

УДК 539.3

DOI: 10.15587/1729-4061.2018.139567

Дослідження задачі теорії пружності для півпростору з циліндричними порожнинами на яких задані граничні умови контактного типу

В. С. Проценко, В. Ю. Мірошніков

*При проектуванні просторових конструкцій необхідно знати напружено – деформований стан тіла. Серед таких задач зустрічаються розрахункові схеми, в яких є півпростір з циліндричними порожнинами, на межах яких задані умови контактного типу. Сегмент таких задач недостатньо досліджений та потребує уваги.*

*Запропоновано аналітико-чисельний алгоритм розв'язання просторової задачі теорії пружності для півпростору з циліндричними порожнинами. На межах порожнин задані радіальні переміщення та дотичні напруження, а на межі півпростору заданий один із двох типів граничних умов – переміщення або напруження. Проведеними розрахунками встановлено напружено деформований стан півпростору.*

*При фіксованих геометричних умовах було проведено чисельний аналіз трьох варіантів задачі, коли на межі півпростору задані переміщення та трьох варіантів задачі, коли на межі півпростору задані напруження. Проведено порівняльний аналіз варіантів з різними граничними умовами між собою.*

*Встановлено, що при різних видах заданих крайових умов (напруження або переміщення), напруження  $\sigma_\phi$  і  $\sigma_z$  на межі прикладення таких умов змінюються на протилежні, тобто з розтягуючих на стискаючі або навпаки. Також встановлено, що крайові умови на межі півпростору у вигляді напружень мають більший вплив на напружений стан ніж крайові умови у вигляді переміщень. Ці твердження мають місце при заданих на межах циліндричних порожнин граничних умов контактного типу, якщо задана функція переміщень та задана функція напружень однакові.*

*Наведений аналіз можна використовувати при проектуванні конструкцій, в розрахункових схемах яких є межа півпростору із заданими на ній граничними умовами контактного типу та циліндричних порожнин, на поверхні яких задані переміщення або напруження*

*Ключові слова: циліндричні порожнини в півпросторі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є, нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь*

## 1. Вступ

При проектуванні різного роду конструкцій, підземних споруд і комунікацій виникає потреба в оцінці напружень в півпросторі з порожнинами. Для цього треба мати метод розрахунку задач теорії пружності, які дозволяють знайти напружено-деформований стан півпростору з циліндричними порожнинами. Розглядається задача, коли на межі півпростору задано переміщення або на-

пруження, а на межах порожнин задані умови контактного типу у вигляді радіальних переміщень та дотичних зусиль. Готових розрахунків подібних задач в просторовому варіанті не виявлено, тож проблема розрахунку таких задач є актуальною. Крім запропонованого алгоритму розрахунку в даній роботі представлений аналіз напруженого стану, що дає можливість прогнозувати слабкі місця на етапі проектування.

## 2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Для оцінки напружено-деформованого стану півпростору з циліндричними порожнинами в деяких наукових роботах застосовується метод скінченних елементів [1, 2], що є наближеним методом розрахунку та не дає повної впевненості у точності розрахунку при наявності нескінчених границь пружного тіла.

Найбільш поширеними задачами для півпростору з порожнинами є задачі коли порожнини перпендикулярні до поверхні півпростору [3–6]. Розрахунок цих задач базується на інтегральному перетворенні Вебера, методі представлень Папковича-Нейбера, теорії інтегральних рівнянь Фредгольма, рядів Неймана та узагальненому інтегральному рівнянню Коши. Однак ці методи неможливо застосувати, коли циліндричні порожнини паралельні поверхні півпростору.

В роботах [7–9] розглядаються задачі про дифракцію хвиль в півпросторі з однією циліндричною порожниною на основі рівняння Гельмгольца. Оскільки в роботі [7] усі поля пропорційні  $e^{ikx}$ , то фактично вирішується плоска задача з використанням перетворення площині з круговим отвором в концентричне кільце. В роботах [8, 9] також фактично розглядаються плоскі задачі, хвильові рівняння яких розв'язується наближено із застосуванням комформного перетворення та коллокаційної схеми найменшого квадрату. Описані алгоритми дозволяють розрахувати задачі півпростору тільки з однією порожниною.

Роботи [10, 11] присвячені визначенню напруженого стану кінцевого циліндра. Метод заснований на суперпозиції розв'язків і розкладанні у ряди Фур'є і Діні. Але задачі для пружних тіл з декількома граничними поверхнями не можуть бути розв'язані в рамках класичного підходу. Для таких задач необхідно було створювати узагальнений метод Фур'є [12], обґрунтування якого для просторових задач теорії пружності було приведено в [13]. Цей метод і був покладений в основу підходу до розв'язку розглянутої задачі.

Першу основну задачу теорії пружності для трансверсально-ізотропних тіл, обмежених координатними поверхнями в циліндричних і параболоїдних координатах з нерухомою параболоїдною порожниною розв'язано у [14] та нерухомим параболоїдним включенням у [15]. Прикладна задача про дію зосередженої сили на півпростір із піщаника з параболоїдним включенням була розглянута в [16]. Термопружна крайова задача для трансверсально-ізотропного півпростору зі сфероїдальною порожниною розглянута в [17]. У роботах [18, 19] розглянуто першу та другу основні задачі теорії пружності для півпростору з однією циліндричною порожниною. Другу основну задачу теорії пружності для півпростору з декількома циліндричними порожнинами було розв'язано в роботі [20]. Всі ці роботи основані на узагальненому методі Фур'є, однак алгоритми,

наведені в них, не дозволяють безпосередньо розв'язувати змішані задачі з граничними умовами контактного типу і дослідити напружений стан півпростору з такими граничними умовами. Для цього необхідно додатково дослідити розв'язність задачі з умовами контактного типу.

Змішані задачі були розглянуті для простору з циліндричними порожнинами, коли на межах одних порожнин задані переміщення, на межах других порожнин – напруження [21]. Також змішані задачі для простору розглядалися коли на межах одних порожнин задані переміщення, на межах других – напруження, на межах третіх – умови контактного типу [22]. Ці роботи основані на узагальненому методі Фур'є, однак безпосередньо не можуть застосовуватись для задач в півпросторі.

З наведеного випливає, що задачі для півпростору з циліндричними порожнинами з крайовими умовами контактного типу потребують дослідження.

Тому доцільна розробка аналітико-чисельного методу розв'язання змішаної задачі теорії пружності для півпростору з циліндричними порожнинами та деякими граничними умовами контактного типу.

### **3. Ціль та задачі дослідження**

Метою цієї роботи є оцінка напружено-деформованого стану півпростору з циліндричними порожнинами, за таких умов: на межах порожнин задані радіальні переміщення та дотичні напруження, а на межі півпростору заданий один із двох типів граничних умов – переміщення або напруження.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

- розробити аналітико-чисельний алгоритм розрахунку;
- провести числові дослідження для півпростору і двох циліндрів і проаналізувати вплив типу граничних умов на напруження в зоні перехідка між циліндрами та перехідка між межею півпростору і циліндром.

## **4. Аналітико-чисельний алгоритм розрахунку**

### **4. 1. Постановка задачі**

Пружний однорідний півпростір має  $N$  кругових циліндричних паралельних порожнин, непересічних між собою і межею півпростору (рис. 1).

Порожнини будемо розглядати у циліндричній системі координат  $(\rho_p, \phi_p, z)$ , де  $p$  – номер циліндра), півпростір у декартовій системі координат  $(x, y, z)$ , яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат циліндра з номером  $p=1$ . Межа півпростору розташована на відстані  $y=h$ , рівняння поверхні циліндрів  $S_p$ :  $\rho_p=R_p, p=1, 2, \dots, N$ . Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе

$$\Delta \vec{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

за умов, що на межах півпростору заданий один із двох типів граничних умов – переміщення  $\vec{U}_d^0(x, z)$  або напруження  $\vec{f}_d(x, z)$ , на межах порожнин задані умови контактного типу

$$\left. \begin{aligned} U_\rho(\phi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= U_0^{(p)}(\phi_p, z), \\ \tau_{\rho\phi}|_{\rho_p=R_p} &= \tau_1^{(p)}(\phi_p, z), \\ \tau_{\rho z}|_{\rho_p=R_p} &= \tau_2^{(p)}(\phi_p, z) \end{aligned} \right\} p=1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

де праві частини цих рівностей відомі функції.

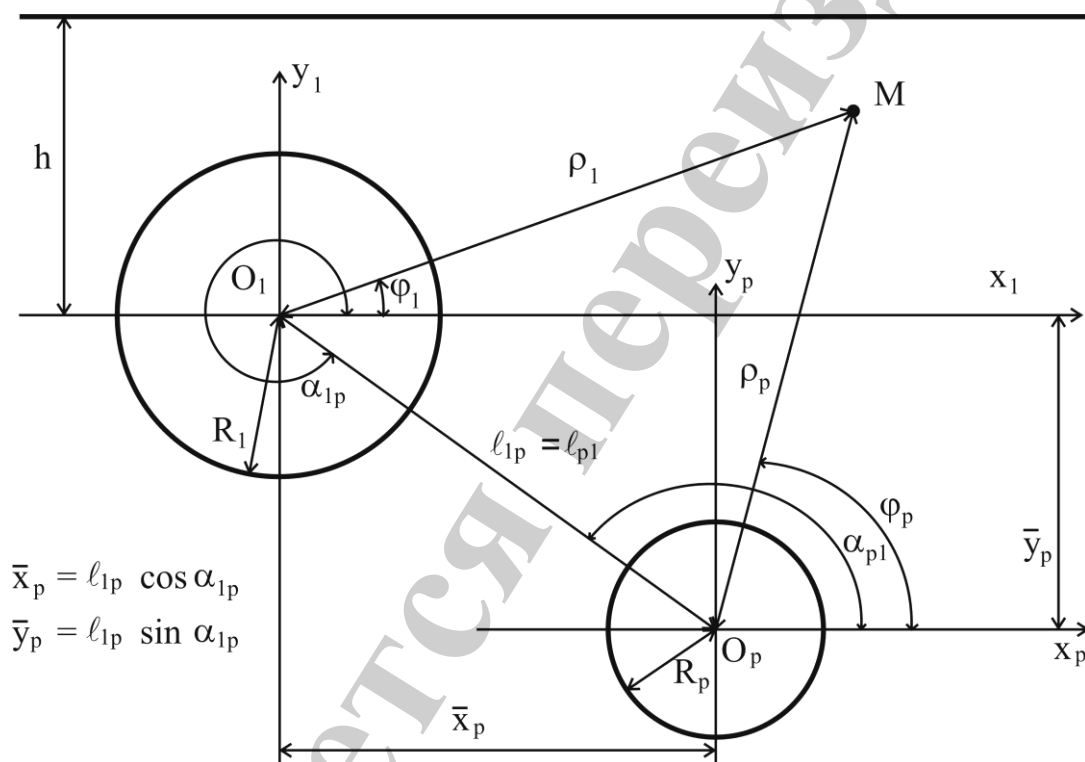


Рис. 1. Півпростір із циліндричними порожнинами

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадаючими до нуля на далеких відстанях від початку координат по координаті  $z$  для циліндрів та по координатах  $x$  і  $z$  для півпростору.

#### 4. 2. Метод вирішення

Виберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для зазначених систем координат у вигляді [12]:

$$\vec{u}_k^\pm(M_d; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} u^\pm(M_d; \lambda, \mu); \quad (k = 1, 2, 3); \quad (2)$$

$$\vec{R}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\phi)};$$

$$\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} \left[ s_m(\rho_p; \lambda) e^{i(\lambda z + m\phi)} \right], \quad k = 1, 2, 3; \quad (3)$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot);$$

$$N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); \quad u^\pm(M_d; \lambda, \mu) = e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y};$$

$$N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[ \nabla \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left( \nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right];$$

$$N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \quad s_m(\rho_p; \lambda) = (\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho_p);$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де  $M_d = (x, y, z)$ ,  $M_p = (\rho_p, \phi_p, z)$  – точки простору, відповідно в декартовій системі координат та в циліндричній системі координат, пов'язаній з  $p$  – м циліндром;  $\vec{e}_j^{(k)}$ , ( $j = 1, 2, 3$ ) – орти декартової ( $k=1$ ) і циліндричної ( $k=2$ ) систем координат;  $\sigma$  – коефіцієнт Пуассона;  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  – модифіковані функції Бесселя;  $\vec{R}_{k,m}$ ,  $\vec{S}_{k,m}$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) – відповідно внутрішні та зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндра;  $\vec{u}_k^{(-)}$ ,  $\vec{u}_k^{(+)}$  – розв'язки рівняння Ламе для півпростору.

Розв'язок задачі представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{U} = & \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) d\lambda + \\ & + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(M_d; \lambda, \mu) d\mu d\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$  і  $\vec{u}_k^{(+)}(M_d; \lambda, \mu)$  базисні розв'язки, які задані формулами (2) і (3), а невідомі функції  $H_k(\square, \square)$  і  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$  необхідно знайти із крайових умов.

Для переходу між системами координат (рис. 1) скористаємось формулами:

– для переходу від координат циліндра з номером  $p$  до координат півпростору узагальнено формулу [18]

$$\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = \frac{(-i \cdot \text{sign } \lambda)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^m \cdot \vec{u}_k^{(-)} \cdot e^{-i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p} \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3;$$

$$\begin{aligned} \vec{S}_{2,m}(M_p; \lambda) &= \\ &= \frac{(-i \cdot \text{sign } \lambda)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^m \cdot \left( \left( m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} + \lambda^2 y_p \right) \vec{u}_1^{(-)} - \lambda^2 \vec{u}_2^{(-)} + \right. \\ &\quad \left. + 4\mu(1-\sigma) \vec{u}_3^{(-)} \right) \frac{e^{-i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad \omega(\lambda, \mu) = \frac{\mu - \gamma}{\lambda},$$

$y > 0, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots;$

– для переходу від координат півпростору до координат циліндра  $p$  узагальнено формулу [18]

$$\vec{u}_k^{(+)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega)^m \vec{R}_{k,m}(M_p) \cdot e^{i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p}, \quad (k=1, 3);$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_2^{(+)} &= e^{i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p} \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (i \cdot \omega)^m \cdot \lambda^{-2} \left( (m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \vec{R}_{1,m}(M_p) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma \cdot \vec{R}_{2,m}(M_p) + 4\mu(1-\sigma) \vec{R}_{3,m}(M_p) \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\vec{R}_{k,m}(M_p) = \vec{b}_{k,m}(\rho_p, \lambda) \cdot e^{i(m\phi_p + \lambda z)};$$

$\bar{x}_p, \bar{y}_p$  – координати циліндра  $p$  відносно циліндра під номером 1.

$$\vec{b}_{1,n}(\rho_p, \lambda) = \vec{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda \rho_p) + i \cdot I_n(\lambda \rho_p) \cdot \left( \vec{e}_\phi \frac{n}{\lambda \rho_p} + \vec{e}_z \right);$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_{2,n}(\rho_p, \lambda) = & \vec{e}_\rho \cdot \left[ (4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda \rho_p) + \lambda \rho_p I''_n(\lambda \rho_p) \right] + \\ & + \vec{e}_\phi \cdot i \cdot m \left( I'_n(\lambda \rho_p) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda \rho_p} I_n(\lambda \rho_p) \right) + \vec{e}_z i \lambda \rho_p I'_n(\lambda \rho_p); \end{aligned}$$

$$\vec{b}_{3,n}(\rho_p, \lambda) = - \left[ \vec{e}_\rho \cdot I_n(\lambda \rho_p) \frac{n}{\lambda \rho_p} + \vec{e}_\phi \cdot i \cdot I'_n(\lambda \rho_p) \right],$$

де  $\vec{e}_\rho$ ,  $\vec{e}_\phi$ ,  $\vec{e}_z$  – орти в циліндричній системі координат;

– для переходу від координат циліндра  $p$  до координат циліндра 1 [12]

$$\vec{s}_{k,m}(M_p; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{b}_{k,p1}^{mn}(\rho_1) \cdot e^{i(n\phi_1 + \lambda z)}, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\vec{b}_{1,p1}^{mn}(\rho_1) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{p1}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{p1}} \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_1, \lambda);$$

$$\vec{b}_{3,p1}^{mn}(\rho_1) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{p1}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{p1}} \cdot \vec{b}_{3,n}(\rho_1, \lambda);$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_{2,p1}^{mn}(\rho_1) = & (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{p1}) \cdot \vec{b}_{2,n}(\rho_1, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{p1} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{p1}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{p1}) \right] \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_1, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{p1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\alpha_{p1}$  – кут між віссю координат  $x_I$  та відрізком  $\ell_{1p}$ ,

$$\tilde{K}_m(x) = (\text{sign } x)^m \cdot K_m(|x|).$$

При переходу від координат циліндра 1 до координат циліндра  $p$  в формулі (7) індекси слід поміняти місцями.

Для виконання граничних умов на межі півпростору  $y=h$ , праву частину (4) за допомогою формул переходу (5) перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки  $\vec{u}_k^{(-)}$ . Якщо граничні умови на межі  $y=h$  задані в переміщеннях, отриманий вектор прирівнюємо (при  $y=h$ ) заданому  $\vec{U}_d^0(x, z)$ , але якщо граничні умови задані в напруженнях, то для отриманого вектору знайдемо напруження і прирівнюємо його (при  $y=h$ ) заданому  $\vec{f}_d(x, z)$ . Вектори

$$\vec{U}_d^0(x, z) = U_x^{(d)} \vec{e}_1^{(1)} + U_y^{(d)} \vec{e}_2^{(1)} + U_z^{(d)} \vec{e}_3^{(1)}$$

$$\vec{f}_d(x, z) = \tau_{yx}^{(d)} \vec{e}_1^{(1)} + \sigma_y^{(d)} \vec{e}_2^{(1)} + \tau_{yz}^{(d)} \vec{e}_3^{(1)}$$

попередньо представимо подвійним інтегралом Фур'є. В результаті з отриманих рівнянь знайдемо функції  $H_k(\square, \square)$  через  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ .

Користуючись формулами переходу, від декартової системи до циліндричної (6), а також від одного циліндра до іншого (7), перепишемо (4) в координатах циліндра з номером  $p$  через базисні розв'язки  $\vec{R}_{k,m}$ ,  $\vec{S}_{k,m}$ . Якщо тепер знайти  $U_p(\phi_p, z)$  і напруження  $\tau_{\rho\phi}$ ,  $\tau_{\rho z}$ , для правої частини рівності (4) на поверхні кожної циліндричної порожнини і врахувати граничні умови (1), то отримуємо систему рівнянь для коефіцієнтів  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ , в яку входять функції  $H_k(\square, \square)$ , для кожної порожнини  $p$ . Визначник цієї системи не дорівнює нулю, більш того

$$- \text{ для } m = 0 \quad |\Delta_0| = 8(1 - \sigma) \cdot x^2 \cdot K_1^2(x) \cdot K_2(x), \quad (8)$$

$$- \text{ для } m \geq 1 \quad |\Delta_m| > 4m \cdot K_{m-1}(x) K_m(x) K_{m+1}(x), \quad x = |\lambda| \rho, \quad \lambda \neq 0.$$

Функції  $H_k(\square, \square)$ , які раніше були виражені через  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ , підставимо у рівняння для виразів  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ . В результаті отримуємо сукупність із  $N \cdot 3$  нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ .

Для отриманих систем, використовуючи нерівність (8), доведено однозначну розв'язність, при умовах не торкання границь. Більш того, ці системи можна вирішувати методом усічення і має місто збіжність наближених рішень до точного. Знайдені з нескінченної системи рівнянь функції  $B_{s,m}^{(p)}(\lambda)$  підставимо у вирази для  $H_k(\square, \square)$ . Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

## 5. Числові дослідження для півпростору і двох циліндрів

Маємо дві паралельні циліндричні порожнини у півпросторі (рис. 1),  $p=2$ . Півпростір – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона  $\sigma=0,35$ , модуль пружності  $E=2$  кН/см<sup>2</sup>. Межа півпростору розташована на відстані  $h=40$  см, циліндри, радіуси яких  $R_1=R_2=10$  см, розташовані на горизонтальній осі ( $\alpha_{12} = 0$ ) на відстані  $\ell_{12} = 50$  см.

Було розраховано декілька варіантів задач з різними граничними умовами – три варіанти, коли на межі півпростору задано переміщення та три варіанти, коли на межі півпростору задані напруження. На межах циліндрів у всіх варіантах задані умови контактного типу.

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої по параметру  $m$  – порядок системи. Вплив значення параметра  $m$  досліджено у [18]. Межі інтег-



рації для заданих граничних функцій були узяті від  $-1 \dots 1$ . Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона та Сімпсона. Точність виконання граничних умов при вказаних значеннях геометричних параметрів була доведена до  $10^{-3}$  ( $m=8$ ).

### Варіант 1

На межі півпростору задано переміщення  $U_x^{(d)} = U_y^{(d)} = U_z^{(d)} = 0$ . На межі циліндра 1 задано радіальне переміщення

$$U_0^{(1)}(\phi_1, z) = 10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2$$

та дотичні напруження  $\tau_{\rho\phi}^{(1)} = \tau_{\rho z}^{(1)} = 0$ , на межі циліндра 2 граничні умови  $U_0^{(2)}(\phi_2, z) = 0$ ;  $\tau_{\rho\phi}^{(2)} = \tau_{\rho z}^{(2)} = 0$ .

На рис. 2 представлений графік нормальних напружень на перешийку між циліндром 1 і межею півпростору (рис. 2, а) та на перешийку між циліндрами 1 і 2 (рис. 2, б) в площині  $z=0$ .

Найбільш напружений стан знаходиться на поверхні «навантаженого» циліндра 2, де напруження  $\sigma_\rho = -0,271 \text{ Кн/см}^2$ ,  $\sigma_\phi = 0,052 \text{ Кн/см}^2$ ,  $\sigma_z = -0,161 \text{ Кн/см}^2$ . На перешийках напружений стан на межі півпростору (рис. 2, а, відстань 40 см.) та на межі циліндра 2 (рис. 2, б, відстань 40 см.) відрізняється один від одного: так напруження  $\sigma_\rho = -0,0261 \text{ Кн/см}^2$  зростає біля поверхні циліндра 2, на відміну від півпростору де  $\sigma_\rho$  знижується ( $\sigma_\rho = -0,014 \text{ Кн/см}^2$ ),  $\sigma_\phi$  на межі півпростору має стискаючі зусилля ( $\sigma_\phi = -0,008 \text{ Кн/см}^2$ ), а на межі циліндра 2, навпаки, розтягувальні ( $\sigma_\phi = 0,006 \text{ Кн/см}^2$ ).

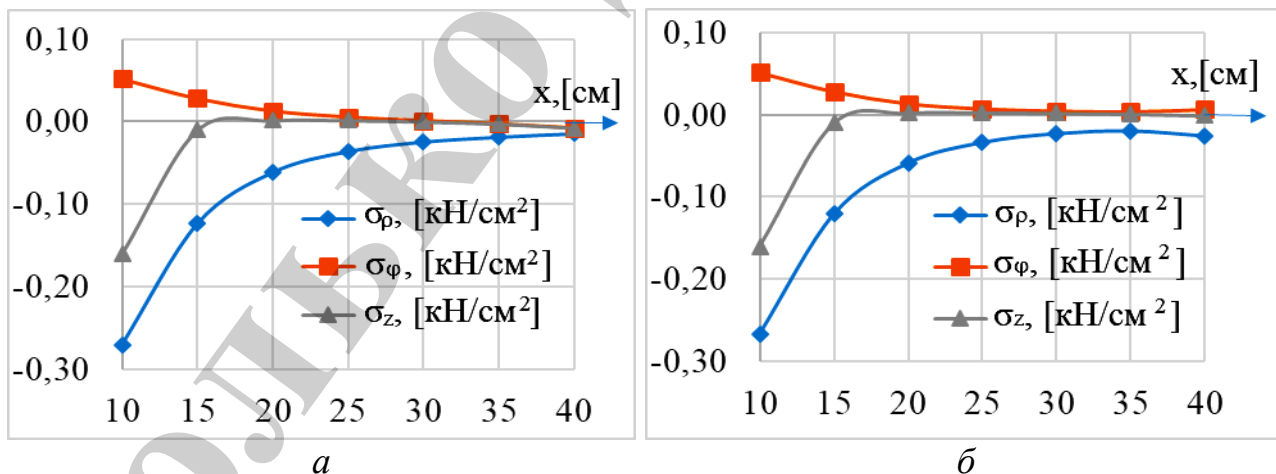


Рис. 2. Нормальні напруження в координатах циліндра 1 в площині  $z=0$ :  
 а – на прямій  $x=0$  між циліндром 1 і межею півпростору;  
 б – на відрітку  $O_1O_2$  між циліндрами

## Варіант 2

На межі півпростору задано переміщення

$$U_x^{(d)} = U_y^{(d)} = U_z^{(d)} = 0.$$

На межах циліндрів 1 і 2 задано радіальне переміщення

$$U_0^{(1)}(\phi_1, z) = U_0^{(2)}(\phi_2, z) = 10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2$$

та дотичні напруження

$$\tau_{\rho\phi}^{(1)} = \tau_{\rho z}^{(1)} = \tau_{\rho\phi}^{(2)} = \tau_{\rho z}^{(2)} = 0.$$

Графік нормальних напружень на рис. 3 показує, як змінилися напруження при навантаженні циліндра 1 і циліндра 2.

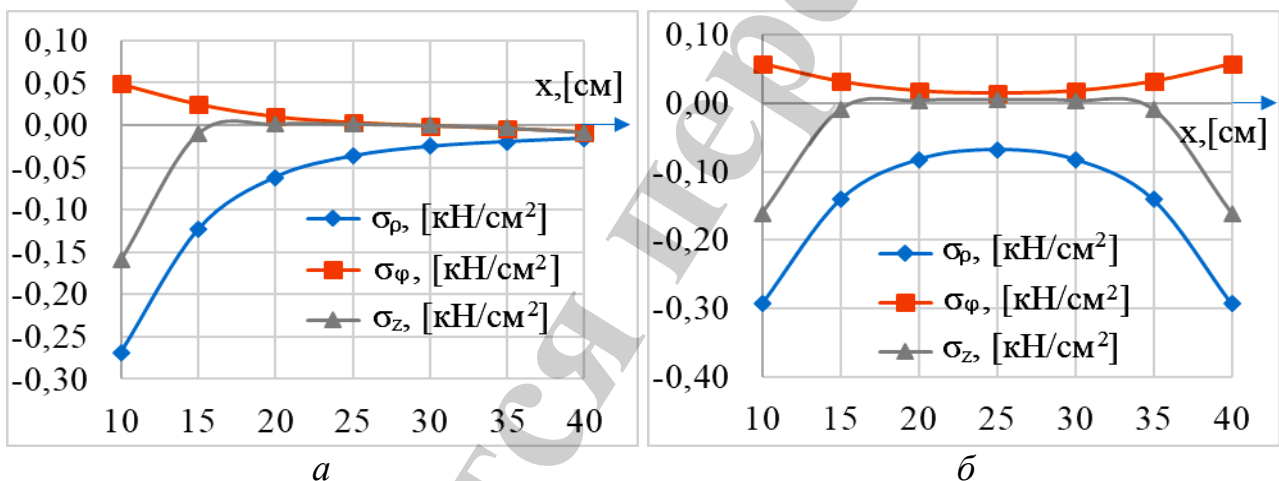


Рис. 3. Нормальні напруження в координатах циліндра 1 в площині  $z=0$ :  
*a* – на прямій  $x=0$  між циліндром 1 і межею півпростору;  
*б* – на відріжку  $O_1O_2$  між циліндрами

Так, в порівнянні з варіантом 1 (рис. 2), на перешийку між циліндром 1 і межею півпростору (рис. 3, *a*) напруження майже не змінилися ( $\sigma_\rho = -0,269$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_\phi = 0,048$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z = -0,160$  Кн/см<sup>2</sup> на циліндрі та  $\sigma_\rho = -0,016$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_\phi = -0,008$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z = -0,008$  Кн/см<sup>2</sup> на півпросторі), однак на перешийку між циліндрами 1 і 2 (рис. 3, *б*) напруження мають симетричне розташування відносно  $\ell_{12}/2$ , на поверхні циліндрів екстремальні значення ( $\sigma_\rho = -0,293$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_\phi = 0,058$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z = -0,161$  Кн/см<sup>2</sup>), між циліндрами напруження спадають ( $\sigma_\rho = -0,068$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_\phi = 0,014$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z = 0,005$  Кн/см<sup>2</sup>).

### Варіант 3

На межі півпростору задано переміщення  $U_x^{(d)} = U_z^{(d)} = 0$ .

$$U_y^{(d)} = -\left(10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2\right) \cdot \left(10^{-4} \cdot \left((x - \ell_{12} / 2)^2 + 10^2\right)^2\right),$$

графічно показано на рис. 4. На межі циліндрів 1 і 2 задано радіальне переміщення

$$U_0^{(1)}(\phi_1, z) = U_0^{(2)}(\phi_2, z) = 0$$

та дотичні напруження

$$\tau_{\rho\phi}^{(1)} = \tau_{\rho z}^{(1)} = \tau_{\rho\phi}^{(2)} = \tau_{\rho z}^{(2)} = 0.$$

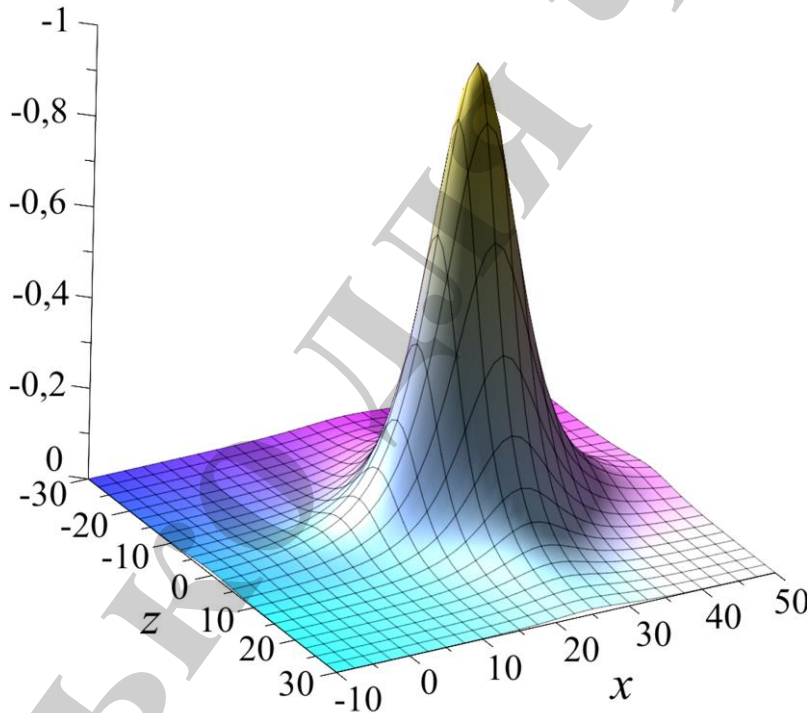


Рис. 4. Функція нормального переміщення  $U_y^{(d)}$ , що задана на поверхні півпростору

В цьому варіанті «навантаженою» є межа півпростору із максимальними значеннями посередині між циліндрами, що вплинуло на напружений стан на перешийках (рис. 5).

Так на лінії між циліндром 1 і межею півпростору (рис. 5, а)  $\sigma_p = -0,005$  Кн/см<sup>2</sup> має екстремальне значення на межі циліндру 1, водночас  $\sigma_\phi$  і  $\sigma_z$  мають екстремальні значення між циліндром і межею півпростору ( $\sigma_\phi = -0,003$  Кн/см<sup>2</sup>,

$\sigma_z=0,002 \text{ Кн/см}^2$ ). На перешийку між циліндрами (рис. 5, б), за рахунок вертикального тиску граничних точок півпростору, напруження  $\sigma_\phi$ , яке направлено перпендикулярно межі півпростору, має екстремальні стискаючі значення напроти максимального заданого переміщення півпростору ( $\sigma_\phi=-0,004 \text{ Кн/см}^2$ ). Напруження  $\sigma_p=-0,001 \text{ Кн/см}^2$  теж має невелике збільшення стискаючих зусиль на поверхні циліндрів.

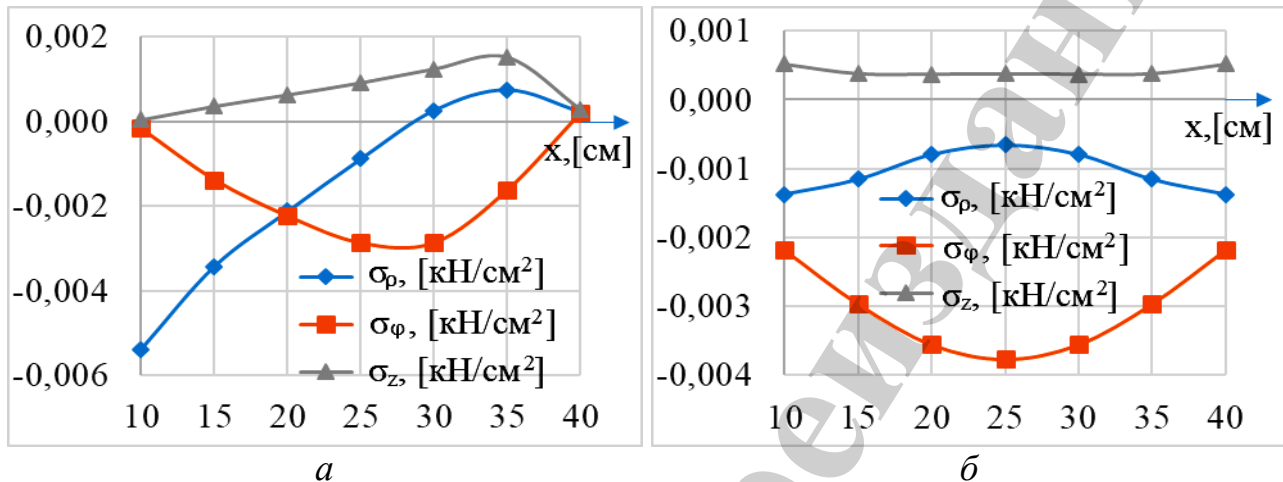


Рис. 5. Нормальні напруження в координатах циліндра 1 в площині  $z=0$ :  
 а – на прямій  $x=0$  між циліндром 1 і межею півпростору;  
 б – на відрізку  $O_1O_2$  між циліндрами

#### Варіант 4

На межі півпростору задано напруження

$$\sigma_y^{(d)} = \tau_{yx}^{(d)} = \tau_{yz}^{(d)} = 0.$$

На межі циліндра 1 задано радіальне переміщення

$$U_0^{(1)}(\phi_1, z) = 10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2$$

та дотичні напруження  $\tau_{\rho\phi}^{(1)} = \tau_{\rho z}^{(1)} = 0$ , на межі циліндра 2 граничні умови

$$U_\rho^{(2)}(\phi_2, z) = 0; \tau_{\rho\phi}^{(2)} = \tau_{\rho z}^{(2)} = 0.$$

В порівнянні з варіантом 1 в цьому випадку на межі півпростору задано напруження (графік напруженого стану представлений на рис. 6).

Із рис. 6 можна побачити, що зміна граничних умов на межі півпростору не вплинула на напружений стан перешийка між циліндрами (рис. 6, б), але вплинула на напружений стан перешийка між циліндром 1 і межею півпростору

(рис. 6, а). Так на межі півпростору  $\sigma_p=0$ ,  $\sigma_\phi$  і  $\sigma_z$  тепер мають не стискаючі, а розтягувальні значення ( $\sigma_\phi=0,015 \text{ Кн/см}^2$ ,  $\sigma_z=0,015 \text{ Кн/см}^2$ ).

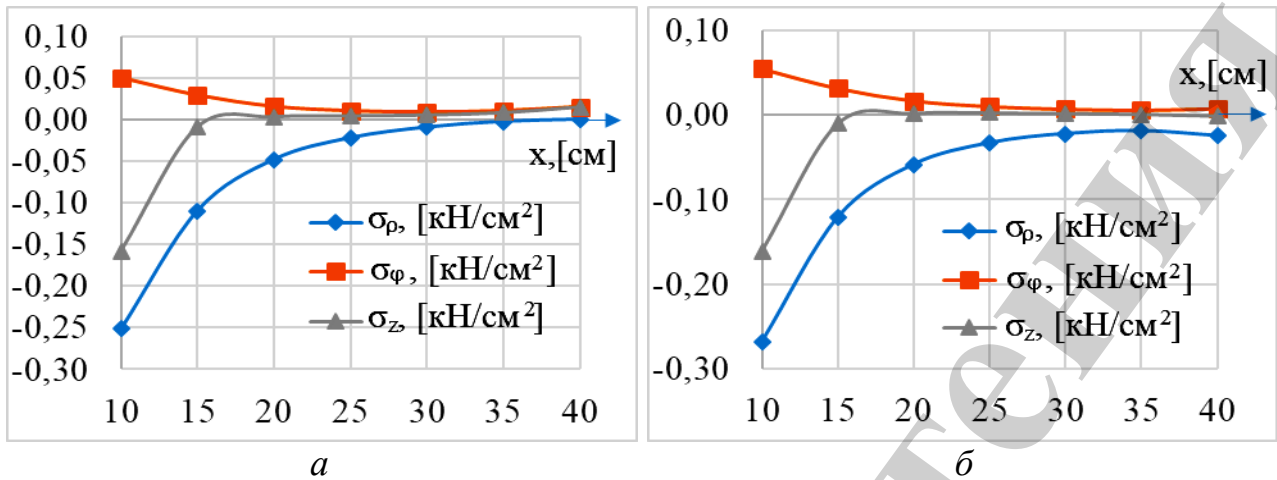


Рис. 6. Нормальні напруження в координатах циліндра 1 в площині  $z=0$ :  
 а – на прямій  $x=0$  між циліндром 1 і межею півпростору;  
 б – на відрізку  $O_1O_2$  між циліндрами

#### Варіант 5

На межі півпростору задано напруження

$$\sigma_y^{(d)} = \tau_{yx}^{(d)} = \tau_{yz}^{(d)} = 0.$$

На межі циліндрів 1 і 2 задані дотичні напруження

$$\tau_{r\phi}^{(1)} = \tau_{r\phi}^{(2)} = \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0$$

та радіальне переміщення

$$U_0^{(1)}(\phi_1, z) = U_0^{(2)}(\phi_2, z) = 10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2.$$

Напружений стан на перешийках представлений на рис. 7.

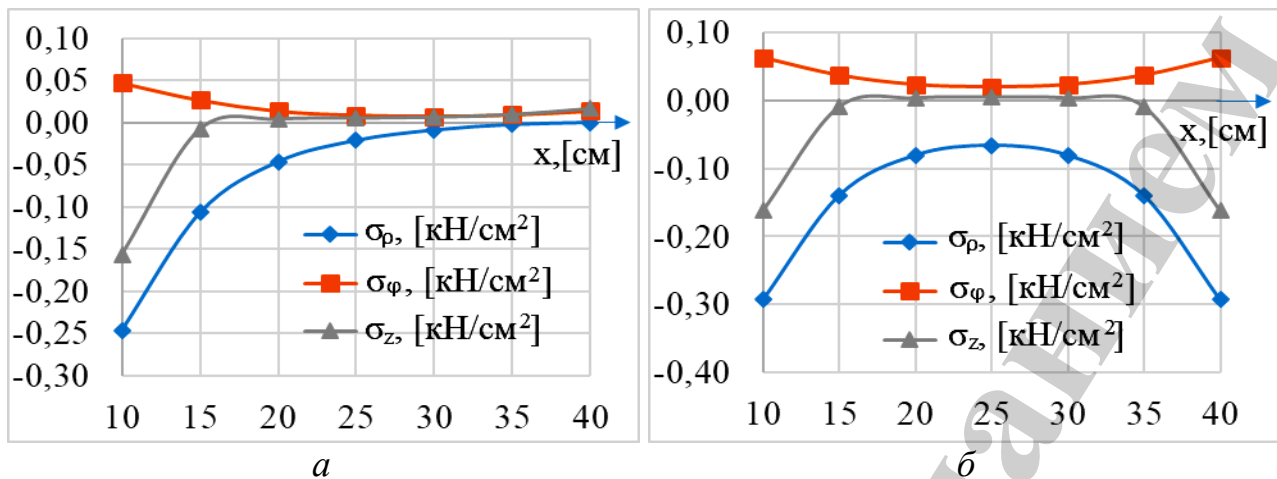


Рис. 7. Нормальні напруження в координатах циліндра 1 в площині  $z=0$ :  
 а – на прямій  $x=0$  між циліндром 1 і межею півпростору;  
 б – на відрізку  $O_1O_2$  між циліндрами

В порівнянні з варіантом 2, як і в попередньому випадку, зміни торкнулися перешийка між циліндром 1 і межею півпростору (рис. 7, а): на межі півпростору напруження  $\sigma_\rho=0$ ,  $\sigma_\phi$  і  $\sigma_z$  тепер мають не стискаючі, а розтягувальні значення ( $\sigma_\phi=0,014$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z=0,017$  Кн/см<sup>2</sup>).

#### Варіант б

На межі півпростору задано напруження  $\tau_{yx}^{(d)} = \tau_{yz}^{(d)} = 0$ .

$$\sigma_y^{(d)} = -\left(10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)\right) \cdot \left(10^{-4} \cdot \left((x - \ell_{qp} / 2)^2 + 10^2\right)^2\right).$$

На межі циліндрів 1 і 2 задано радіальне переміщення

$$U_0^{(1)}(\phi_1, z) = U_0^{(2)}(\phi_2, z) = 0$$

та дотичні напруження

$$\tau_{\rho\phi}^{(1)} = \tau_{\rho z}^{(1)} = \tau_{\rho\phi}^{(2)} = \tau_{\rho z}^{(2)} = 0.$$

На відміну від варіанту 3, на межі півпростору замість переміщень прикладені напруження, що впливає на напружений стан перешийків (рис. 8).

Навантаження у вигляді одиничного напруження, на відміну від навантаження у вигляді одиничного переміщення, мають більший вплив на напружений стан. Так напруження на перешийку між циліндрами (рис. 8, б) має такий самий вид як і на рис. 5, б, але більший за значеннями, наприклад напруження між циліндрами у 6 варіанті  $\sigma_\rho=-0,012$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_\phi=-0,049$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z=0,002$  Кн/см<sup>2</sup>, у 3 варіанті  $\sigma_\rho=-0,001$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_\phi=-0,004$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z=0,0004$  Кн/см<sup>2</sup>.

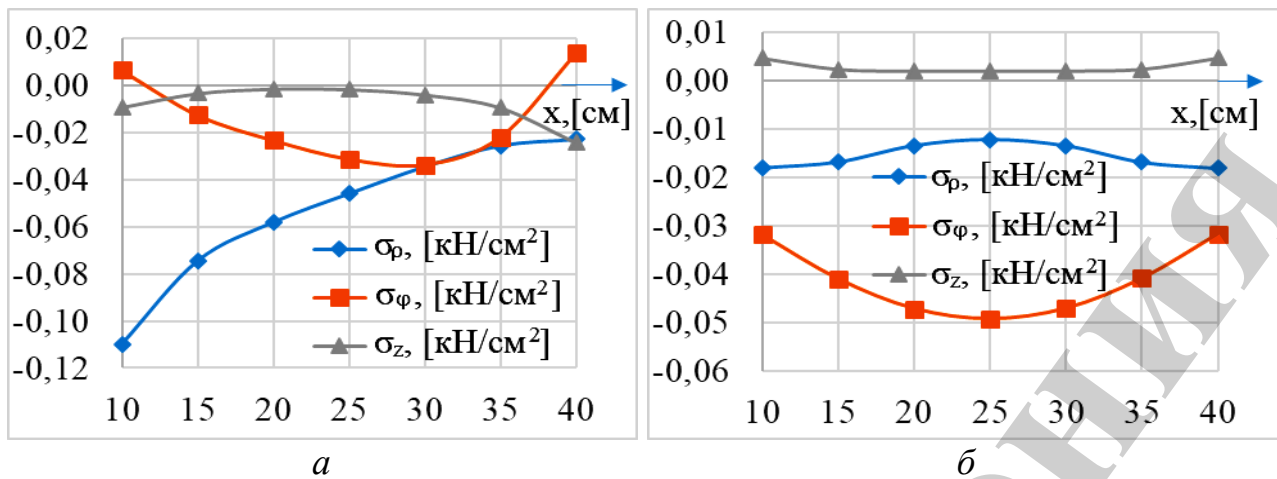


Рис. 8. Нормальні напруження в координатах циліндра 1 в площині  $z=0$ :  
 а – на прямій  $x=0$  між циліндром 1 і межею півпростору;  
 б – на відрізку  $O_1O_2$  між циліндрами

На перехилу між циліндром 1 і межею півпростору, на відміну від варіанту 3 (рис. 5, а), значення напружень більші, до того ж  $\sigma_z$  в цьому випадку є стискаючим та зростає на межі півпростору ( $\sigma_z=-0,024 \text{ Кн/см}^2$ ). Напруження  $\sigma_r$  також, на відміну від варіанту 3 (рис. 5, а), на межі півпростору є стискаючим ( $\sigma_r=-0,023 \text{ Кн/см}^2$ ). Напруження  $\sigma_\phi$ , в порівнянні з варіантом 3 (максимальне значення  $\sigma_\phi=-0,003 \text{ Кн/см}^2$ ), має більші значення (максимальне значення  $\sigma_\phi=-0,034 \text{ Кн/см}^2$ ).

## 6. Обговорення отриманих результатів напруженого стану та методу розв'язання задачі

В рамках прийнятої лінійної моделі однорідного ізотропного середовища і точної постановки задачі, отримані результати (розподіл полів напружень в багатозв'язному тілі) пояснюються реакцією пружного тіла на:

- 1) наявність декількох, що обмежують тіло, плоских і кривих поверхонь;
- 2) обрану систему крайових умов на цих поверхнях.

Для іншої системи крайових умов, при інших рівних факторах, реакція пружного тіла буде іншою.

На основі узагальненого методу Фур'є розроблений аналітико-чисельний алгоритм розрахунку просторової задачі теорії пружності. Алгоритм передбачає наступні граничні умови: на межі півпростору один з двох типів граничних умов – переміщення або напруження, на межах декількох паралельних циліндричних порожнин умови контактного типу у вигляді радіальних переміщень та дотичних напружень. Розроблений алгоритм дозволяє розраховувати задачі з подібними граничними умовами із наперед заданою точністю (в залежності від параметра  $m$ ) та може використовуватись для проектування різного роду конструкцій.

В порівнянні з роботами [1–11] запропонований алгоритм дає можливість отримати точний розв'язок подібної задачі, а в порівнянні з [13–22] урахувати граничні умови контактного типу а також межу півпростору.

Серед недоліків слід зазначити, що зі зменшенням відстані між границями тіла алгоритм стає менш ефективним, так як потребує збільшення порядку системи  $m$  і відповідно збільшення часу на обчислення інтегралів матричних елементів. Також алгоритм не дає можливості розв'язати задачі, коли границі тіла дотикаються або перетинаються.

Подальший розвиток дослідження з цього напрямку необхідний для розв'язання подібних задач в шарі з циліндричними порожнинами, який за відсутністю алгоритмів з точними аналітичними методами зовсім не досліджений, але при проектуванні конструкцій зустрічається в розрахункових схемах.

При розгляді шару з циліндричними порожнинами необхідно буде врахувати нижню межу півпростору. В цьому випадку система рівнянь значно ускладнюється в аналітичному та чисельному плані.

## 7. Висновки

1. Числовий аналіз напружено-деформованого стану півпростору та двох циліндричних порожнин показує:

– при різних видах заданих крайових умов (напруження або переміщення), напруження  $\sigma_\phi$  і  $\sigma_z$  на межі прикладення таких умов змінюються на протилежні, тобто з розтягуючих на стискаючі або навпаки;

– при заданих на межі циліндричної порожнини умов контактного типу, а саме нульових дотичних напружень та нормального переміщення у вигляді хвилі висотою 1 см., нормальні напруження на поверхні дорівнюють:  $\sigma_\rho = -0,27$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_\phi = 0,05$  Кн/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z = -0,16$  Кн/см<sup>2</sup>;

– крайові умови на межі півпростору у вигляді напружень мають більший вплив на напружений стан ніж крайові умови у вигляді переміщень. Ці твердження мають місце при заданих на межах циліндричних порожнин граничних умов контактного типу, якщо задана функція переміщень та задана функція напружень однакові.

2. Числові дослідження алгебраїчної системи для півпростору і двох циліндрів дають можливість стверджувати, що її розв'язок може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції. Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов. Для геометричних параметрів розв'язаної задачі ( $R_1/h=0,25$ ;  $(R_1 + R_1)/\ell_{12} = 0,4$ ) при  $m=8$  граничні умови виконуються з точністю  $10^{-3}$ . При збільшенні порядку системи  $m$  точність розрахунків буде збільшена.

3. Наведені графіки дають картину розподілу напружень у найбільш цікавих зонах – на перешийку між циліндричними порожнинами, та на перешийку між межею півпростору і поверхнею циліндричної порожнини.

При аналізі напруженого стану циліндричної порожнини з граничними умовами контактного типу з'ясувалося, що, при наближенні до її поверхні, напруження  $\sigma_\rho$  зростає не залежно від того навантажена вона чи ні. Так, при «невантаженому» циліндрі (варіант 1, рис. 2, б) напруження  $\sigma_\rho$  зростає до  $-0,026$  Кн/см<sup>2</sup>, «невантаженому» циліндрі в варіанті 6 (рис. 8, а)  $\sigma_\rho$  зростає до  $-0,11$  Кн/см<sup>2</sup>.



4. Достовірність представленого алгоритму підтверджується високим рівнем виконання граничних умов, а отримані графіки можуть бути використані при оцінці напруженого стану в конструкціях з подібними умовами.

### Література

1. Karadeniz Z. H., Kumlutas D. A numerical study on the coefficients of thermal expansion of fiber reinforced composite materials // *Composite Structures*. 2007. Vol. 78, Issue 1. P. 1–10. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.11.034>
2. Two-dimensional and axisymmetric unit cell models in the analysis of composite materials / Noda N.-A., Nisitani H., Takase Y., Shukuwa Y.-A. // *Composite Structures*. 2005. Vol. 69, Issue 4. P. 429–435. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.08.034>
3. Подковаліхіна О. О. Осесиметричні крайові задачі для пружної багатошарової основи з циліндричним включенням. Дніпропетр. нац. університет ім. О. Гончара, 2009. 164 с.
4. Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д. Осесимметричная задача с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса // *Прикладная механика*. 2014. Т. 50, № 6. С. 27–38.
5. Залётов С. В. Осесимметричная задача о действии нормальной нагрузки на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Таганрогский институт имени А. П. Чехова, 2016. 157 с.
6. Eskandari-Ghadi M., Mahmoodian M. Analytical Solution of Time-Harmonic Torsional Vibration of a Cylindrical Cavity in a Half-Space // *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*. 2012. Vol. 6, Issue 1. P. 184–189.
7. Semi-analytical Solution for the Dynamic Response of a Cylindrical Structure Embedded in a Homogeneous Half-Space / Zhao M., van Dalen K. N., Barbosa J. M., Metrikine A. V. // *Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics*. 2017. P. 369–388. doi: [https://doi.org/10.1007/978-981-10-4508-0\\_35](https://doi.org/10.1007/978-981-10-4508-0_35)
8. Coşkun İ., Engin H., Özmutlu A. Dynamic Stress and Displacement in an Elastic Half-Space with a Cylindrical Cavity // *Shock and Vibration*. 2011. Vol. 18, Issue 6. P. 827–838. doi: <https://doi.org/10.1155/2011/904936>
9. Dynamic analysis of a cylindrical cavity in inhomogeneous elastic half-space subjected to SH waves / Yang Z., Jiang G., Tang H., Sun B., Yang Y. // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. P. 108128651773952. doi: <https://doi.org/10.1177/1081286517739520>
10. Meleshko V. V., Tokovyy Y. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // *Journal of Engineering Mathematics*. 2012. Vol. 78, Issue 1. P. 143–166. doi: <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y>
11. Khoroshun L. P. Mathematical models and method of the mechanics of stochastic composites // *International Applied Mechanics*. 2000. Vol. 36, Issue 10. P. 1284–1316. doi: <https://doi.org/10.1023/a:1009482032355>

12. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков, 2011. 344 с.
13. Николаев А. Г., Щербакова Ю. А. Обоснование метода Фурье в осесимметричных задачах теории упругости для трансверсально-изотропных тел, ограниченных поверхностью параболоида // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. 2010. Вып. 48. С. 180–190.
14. Щербакова Ю. А., Шехватова Е. М. Сравнительный анализ НДС многосвязных трансверсально-изотропных тел с различными упругими характеристиками // Вісник Запорізького національного університету. 2015. Вып. 2. С. 253–261.
15. Николаев А. Г., Щербакова Ю. А. Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально-изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. Т. 52, № 3. С. 160–169.
16. Николаев А. Г., Щербакова Ю. А., Южно А. И. Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболоидальным включением // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. 2006. Вып. 2 (45). С. 47–51.
17. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2012. Вип. 20. С. 253–259.
18. Проценко В. С., Украинец Н. А. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью // Вісник Запорізького національного університету. 2015. Вып. 2. С. 193–202.
19. Визначення НДС в пружному півпросторі з циліндровими порожнинами / Мірошніков В. Ю., Медведєва А. В., Ворончїхіна С. О., Олешкевич С. В. // Науковий вісник будівництва. 2012. Вип. 68. С. 156–162.
20. Мірошніков В. Ю. Друга основна задача теорії пружності у півпросторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. 2018. Вып. 79. С. 88–99.
21. Мірошніков В. Ю. Третя основна задача теорії пружності в просторі з  $N$  паралельними круговими циліндричними порожнинами // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. 2017. Вып. 2 (90). С. 89–103.
22. Miroshnikov V. Yu. On computation of the stress-strain state of a space weakened by a system of parallel circular cylindrical cavities with different edge conditions // 4th International Conference «Science and practice: a new level of integration in the modern world». Scope academic house. Sheffield, UK, 2017. P. 77–83.