УДК 658.286:519.286
DOI: 10.15587/1729-4061.2018.151922

Разработка и анализ модели стохастической оптимизации управления запасами материалов на судоремонтном заводе

И. М. Петров, М. Я. Постан

Розроблено стохастичну модель роботи системи управління запасами матеріалів на судноремонтному заводі (СРЗ). З метою врахування чинників невизначеності та ризику (випадкові моменти прибуття на СРЗ суден, випадкові розміри обсягів ремонтів) для моделювання запропоновано використати апарат марковських процесів зі знесенням. Ці процеси дозволяють врахувати дискретний характер змін чисельності суден, які знаходяться на СРЗ, та безперервний характер коливання рівня запасів матеріалів на складі. При цьому причали СРЗ інтерпретуються як система масового обслуговування. Вважається також, що поповнення запасів матеріалів на складі та використання під час ремонту суден здійснюється безперервно з постійними інтенсивностями, але в залежності від наявності матеріалів на складі. В результаті дослідження сформульована задача стохастичної оптимізації інтенсивностей поповнення запасів матеріалів за критерієм мінімум сумарних середніх поточних витрат СРЗ, які враховують також витрати, що стосуються додаткового простою суден внаслідок відсутності запасів матеріалів на складі під час проведення ремонту.

Модель засновано на сполученні методів теорії запасів і теорії масового обслуговування. Поповнення запасів матеріалів на складі та їх використання здійснюється безперервно з постійними інтенсивностями. Сформульовано завдання стохастичної оптимізації інтенсивностей поповнення запасів матеріалів за критерієм мінімум сумарних середніх витрат заводу в одиницю часу. Доведено, що отримані результати важливі для практики роботи служби постачання СРЗ, оскільки дозволяють формувати стратегію управління запасами матеріалів нас складах СРЗ в умовах нерівномірності у часу виникнення потреби у ремонті суден. З теоретичної точки зору одержані результати демонструють можливість використання апарату марковських процесів зі знесенням для вирішення різних завдань оптимального управління запасами в умовах випадкового попиту на запаси

Ключові слова: судноремонтний завод, система масового обслуговування, запаси матеріалів, ризик простою суден, оптимальне управління запасами

1. Введение

Судоремонт представляет собой сложное и маломеханизированное производство. Судоремонтные верфи (заводы) выполняют ремонт доковый, донно-забортной арматуры, трубопроводов, винто-рулевого комплекса, замену стальных конструкций корпуса, изготовление топливной аппаратуры для ДВС, сменно-запасных частей к судовому оборудованию и устройствам, другое. Если ремонт предполагает значительные по объему работы, используется индустриальный метод, основанный на специализации и кооперировании ремонтной базы, нулевом этапе, агрегатном способе ремонта, автоматизации и комплексной механизации.

Руководству СРЗ необходимо уметь эффективно управлять в условиях кризиса, адаптироваться к изменениям рыночной конъюнктуры [1], и стремиться минимизировать возможные риски. Для этого требуется использование научных методов принятия решений по управлению запасами материалов в условиях неопределенности и риска с учетом конкуренции, а также современных информационных технологий. При этом возникает много новых нестандартных научных задач, поскольку классические модели, разработанные в исследовании операций, не учитывают совсем или слабо учитывают специфику деятельности СРЗ как специализированного предприятия, а также его поведение в условиях рынка. Отсюда следует, что исследования в указанной области являются актуальными.

2. Анализ литературных источников и постановка проблемы

В работе [2] выполнен анализ рынка судоремонта и сделан вывод о том, что в последнее время мелкие судоремонтные компании все более уверенно выигрывают тендеры на ремонт судов в Украине. Причина этого кроется в том, что у крупных СРЗ выше накладные расходы, а самая низкая цена на ремонт без потери качества – это, как правило, ключевое требование заказчика работ. В [3] предложен подход для повышения эффективности управления деятельностью СРЗ, основанный на методах управления проектами. В [4] предложена энтропийная модель управления рисками в процессе реализации проектов ремонта судов, а в [5] разработаны принципы построения риско-ориентированной стратегии технического обслуживания и ремонта судов. В [6] предложена процедура построения деревьев вероятностей и расчета соотношений вероятностного вывода из них для анализа различных организационно-технических задач судоремонта в условиях неопределенности и риска. Однако использованные в [3–6] подходы не учитывает динамики изменения производственной ситуации на СРЗ, стохастического характера прибытия судов на СРЗ и колебания объемов их ремонта.

В работах [7–11] предлагается ряд схем моделирования производственных процессов на СРЗ, внедрение которых может усовершенствовать организацию ремонтных работ. Так, в [7] предложена имитационная модель в терминах дискретных событий для планирования и регулирования использования технологического оборудования на СРЗ и поставок материалов для него. При этом модель учитывает возможность выполнения анализ чувствительности планов при изменении исходных данных в процессе реализации планов, что позволяет улучшить использование оборудования. В то же время проблема организации поставок материалов для выполнения ремонтных работ в [7] не рассматривается. В [8] предложена система принятия решений по оперативному планированию с целью максимизации пропускной способности СРЗ и минимизации полных производственных издержек, которая позволяет избежать внутреннюю конкуренцию между центрами затрат на заводе и улучшить использование оборудования. В основе этой системы лежит создание общей информационной базы для использования всеми подразделениями завода. В [9] разработана мультиагентная информационная система (Multi-Agent System) для моделирования управления технологическими процессами в судоремонте, которая позволяет интегрировать в одно целое потоки данных, бизнес-процессы и финансовые потоки. Однако вопросы прогнозирования ремонтных работ на СРЗ на основе этой информационной базы в [8, 9] не затрагиваются, что ограничивает сферу приложений указанной информационной системы.

Производственная деятельность СРЗ, как и любого промышленного предприятия, требует для выполнения ремонтных работ для судов различных видов материалов и комплектующих. Спрос на эти материалы возникает тогда, когда производятся ремонтные работы на судах, стоящих у причалов СРЗ, т.е., вообще говоря, в случайные моменты времени. Поэтому для эффективного управления запасами этих материалов целесообразно использовать методы теории управления запасами в условиях случайного спроса. Это направление в теории управления запасами в последние декады активно развивается. Например, в [10] исследуется модель управления запасами, в которой время выполнения заказа на пополнение запаса задано, а спрос на продукцию подчинен логнормальному распределению. Однако неясно, как управлять запасами с помощью этой модели, если спрос подчинен любому другому закону распределения. В [11] анализируется проблема определения оптимальной политики пополнения запаса для скоропортящихся продукции с задолженным спросом и с учетом инфляции. При этом изменение коэффициента дисконтирования описывается с помощью марковского процесса. Однако этот подход неприменим в ситуации, когда сам спрос колеблется случайным образом. В [12] приведен ряд классических моделей оптимального управления запасами при случайном спросе, однако они не учитывают динамику изменения колебания запасов во времени, что снижает их практическую ценность.

Формально любой СРЗ можно представить в виде многоканальной системы массового обслуживания (СМО), в которой заявками на обслуживание являются сами суда с определенным набором ремонтных работ нескольких видов, а каналами обслуживания – причалы и доки вместе с необходимым оборудованием.

Несмотря на то, что в теории массового обслуживания –ТМО− (или теории очередей)–ТМО−в настоящее время разработано большое число моделей разнообразных обслуживающих систем [13], все же специфика отдельных видов производств требует построения и исследования специальных новых моделей. К таким системам, безусловно, можно отнести и СРЗ, где указанная специфика проявляется в одновременном описании производственного процесса (поступления судов и выполнения их ремонта) и процесса поставок материалов (снабжения) для осуществления ремонтных работ.

В то же время, исследований, касающихся взаимодействию процесса поступления и ремонта судов с одной стороны, с процессом пополнения и расхода материалов, необходимых для производства ремонтных работ с другой стороны, в настоящее время недостаточно. Такие исследования необходимы для повышения эффективности работы СРЗ и уменьшения риска простоя судов во время их ремонта, вызванного нехваткой материалов для ремонтных работ.

Как известно [13], для построения математических моделей СМО широко применяется аппарат марковских случайных процессов с дискретным множеством состояний. Однако в ряде случаев не менее удобным типом марковских случайных процессов являются так называемые марковские процессы со сносом (Markov drift processes). Марковские процессы со сносом в настоящее время широко применяются для моделирования и анализа разнообразных логистических систем [14–16], а также транспортных систем [17]. Фазовое пространство таких процессов представляет собой прямое произведение дискретного и непрерывного множеств. С прикладной точки зрения дискретное множество описывает динамику состояний СМО, определяемых дискретными переменными (типа числа судов у причалов и в очередях к ним), а непрерывное множество − может описывать, например, колебание уровня запаса материалов на складе во времени. Это обстоятельство позволяет формулировать и решать разнообразные задачи по оптимальному управлению запасами в условиях неопределенности и риска. Этот подход может быть использован для того, чтобы решить проблему, связанную с исследованием влияния уровня запаса материалов на СРЗ на динамику изменения числа судов, находящихся на заводе, и разработкой метода оптимизации политики пополнения указанных запасов.

3. Цель и задачи исследования

Целью исследования является математическая формулировка и решение задачи оптимального управления запасами материалов, необходимых для ремонта судов, в условиях неопределенности моментов прибытия судов на СРЗ и объемов ремонтных работ.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

– дать формализованное описание СРЗ в терминах ТМО и теории запасов с учетом неравномерности поступления судов на ремонт и различного объема ремонтных работ и соответствующих затрат материалов на основе использования соответствующего марковского процесса со сносом (или со «скоростями»);

– вывести систему интегро-дифференциальных уравнений для описанной вероятностной модели СРЗ для нахождения совместного распределения числа судов, находящихся на причалах СРЗ под ремонтом и количества материалов, комплектующих, находящихся на складе материально-технического снабжения СРЗ;

– на основе полученного решения найти:

а) аналитические выражения для расчета основных показателей эффективности работы СРЗ как обслуживающей системы и оценить средние текущие затраты СРЗ, связанные с ремонтом судов, а также затраты, вызванные исчерпанием запаса материалов на складе;

б) разработать модель стохастической оптимизации интенсивностей пополнения запасов материалов.

4. Формализованное описание СРЗ в терминах теории массового обслуживания и теории запасов

Рассмотрим СРЗ, упрощенно описываемый следующими составными элементами:

а) склад для хранения M видов материалов, необходимых для производства ремонтных работ;

б) запас материала m-го вида пополняется непрерывно с интенсивностью U_m;

в) рынок поставщиков материалов неограниченный;

г) стоимость доставки материалов в единицу времени пропорциональна интенсивности пополнения материала;

д) каждое прибывающее на СРЗ судно требует для своего ремонта случайного количества γ_m материала m-го вида, т. е. ремонт каждого судна независимо от других судов требует случайный вектор материалов (γ_1, γ_2,…, γ_M). Для простоты будем считать, что все указанные случайные величины взаимно независимы, причем

$$\mathbf{P}\{\gamma_m \le x\} \equiv G_m(x); \tag{1}$$

е) в процессе выполнения ремонтных работ по заданной технологии интенсивность использования материала m-го вида равна $W_m > U_m$;

ж) каждое прибывшее судно занимает один из n свободных идентичных и взаимозаменяемых причалов СРЗ, если таковые есть; в противном случае оно становится в очередь к причалам, причем длина очереди судов ограничена величиной R.

По поводу принятых допущений следует сделать следующее примечание.

В современной теории управления запасами рассматриваются модели с разными политиками пополнения запасов [12]: непрерывного пополнения, пополнения партиями фиксированного размера по заявкам, по величине уровня текущего запаса на складе, по уровню спроса и др. Здесь рассматривается только одна политика, а именно: непрерывного пополнения. Практически это допущение означает, что пополнение запасов производится очень часто, но относительно малыми партиями, и поэтому приближенно можно считать, что пополнение происходит непрерывно во времени.

В теории управления запасами часто используется обратная связь между стратегией пополнения запасов и текущим уровнем запаса. В описываемой схеме моделирования допускается ситуация, когда во время ремонта судна уровень запаса какого-либо материала (например, m-го) на складе исчерпывается. В этой ситуации будем считать, что ремонт судна продолжается, однако интенсивность пополнения запаса (и использования этого вида материала для выполнения соответствующих ремонтных работ) становится равной $U_{0m} \ge U_m$. В частности, она может быть равной интенсивности использования материала m-го вида W_m, или же оставаться равной U_m. Во втором случае, естественно, время ремонта увеличивается, что может привести к штрафным санкциям к СРЗ со стороны судовладельца.

Отметим, что поскольку ремонт заканчивается тогда, когда все M видов работ будут выполнены, то при условии, что все работы производятся параллельно, время ремонта τ произвольного судна равно

$$\tau = \max\left(\frac{\gamma_1}{W_1},...,\frac{\gamma_M}{W_M}\right).$$

Отсюда в силу (1) следует, что время ремонта произвольного судна есть случайная величина с функцией распределения

$$\mathbf{P}\{\tau \le t\} = G_1(W_1 t)...G_M(W_M t) \equiv B(t).$$

Эти зависимости будут иметь место, если за время ремонта судна ни разу не возникнет ситуация, при которой на складе исчерпается запас хотя бы одного вида материала, используемого для ремонта судна. Ниже будет исследоваться ситуация, когда возможно исчерпание запасов материалов, причем детально будут изучены два вида стратегий пополнения запасов после опустошения склада, а именно:

а) $U_{0m}=U_m$,

б) $U_{0m}=W_m$. (2)

В случае а) возникает риск дополнительного простоя судна, находящегося в ремонте из-за снижения интенсивности пополнения запаса, а случае б) простоя судна не будет.

Конечной целью построения описанной модели СРЗ является формулировка и решение задачи нахождения оптимальных значений параметров U_1, U_2,…, U_M, характеризующих процесс пополнения запасов материалов на складе, по некоторому экономическому критерию оптимизации.

5. Вывод и анализ системы дифференциальных уравнений и граничных условий для нахождения стационарного совместного распределения числа судов на СРЗ и количества материала на складе

Будем считать, что суда на СРЗ прибывают в случайные моменты времени, причем их поток описывается моделью однородного пуассоновского процесса с параметром λ. Примем также, что случайные величины γ_m, m=1, 2,…, M, распределены по показательным законами со средними значениями g_m, m=1, 2,.., M. Введем следующие условные обозначения:

$\nu(t)$ − число судов, находящихся на СРЗ в момент времени t;

$Z_m(t)$ – уровень запаса материала m-го вида на складе в момент времени t.

Для простоты исследования будем считать, что вместимость склада достаточно большая, т. е. будем пренебрегать возможностью полного заполнения склада материалами.

В силу принятых выше допущений случайный процесс ($\nu(t)$; $Z_1(t),\ldots, Z_M(t)$) является марковским процессом с векторным сносом. Для нахождения предельного распределения вероятностей этого процесса в принципе можно вывести соответствующую систему дифференциальных уравнений в частных производных и граничных условий.

Для произвольного M, однако, упомянутая система уравнений слишком громоздка и сложна для решения. Ниже приведем ее для частных случаев M=1 и M=2, и n=1, т. е. для одного причала.

Случай M=1. Обозначим

$$q_k(x) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{x < Z(t) < x + dx\} / dx, \ \ k \in F = \{0,1,\ldots, R+1\},$$

$$p_k^- = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{Z(t) = 0, \nu(t) = k\}, \ \ k \in F \setminus \{0\}.$$

Для определения этих функций и постоянных с помощью метода, приведенного в работе [18], можно вывести следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$U\hat{q}_0'(x) = -\lambda\hat{q}_0(x) + \mu\hat{q}_1(x),$$

$$-V\hat{q}_i'(x) = -(\lambda+\mu)\hat{q}_i(x) + \lambda\hat{q}_{i-1}(x) + \mu\hat{q}_{i+1}(x), \ \ i = 1,2,\ldots,R,$$

$$-V\hat{q}_{R+1}'(x) = -\mu\hat{q}_{R+1}(x) + \lambda\hat{q}_R(x), \quad x > 0, \tag{3}$$

$$-\mu_1\hat{p}_1^- + U\hat{q}_0(0) = 0,$$

$$-(\lambda+\mu_1)\hat{p}_1^- + \mu_1\hat{p}_2^- + V\hat{q}_1(0) = 0,$$

$$-(\lambda+\mu_1)\hat{p}_i^- + \mu_1\hat{p}_{i+1}^- + \lambda\hat{p}_{i-1}^- + V\hat{q}_i(0) = 0, \ \ i = 2,3,\ldots,R,$$

$$-\mu_1\hat{p}_{R+1}^- + \lambda\hat{p}_R^- + V\hat{q}_{R+1}(0) = 0, \tag{4}$$

где $\mu = W/g, \ \mu_1 = U_0/g, \ V = W - U;$ U_0 равно U или W (см. (2)).

Условие нормировки для системы уравнений (3), (4) имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{R+1} p_i^- + \sum_{i=0}^{R+1} \int_0^{\infty} q_i(x)dx = 1. \quad (5)$$

Решение граничной задачи (3)−(5) сопряжено с определенными вычислительными трудностями. Стандартный метод ее решения основан на применении преобразования Лапласа к системе уравнений (3)−(5) и последующим определением постоянных

$$p_i^-, \ i = 1, 2, ..., R+1.$$

В результате ее решения можно найти основные показатели эффективности работы описанной системы управления запасами, а именно:

а) среднее количество материала, находящегося на складе в произвольный момент времени:

$$\mathbf{M}Z = \int_0^{\infty} x \sum_{i=0}^{R+1} q_i(x)\mathrm{d}x; \quad (6)$$

б) вероятность дополнительного простоя судна на ремонте из-за нехватки материала на складе (в случае U_0=U):

$$d(U) = \sum_{i=1}^{R+1} p_i^-. \quad (7)$$

6. Формулировка задачи стохастической оптимизации интенсивностей пополнения запаса материала.

Используя показатели (6), (7), можно сформулировать задачу оптимизации параметра U, характеризующего политику пополнения запаса материала на складе СРЗ. В качестве критерия оптимизации можно взять минимум средних суммарных затрат СРЗ в единицу времени. В случае U_0=U эти затраты связаны с пополнением запаса материала, его хранением на складе, а также со штрафами за дополнительный простой ремонтируемых судов из-за отсутствия запаса материала на складе. Аналитическое выражение для этих затрат имеет следующий вид:

$$\overline{S}(U) = aU + c_1\mathbf{M}Z + c_2 d(U), \quad (8)$$

где a – стоимость за единицы материала; c_1 – стоимость суточного хранения единицы материала на складе; c_2 – размер штрафа в единицу времени за простой судна из-за отсутствия запаса материала на складе.

В случае же U_0 = W указанные затраты можно представить следующим образом:

$$\bar{S}(U) = a\left[W\sum_{i=1}^{R+1} p_i^- + U\left(1 - \sum_{i=1}^{R+1} p_{i+1}^-\right)\right] + c_1\mathbf{M}\mathrm{Z}. \tag{9}$$

Отметим, что множитель при параметре a в правой части (9) имеет смысл средней интенсивности пополнения запаса.

Рассмотрим подробней частный случай, когда $R = 0$. При этом система (3) примет следующий вид:

$$Uq_0'(x) = -\lambda q_0(x) + \mu q_1(x),$$

$$-Vq_1'(x) = -(\lambda+\mu)q_1(x) + \lambda q_0(x), x > 0,$$

$$-\mu_1 p_1^- + Uq_0(0) = 0,$$

$$-\mu_1 p_1^- + Vq_1(0) = 0,$$

$$p_1^- + \int_0^\infty \left(q_0(x) + q_1(x)\right)\mathrm{d}x = 1. \tag{10}$$

Складывая первые два уравнения системы (10), после интегрирования получим равенство

$$Uq_0(x) = Vq_1(x), x \ge 0, \tag{11}$$

так что, например, первое уравнение системы (10) можно отбросить.

Решение системы уравнений (10), (11) легко находится непосредственным интегрированием и имеет вид:

$$q_0(x) = q_0(0)e^{-\delta x},\ \delta = \frac{\lambda}{U} - \frac{\mu}{V} > 0,$$

$$q_0(0) = \frac{\mu_1(\lambda V - \mu U)}{\left[g(\lambda V - \mu U) + WU\right]U}, \tag{12}$$

$$p_1^- = \frac{U}{\mu_1} q_0(0) = \frac{\lambda W - (\lambda+\mu)U}{(\lambda+\mu_1)W - (\lambda+\mu)U}.$$

Формулы (12) справедливы только при условии

$$\frac{\lambda}{U} > \frac{\mu}{W-U} \text{ или } U < \frac{\lambda W}{\lambda+\mu},$$

которое необходимо для существования установившегося режима работы анализируемой системы управления запасами. Его выполнение препятствует слишком большому скоплению материалов на складе с течением времени.

С помощью соотношений (11), (12) находим

$$\mathbf{M}Z = \int_0^\infty x(q_0(x)+q_1(x))\mathrm{d}x = \frac{WU^2}{\lambda g[\lambda W-(\lambda+\mu)U]}. \tag{13}$$

для случая $U_0=U$ и

$$\mathbf{M}Z = \int_0^\infty x(q_0(x)+q_1(x))dx = \frac{W^2UV}{[\lambda W-(\lambda+\mu)U][\lambda gW-(\lambda+\mu)gU+W^2]}. \tag{14}$$

для случая $U_0=W$.

Таким образом, с учетом (12), (13) при стратегии пополнения запасов $U_0=U$ явное выражение для целевой функции (8) будет иметь следующий вид:

$$\bar{S}(U) = aU + c_1\frac{WU^2}{\lambda g\left[\lambda W-(\lambda+\mu)U\right]} + c_2\frac{\lambda W-(\lambda+\mu)U}{\lambda(W-U)}. \tag{15}$$

Легко убедиться, что второе слагаемое в правой части выражения (15) возрастает, а третье – убывает с ростом U. Поэтому функция (15) действительно достигает минимума при некотором положительном значении параметра U.

В случае же $U_0=W$ явное выражение для целевой функции (9) будет таким:

$$\bar{S}(U) = \frac{W(W-U)}{(\lambda g+W)W-(\lambda+\mu)gU}\left[a\lambda g + c_1\frac{UW}{\lambda W-(\lambda+\mu)U}\right], \tag{16}$$

где $\mu=W/g$.

Отметим, что вместо критерия (16) можно рассмотреть и другие критерии оптимизации, например, среднюю текущую прибыль СРЗ от выполнения им ремонтных работ, которая может быть представлена следующим образом:

$$\bar{\Pi}(U) = \left(b\mathbf{M}\sum_{n=1}^{\omega(t)}\gamma_n\right)/t - aU - c_1\mathbf{M}Z - c_2 d(U), \tag{17}$$

где $\omega(t)$ – число судов, ремонт которых завершился в интервале времени (0, t); b − доход, получаемый СРЗ за единицу ремонтных работ. Методами теории массового обслуживания можно показать, что в установившемся (статистически равновесном) режиме

$$\mathbf{M}\sum_{n=1}^{\omega(t)}\gamma_n = gt\left(\mu_1\sum_{i=1}^{R+1} ip_i^- + \mu\sum_{i=1}^{R+1}\int_0^\infty iq_i\left(x\right)dx\right),$$

и, следовательно, выражение (17) примет такой вид:

$$\bar{\Pi}\left(U\right) = b\left(U\sum_{i=1}^{R+1} ip_i^- + W\sum_{i=1}^{R+1} i\int_0^\infty q_i(x)dx\right) - aU - c_1\mathbf{M}Z - c_2 d\left(U\right). \tag{18}$$

7. Случай нескольких видов материала.

Пусть M>1 и будем считать, что разные виды ремонта судна выполняются отдельно друг от друга, т. е. последовательно выполняется сначала ремонт первого, затем второго вида и т. д. Иными словами, ремонты каждого вида не выполняются параллельно. Будем также обозначать U_{0m}=U_m .

Здесь необходимо ввести новые условные обозначения:

$Z_m(t)$ – уровень запаса материалов m-го вида, находящихся на складе СРЗ в момент времени t;

$\nu(t)$ – число судов, находящихся на СРЗ в момент времени t;

$\alpha(t)$ – номер вида ремонта, выполняемого в момент времени t.

В дальнейшем ограничимся случаем M=2. Обозначим

$$q_0(x_1, x_2; t)dx_1dx_2 = \mathbf{P}\{\nu(t) = 0, x_1 < Z_1(t) < x_1 + dx_1, x_2 < Z_2(t) < x_2 + dx_2\},$$

$$q_{km}(x_1, x_2; t)dx_1dx_2 =$$
$$= \mathbf{P}\{\nu(t) = k, \alpha(t) = m, x_1 < Z_1(t) < x_1 + dx_1, x_2 < Z_2(t) < x_2 + dx_2\},$$

$$k = 1, 2, ..., R+1; m = 1, 2; x_1, x_2 \ge 0;$$

$$q_{k1}^-(x_2; t)dx_2 = \mathbf{P}\{\nu(t) = k,\ \alpha(t) = 1,\ Z_1(t) = 0,\ x_2 < Z_2(t) < x_2 + dx_2\},\ x_2 > 0,$$

$$q_{k2}^-(x_1; t)dx_1 = \mathbf{P}\{\nu(t) = k,\ \alpha(t) = 2,\ x_1 < Z_1(t) < x_1,$$

$$Z_2(t) = 0\},\ x_1 > 0. \tag{19}$$

Будем интересоваться предельным распределением вероятностей (19) при $t \to \infty$, которое обозначим:

$$q_0(x_1,x_2),\ q_{km}(x_1,x_2),\ q_{k1}^-(x_2),\ q_{k2}^-(x_1).$$

Для нахождения указанного распределения обычным методом [9–11, 18], основанном на рассмотрении вероятностей переходов марковского процесса из одного состояния в другое в бесконечно малом интервале времени, можно вывести соответствующую систему дифференциальных уравнений в частных производных и граничных условий.

$(\nu(t); Z_1(\mathrm{t}),\ldots, Z_M(t))$.

Например, для случая R=0 эта система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\left(U_1\frac{\partial}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)q_0\left(x_1,x_2\right)=-\lambda q_0\left(x_1,x_2\right)+\mu_2 q_{12}\left(x_1,x_2\right),$$

$$\left(-V_1\frac{\partial}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)q_{11}\left(x_1,x_2\right)=-\mu_1 q_{11}\left(x_1,x_2\right)+\lambda q_0\left(x_1,x_2\right),$$

$$\left(U_1\frac{\partial}{\partial x_1}-V_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)q_{12}\left(x_1,x_2\right)=-\mu_2 q_{12}\left(x_1,x_2\right)+\mu_1 q_{11}\left(x_1,x_2\right),$$

$$x_1,x_2>0. \tag{20}$$

Соответствующие граничные условия имеют следующий вид:

$$U_2\frac{dq_{11}^-(x_2)}{dx_2}-V_1 q_{11}(0,x_2)=-\mu_1' q_{11}^-(x_2),\ x_2>0, \tag{21}$$

$$U_1\frac{dq_{12}^-(x_1)}{dx_1}-V_2 q_{12}(x_1,0)=-\mu_2' q_{12}^-(x_1),\ \ x_1>0, \tag{22}$$

$$U_1\frac{dq_{12}^-(x_1)}{dx_1}+U_2 q_0(x_1,0)=\mu_2' q_{12}^-(x_1),\ \ x_1>0, \tag{23}$$

$$-V_2 \frac{dq_{11}^{-}(x_2)}{dx_2} + U_1\, q_{12}(0, x_2) = \mu'_2\, q_{11}^{-}(x_2), \quad x_2 > 0, \tag{24}$$

$$q_0(0, x_2) = 0,$$

$$q_{11}(x_1, 0) = 0, \tag{25}$$

$$q_{11}^{-}(0) = 0.$$

где

$$V_m = W_m - U_m > 0,\ \mu_m = W_m / g_m;\ \mu'_m = U_m / g_m,\ m = 1, 2.$$

К системе уравнений (20)−(25) следует добавить также условие нормировки:

$$\begin{gathered}\int_0^\infty q_{11}^{-}(x_2)dx_2 + \int_0^\infty q_{12}^{-}(x_1)dx_1 + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty (q_0(x_1, x_2) + q_{11}(x_1, x_2) + q_{12}(x_1, x_2))\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = 1.\end{gathered} \tag{26}$$

Поясним физический смысл граничных условий (21)−(25).

Ограничение (21) описывает переход процесса в состояние, когда выполняется ремонт 1-го вида и запас материала 1-го вида на складе отсутствует, причем интенсивность его использования во время ремонта стала равной интенсивности его пополнения, т. е. U_1. Запас материала 2-го вида пополняется с интенсивностью U_2.

Ограничение (22) описывает переход процесса в состояние, когда выполняется ремонт 2-го вида, запас материала 2-го вида на складе исчерпался и интенсивность его использования во время ремонта стала равной интенсивности его пополнения, т. е. U_2. Запас материала 1-го вида пополняется с интенсивностью U_1 .

Ограничение (23) отражает переход процесса в состояние, когда:

а) завершился ремонт 2-го вида при нулевом уровне запаса материала 2-го вида на складе;

б) ремонт судна завершается и судно уходит из СРЗ, начинается пополнение запаса материала 2-го вида на складе с интенсивностью U_2;

в) запас материала 1-го вида на складе пополняется с интенсивностью U_1.

Наконец, ограничение (24) отражает переход процесса в состояние, когда завершается ремонт 1-го вида при нулевом уровне запаса материала 1-го вида на складе, начинается пополнение его запаса на складе с интенсивностью U_1 и начинается ремонт 2-го вида.

Условия (23) выражают невозможность попадания процесса в следующие состояния:

а) отсутствие запаса материала 1-го вида на складе в момент времени сразу после ухода отремонтированного судна из СРЗ (т. е. после завершения ремонта 2-го вида);

б) отсутствие запаса материала 2-го вида на складе в момент сразу после постановки на ремонт очередного судна;

в) отсутствие на складе материала 2-го вида в момент сразу после завершения 1-го вида ремонта при отсутствии на складе запаса материала 1-го вида.

Граничная задача (20)−(26) может быть решена методом преобразования Лапласа. Обозначим

$$q_0^{**}(s_1,s_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-s_1x_1-s_2x_2)q_0(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

$$q_{1m}^{**}(s_1,s_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-s_1x_1-s_2x_2)q_{1m}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,\ \ m=1,2,$$

$$q_{11}^{-*}(s_2)=\int_0^\infty \exp(-s_2x)q_{11}^{-}(x)dx,\ \ q_{12}^{-*}(s_1)=\int_0^\infty \exp(-s_1x)q_{12}^{-}(x)dx,\ \ \operatorname{Re}s_1,\operatorname{Re}s_2>0.$$

Применим вначале преобразование Лапласа к уравнениям (15) с учетом условий (25). После стандартных преобразований придем к следующей системе уравнений относительно изображений (27):

$$(\lambda+s_1U_1+s_2U_2)q_0^{**}(s_1,s_2)-\mu_2q_{12}^{**}(s_1,s_2)=U_2q_0^{*}(s_1,0),$$

$$-\lambda q_0^{**}(s_1,s_2)+(\mu_1-s_1V_1+s_2U_2)q_{11}^{**}(s_1,s_2)=-V_1q_{11}^{*}(0,s_2),$$

$$-\mu_1q_{11}^{**}(s_1,s_2)+(\mu_2+s_1U_1-s_2V_2)q_{12}^{**}(s_1,s_2)=U_1q_{12}^{*}(0,s_2)-V_2q_{12}^{*}(s_1,0),$$

$$\operatorname{Re}s_m>0,\ \ m=1,2, \tag{28}$$

где использованы следующие условные обозначения:

$$q_0^{*}(s,0)=\int_0^\infty e^{-sx}q_0(x,0)\mathrm{d}x,$$

$$q_{11}^{*}(0,s)=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-sx} q_{11}(0,x)\mathrm{d}x,$$

$$q_{12}^{*}(s,0)=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-sx} q_{12}(x,0)\mathrm{d}x, \ \ \operatorname{Re} s>0.$$

Преобразуем по Лапласу также и граничные условия (21)−(24) с учетом условий (25):

$$V_1 q_{11}^{*}(0,s_2)=(\mu_1'+s_2U_2)q_1^{-*}(s_2),$$

$$V_2 q_{12}^{*}(s_1,0)=(\mu_2'+s_1U_1)q_2^{-*}(s_1)-U_1q_2^{-}(0),$$

$$U_2 q_0^{*}(s_1,0)=(\mu_2'-s_1U_1)q_2^{-*}(s_1)+U_2q_2^{-}(0),$$

$$U_1 q_{12}^{*}(0,s_2)=(\mu_1'+s_2V_2)q_1^{-*}(s_2). \tag{29}$$

Определитель системы из трех уравнений (29), как легко заметить, равен

$$\Delta\left(s_1,s_2\right)= \\ =\left(\lambda+s_1U_1+s_2U_2\right)\left(\mu_1-s_1V_1+s_2V_2\right)\left(\mu_2+s_1U_1-s_2V_2\right)-\lambda\mu_1\mu_2. \tag{30}$$

Соответствующие определители для нахождения неизвестных функций $q_0^{**}(s_1,s_2), q_{12}^{**}(s_1,s_2), q_{11}^{**}(s_1,s_2)$ будут такими:

$$\Delta_0(s_1,s_2)=U_2q_0^{*}(s_1,0)(\mu_1-s_1V_1+s_2V_2)(\mu_2+s_1U_1-s_2V_2)- \\ -\mu_2[\mu_1V_1q_{11}^{*}(0,s_2)-(\mu_1-s_1V_1+s_2U_2)(U_1q_{12}^{*}(0,s_2)-V_2q_{12}^{*}(s_1,0))],$$

$$\Delta_{11}(s_1,s_2)=-V_1q_{11}^{*}(0,s_2)(\lambda+s_1U_1+s_2U_2)(\mu_2+s_1U_1-s_2V_2)+ \\ +\lambda\{U_2q_0^{*}(s_1,0)(\mu_2+s_1U_1-s_2V_2)+\mu_2[U_1q_{12}^{*}(0,s_2)-V_2q_{12}^{*}(s_1,0)]\}, \tag{31}$$

$$\Delta_{12}(s_1,s_2) = (\lambda + s_1U_1 + s_2U_2)\{[U_1 q_{12}^{*}(0,s_2) - V_2 q_{12}^{*}(s_1,0)](\mu_1 - s_1V_1 + s_2U_2) -$$
$$-\mu_1 V_1 q_0^{*}(s_1,0)\} + \lambda\mu_1 U_2 q_0^{*}(s_1,0).$$

Таким образом, с помощью соотношений (29) − (31) находим

$$q_0^{**}(s_1,s_2) = \Delta_0(s_1,s_2) / \Delta(s_1,s_2),$$

$$q_{12}^{**}(s_1,s_2) = \Delta_{12}(s_1,s_2) / \Delta(s_1,s_2),$$

$$q_{11}^{**}(s_1,s_2) = \Delta_{11}(s_1,s_2)/\Delta(s_1,s_2). \qquad (32)$$

Найденное решение содержит четыре неизвестные функции

$$q_0^{*}(s_1,0),\ q_{11}^{*}(s_1,0),\ q_{12}^{*}(s_1,0),\ q_{12}^{*}(0,s_2).$$

Эти функции с помощью граничных условий (29) выражаются через две неизвестные функции $q_1^{-*}(s_2)$, $q_2^{-*}(s_1)$, которые находятся с помощью условия аналитичности функций (27) в области $\mathrm{Re}\, s_1,\ \mathrm{Re}\, s_2 \geq 0$, т. е. условия совпадения нулей знаменателя и числителей в дробях (32). В итоге получается некоторая краевая задача для функций двух комплексных переменных. Эта вычислительная процедура подробно изложена в монографии [19]. Оставшаяся неизвестной постоянная $q_2^{-}(0)$ находится из условия нормировки (26).

Как и в случае одного вида материалов, здесь также можно сформулировать задачу оптимизации параметров U_1, U_2 с целью минимизации средней интенсивности расходов на поставку материалов и убытков вследствие простоя судов из-за прерывания ремонта, т. е. функции вида

$$\bar{S}(U_1,U_2) = a_1U_1 + a_2U_2 + c_{11}\mathbf{M}Z_1 + c_{12}\mathbf{M}Z_2 + c_2 d(U_1,U_2), \ (32)$$

где $d(U_1,U_2)$ – вероятность дополнительного простоя судна на ремонте из-за отсутствия на складе материалов, причем

$$d(U_1,U_2)=\int_0^{\infty} q_{11}^{-}(x)dx+\int_0^{\infty} q_{12}^{-}(x)dx+q_2^{-}(0)=$$

$$=q_{11}^{-*}(0)+q_{12}^{-*}(0)+q_2^{-}(0);$$

$\mathbf{M}Z_i$ − среднее количество материала i-го вида на складе, причем

$$\mathbf{M}Z_1=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_1(q_0(x_1,x_2)+q_{11}(x_1,x_2)+q_{12}(x_1,x_2))dx_1dx_2+\int_0^{\infty} xq_{12}^{-}(x)\mathrm{d}x,$$

$$\mathbf{M}Z_2=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_2(q_0(x_1,x_2)+q_{11}(x_1,x_2)+q_{12}(x_1,x_2))dx_1dx_2+\int_0^{\infty} xq_{11}^{-}(x)\mathrm{d}x;$$

a_i – стоимость единицы материала i-го вида; c_{1i} – суточная стоимость хранения единицы материала i-го вида на складе.

8. Пример решения задачи стохастической оптимизации интенсивностей пополнения запасов

Приведем численный пример, иллюстрирующий приведенную задачу стохастической оптимизации, ограничившись случаем M=1, R=0, т. е. рассмотрим задачу минимизации функции (13) для разных значениях параметра W и при следующих исходных данных: a 5 тыс. ден. ед./ т, c_1=0.08 тыс. ден. ед./т·сут, c_2=10 тыс. ден. ед./сут., g=0,5 т.

Для расчетов используем пакет *Microsoft Excel*, опция «Поиск решения». Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1
Результаты расчета по модели стохастической оптимизации

№ п/п	Значение параметра W, т/сут.	Оптимальное значение параметра U, т/сут.	Минимальное значение функции (13), тыс. ден. ед./сут.
1	0,15	0, 005	0, 22438
2	0,20	0, 050	0, 32500
3	0,25	0, 070	0, 35843
4	0,30	0, 074	0, 37904
5	0,35	0, 077	0, 03962
6	0,40	0, 079	0, 41105
7	0,45	0, 081	0, 42440
8	0,50	0, 082	0, 43673
9	0,55	0, 084	0, 44839
10	0,60	0, 085	0, 45964

Из данных табл. 1 видно, что с ростом значений интенсивности использования материала в ремонтных работах (параметр W) оптимальные значения интенсивности пополнения материала на складе (параметр U) растут медленней, причем этот рост имеет предел.

9. Обсуждение результатов исследования модели стохастической оптимизации управления запасами материалов на СРЗ

В результате проведенного исследования показано, что предложенный подход к оптимизации управления запасами материалов на СРЗ позволяет минимизировать ожидаемые текущие затраты СРЗ в условиях неравномерности прибытия судов на СРЗ и случайности объемов ремонтных работ по каждому судну. Это достигается за счет нахождения аналитических зависимостей соответствующих составляющих затрат от искомых параметров управления (т. е. интенсивностей пополнения запасов). При этом появляется возможность учесть убытки СРЗ, вызванные штрафными санкциями со стороны судовладельцев из-за дополнительного простоя судов вследствие нехватки материалов на складе. В то же время, в случае нескольких видов материалов (и соответствующих видов ремонтов) реализация этого подхода сопряжена с определенными аналитическими трудностями, которые, впрочем, могут быть преодолены специальными методами решения краевых задач для функций нескольких комплексных переменных.

Описанная схема моделирования работы СРЗ может быть положена также в основу разработки соответствующей имитационной модели. Это будет оправдано в тех случаях, когда необходимо учитывать немарковский характер случайных процессов прибытия судов на завод (например, их прибытие по определенному графику) и объемов требуемого ремонта судов. Однако следует отметить, что решение задачи стохастической оптимизации в этом случае требует значительного объема компьютерных вычислений. В такой ситуации наиболее эффективно использование сочетания аналитического и имитационного моделирования в рамках концепции так называемых направленных имитационных вычислений [20].

С точки зрения теории управления запасами использование марковского процесса со сносом позволяет не просто учесть случайные колебания спроса, но учитывает также формирование спроса, связанного с перевозочным процессом, т. е. с работой судов, которые через некоторое (вообще говоря, случайное) время нуждаются в ремонте.

Отметим, что приведенный методический подход может быть использован также для решения задачи выбора СРЗ судовладельцем для ремонта судна по критериям, полученным выше, например, по минимальной вероятности (5) или же по средним суммарным текущим затратам (6), (28).

Представляет практический и теоретический интерес дальнейшее обобщение полученных результатов, например, на случай других стратегий пополнения запасов материалов (поставки отдельными фиксированными партиями, периодическое пополнение запасов, поставки в зависимости от текущего уровня запаса на складе и др.).

10. Выводы

1. Доказано, что при формализованном описании работы СРЗ в виде СМО появляется возможность одновременно учитывать неравномерность прибытия судов на ремонт, различный объем ремонтных работ и планировать соответствующие затраты материалов.

2. Показано, что при интерпретации работы СРЗ как обслуживающей системы в терминах марковского процесса со сносом появляется возможность вывести соответствующую систему дифференциальных уравнений в частных производных вместе с граничными условиями для нахождения стационарного совместного вероятностного распределения числа судов, находящихся на СРЗ и количества материалов, находящихся на складе материально-технического снабжения СРЗ. Решение этой граничной задачи позволяет получить аналитические выражения для разных целевых функций, оценивающих эффективность управления запасами материалов на складе СРЗ, например, средние суммарные затраты в единицу времени на пополнение и поддержание запаса, или среднюю прибыль СРЗ в единицу времени.

3. Решение системы указанной дифференциальных уравнений найдено с помощью преобразования Лапласа и теории краевых задач теории функций комплексных переменных. Аналитическое решение в форме преобразования Лапласа позволяет достаточно просто рассчитать искомые показатели эффективности работы исследуемой системы управления запасами как функции искомых параметров управления.

4. На основе полученного решения найдены аналитические выражения для расчета основных показателей эффективности работы СРЗ как обслуживающей системы (средний уровень запасов материалов на складе, вероятность дополнительного простоя судов на ремонте вследствие отсутствия материалов на складе и др.). Сформулирована задача определения оптимальных значений интенсивностей пополнения запасов материалов на складе по одному из двух экономических критериев: минимум средних текущих затрат и максимум средней текущей прибыли СРЗ. Решение этих оптимизационных задач позволяет выбрать такую стратегию управления запасами материалов, которая минимизирует средние текущие расходы или максимизирует среднюю текущую прибыль СРЗ.

5. Продемонстрировано, что в отличие от существующих стохастических моделей управления запасами предложенная стохастическая модель позволяет совместно описывать производственный процесс (т. е. ремонт судов) и процесс управления запасами материалов, требуемых для ремонта, что позволяет учесть при разработке стратегии пополнения запасов неопределенность возникновения загрузки завода ремонтными работами.

Литература

1. Рынок судоремонта: Давид против Голиафа // Порты Украины. URL: https://ports.com.ua/articles/rynok-sudoremonta-david-protiv-goliafa

2. Оптимистическая трагедия судостроения Украины. URL: https://from-ua.com/articles/355758-optimisticheskaya-tragediya-sudostroeniya-ukraini.html

3. Шахов А. В., Бокарева М. О. Управление рисками в судоремонтных проектах // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Стратегічне управління, управління портфелями, програмами та проектами. 2014. № 2 (1045). С. 87–95.

4. Шахов А. В., Чимшир В. И. Проектно-ориентированное управление функционированием ремонтопригодных технических систем. Одесса: Феникс, 2006. 213 с.

5. Александровская Н. И., Шахов В. И., Шахов А. В. Рискоориентированная стратегия технического обслуживания и ремонта судов // Методи та засоби управління розвитком транспортних систем. 2011. № 17. С. 7–17.

6. Коваленко И. И., Швед А. В., Мельник А. В. Вероятностный анализ Рискообразующих факторов в организационных задачах судоремонта // Судостроение. 2014. № 2 (2). С. 111–119. doi: https://doi.org/10.15589/smi20140205

7. Charris E. L. S., Arboleda C. D. P. Simulation model of the supply chain on a naval shipyard // International Journal of Industrial and Systems Engineering. 2013. Vol. 13, Issue 3. P. 280. doi: https://doi.org/10.1504/ijise.2013.052277

8. Pinha D., Ahluwalia R. Decision Support System for Production Planning in the Ship Repair Industry // Industrial and Systems Engineering Review. 2014. Vol. 2, Issue 1. P. 52–61.

9. He L., Huang X., Liu X. Production Management Modelling of Ship Repair Process Based on MAS // Information Technology Journal. 2013. Vol. 12, Issue 3. P. 498–501. doi: https://doi.org/10.3923/itj.2013.498.501

10. Gholami A., Mirzazadeh A. An inventory model with controllable lead time and ordering cost, log-normal-distributed demand, and gamma-distributed available capacity // Cogent Business & Management. 2018. Vol. 5, Issue 1. P. 1–17. doi: https://doi.org/10.1080/23311975.2018.1469182

11. Nasrabadi M., Mirzazadeh A. The Inventory System Management Under Uncertain Conditions and Time Value of Money // International Journal of Supply and Operations Management. 2016. Vol. 3, Issue 1. P. 1192–1214.

12. Бродецкий Г. Л. Экономико-математические методы и модели в логистике: потоки событий и системы обслуживания. М.: Академия, 2011. 272 с.

13. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. изд. 3-е, испр. и доп. М.: КомКнига, 2005. 400 с.

14. Postan M. Application of Markov Drift Processes to Logistical Systems Modeling // Dynamics in Logistics. 2008. P. 443–455. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-540-76862-3_43

15. Morozova I., Postan M., Shyryaeva L. Optimization of Spare Parts Lot Size for Supply of Equipment's Park // Dynamics in Logistics. 2011. P. 105–113. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-11996-5_10

16. Postan M. Y. Application of Semi-Markov Drift Processes to Logistical Systems Modeling and Optimization // Lecture Notes in Logistics. 2015. P. 227–237. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-23512-7_22

17. Postan M., Kushnir L. A method of determination of port terminal capacity under irregular cargo delivery and pickup // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 4, Issue 3 (82). P. 30–37. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.76285

18. Постан М. Я. Об одном классе смешанных марковских процессов и их применение в теории телетрафика // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 28, № 3. С. 40–53.

19. Cohen J. W., Boxma O. J. Boundary Value Problems in Queueing System Analysis. Elsevier, 2000. 404 p.

20. Технология системного моделирования / Аврамчук Е. Ф., Вавилов А. А., Емельянов С. В. и др.; ред. С. В. Емельянов и др. М.: Машиностроение; Берлин: Техник, 1988. 520 с.