

УДК 681.2.+621.3.082.1

DOI: 10.15587/1729-4061.2018.140649

## Исследования фильтра Калмана в области шумов и помех с негауссовским распределением

О. Ю. Олейник, Ю. К. Тараненко, Д. А. Лосихин, А. И. Швачка

*Розроблено послідовний рекурсивний алгоритм фільтра Калмана для фільтрації даних в області шумів відмінних від гаусовського розподілу для використання у вимірювальній техніці. Відмінною рисою розробленого алгоритму фільтра Калмана для фільтрації даних з негаусовськими шумами є відсутність необхідності апріорного визначення статистичних характеристик шуму.*

*Була перевірена працездатність розробленої методики фільтрації Калмана шляхом обробки різних законів розподілу: шумів Коші, Парето, нормального і логістичного розподілів. Ефективність розробленої методики фільтрації підтверджується шляхом застосування фільтра при обробці експериментальних даних з різними законами розподілу шумів. Проведено апробацію розробленої методики фільтрації Калмана для даних, отриманих експериментально з урахуванням суперпозиції законів розподілу шумів. Апріорна оцінка помилки фільтрації при кількості ітерацій більше 30 прагне до нуля.*

*Розроблена методика фільтрації з використанням фільтра Калмана може бути використана при проведенні метрологічної атестації засобів вимірювальної техніки в умовах підприємства. В цій ситуації можливе зашумлення вимірювальної інформації різними шумами, в тому числі і тими, що не підкоряються закону розподілу Гауса. Фільтр може бути використаний при обробці даних систем контролю параметрів стану, що реалізуються за принципом порогового контролю величини.*

*Прикладним аспектом використання отриманого наукового результату є можливість розширення області застосування класичного фільтра Калмана в вимірювальній техніці. Це становить передумови для розробки універсального алгоритму фільтрації з використанням фільтра Калмана*

*Ключові слова: фільтр Калмана, рекурсивний алгоритм, Python, негауссовських шум, закон розподілу*

### 1. Введение

Фильтр Калмана представляет собой последовательный рекурсивный алгоритм, который использует принятую модель динамической системы для получения оценки. Полученная оценка может быть существенно скорректирована в результате анализа каждой новой выборки измерений датчика во временной последовательности [1].

Классический фильтр Калмана представляет собой уравнения для расчета первого и второго момента апостериорной плотности вероятности (вектора математических ожиданий и матрицы дисперсий, в том числе взаимных) при дан-

ных ограничениях. Так как для нормальной плотности вероятности математическое ожидание и дисперсионная матрица полностью задают плотность вероятности, можно сказать, что фильтр Калмана рассчитывает апостериорную плотность вероятности вектора состояния на каждый момент времени. А значит полностью описывает вектор состояния как случайную векторную величину [2]. Расчетные значения математических ожиданий при этом являются оптимальными оценками по критерию среднеквадратической ошибки, что и обуславливает широкое применение фильтра Калмана.

Фильтр Калмана широко используется для решения многочисленных инженерных и эконометрических прикладных задач в тех областях, где распространено гауссовское распределение шума (экономическое прогнозирование, электроника, измерительная техника, радиотехника и связь) [3, 4]. Разработка статистических моделей показателей процессов в технике и экономике [5], прогнозирование и определение динамики экономических показателей [6], очистка сигналов измерительной и радиотехники от шумов и помех [7] решается сегодня с использованием Фильтра Калмана.

В классической постановке задачи фильтр осуществляет слежение за случайным сигналом, порожденным линейной рекурсией с аддитивным белым шумом. Наблюдаемый процесс является линейной комбинацией сигнала и другого белого шума [9].

Воздействие шумов, помех на все элементы прибора приводит к возникновению случайных неповторяющихся отклонений отдельных точек статической характеристики прибора [9]. При этом погрешность шума является нестационарной случайной функцией времени. Наиболее распространенное нормальное (гауссово) распределение, в котором плотность вероятности обнаружения объекта с величиной признака  $x$  зависит от двух параметров: дисперсии  $\sigma^2$  и смещения  $\mu$ , равного математическому ожиданию  $x$ .

Однако мнение о всеобщей применимости нормального распределения является весьма устойчивым заблуждением. Статистические модели и методы, основанные на гауссовости (в частности оценки доверительных интервалов для выборочного среднего), зачастую применяются без элементарной проверки, по умолчанию [10].

Поэтому задача разработки эффективной методики фильтрации с использованием фильтра Калмана в области шумов отличных от гауссовского распределения для использования в измерительной технике является актуальной научной и прикладной задачей.

## **2. Анализ литературных данных и постановка проблемы**

При негауссовском шуме чаще всего используется подход, заключающийся в аппроксимации шума с применением шумовых моделей, а далее применяются фильтры с использованием алгоритмов, разработанных для гауссовских шумовых моделей [11].

Существует несколько разновидностей фильтра Калмана, отличающихся используемыми приближениями для линеаризации динамических моделей [12]:

- расширенный фильтр Калмана (ЕКФ), применим для нелинейных моделей, выполняет линеаризации путем разложения в ряд Тейлора;
- сигма-точечный фильтр Калмана (UKF), используется в задачах для которых не может быть использована простая линеаризация, выполняет «линеаризацию» с использованием сигма-преобразования.

В работе [13] для ситуации, когда сигналы зачастую имеют нелинейную динамику и ненормальный шум, предлагается использовать расширенный фильтр Калмана. Эффективность разработки подтверждается для случая, если дисперсии шумов не слишком велики (т. е. линейная аппроксимация является адекватной). Однако авторы исследования не рассматривали область шумов, которые не характеризуются параметрами гауссовского распределения. Поэтому разработанный расширенный фильтр Калмана может быть использован для фильтрации негауссовских шумов.

Автором [14] в связи с отсутствием методики фильтрации с использованием фильтра Калмана и невозможностью его применения для негауссовской области шумов был синтезирован рекуррентный нелинейный фильтр, порядок которого определяется из условия получения оценок в темпе поступления измерений. В статье приведены гауссовы и линеаризованные приближения к фильтру произвольного порядка, однако проблема фильтрации негауссовских шумов так и не была решена.

В работе [15] авторы отмечают, что модификации фильтра Калмана не могут решить проблемы нелинейной фильтрации, так как фильтр построен только на двух статистических характеристиках процесса: математическом ожидании и ковариационной функции. Это связано с тем, что в исследованиях были рассмотрены только две указанные статистические характеристики процесса фильтрации. При этом явления суперпозиции законов распределения, при которых данные статистические характеристики вообще не характеризуют параметры шума до и после фильтрации в исследовании [15] не были учтены.

Вместе с тем, имеются данные, позволяющие говорить о возможности получения фильтра Калмана с нелинейными дополнительными фильтрами, которые позволят расширить область применения фильтра в измерительной технике [16]. Данные о реализации фильтра Калмана, выполняющего функцию фильтрации негауссовых шумов, в литературе не выявлены.

Поэтому разработка методики фильтрации с использованием фильтра Калмана в области негауссовских шумов позволит существенно расширить область применения фильтра: обработка сигналов при проведении метрологической аттестации, контроле параметров.

### **3. Цель и задачи исследования**

Целью работы является разработка эффективной методики фильтрации с использованием фильтра Калмана в области шумов отличных от гауссовского распределения для использования в измерительной технике.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– выполнить сравнительный анализ законов распределения погрешностей измерения с использованием программного обеспечения, позволяющим имитировать шумовое воздействие, подчиняющееся рассматриваемым распределениям;

– проверить эффективность методики фильтрации Калмана путем использования различных законов распределения шумов;

– провести апробацию разработанной методики фильтрации для данных полученных экспериментально с учетом суперпозиции законов распределения шумов.

#### **4. Исследования фильтра Калмана в области шумов отличных от гауссовского распределения**

В работе [17] была разработана модель простой скалярной реализации фильтра Калмана средствами программирования общего назначения Python. Имитационное моделирование подтвердило возможность использование разработанной программной реализации адаптивного фильтра Калмана для компенсации эффектов амплитудных и фазовых искажений в канале передачи данных. Данные подчинялись гауссовскому распределению. Вне гауссовской области исследования не проводились.

Для выполнения поставленных в данной работе задач основной трудностью является обоснованная идентификация законов распределения погрешностей измерений данных для негауссовских шумов.

С позиции теории вероятностей форма закона распределения численно характеризуется его контрэксцессом с коэффициентом, который определяется стандартным отклонением  $\sigma$  и четвертым центральным моментом  $\mu_4$ . Согласно теории информации, закон распределения характеризуется значением энтропийного коэффициента  $k = \Delta / \sigma$ . Для всех возможных существующих законов распределения значение коэффициента  $\psi$  лежит в диапазоне от 0 до 1, а  $k$  – от 0 до 2.076, поэтому идентификацию законов распределения негауссовского шума удобно рассматривать в  $(\psi, k)$ -плоскости, в которой каждый закон идентифицируется некоторой точкой [18].

Сравнительный анализ и идентификация законов распределения погрешностей измерения был проведен средствами Python. Сегодня Python идеальный язык для быстрого написания различных приложений, работающих на большинстве распространенных платформ [19]. Python является свободно доступным программным продуктом, что дает возможность широкого использования результатов разработки.

Результат выполненного анализа представлен на рис. 1. На приведенном графике представлено разделение наиболее распространённых законов распределения погрешностей измерения на две группы. На плоскости в левом нижнем углу расположен закон Парето, Коши и Пуассона, а в правом верхнем – группа законов, близких по информационным показателям к гауссовским.

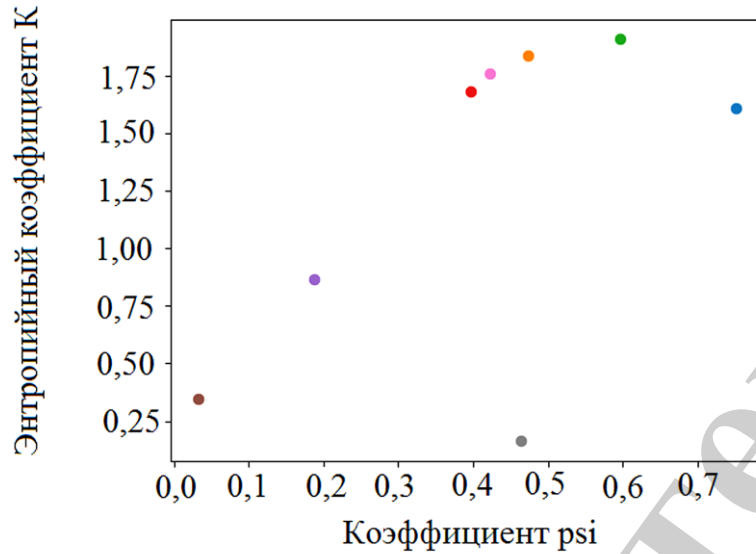


Рис. 1. Сравнительный анализ законов распределения погрешностей измерения:

- – равномерное распределение; ● – логистическое распределение;
- – нормальное распределение; ● – распределение Эрланга; ● – распределение Парето; ● – распределение Коши; ● – логистическое распределение-1;
- – распределение Пуассона

Приведенные на плоскости данные можно дополнять путем введения неиспользованных законов распределения. Для исследования действия Калмановских фильтров были выбраны четыре закона распределения, которые на плоскости находятся в крайних положениях. Для дальнейшего анализа были выбраны законы Парето, Коши (крайние слева) и логистическое и нормальное распределение (крайние справа).

Для изучения поведения модели фильтра Калмана при различных распределениях шумов было разработано программное обеспечение, позволяющее имитировать шумовое воздействие, подчиняющееся рассматриваемым распределениям. Рассмотрим алгоритм работы скалярного фильтра Калмана при изменении константы.

Поскольку константа всегда одна, модель системы можно представить в виде:

$$x_k = x_{k-1} + w_k, \quad (1)$$

где  $x_k$  – предсказание состояния системы в текущий момент времени;  $x_{k-1}$  – предсказание состояния системы в предыдущий момент времени;  $w_k$  – управляющее воздействие.

Для модели матрица перехода вырождается в единицу, а матрица управления в ноль. Модель измерения примет вид:

$$y_k = y_{k-1} + v_k. \quad (2)$$

В модели (2)  $v_k$  представляет собой ошибку измерения, которая характеризуется ковариационной матрицей  $R$ , апостериорной матрицей  $P$  точности полученной оценки и дисперсией случайного процесса  $Q$ .

Для модели (2) матрица измерений превращаются в единицу, а ковариационные матрицы  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  превращаются в дисперсии [20]. На очередном  $k$ -м шаге, до прихода результатов измерения, скалярный фильтр Калмана пытается по формуле (1) оценить новое состояние системы:

$$\hat{x}_{k/(k-1)} = \hat{x}_{(k-1)/(k-1)}. \quad (3)$$

Уравнение (3) показывает, что априорная оценка на следующем шаге равна апостериорной оценке, сделанной на предыдущем шаге. При этом априорная оценка дисперсии ошибки выражается:

$$P_{k/(k-1)} = P_{(k-1)/(k-1)} + Q_k. \quad (4)$$

По априорной оценке состояния  $\hat{x}_{k/(k-1)}$  можно вычислить прогноз измерения:

$$\hat{y}_k = \hat{x}_{(k-1)/(k-1)}. \quad (5)$$

После того, как получено очередное измерение величины  $y_k$ , фильтр рассчитывает ошибку своего прогноза  $k$ -го измерения по выражению:

$$e_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \hat{x}_{(k)/(k-1)}. \quad (6)$$

Фильтр корректирует свою оценку состояния системы, выбирая точку, лежащую где-то между первоначальной оценкой  $\hat{x}_{(k)/(k-1)}$  и точкой, соответствующей новому измерению  $y_k$ :

$$\hat{x}_{k/(k-1)} = \hat{x}_{(k-1)/(k-1)} + G_k e_k, \quad (7)$$

где  $G_k$  – коэффициент усиления фильтра. Также корректируется оценка дисперсии ошибки:

$$P_{k/(k)} = (1 - G_k) P_{(k)/(k-1)}. \quad (8)$$

Таким образом, дисперсия  $e_k$  равна:

$$P_{k/(k)} = P_{(k)/(k-1)} + R_k. \quad (9)$$

Коэффициент усиления фильтра, при котором достигается минимальная ошибка оценки состояния системы, определяется из соотношения:

$$G_k = P_{(k)/(k-1)} / S_k. \quad (10)$$

Применим полученный алгоритм для оценки эффективности Калмановской фильтрации. Рассмотрим работу фильтра Калмана по подавлению шумов с распределением Парето. Распределение Парето представляет собой двухпараметрическое семейство абсолютно непрерывных распределений.

Графическая часть оценки эффективности Калмановской фильтрации с распределением Парето приведена на рис. 2. Полученные данные свидетельствуют, что фильтр Калмана подавляет шумы Парето, всплеск в начале работы фильтра объясняется ограниченностью плотности распределения случайной составляющей [21].

Проведем исследования эффективности фильтра Калмана по подавлению шумов с распределением Коши. Графическая часть оценки эффективности Калмановской фильтрации с распределением Коши приведена на рис. 3

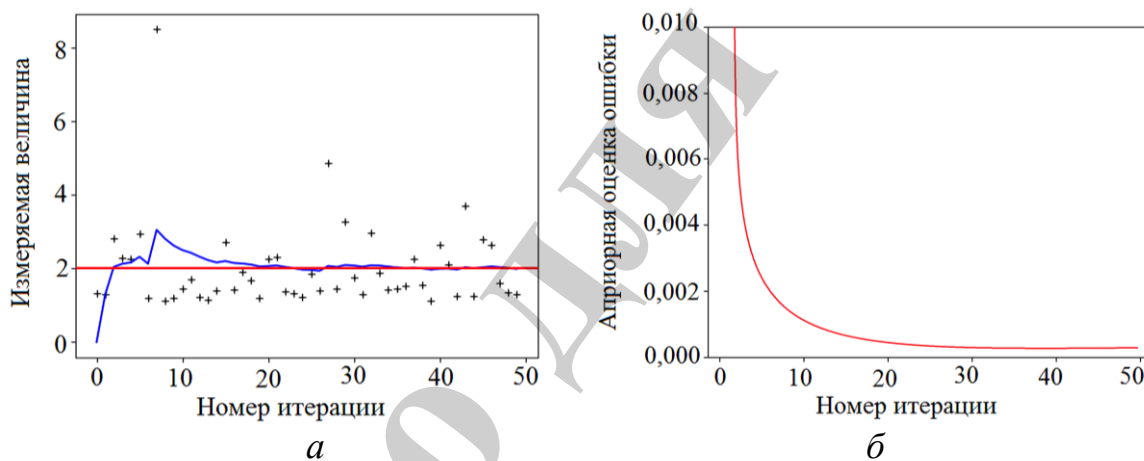


Рис. 2. Графическая часть оценки эффективности Калмановской фильтрации с распределением Парето: *а* – Подавление шумов с распределением Парето (+ зашумленные измерения; — — апостериорная оценка; — — истинное значение); *б* – ошибки при подавлении шумов с распределением Парето

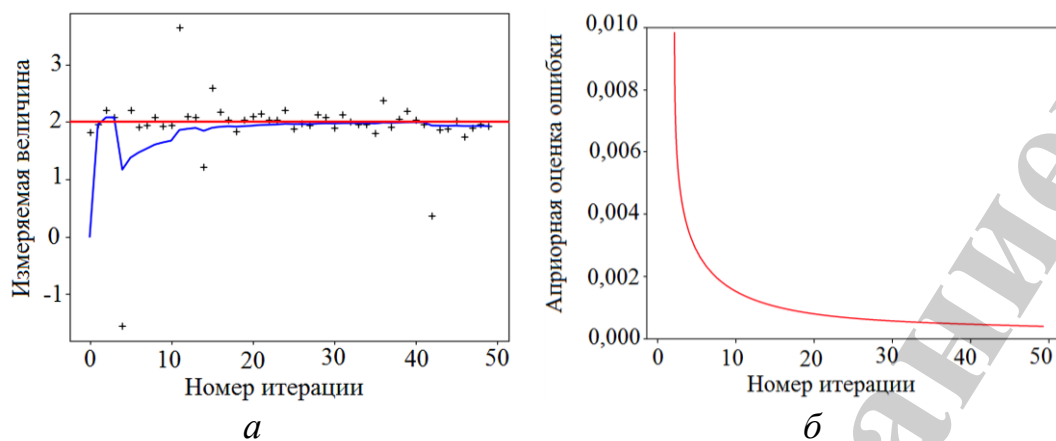


Рис. 3. Графическая часть оценки эффективности Калмановской фильтрации с распределением Коши: *а* – Подавление шумов с распределением Коши (+ зашумленные измерения; — — апостериорная оценка; — — истинное значение); *б* – ошибки при подавлении шумов с распределением Коши

Фильтр Калмана подавляет шумы Коши, всплеск в начале работы объясняется плотностью распределения случайной составляющей.

Была рассмотрена эффективность фильтрации с применением разработанной скалярной программной реализации фильтра Калмана для двух законов распределения из левого нижнего угла плоскости распределения законов по показателям  $\psi$ ,  $k$  (рис. 1). Для окончательного вывода о возможности фильтрации Калмана к негауссовским шумам проведем исследования эффективности применения фильтра для законов из правого верхнего угла плоскости распределения законов по показателям  $\psi$ ,  $k$  (рис. 1).

Рассмотрим работу фильтра Калмана по подавлению шумов с нормальным распределением. Плотность нормального распределения определяется из соотношения:

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Графическая часть оценки эффективности Калмановской фильтрации с нормальным распределением приведена на рис. 4



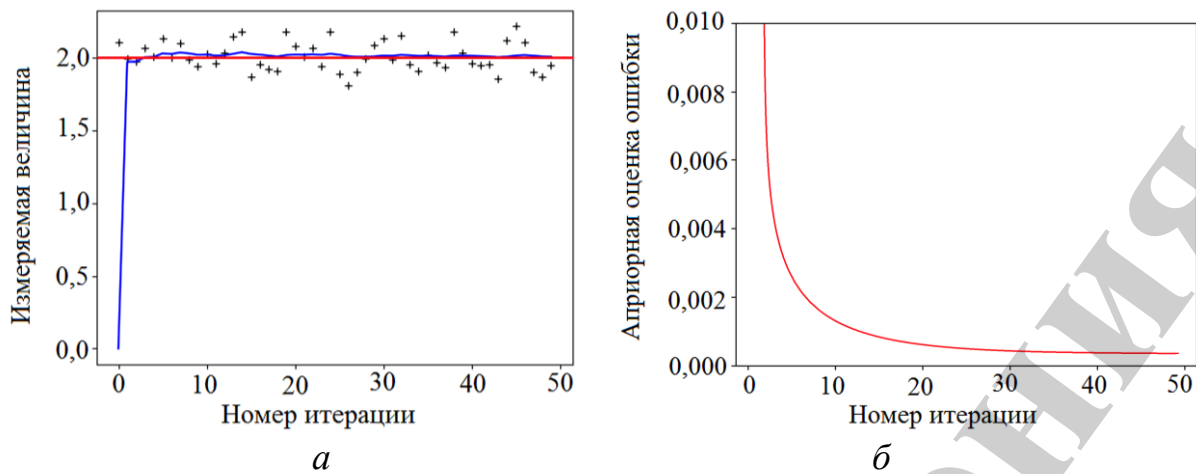


Рис. 4. Графическая часть оценки эффективности Калмановской фильтрации с нормальным распределением: *a* – Подавление шумов с нормальным распределением (+ зашумленные измерения; — — апостериорная оценка; — — истинное значение); *б* – ошибки при подавлении шумов с нормальным распределением

Рассмотрим работу фильтра Калмана по подавлению шумов с логистическим распределением. В этом случае плотность логистического распределения определяется из соотношения:

$$f(x) = \frac{\exp(-x)}{(1 - \exp(-x))^2}.$$

Графическая часть оценки эффективности Калмановской фильтрации с логистическим распределением приведена на рис. 5

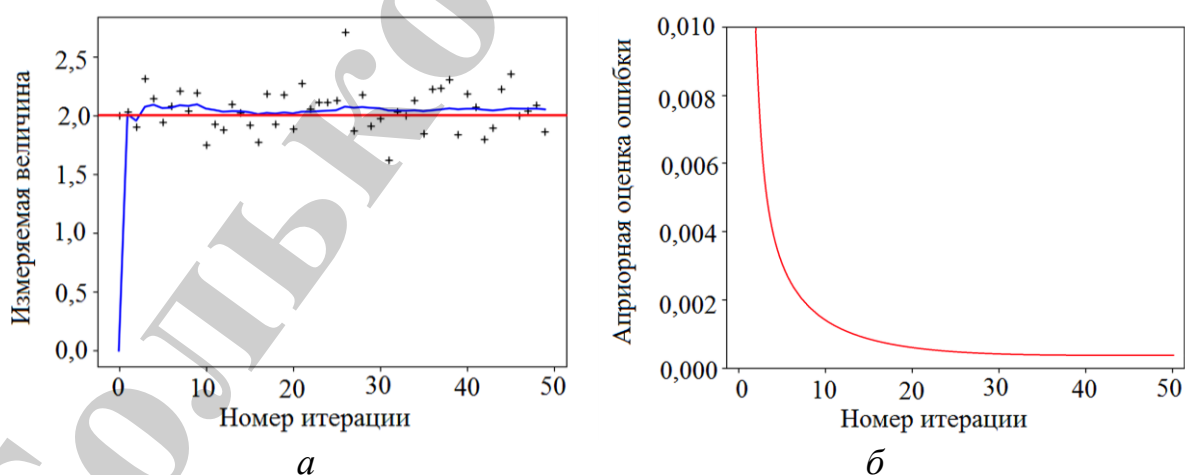


Рис. 5. Графическая часть оценки эффективности Калмановской фильтрации с логистическим распределением: *a* – Подавление шумов с логистическим распределением (+ зашумленные измерения; — — апостериорная оценка; — — истинное значение); *б* – ошибки при подавлении шумов с логистическим распределением

Проведенное исследование применимости фильтра Калмана в области шумов с негауссовским распределением позволяют утверждать, что гауссовские распределения шумов фильтром Калмана подавляются с той же ошибкой, что и шумы с распределением Парето или Коши, далёкими от гауссовского.

Проведем апробацию полученной методики фильтрации на данных, полученных экспериментальным путем.

## 5. Фильтрация экспериментальных данных с применением фильтра Калмана

Для исследований был использован массив данных, полученных при контроле веса. Массив данных представляет собой 55 значений замеров веса (кг). Измерения проводились с использованием специально подготовленной не стандартной гири с аттестованным весом 0,175 кг. Замеры осуществлялись цифровыми электронными весами с виброчастотным механическим резонатором в условиях вибрационных и электромагнитных помех, распределённых по неизвестному закону или суперпозиции законов.

$y=[0.203, 0.154, 0.172, 0.192, 0.233, 0.181, 0.219, 0.153, 0.168, 0.132, 0.204, 0.165, 0.197, 0.205, 0.143, 0.201, 0.168, 0.147, 0.208, 0.195, 0.153, 0.193, 0.178, 0.162, 0.157, 0.228, 0.219, 0.125, 0.101, 0.211, 0.183, 0.147, 0.145, 0.181, 0.184, 0.139, 0.198, 0.185, 0.202, 0.238, 0.167, 0.204, 0.195, 0.172, 0.196, 0.178, 0.213, 0.175, 0.194, 0.178, 0.135, 0.178, 0.118, 0.186, 0.191]$ .

Определим закон распределения погрешностей измерения в указанной выборке, для этого нанесём результаты её обработки на плоскость законов распределения в координатах  $psi, k$  (рис. 6).

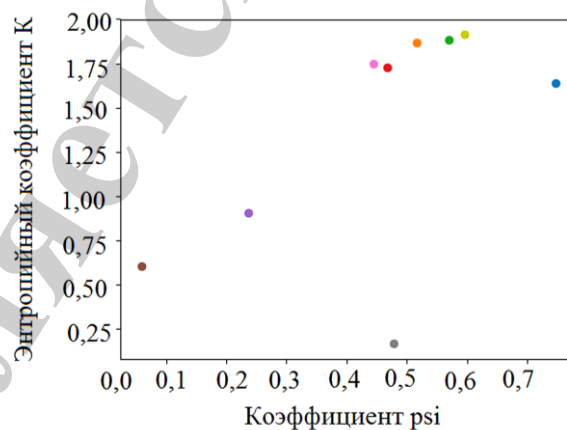


Рис. 6. Сравнительный анализ законов распределения погрешностей экспериментальных данных: ● – равномерное распределение; ● – логистическое распределение; ● – нормальное распределение; ● – распределение Эрланга; ● – распределение Парето; ● – распределение Коши; ● – логистическое распределение-1; ● – распределение Пуассона; ● – неизвестное распределение

Сравнительный анализ показывает, что экспериментальная выборка имеет погрешность, распределённую по закону близкому к нормальному. Таким образом, можно применить к выборке соотношения для нормального распределения. Используем фильтр Калмана для подавления нормально распределённой погрешности измерения веса (рис. 7).

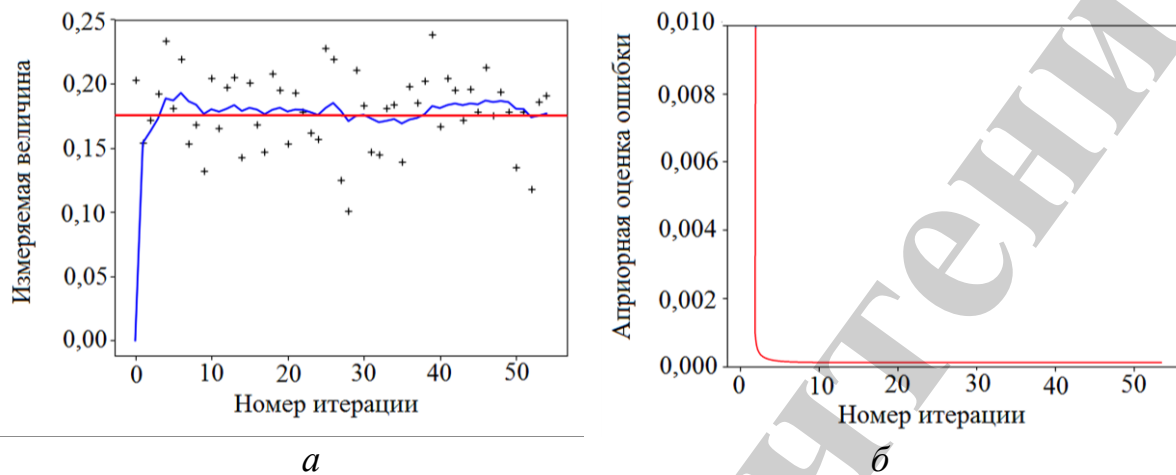


Рис. 7. Графическая часть оценки эффективности Калмановской фильтрации для экспериментальных данных: *а* – Подавление шумов (+ зашумленные измерения; — — апостериорная оценка; — — истинное значение); *б* – ошибки при подавлении шумов

Результаты оценки подтверждают эффективность применения разработанной программной реализации фильтра Калмана для экспериментальных данных, распределение которых не лежит в гауссовой области. Априорная оценка ошибки фильтрации при количестве итераций больше 30 стремится к нулю.

## 6. Обсуждение результатов исследования фильтра Калмана

Полученный последовательный рекурсивный алгоритм Фильтра Калмана для фильтрации данных в области шумов отличных от гауссовского распределения вычисляет прогноз измерения величины с учетом априорной оценки. Отличительной особенностью данного алгоритма фильтрации является идентификация закона распределения погрешностей измерений данных для негауссовских шумов на первом этапе.

Предложенный способ идентификации закона распределения позволяет использовать алгоритм фильтрации Калмана при обработке зашумленных данных в тех случаях, когда закон распределения неизвестен. Идентификация закона распределения осуществляется путем определения точки, соответствующей данному распределению на  $(\psi, k)$ -плоскости.

Классический фильтр Калмана использует расчетные значения математических ожиданий, которые выступают оптимальными оценками по критерию среднеквадратической ошибки. В случае фильтрации данных в области шумов отличных от гауссовского распределения указанные характеристики не могут быть использованы, вследствие чего фильтр Калмана не может быть применим.

Разработанная методика фильтрации с использованием фильтра Калмана может быть использована при проведении метрологической аттестации средств измерений в условиях предприятия, когда возможно зашумление измерительной информации различными шумами, в том числе и не подчиняющимися закону распределения Гаусса. Фильтр может быть использован при обработке данных систем контроля параметров состояния, реализуемых по принципу порогового контроля величины.

Эффективность разработанной методики фильтрации подтверждается путем апробации фильтра при обработке экспериментальных данных с различными законами распределения шумов.

Для получения универсального фильтра Калмана необходимо провести исследования направленные на применимость методики фильтрации для данных совокупных и совместных измерений, разработать алгоритм фильтрации для многоканального фильтра Калмана.

## **9. Выводы**

1. В работе была разработана методика фильтрации с использованием фильтра Калмана для отличного от гауссовского распределения шумов. Особенностью предложенной методики является использованием процедуры идентификации закона распределения погрешностей измерений данных для негауссовских шумов на первом этапе.

Благодаря предложенному способу идентификации закона распределения становится возможным использовать алгоритм фильтрации Калмана при обработке зашумленных данных в тех случаях, когда закон распределения неизвестен. Ранее для таких шумов применение фильтрации с использованием фильтра Калмана не было возможным.

Подтверждена ее работоспособность в для негауссовского распределения шумов, что значительно расширило область применения фильтра.

2. Доказана возможность применение фильтра Калмана в измерительной технике при обработке информации, которая искажена помехами различного происхождения и уровня. Установлено, что разработанный фильтр Калмана может работать в области шумов с негауссовскими распределениями. Эффективность разработанной методики фильтрации путем использования различных законов распределения шумов. Отличительной чертой разработанного последовательного рекурсивного алгоритма Фильтра Калмана для фильтрации данных в области шумов отличных от гауссовского распределения является отсутствие необходимости априорного определения статистических характеристик шума.

3. Была проведена апробацию разработанной методики фильтрации Калмана для данных полученных экспериментально с учетом суперпозиции законов распределения шумов. Подтверждена эффективность разработанной методики фильтрации для экспериментальных данных. Априорная оценка ошибки фильтрации при количестве итераций больше 30 стремится к нулю.

## Литература

1. Grewal M. S. Kalman Filtering // International Encyclopedia of Statistical Science. 2011. P. 705–708. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-04898-2\\_321](https://doi.org/10.1007/978-3-642-04898-2_321)
2. Daum F. Nonlinear filters: beyond the Kalman filter // IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine. 2005. Vol. 20, Issue 8. P. 57–69. doi: <https://doi.org/10.1109/maes.2005.1499276>
3. Wan E. A., Van Der Merwe R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation // Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No.00EX373). 2000. doi: <https://doi.org/10.1109/asspcc.2000.882463>
4. Application of adaptive Kalman filter technique in initial alignment of inertial navigation system / Su W., Huang C., Liu P., Ma M. // Journal of Chinese Inertial Technology. 2010. Vol. 18, Issue 1. P. 44–47.
5. Babikir A., Mwambi H. Factor Augmented Artificial Neural Network Model // Neural Processing Letters. 2016. Vol. 45, Issue 2. P. 507–521. doi: <https://doi.org/10.1007/s11063-016-9538-6>
6. Doz C., Giannone D., Reichlin L. A two-step estimator for large approximate dynamic factor models based on Kalman filtering // Journal of Econometrics. 2011. Vol. 164, Issue 1. P. 188–205. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2011.02.012>
7. Обидин М. В., Серебровский А. П. Очистка сигнала от шумов с использованием вейвлет преобразования и фильтра Калмана // Информационные процессы. 2013. Т. 13, № 3. С. 198–205.
8. Sarkka S., Nummenmaa A. Recursive Noise Adaptive Kalman Filtering by Variational Bayesian Approximations // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. Vol. 54, Issue 3. P. 596–600. doi: <https://doi.org/10.1109/tac.2008.2008348>
9. Multi-model information fusion Kalman filtering and white noise deconvolution / Sun X.-J., Gao Y., Deng Z.-L., Li C., Wang J.-W. // Information Fusion. 2010. Vol. 11, Issue 2. P. 163–173. doi: <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2009.06.004>
10. Nikitin A. P., Chernavskaya O. D., Chernavskii D. S. Pareto distribution in dynamical systems subjected to noise perturbation // Physics of Wave Phenomena. 2009. Vol. 17, Issue 3. P. 207–217. doi: <https://doi.org/10.3103/s1541308x09030054>
11. Arasaratnam I., Haykin S. Cubature Kalman Filters // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. Vol. 54, Issue 6. P. 1254–1269. doi: <https://doi.org/10.1109/tac.2009.2019800>
12. Parametric Bayesian Filters for Nonlinear Stochastic Dynamical Systems: A Survey / Stano P., Lendek Z., Braaksma J., Babuska R., de Keizer C., den Dekker A. J. // IEEE Transactions on Cybernetics. 2013. Vol. 43, Issue 6. P. 1607–1624. doi: <https://doi.org/10.1109/tsmcc.2012.2230254>
13. Гаврилов А. В. Использование фильтра Калмана для решения задач уточнения координат БПЛА // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1-1. С. 1784.
14. Rudenko E. A. A optimal discrete nonlinear arbitrary-order filter // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2010. Vol. 49, Issue 4. P. 548–559. doi: <https://doi.org/10.1134/s1064230710040052>

15. Каладзе В. А. Фильтрующие модели статистической динамики // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2011. № 1. С. 22–28.
16. Wu M., Smyth A. W. Application of the unscented Kalman filter for real-time nonlinear structural system identification // Structural Control and Health Monitoring. 2007. Vol. 14, Issue 7. P. 971–990. doi: <https://doi.org/10.1002/stc.186>
17. Тараненко Ю. К., Олейник О. Ю. Модель адаптивного фильтра Калмана // Технология приборостроения. 2017. № 1. С. 9–11.
18. Cover T. M., Thomas J. A. Elements of information theory. John Wiley & Sons, 2012. 36 p.
19. Россум Г. Язык программирования Python. 2001. 454 с. URL: <http://rus-linux.net/MyLDP/BOOKS/python.pdf>
20. Дегтярев А. А., Тайль Ш. Элементы теории адаптивного расширенного фильтра Калмана // Препринты Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. 2003. С. 26–36.
21. Чернавский Д. С., Никитин А. П., Чернавская О. Д. О механизмах возникновения распределения Парето в сложных системах. М.: Физический ин-т им. П. Н. Лебедева, 2007. 17 с.