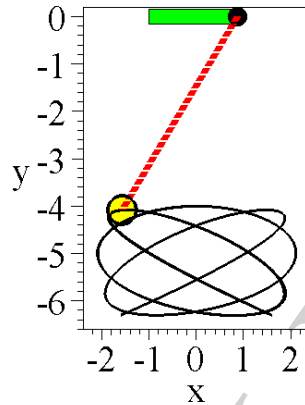


Рис. 32. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 5

Таким чином можна констатувати, що змінюючи напрямок дії імпульсу ініціювання руху хитної пружини з $du(0)=1$ на протилежний $du(0)=-1$ можна одержати періодичну або умовно періодичну траєкторію.

Випадок 2. Нехай точка підвісу хитної пружини рухається вздовж осі Oy за законом $y=f(t)$. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами (5). Лагранжіан задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій ($g=9.81$):

$$L = 0.5m \left(\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + v^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right) - 0.5k(v-h)^2 - m \left(g + \frac{d^2 f}{dt^2} \right) v \cos u. \quad (11)$$

Для складання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду використаємо співвідношення (7). В результаті систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$2m \frac{d^2 v}{dt^2} + m \frac{d^2 f}{dt^2} \cos u - 2mv \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + k(v-h) + mg \cos u = 0; \quad (12)$$

$$-2v \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{d^2 f}{dt^2} \sin u - 4 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \sin u = 0.$$

Визначимо значення маси m , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу хитної пружини жорсткістю k і її довжиною h у ненавантаженому стані.

Приклад б. Нехай початкове положення хитної пружини визначається кутом $-\pi/4$, тобто $u(0)=-\pi/4$. Швидкість зміни величини кута $du(0)=0$. Початкові значення для параметра v подовження пружини мають вигляд $v(0)=2$; $dv(0)=0$. Оберемо $k=450$ і $h=2.5$. Закон руху точки кріплення задамо функцією $y=0,5\cos(4t)$. В якості керуючого параметра коливання хитної пружини оберемо значення маси m вантажу.

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (12) із початковими умовами $u(0)=-\pi/4$; $du(0)=0$; $v(0)=2$; $dv(0)=0$. На рис. 33 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m=22,57$. Час інтегрування $T=17,2$. На рис. 34 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін. Фазові траєкторії не вдається "сфокусувати" як у попередніх прикладах. Тому траєкторію руху вантажу хитної пружини вважатимемо умовно періодичною.

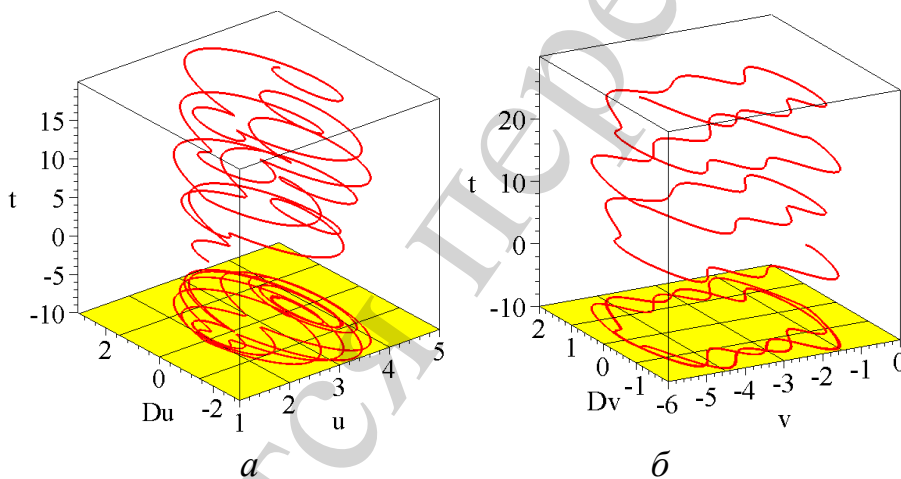


Рис. 33. Інтегральні криві для критичного значення $m=22,57$ у фазових просторах: $a - \{u, Du, t\}$; $b - \{v, Dv, t\}$

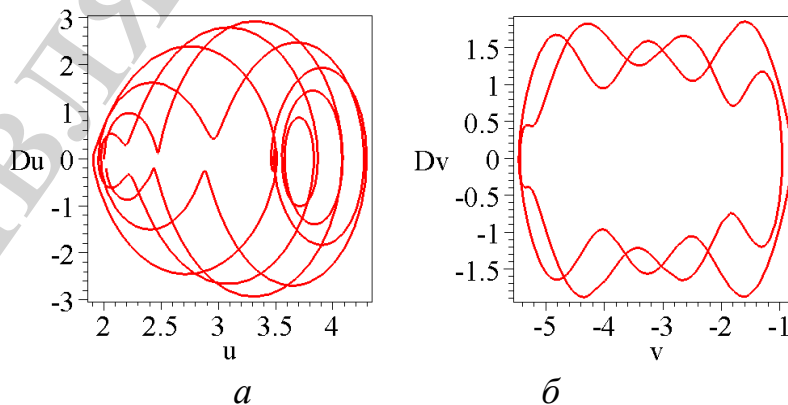


Рис. 34. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$: $a -$ координатної функції $u(t)$; $b -$ координатної функції $v(t)$

Для підтвердження значення $m=22,57$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 35). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $m_0=22,57$.

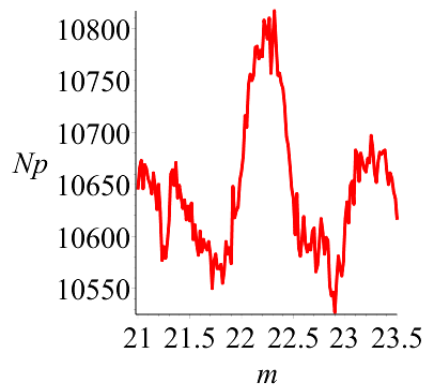


Рис. 35. Графік залежності кількості пікселів Np зображення фазової траєкторії від значення m

Після обчислення $m_0=22,57$ необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (8) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1 \dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у виразі (5) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для випадку 2 (рис. 36).

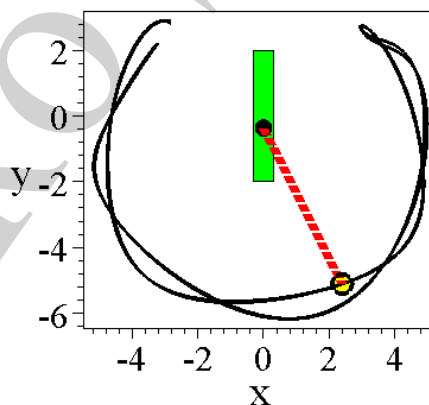


Рис. 36. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 6

Приклад 7. Розглянемо другий варіант, коли у початковому положенні хитна пружина розташована під кутом $\pi/3$, тобто $u(0)=\pi/3$. Швидкість зміни кута $du(0)=0$. Початкові значення для параметра v подовження пружини мають вигляд $v(0)=2$; $dv(0)=0$. Нехай $k=50$ і $h=2.5$. Закон руху точки кріплення задамо функцією $y=\cos(3t)$. В якості керуючого параметра коливання хитної пружини

оберемо значення маси m вантажу.

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (12) із початковими умовами $u(0)=\pi/3$; $du(0)=1$; $v(0)=2$; $dv(0)=0$. На рис. 37 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m=5,7557$. Час інтегрування $T=25,3$. На рис. 38 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін. Бачимо, що фазові траєкторії не вдається "сфокусувати" як у попередніх прикладах. Тому треба очікувати траєкторію руху вантажу хитної пружини умовно періодичною.

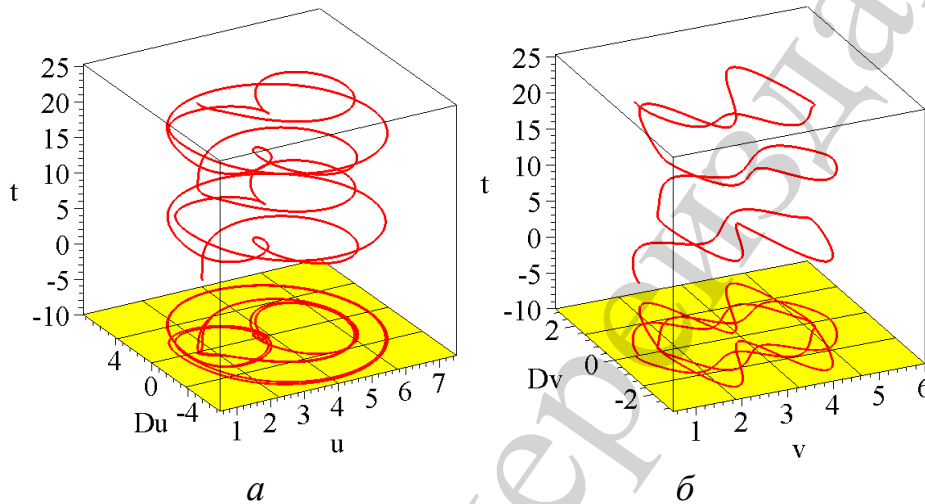


Рис. 37. Інтегральні криві для критичного значення $m=5,7557$ у фазових просторах: $a - \{u, Du, t\}$; $b - \{v, Dv, t\}$

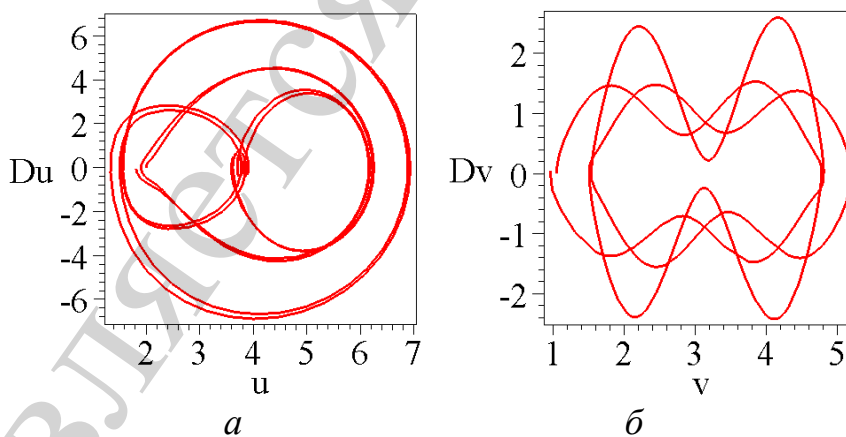


Рис. 38. Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$: $a -$ координатної функції $u(t)$; $b -$ координатної функції $v(t)$

Для підтвердження значення $m=5,7557$ можна скористатися графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 39). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається при критичному значенні керуючого параметра $m_0=5,7557$.

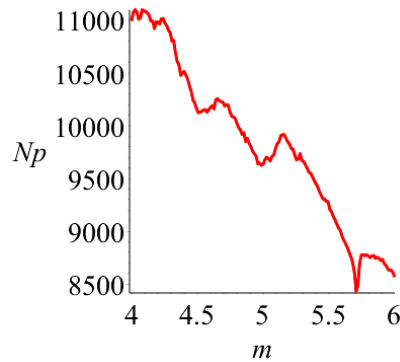


Рис. 39. Графік залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення m

Після обчислення $m_0=5,7557$. необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (12) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t=t_i$ (де $i=1\dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у виразі (5) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно сполучити ланкою. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для прикладу 7 (рис. 40).

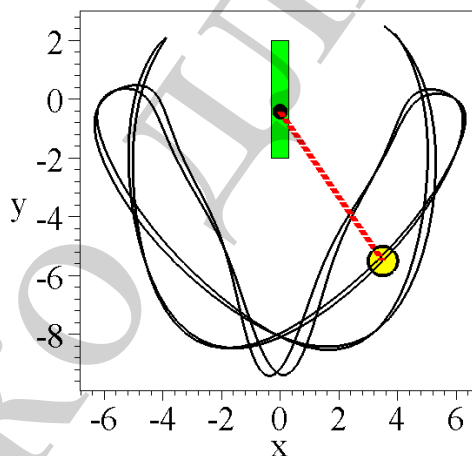


Рис. 40. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 7

Одержані у цьому і попередньому приклади умовно періодичні траєкторії можна пояснити суттєвою нелінійністю задачі про коливання хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Залучаючи зоровий аналізатор в процесі унаочнення коливань, одержаних за допомогою комп'ютерної анімації, можна переконатися у природному характері коливань хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Підтвердження цього можна знайти на сайті [32], де наведені комп'ютерні анімації коливань різновидів хитних пружин.

5. Обговорення результатів комп'ютерного моделювання траєкторії переміщення вантажу хитних пружин

Отримані результати можна пояснити можливістю застосування варіаційного принципу Лагранжа до розрахунку механічних коливань типу хитної пружини. Це дозволило використати рівняння Лагранжа другого роду для опису руху її вантажу.

До ще не реалізованих можливостей дослідження коливань хитних пружин належить розгляд співвідношення $\frac{mg}{kl} = \frac{1}{4}$ для випадків широкого діапазону зміни величин параметрів. Тут m – маса вантажу, k – жорсткість пружини, l – довжина пружини у ненавантаженому стані, $g=9,81$.

За умови виконання зазначеного співвідношення між параметрами коливальної системи найбільш ефективно відбувається кутове розгойдування хитної пружини за рахунок енергії цієї пружини. Розвиток випадкового поперечного збурення проходить до фіксованого значення амплітуди, оскільки запаси енергії пружини кінечні. Після досягнення такої амплітуди в ході коливань хитної пружини знову відбувається розтягування (або стискання) пружини. Це періодичне перекачування енергії пружини в енергію поперечних коливань вантажу і назад виявляється можливим в досить вузькому діапазоні варіювання параметрів з максимумом, що відповідає зазначеному співвідношенню. Необхідно перевірити, за яких умов виконується це співвідношення з прийнятною точністю і як це впливає на зображення періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини. Необхідно дослідити кількість можливих періодичних траєкторій для певного набору вхідних параметрів, а також класифікувати зображення періодичних траєкторій та виконати градацію з врахуванням збільшення їх довжин.

Крім того, необхідно продовжити дослідження у напрямку використання хитної пружини як моделі для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Адже для хитної пружини ідентифікуються необхідні для цього три енергетичні компоненти, подібні рухам пружини, рухам маятника, а також зв'язку між ними. Такий підхід може бути застосований, в принципі, до довільних нелінійних зв'язаних систем, щоб показати, як зв'язок опосередкує внутрішні енергетичні обміни і як розподіл енергії змінюється відповідно до параметрів системи.

Цікаво буде дослідити із зазначених позицій нелінійні зв'язані системи із взаємодіючими підсистемами на прикладах задач техніки. Першою сходинкою до цієї мети буде дослідження механічних пристроїв, де пружини впливатимуть на траєкторії коливання їх вантажів. У якості прикладів доцільно розглянути механізми з рухомими вантажами, схеми які мають вигляд:

- двох пружин зі спільним вантажем;
- маятника, закріпленого до підвішеної пружини;
- маятника, на довжину якого впливає пружина;
- маятника під рухомим візком, на положення якого впливає пружина;
- вантажа на кінці пружини, підвішеній до рухомого візка.

Труднощі розвитку досліджень в цьому напрямку виникнуть при спробі розв'язати обернену задачу в такій постановці. Нехай маємо криву, форма якої

належить класу фігур Ліссажу. Необхідно підібрати значення параметрів хитної пружини (маси вантажу, жорсткості пружини, та її довжини у ненавантаженому стані) так, щоб траєкторія руху вантажу була подібна обраній кривій.

7. Висновки

1. Серед апріорі хаотичних коливань подвійного маятника визначено таке коливання, коли другий вантаж рухається по періодичній траєкторії. Це дозволило розповсюдити спосіб розв'язку на задачі визначення періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини.

2. Наведено варіанти розрахунків для одержання періодичної траєкторії переміщення вантажу хитної пружини, коли задані її параметри:

– жорсткість пружини та її довжина без навантаження з невідомою величиною маси вантажу (наприклад, $h=1$; $m=3.332$; $k=40$; $v_0=1$; $Dv_0=0$; $u_0=0$; $Du_0=1.5$; $T=8.4$);

– величина маси вантажу пружини та її довжина без навантаження з невідомою жорсткістю пружини (наприклад, $h=1$; $m=1$; $k=14.4$; $v_0=1$; $Dv_0=0$; $u_0=0$; $Du_0=1$; $T=8.4$);

– величина маси вантажу пружини та її жорсткість з невідомою довжиною пружини без навантаження (наприклад, $h=0.39$; $m=2$; $k=40$; $v_0=1$; $Dv_0=0$; $u_0=0$; $Du_0=1.5$; $T=6$).

3. Розраховано значення параметрів для забезпечення умовно періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення, (наприклад, $m=16.571$; $k=50$; $h=2$; $u_0=2$; $Du_0=0$; $v_0=0$; $Dv_0=-1$; $x=\sin(2*t)$; $T=16.7$).

4. Для кожного варіанта розрахунків хитної пружини побудовані фазові траєкторії функцій узагальнених координат (значень кутів відхилення та подовження), що дозволило здійснювати оцінки діапазону змін зазначених величин та їх швидкостей.

5. Достовірність одержаних результатів ілюструються комп'ютерними анімація коливань відповідних хитних пружин, наведених на сайті [32], де, залучаючи зоровий аналізатор, можна переконатися у природному характері коливань хитної пружини, в тому числі, і з рухомою точкою підвісу.

Література

1. Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm / De Sousa M. C., Marcus F. A., Caldas I. L., Viana R. L. // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2018. Vol. 509. P. 1110–1119. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.06.089>

2. Власов В. Н. Величайшая Революция в Механике 4. URL: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/2114-vls.pdf>

3. Булдакова Д. А., Кирюшин А. В. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники // *Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ»*. 2015. Т. 6, № 2. С. 238–243.

4. Lynch P. The swinging spring: a simple model for atmospheric balance. *Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics: Vol. II: Geometric Methods and Models*.

Cambridge University Press, Cambridge, 2001. 50 p.

5. Алдошин Г. Т., Яковлев С. П. Аналитическая модель колебаний молекулы углекислого газа. Резонанс Ферми // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 1. С. 42–53.

6. Control of Wind-Induced Vibration of Transmission Tower-Line System by Using a Spring Pendulum / Zhang P., Ren L., Li H., Jia Z., Jiang T. // *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Vol. 2015. P. 1–10. doi: <https://doi.org/10.1155/2015/671632>

7. Castillo-Rivera S., Tomas-Rodriguez M. Helicopter flap/lag energy exchange study // *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 88, Issue 4. P. 2933–2946. doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3422-4>

8. Богданов К. Ю. Хищник и жертва // *Квант*. 1993. № 2. URL: http://kvant.mccme.ru/1993/02/hishchnik_i_zhertva.htm

9. Gendelman O. V. Transition of Energy to a Nonlinear Localized Mode in a Highly Asymmetric System of Two Oscillators // *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. 2001. P. 237–253. doi: https://doi.org/10.1007/978-94-017-2452-4_13

10. Алдошин Г. Т. Замечания к методу линеаризации нелинейных уравнений с двумя степенями свободы // В сб. «Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе». Труды международной научно-практической конференции. Т. 1. М.: МФЮФ, 2009.

11. Бубнович Э. В., Молдагананова А. Г. К вопросу об исследовании резонансов при вынужденных взаимосвязанных колебаниях гибкой нити. URL: <http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20Молдагананова%20.pdf>

12. Петров А. Г. О вынужденных колебаниях качающейся пружины при резонансе // *Доклады Академии наук*. 2015. Т. 464, № 5. С. 553–557. doi: <https://doi.org/10.7868/s0869565215290113>

13. Петров А. Г., Шундерюк М. М. О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине // *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 2. С. 27–40.

14. Bayly P. V., Virgin L. N. An Empirical Study of the Stability of Periodic Motion in the Forced Spring-Pendulum // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1993. Vol. 443, Issue 1918. P. 391–408. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1993.0152>

15. Duka B., Duka R. On the elastic pendulum, parametric resonance and “pumping” swings // *European Journal of Physics*. 2018. doi: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aaf146>

16. Breitenberger E., Mueller R. D. The elastic pendulum: A nonlinear paradigm // *Journal of Mathematical Physics*. 1981. Vol. 22, Issue 6. P. 1196–1210. doi: <https://doi.org/10.1063/1.525030>

17. Dullin H., Giacobbe A., Cushman R. Monodromy in the resonant swing spring // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 190, Issue 1-2. P. 15–37. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.10.004>

18. Ryland G., Meirovitch L. Stability boundaries of a swinging spring with oscillating support // *Journal of Sound and Vibration*. 1977. Vol. 51, Issue 4. P. 547–560. doi: [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(77\)80051-5](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(77)80051-5)

19. Holm D. D., Lynch P. Stepwise Precession of the Resonant Swinging Spring // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2002. Vol. 1, Issue 1. P. 44–64. doi: <https://doi.org/10.1137/s1111111101388571>
20. Lynch P., Houghton C. Pulsation and precession of the resonant swinging spring // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 190, Issue 1-2. P. 38–62. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.09.043>
21. Клименко А. А., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика пружинного маятника // *Динамические системы*. 2009. Вып. 27. С. 51–65.
22. Broucke R., Baха P. A. Periodic solutions of a spring-pendulum system // *Celestial Mechanics*. 1973. Vol. 8, Issue 2. P. 261–267. doi: <https://doi.org/10.1007/bf01231426>
23. Hitzl D. L. The swinging spring invariant curves formed by quasi-periodic solution. III // *Astron and Astrophys*. 1975. Vol. 41, Issue 2. P. 187–198.
24. Моделирование движения двойного маятника в Декартовой системе координат. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/new-in-9/advanced-hybrid-and-differential-algebraic-equations/double-pendulum.html>
25. The Spring Pendulum (Optional). URL: <http://homepage.math.uiowa.edu/~stroyan/CTLC3rdEd/ProjectsOldCD/estroyan/cd/46/index.htm>
26. Gavin H. P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints // CEE 541. Structural Dynamics. Department of Civil and Environmental Engineering Duke University, 2014. 23 p.
27. Van der Weele J. P., de Kleine E. The order-chaos-order sequence in the spring pendulum // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1996. Vol. 228, Issue 1-4. P. 245–272. doi: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(95\)00426-2](https://doi.org/10.1016/0378-4371(95)00426-2)
28. File:Spring pendulum.gif. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Spring_pendulum.gif
29. Алдошин Г. Т., Яковлев С. П. Динамика качающейся пружины с подвижным подвесом // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2012. Вып. 4. С. 45–52.
30. Development of projection technique for determining the non-chaotic oscillation trajectories in the conservative pendulum systems / Semkiv O., Shoman O., Sukharkova E., Zhurilo A., Fedchenko H. // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Vol. 2, Issue 4 (86). P. 48–57. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95764>
31. Geometric modeling of the unfolding of a rod structure in the form of a double spherical pendulum in weightlessness / Kutsenko L., Semkiv O., Asotskyi V., Zapolskiy L., Shoman O., Ismailova N. et. al. // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. Vol. 4, Issue 7 (94). P. 13–24. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139595>
32. Куденко Л. М., Пікрасов М. М., Запольський Л. Л. Ілюстрації до статті "Геометричне моделювання періодичної траєкторії вантажу хитної пружини". 2018. URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/7637>