

## Исследование влияния характеристик газосодержащих суспензий на параметры процесса распространения ультразвуковых волн

В. С. Моркун, Н. В. Моркун, В. В. Тронь, С. Н. Грищенко

*У роботі виконано дослідження закономірностей зв'язку флуктуацій числа і розмірів зважених у рідині часток на характеристики поля об'ємних ультразвукових хвиль. Виявлено, що величина згасання об'ємних ультразвукових коливань високої частоти ( $\geq 5$  МГц) у реальній пульпі залежить практично тільки від концентрації твердої фази і крупності часток подрібненого матеріалу*

*Ключові слова: газові бульбашки, збагачення руди, об'ємні ультразвукові хвилі, розподіл часток, характеристики пульпи*

### 1. Введение

В настоящее время ультразвуковые методы и технологии получили широкое применение в различных исследовательских проектах. В частности они применяются при исследовании, распознавании и контроле качества различных материалов [1]. Например, для распознавания характеристик разновидностей обогащаемого рудного сырья [2–4].

Для оптимизации управления процессами обогащения полезных ископаемых важным аспектом является наличие качественной информации о характеристиках технологических сред [5]. Необходимость осуществления оперативного контроля характеристик твердой фазы пульпы подчеркивается также наличием неопределенности параметров технологических агрегатов [6]. Следует отметить, что применение ультразвуковых методов в данном случае позволит обеспечить необходимое быстродействие и точность измерений.

Значительные потери полезного компонента в отходах обогатительного производства не только приводят к снижению показателей эффективности, но и негативно влияют на окружающую среду [7, 8]. Одним из путей уменьшения негативного влияния потерь полезного компонента является повышение эффективности процессов флотации. В работе [9] предложен метод ультразвуковой обработки частиц обогащаемого рудного материала для более качественной очистки зерен полезного компонента от пустой породы. Также отмечается положительное влияние ультразвуковых колебаний на образование газовых пузырьков и поддержание кавитационного режима, что также повышает эффективность флотации [10, 11].

Ультразвуковые колебания представляют собой периодические возмущения состояния упругой среды, характеризующиеся изменением ее физических свойств, происходящих синхронно с возмущением. При распространении ультразвука колебания локального объема среды передаются соседним участкам посредством упругих волн, характеризующихся изменением плотности среды в пространстве и переносящих энергию колебаний. Основные соотношения,

описывающие ультразвуковые колебания и волны в среде, следуют из уравнения состояния среды, уравнения движения Ньютона и уравнения неразрывности [12].

Использование ультразвуковых методов и технологий в процессе исследования, распознавания и контроля качества различных материалов позволяет существенно повысить точность измерений и эффективность технологических процессов. При этом существуют определенные трудности, связанные со сложностью процессов распространения ультразвуковых волн в газосодержащих суспензиях. В частности, недостаточно изучены закономерности влияния флуктуаций количества и размеров взвешенных в жидкости частиц на характеристики ультразвукового поля.

## **2. Анализ литературных данных и постановка проблемы**

Наиболее изученными и используемыми из всех известных на сегодняшний день поверхностных волн являются ультразвуковые волны Рэлея [13]. Это волны, которые распространяются вдоль границы твердого пространства. Рэлеевская волна состоит из двух плоских неоднородных волн – продольной и поперечной. Эти волны и составленная из них рэлеевская волна являются волнами с вертикальной поляризацией. Волны Рэлея обладают наибольшей концентрацией энергии на поверхности твердого тела. Однако характеристики процесса их распространения сильно зависят от состояния поверхности распространения. Возможно отражение и рассеивание волн, вызванное даже микродефектами этой поверхности.

К основным типам ультразвуковых поверхностных волн также относятся волны на границе двух полупространств – волны Стоунли [13]. Для волны Стоунли характерна эллиптическая поляризация, ориентированная по нормали к границе полупространств. Волны Стоунли распространяются как в жидком, так и в твердом полупространствах. При этом составляющая, распространяющаяся в жидком полупространстве, подвержена воздействию тех же возмущающих факторов, что и обычные объемные ультразвуковые колебания. Например, следует ожидать сильную зависимость величины их затухания от содержания газовых пузырьков в промышленных суспензиях.

Аналогичны по своей природе рэлеевским, но с горизонтальной поляризацией – волны Лява [14]. Волны Лява, как поверхностные волны, получают возможность существования из-за добавления к полупространству твердого слоя, являющегося нагрузкой для полупространства. Следует отметить, что волны Лява отличаются сильной зависимостью от состояния поверхностного слоя, что усложняет их использование в процессе измерений.

К поверхностным волнам относятся также волны в пластинах: нормальные волны с горизонтальной поляризацией (поперечные нормальные волны) и нормальные волны с вертикальной поляризацией – волны Лэмба [13, 15]. Эти волны характеризуются достаточно большой концентрацией энергии и в меньшей степени, чем волны Рэлея и Лява, подвержены воздействию возмущающих факторов.

При исследовании процессов осаждения частиц измельченной руды в железорудной пульпе в работах [16, 17] использованы поверхностные волны Лэмба и объемные ультразвуковые волны.

Распространение ультразвука в жидкости в условиях кавитации рассмотрено в [18]. С применением численных методов определена энергия, рассеиваемая пузырьками. Установлена прямая зависимость между энергией, которую теряют пузырьки газа и затуханием ультразвуковых волн, что приводит к формированию бегущих волн. На основе описанных выше результатов в [19] выполнен расчет величины силы Бьеркнеса и предсказаны структуры газовых пузырьков, формируемые вследствие воздействия бегущих волн.

Исследование диссипации акустических волн в жидкостях при наличии пузырьков представлено в работе [20]. Полученная модель позволяет прогнозировать нелинейное затухание ультразвуковых волн внутри. При этом отмечается, что прогнозируемые значения демпфирования намного выше, чем числа, оцененные предыдущими моделями.

Теоретическое исследование распространения ультразвука в пузырьковых жидкостях с экспериментальной проверкой результатов выполнено в работе [21]. Предложен подход предполагающий рассмотрение неравномерного поля давления вне пузырьков. Нестабильность пузырьков количественно оценивается с помощью аналитических методов.

Численный инструмент для изучения распространения ультразвука в пузырьковых жидкостях представлен в работе [22]. Предложенная модель основана на методе конечного объема и конечно-разностном методе. Эта модель решает дифференциальную систему, образованную волновым уравнением, и уравнение Рэлея-Плессета, связывающее поле звукового давления с колебаниями пузырьков. Полученные результаты позволяют наблюдать физические эффекты вызванные наличием пузырьков в жидкости: нелинейность, дисперсия, затухание.

Нелинейное распространение ультразвуковых волн в смесях воздушных пузырьков в воде, в условиях неоднородного распределения пузырьков, представлено в работе [23]. Моделирование выполнено с помощью набора дифференциальных уравнений, который описывает связь акустического поля и вибрации пузырьков. При этом предполагается, что затухание и нелинейные эффекты обусловлены исключительно наличием пузырьков. Неоднородность распределения пузырьков представлена в виде скоплений пузырьков, которые могут действовать как акустические экраны и влияют на поведение ультразвуковых волн.

Метод прогнозирования числа активных пузырьков в поле акустической кавитации предложен в работе [24]. Исследовано влияние ультразвуковой частоты на количество активных пузырьков. Показано, что с увеличением частоты ультразвука существенно увеличивается количество пузырьков.

Результаты моделирования первичной силы Бьеркнеса в ультразвуковой волне при наличии пузырьков в жидкости представлены в работе [25]. Отмечается, что полученные результаты при малых амплитудах согласуются с классической теорией. В то же время показано, что при увеличении амплитуды сило-

вое поле имеет важные модификации, которые сильно влияют на движение пузырьков.

Моделирование распределения скорости течения жидкости, вызванного ультразвуковым воздействием, представлено в работе [26]. На основе сравнения результатов моделирования и экспериментальных данных был оценен коэффициент ультразвукового поглощения

В работе [27] рассмотрены модели некоторых сложных явлений, таких как вибрация стенок емкости и нелинейные явления, вызванные ультразвуковой кавитацией.

Исследование нелинейного частотного смещения для ультразвуковых волн в резонаторе представлено в работе [28]. Анализ проводится с помощью численных экспериментов как линейного, так и нелинейного режимов. Различия в параметрическом перемешивании при высоких и низких амплитудах показаны с применением численных методов.

Метод численного моделирования распространения ультразвуковых колебаний в газожидкостном двухфазном потоке представлен в работе [29]. В результате анализа были выбраны два характерных параметра ультразвуковых сигналов, чувствительных к соотношению газ-жидкость, а именно стандартное отклонение амплитуды и среднее значение частоты.

Исследование распространения звуковых волн в двухкомпонентных смесях жидкости с полидисперсными газовыми пузырьками разного состава выполнено в [30]. Представлена система дифференциальных уравнений возмущенного движения смеси и получено дисперсионное соотношение. Получены равновесная скорость звука, низкочастотная и высокочастотная асимптотика линейного коэффициента затухания. Определены характерные средние радиусы пузырьков.

Выполненный анализ литературных источников показал, что при разработке методов ультразвукового контроля характеристик технологических сред используют, главным образом, волны Релея, Лява, Стоунли, Лэмба. Однако использование данных типов волн предполагает существенные ограничения, связанные с состоянием поверхности распространения, а также с содержанием газовых пузырьков в изучаемой среде. Невыполнение названных ограничений приводит к возрастанию погрешности измерений. В ряде работ отмечается, что перспективным направлением устранения недостатков является использование объемных ультразвуковых волн.

### **3. Цель и задачи исследования**

Целью работы является выявление закономерностей связи флуктуаций числа и размеров частиц, взвешенных в контролируемом объеме жидкости, на характеристики поля объемных ультразвуковых волн, распространяющихся в ней.

Для достижения цели исследования были поставлены следующие задачи:

– выявить зависимости характеристик поля излучения ультразвука от количественных и качественных параметров частиц твердой фазы в исследуемой среде;

– исследовать особенности влияния количественных и качественных параметров пузырьков газа в исследуемой среде на характеристики ультразвукового поля;

– исследовать влияние флуктуаций числа и размеров твердых частиц и газовых пузырьков на характеристики ультразвукового поля.

#### 4. Материалы и методы исследования

При распространении акустических волн в жидкости происходят необратимые потери энергии, которые обусловлены внутренним трением (вязкостью) и, в определенной степени, теплопроводностью среды.

Выражение для определения величины поглощения плоской волны в жидкости, в зависимости от вязкости среды, получено в работах Стокса [14]. Коэффициент поглощения звука, обусловленный теплопроводностью среды, определен в работах Кирхгофа и Бикара [14].

Наличие частиц твердой фазы и газовых пузырьков вносит определенные особенности в процесс затухания и рассеяния энергии ультразвуковой волны.

Рассеяние волн на частицах твердой фазы становится существенным, если длина волны  $\lambda$  соизмерима с размерами самих частиц. В случае прохождения волны через среду, содержащую большое число хаотически расположенных частиц, фазы волн, рассеиваемых в произвольном направлении, являются некогерентными. Вследствие этого полная интенсивность ультразвуковой волны в данной точке равна сумме интенсивностей волн, приходящих от всех рассеивающих центров. Сечения рассеяния в этом случае аддитивны, поэтому линейные коэффициенты поглощения  $\Sigma_c(\lambda)$  и рассеяния  $\Sigma_s(\lambda)$  можно определить по формулам

$$\Sigma_c(\lambda) = n\sigma_c(\lambda);$$

$$\Sigma_s(\lambda) = n\sigma_s(\lambda), \quad (1)$$

где  $n$  – концентрация частиц (число частиц в единице объема);  $\sigma_c(\lambda)$  и  $\sigma_s(\lambda)$  – полные сечения поглощения и рассеяния акустической волны на частице.

Полные сечения поглощения и рассеяния зависят не только от длины волны ультразвуковых колебаний, но и от размеров частиц  $r$ . Под линейными коэффициентами поглощения и рассеяния следует понимать величины, которые определяют среднюю долю энергии, поглощенной и рассеянной средой на единице длины пути в единицу времени.

Основная характеристика поля излучения ультразвука  $I_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega})$  должна определяться из кинематического уравнения. Прежде чем записать это уравнение, введем понятие дифференциального по углам коэффициента рассеяния

$$\Sigma_s(\vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') = n\sigma_s(\vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}'), \quad (2)$$

где  $\sigma_s(\vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}')$  – дифференциальное по углам сечение рассеяния энергии на частице твердой фазы. Величина  $\sigma_s(\vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}')d\vec{\Omega}'$  представляет собой долю энергии, рассеиваемой частицей в элемент телесного угла  $d\vec{\Omega}'$ . Очевидно, что полное сечение рассеяния  $\sigma_s$  связано с дифференциальным сечением рассеяния соотношением

$$\sigma_s = \int_{4\pi} \sigma_s(\vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}')d\vec{\Omega}'. \quad (3)$$

Кинетическое уравнение, решением которого является функция  $I_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega})$ , можно получить, рассматривая энергетический баланс в элементарном объеме фазового пространства

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \nabla I_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega}) = & -\Sigma(\lambda)I_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \\ & + \int d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})I_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega}') + S_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Sigma(\lambda) = \Sigma_c(\lambda) + \Sigma_s(\lambda)$ ,  $S_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega})$  – функция плотности излучения источника ультразвука, которая определяет среднюю величину энергии, испускаемой в единицу времени единичным фазовым объемом. Под фазовыми координатами понимается совокупность переменных  $\vec{r}$  и  $\vec{\Omega}$ , а элементарный фазовый объем определяется произведением  $d\vec{r} \cdot d\vec{\Omega}$ . Изменение интенсивности ультразвукового пучка в (4), имеющего направление  $\vec{\Omega}$  в точке  $\vec{r}$ , происходит по следующим причинам. Во-первых, вследствие его ослабления-поглощения и рассеяния (первый член правой части). Во-вторых, вследствие рассеяния потока энергии, ранее имевшего направление  $\vec{\Omega}'$ , в направление  $\vec{\Omega}$  (второй член в правой части). В-третьих, за счет энергии, прибывающей в этот пучок от источников (последний член правой части). Уравнение (4) можно привести к интегральному уравнению вида:

$$\begin{aligned} I_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega}) = & \int d\vec{r}' \int d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \frac{e^{-\tau(\vec{r}', \vec{r}, \lambda)}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \\ & \times \delta \left[ \vec{\Omega} - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] I_\lambda(\vec{r}', \vec{\Omega}') + I_\lambda^0(\vec{r}, \vec{\Omega}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\tau(\vec{r}', \vec{r}, \lambda) = \Sigma(\lambda)|\vec{r} - \vec{r}'|$ ,  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака;

$$I_\lambda^0(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^\infty S_\lambda(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) e^{-\tau(\xi, \lambda)} d\xi$$

– свободный член интегрального уравнения (5), определяющий интенсивность нерассеянной ультразвуковой волны;  $\xi = |\vec{r} - \vec{r}'|$ .

Решение уравнения (5) можно записать в виде ряда Неймана [15], представляющего собой разложение решения по кратности рассеяния ультразвуковых волн. Первый член ряда Неймана определяет поле нерассеянного излучения ультразвуковых волн, второй член – однократно рассеянное излучение и т. д.

Однако аналитически получить выражение даже для однократно рассеянного излучения невозможно. Поэтому следует применять численные методы решения интегральных уравнений вида (5). Одним из наиболее распространенных является метод Монте-Карло [16].

Ослабление ультразвуковых волн в воде при наличии твердых частиц и воздушных пузырьков происходит, в основном, за счет поглощения и рассеяния энергии волн на частицах и пузырьках. Для теоретического исследования вопросов распространения ультразвука необходимо знать соответствующие сечения поглощения и рассеяния.

Предположим, что в воде находятся твердые частицы сферической формы радиуса  $r$  и плотности  $\rho_1$ , тогда сечение поглощения на такой частице будет определяться по формуле [14]

$$\sigma_c(\lambda) = \frac{4\pi r^3}{3} k \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1 \right)^2 \frac{S}{S^2 + (\rho_1/\rho_0 + \tau)^2}, \quad (6)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\rho_0$  – плотность жидкости;

$$S = \frac{9}{4Br} \left( 1 + \frac{1}{Br} \right);$$

$$B = (\pi\nu/\mu)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau = \frac{1}{2} + \frac{9}{4Br};$$

$\mu = \eta/\rho_0$ ,  $\eta$  – коэффициент вязкости жидкости;  $\nu$  – частота ультразвуковых колебаний.

Сечение поглощения определяет долю энергии, поглощаемой частицей. Эти потери энергии обусловлены наличием трения (вязкости) при колебаниях частицы.

Дифракционные явления, обусловленные неоднородностями в среде (взвешенными частицами), приводят к рассеянию энергии звуковых волн. Сечение этого процесса определяется выражением

$$\sigma_s(\lambda) = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \frac{1}{6} k^4 \cdot r^3, \quad (7)$$

где  $r$  – радиус частицы.

Из выражения (7) видно, что  $\sigma_s(\lambda) \sim 1/\lambda^4$ , поэтому с увеличением частоты сечение рассеяния увеличивается ( $\sigma_s) \sim \nu^4$ .

На рис. 1 приведены зависимости величины сечений поглощения, рассеяния и ослабления ультразвука на частицах твердой фазы в воде от частоты акустических колебаний. Радиус частиц соответствовал 0,01 см. Рассеяние ультразвука становится существенным, когда длина волны  $\lambda$  акустических колебаний соизмерима с размерами частиц.

Наличие в жидкости газовых пузырьков также приводит к поглощению и рассеянию звуковой энергии. Однако в отличие от частиц твердой фазы поглощение и рассеяние на газовых пузырьках носит резонансный характер.

Основные причины этого явления таковы:

- а) нагрев пузырька и отвод тепла в жидкость при периодических изменениях объема пузырька, которые он испытывает под действием звуковой волны;
- б) рассеяние части звуковой энергии, обусловленное тем, что колеблющийся пузырек является сферическим излучателем звука;
- в) потери энергии за счет образования потоков жидкости вокруг колеблющегося пузырька.

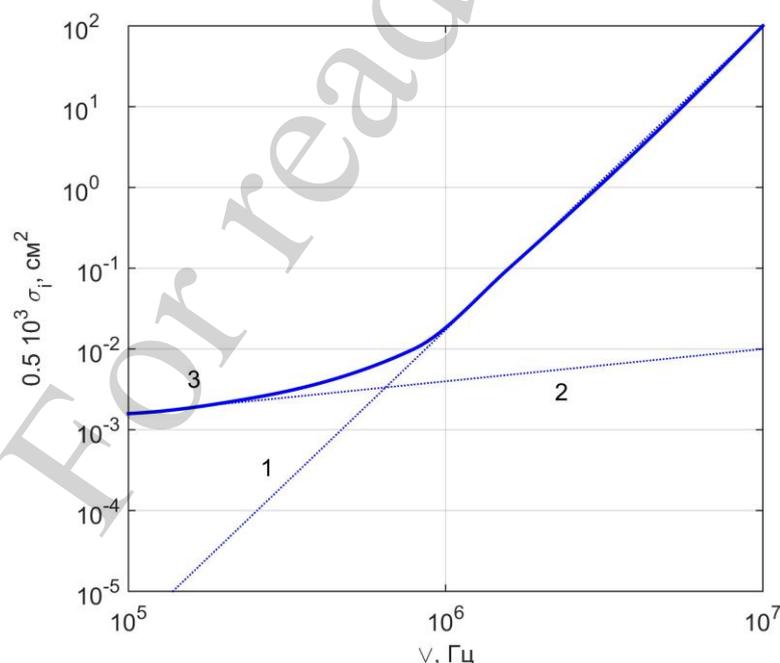


Рис. 1. Зависимость величины сечений поглощения и рассеяния ультразвука на взвешенных частицах от частоты колебаний: 1 – сечение рассеяния  $\sigma_s$ ; 2 – сечение поглощения  $\sigma_c$ , радиус частицы  $r=0,01$  см; 3 –  $\sigma = \sigma_c + \sigma_s$ , радиус частицы  $r=0,01$  см

Для характеристики поглощения и рассеяния акустических колебаний колеблющимся газовым пузырькам введены понятия эффективных поперечных сечений погашения  $\sigma_p$ , поглощения  $\sigma_c$  и рассеяния  $\sigma_s$ . Под эффективным поперечным сечением погашения  $\sigma_p$  подразумевается площадь сечения, перпендикулярного к направлению падения звуковой волны. При этом входящая звуковая энергия равна сумме энергий, поглощаемой и рассеянной пузырьком.

Сечения поглощения и рассеяния воздушных пузырьков определяются по формулам

$$\sigma_c = \frac{4\pi R^2 (\delta/\eta - 1)}{(v_0^2/v^2 - 1)^2 + \delta^2};$$

$$\sigma_s = \frac{4\pi R^2 (\delta/\eta)}{(v_0^2/v^2 - 1)^2 + \delta^2}, \quad (8)$$

где  $v_0$  – резонансная частота пузырька с радиусом  $R$ ;  $\delta$  – постоянная затухания;  $\eta = 2\pi R/\lambda$ .

Из анализа формул (8) видно, что максимальные значения сечений достигаются при  $v=v_0$ .

Полное сечение погашения (или ослабления) определяется суммой сечений поглощения и рассеяния

$$\sigma_p = \sigma_c + \sigma_s = \frac{4\pi R^2}{(v_0^2/v^2 - 1)^2 + \delta^2}. \quad (9)$$

Для случая воздушных пузырьков в воде значение резонансной частоты можно оценить по формуле

$$v_0 R = 0,328 \cdot 10^3 \text{ Гц} \cdot \text{см}. \quad (10)$$

Значение постоянной затухания зависит от частоты ультразвука. В пределах интервала частот от 20 до 1000 кГц данное значение изменяется от 0,08 до 0,013 [17]. Поглощение и рассеяние энергии ультразвука на воздушных пузырьках носит резонансный характер. В этом случае для расчета ослабления ультразвуковой волны воздушными пузырьками необходимо знать не только соответствующие сечения погашения, но и функцию распределения воздушных пузырьков по размерам.

Обозначим через  $f(R)$  функцию распределения пузырьков по размерам. тогда величина  $f(R)dR$  определяет долю пузырьков, размеры которых находятся в пределах от  $R$  до  $R+dR$ .

Конкретные значения объемной доли воздуха в воде и функции распределения газовых пузырьков по размерам выбирались с учетом результатов исследований, изложенных в [5, 18, 19].

### 5. Результаты исследования процесса распространение объемных ультразвуковых колебаний в газосодержащих суспензиях

Зависимость величины сечения погашения ультразвука воздушными пузырьками от частоты звуковой волны показана на рис. 2. Приведенная зависимость получена для воздушных пузырьков радиуса  $R=0,005$  см.

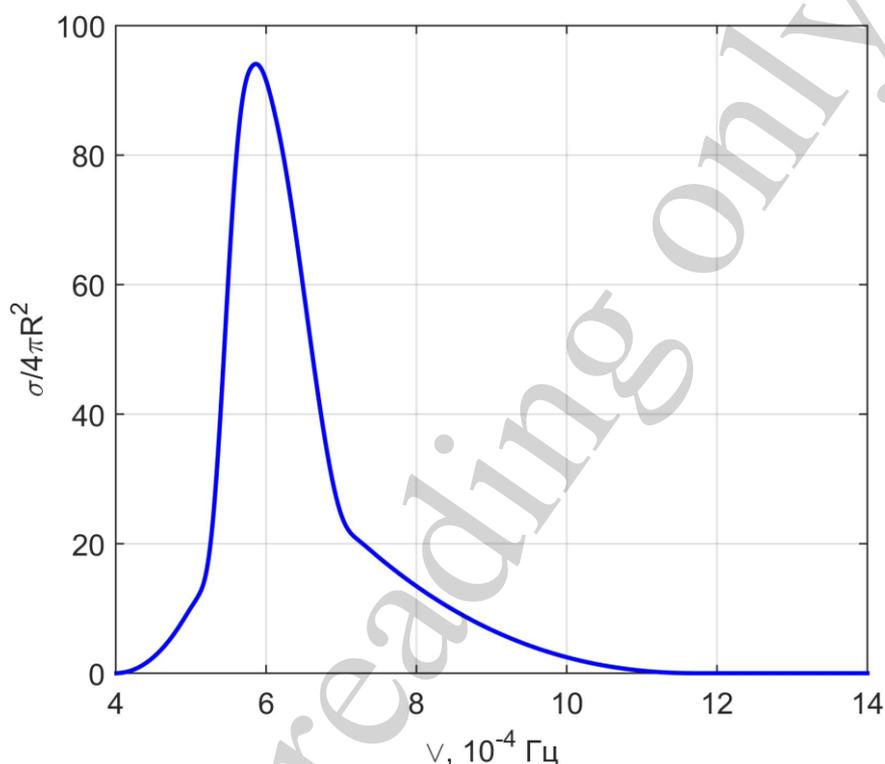


Рис. 2. Зависимость величины сечения погашения ультразвука воздушными пузырьками от частоты колебаний;  $R=0,005$  см

Существующие теории распространения ультразвука в жидкости с взвешенными частицами предполагают наличие частиц одинакового размера. Поскольку гранулометрическая характеристика измельченного материала в пульпе носит вероятностный характер, целесообразно исследовать влияние флуктуаций числа и размеров твердых частиц и газовых пузырьков на характеристики ультразвукового поля.

Поглощение и рассеяние ультразвука на взвешенных в жидкости частицах зависит от длины волны акустических колебаний. На малых частотах поглощение ультразвука преобладает над рассеянием, поэтому на этих частотах поле излучения формируется, в основном, нерассеянными акустическими колебаниями. Но даже и на больших частотах существуют области, где нерассеянное излучение преобладает над рассеянным. Это имеет место на малых расстояниях

от источника излучения. В противном случае вклад рассеянного излучения становится существенным. С точки зрения исследования факторов, влияющих на процесс распространения ультразвука в реальной пульпе, каждый из указанных компонентов представляет самостоятельный интерес.

Предположим, что единичный дисковый источник дает направленный пучок ультразвуковых волн (рис. 3). Такой источник акустических колебаний может описываться плотностью излучения источника

$$S_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \delta(Z - Z_0) \frac{\delta(\cos \nu - 1)}{2\pi} \frac{St(\alpha - \rho)}{\pi\alpha^2}, \quad (11)$$

где  $\cos \nu \equiv (\vec{\Omega} \cdot \vec{k})$ ;  $k$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $Z$ ;  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $a$  – радиус дискового источника;  $Z_0$  – координата плоскости дискового источника;  $St(x)$  – ступенчатая функция со свойством

$$St(x) = \begin{cases} 1, & X > 0; \\ 0, & X \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

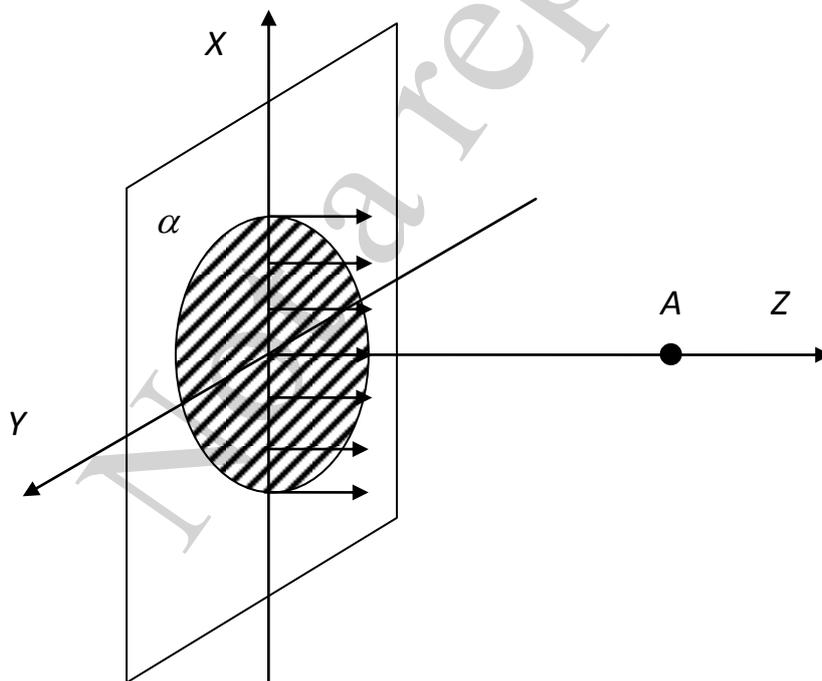


Рис. 3. Пространственная ориентация дискового излучателя ультразвуковых колебаний;  $a$  – радиус излучателя

Интенсивность нерассеянной ультразвуковой волны определяется свободным членом уравнения (5) через функцию плотности излучения источника

$$I_{\lambda}^{\circ}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^{\infty} S(\vec{r} - \xi \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) e^{-\tau(\xi, \lambda)} d\xi. \quad (13)$$

Подставляя в эту формулу (11), получим

$$I_{\lambda}^{\circ}(Z, \rho, \cos \nu) = \frac{\delta(\cos \nu - 1)}{2\pi} \frac{St(a - \rho)}{\pi a^2} \times \exp\left\{-\sum(Z - Z_0)\right\}. \quad (14)$$

Показание детектора излучения ультразвуковых волн пропорционально интегральной интенсивности, т. е. величине

$$I_{\lambda}(\vec{r}) = \int d\vec{\Omega} I_{\lambda}^{\circ}(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (15)$$

После интегрирования выражения (14) по угловой переменной получим значение интегральной интенсивности

$$I_{\lambda}^{\circ}(Z, \rho) = I_{0,\lambda} St(a - \rho) e^{-\sum(Z - Z_0)}, \quad (16)$$

где  $I_{0,\lambda}$  – значение интенсивности пучка волны в точках с координатой  $Z = Z_0$ . В дальнейшем  $Z_0$  можно положить равным нулю. Это означает, что источник находится в начале координат.

Исследуем случай, когда детектор излучения расположен на оси пучка акустических колебаний. Тогда показание детектора будет пропорционально величине

$$I_{\lambda}^0(Z) = I_{0,\lambda}^0 e^{-\sum Z}. \quad (17)$$

Учитывая (1) и (4), можно записать

$$\sum(\lambda) = n_1 \sigma_p(\lambda, R) + n \sigma(\lambda, r), \quad (18)$$

где  $n_1$  – концентрация воздушных пузырьков;  $n$  – концентрация частиц твердой фазы;  $\sigma(\lambda, R)$  – сечение погашения ультразвуковых колебаний с длиной волны  $\lambda$  на воздушном пузырьке радиуса  $R$ ;  $\sigma(\lambda, r)$  – полное сечение ослабления ультразвуковых колебаний с длиной волны  $\lambda$  на частице твердой фазы радиуса  $r$ .

Следует отметить, что газовая фаза в пульпе не содержит пузырьки одинакового радиуса. Следовательно, для корректной оценки влияния воздушных пузырьков на величину ослабления ультразвукового пучка необходимо учитывать как флуктуацию числа пузырьков в объеме, так и распределение пузырьков по размерам. Последнее особенно существенно, так как сечение погашения на пу-

зырьках носит резонансный характер. Аналогичный учет нужно проводить и для частиц твердой фазы.

Описанная выше ситуация соответствует геометрии эксперимента, показанной на рис. 4. Детектор Д регистрирует ультразвуковые волны, прошедшие через контролируемый объем  $V$ . Флуктуации числа пузырьков в контролируемом объеме  $V$  влияют на показание детектора Д.

Концентрацию воздушных пузырьков определим через число пузырьков  $N_1$  в объеме  $V$

$$n_1 = \frac{N_1}{V}. \quad (19)$$

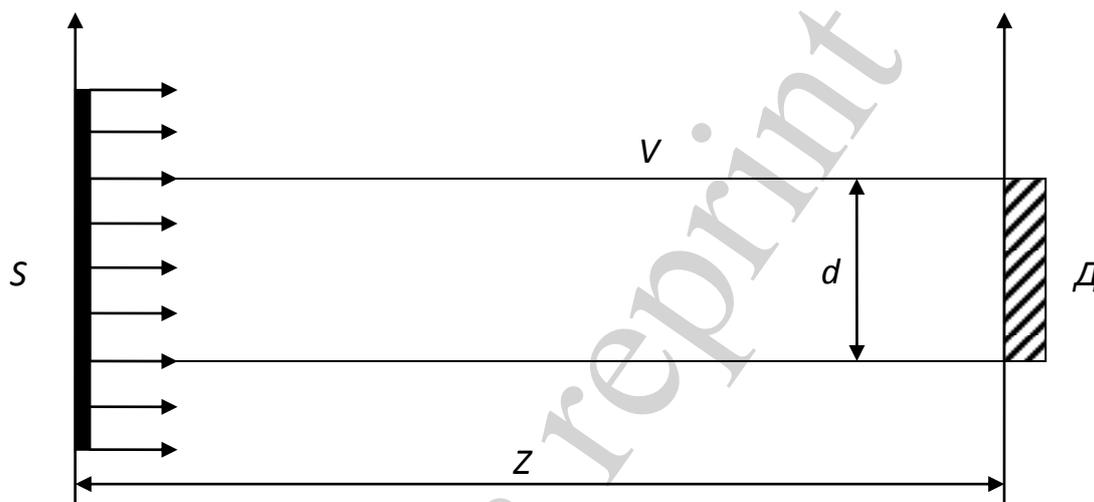


Рис. 4. Геометрическая интерпретация измерительного канала:

$S$  – источник ультразвуковых колебаний;  $D$  – детектор;  
 $V$  – контролируемый объем;  $d$  – эффективный диаметр области, контролируемой детектором

Так как число пузырьков флуктуирует, то  $N_1$  является случайным числом с распределением Пуассона [20]

$$P_{N_1}(k) = \frac{\langle N_1 \rangle^k e^{-\langle N_1 \rangle}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где  $\langle N_1 \rangle$  – среднее значение числа  $N_1$  в объеме  $V$ , которое можно определить через среднее значение концентрации  $\bar{n}_1$

$$\langle N_1 \rangle = \bar{n}_1 V. \quad (21)$$

Выделим в выражении (17) только ту часть, которая определяет ослабление ультразвуковых колебаний воздушными пузырьками

$$I_{\lambda}^{\circ}(Z) = I_{\lambda} \exp \left\{ -\frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_1} \sigma_p(\lambda, R_i) Z \right\}. \quad (22)$$

Показание детектора  $D$  будет пропорционально значению  $I_{\lambda}^{\circ}(Z)$ , усредненному по флуктуациям числа и размеров пузырьков, т. е. пропорционально величине

$$\langle I_{\lambda}^{\circ}(Z) \rangle = I_{\lambda} \langle \exp \left\{ -\frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_1} \sigma_p(\lambda, R_i) Z \right\} \rangle. \quad (23)$$

Обозначим через  $\xi$  случайную величину

$$\xi = \exp \left\{ -\frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_1} \sigma_p(\lambda, R_i) Z \right\}. \quad (24)$$

Для нахождения среднего значения величины  $\xi$  применим формулу полного математического ожидания [20]

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} M \left( \frac{\xi}{k} \right) P_{N_1}(k). \quad (25)$$

Здесь  $M\xi$  означает математическое ожидание случайной величины  $\xi$ ,  $M(\xi/k)$  – условное математическое ожидание.

Нетрудно показать, что

$$M \left( \frac{\xi}{k} \right) = \left[ M \exp \left\{ -\frac{1}{V} \sigma_p(\lambda, R) Z \right\} \right]^k, \quad (26)$$

где

$$M \exp \left\{ -\frac{1}{V} \sigma_p(\lambda, R) Z \right\} = \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{Z}{V} \sigma_p(\lambda, R) \right\} f(R) dR = \eta_1. \quad (27)$$

Здесь  $f(R)$  – функция распределения газовых пузырьков по размерам.

Подставляя выражения (20) и (27) в (25), получим

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_1^k \frac{(n_1 V)^k}{k!} e^{-\bar{n}_1 V} = e^{-\bar{n}_1 V} \exp \{ \bar{n}_1 V \eta_1 \} = e^{-\bar{n}_1 V (1 - \eta_1)}. \quad (28)$$

Аналогичным образом, учитывая флуктуации числа и размеров частиц твердой фазы, получим усредненное значение интегральной интенсивности ультразвуковых колебаний, прошедших через контролируемый объем пульпы

$$\langle I_{\lambda}^{\circ}(Z) \rangle = I_{o,\lambda} \exp\left\{-V[\bar{n}_1(1-\eta_1) + \bar{n}(1-\eta)]\right\}, \quad (29)$$

где

$$\eta = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{V}\sigma(\lambda, r)Z\right\} \phi(r) dr;$$

$\phi(r)$  – функция распределения частиц твердой фазы по размерам, которая имеет тот же смысл, что и функция  $f(R)$ .

Контролируемый объем  $V$  можно определить через  $Z$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} Z. \quad (30)$$

В этом случае  $\eta$  и  $\eta_1$  не зависят от переменной  $Z$ .

Как известно, интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды волны [17], поэтому, зная (29), можно перейти к амплитудной зависимости

$$\langle A_{\lambda}(Z) \rangle = A_{o,\lambda} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} [\bar{n}_1(1-\eta_1) + \bar{n}(1-\eta)] Z\right\}. \quad (31)$$

Символ  $\langle \cdot \rangle$ , как и в предыдущем случае, означает усреднение по флуктуациям размеров и числа частиц твердой и газообразной фаз.

Для исследования зависимости (29) удобно перейти к новой величине  $\alpha_{\lambda}$ :

$$\alpha_{\lambda} = \frac{1}{Z} \ln \frac{I_{o,\lambda}}{\langle I_{\lambda}^{\circ}(Z) \rangle} = \frac{\pi d^2}{4} [\bar{n}_1(1-\eta_1) + \bar{n}(1-\eta)]. \quad (32)$$

Следует отметить, что фазовый состав гетерогенных сред задается, как правило, объемной долей каждой фазы, поэтому в выражениях (29), (31) и (32) удобнее перейти от средней концентрации числа воздушных пузырьков  $\bar{n}_1$  к их объемной доле  $W$ . Рассмотрим этот переход более подробно

$$\begin{aligned} \bar{n}_1(1 - \eta_1) &= \bar{n}_1 \cdot \int_0^{\infty} \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{4}{\pi d^2} \sigma_p(\lambda, R) \right\} \right] f(R) dR = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{4}{\pi d^2} \sigma_p(\lambda, R) \right\} \right] \frac{WF(R) dR}{4/3\pi R^3} = WQ. \end{aligned} \quad (33)$$

В этом выражении  $WF(R)dR$  определяет объемную долю тех воздушных пузырьков, радиусы которых лежат в пределах от  $R$  до  $R+dR$ .

Функция  $F(R)$  связана с  $f(R)$  соотношением

$$F(R) = \frac{R^3 f(R)}{\int_0^{\infty} R^3 f(R) dR}. \quad (34)$$

Таким образом, с учетом последних значений, выражение (32) можно представить в виде

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{Z} \ln \frac{I_{o,\lambda}}{\langle I_\lambda^\circ(Z) \rangle} = \frac{\pi d^2}{4} [WQ + \bar{n}_1(1 - \eta)]. \quad (35)$$

При расчетах  $\alpha_\lambda$  функция распределения частиц твердой фазы  $\varphi(r)$  по размерам соответствовала бета-распределению [20]

$$\alpha\varphi(X) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} X^{\alpha-1} (1 - X)^{\beta-1}, \quad (36)$$

где  $\alpha = 2\bar{r}$ ;  $\bar{r}$  – среднее значение радиуса взвешенных в жидкости частиц твердой фазы;  $B(\alpha, \beta)$  – бета-функция.

## 6. Обсуждение результатов исследования процесса распространение объемных ультразвуковых колебаний в газосодержащих суспензиях

На рис. 5 показана зависимость  $\alpha_\lambda$  от частоты при различных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

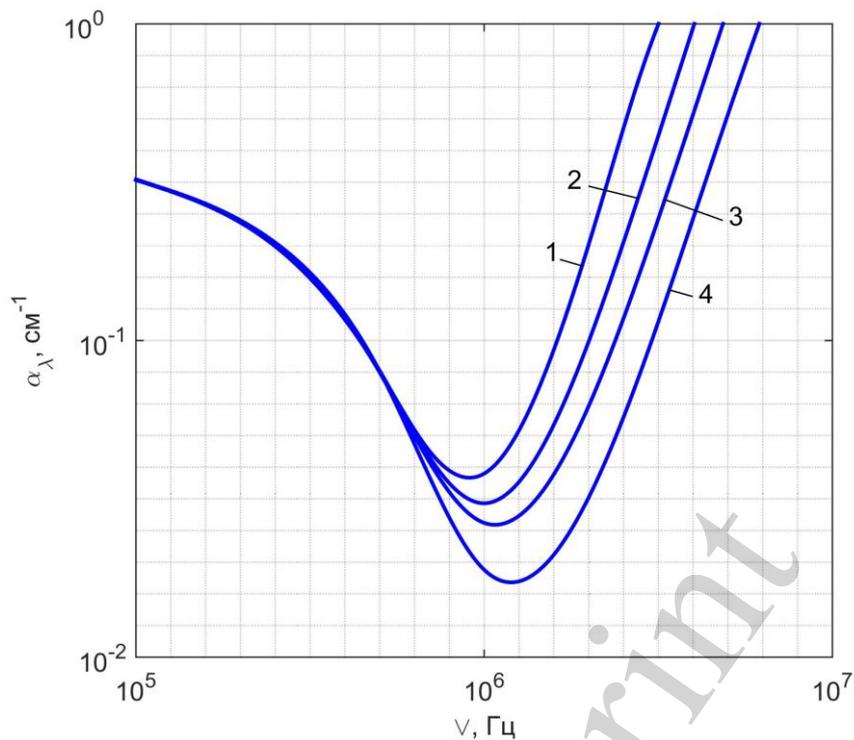


Рис. 5. Зависимость  $\alpha_\lambda$  от частоты ультразвука при различных значениях параметров бета-распределения: 1 –  $\alpha=\beta=1$ ; 2 –  $\alpha=\beta=2$ ; 3 –  $\alpha=\beta=3$ ; 4 –  $\alpha=\beta=\infty$

Значение  $\alpha_\lambda$  зависит от концентрации частиц твердой фазы  $n$ . На рис. 6 показана зависимость  $\alpha_\lambda$  от частоты при различных значениях  $n$ . Как видно из рис. 6, в той области частот, где ослабление ультразвукового пучка на частицах твердой фазы преобладает над поглощением воздушными пузырьками, наблюдается влияние концентрации числа частиц. При этом с изменением  $n$  изменяется абсолютное значение  $\alpha_\lambda$  в этой области частот, но не изменяется наклон графических зависимостей. Этот факт может быть использован для определения концентрации частиц твердой фазы пульпы.

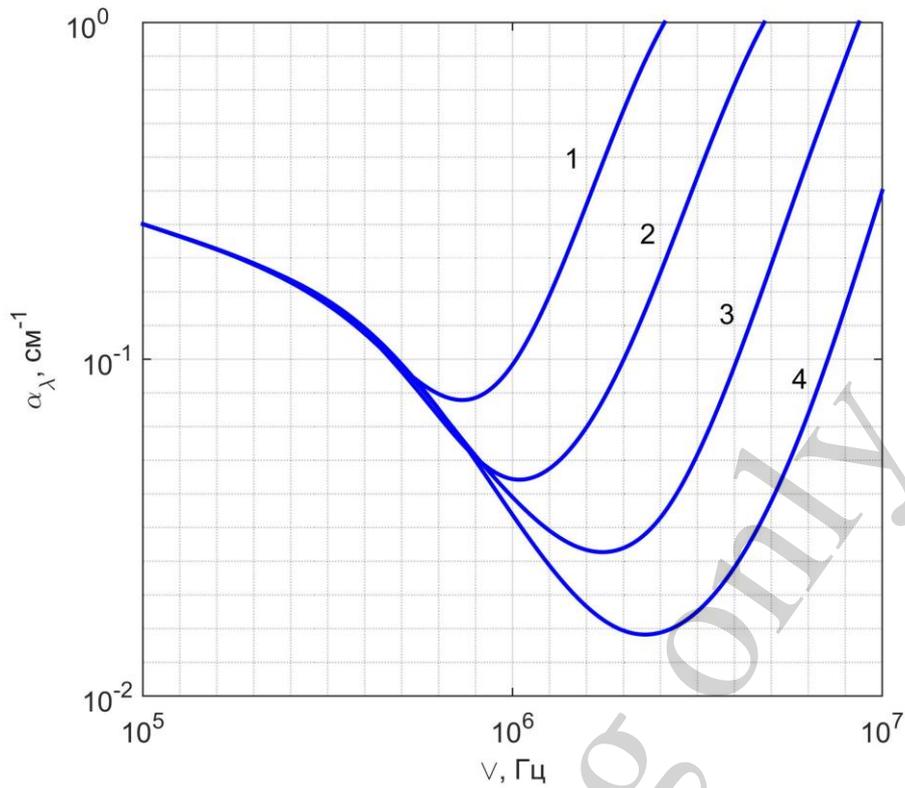


Рис. 6. Зависимость  $\alpha_\lambda$  от частоты ультразвука при различной концентрации взвешенных частиц: 1 –  $n_1=10^4 \text{ см}^{-3}$ ; 2 –  $n_2=10^3 \text{ см}^{-3}$ ; 3 –  $n_3=10^2 \text{ см}^{-3}$ ; 4 –  $n_4=10 \text{ см}^{-3}$ ;  $r=0,01 \text{ см}$

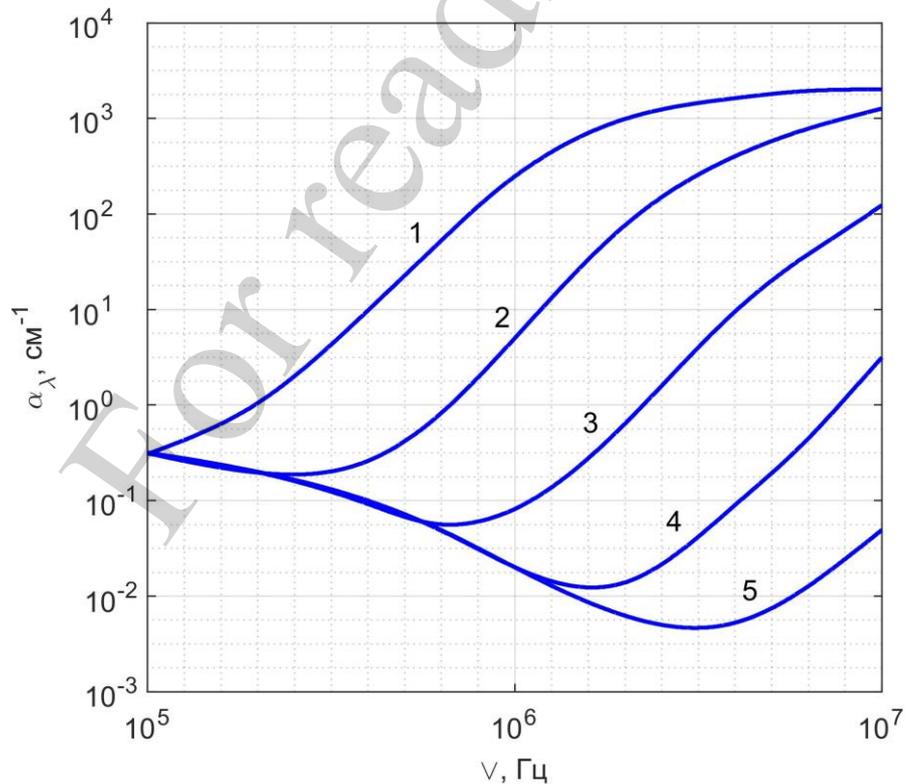


Рис. 7. Зависимость  $\alpha_\lambda$  от частоты ультразвука при различных значениях среднего радиуса частиц: 1 –  $\bar{r}=0,1 \text{ см}$ ; 2 –  $\bar{r}=0,05 \text{ см}$ ; 3 –  $\bar{r}=0,02 \text{ см}$ ; 4 –  $\bar{r}=0,01 \text{ см}$ ; 5 –  $\bar{r}=0,005 \text{ см}$ ;  $n=10^2 \text{ см}^{-3}$ ;  $\alpha=\beta=3$

Величина  $\alpha_\lambda$  зависит не только от концентрации  $n$ , но и от среднего размера частиц, что отчетливо прослеживается на рис. 8. Зависимости, представленные на этих рисунках, получены при  $\alpha=\beta=3$ . В том случае, когда значение  $\alpha_\lambda$  определяется ослаблением ультразвука частицами твердой фазы, наклон кривой  $\alpha_\lambda$  не зависит от среднего радиуса частиц (на рис. 9 пунктирные линии указывают наклон линейной части графиков). Однако это не мешает определению, как среднего размера, так и концентрации взвешенных частиц. Объясняется это тем, что средний размер частиц определяет частоту  $V_k$ , при которой компоненты поглощения и рассеяния на твердых частицах становятся равными. Поэтому по значению  $V_k$  можно судить о среднем размере частицы. На рис. 9 показаны составляющие  $\sigma_{\lambda i}$ , обусловленные ослаблением ультразвуковых колебаний воздушными пузырьками, поглощением и рассеянием на взвешенных в жидкости частицах твердой фазы.

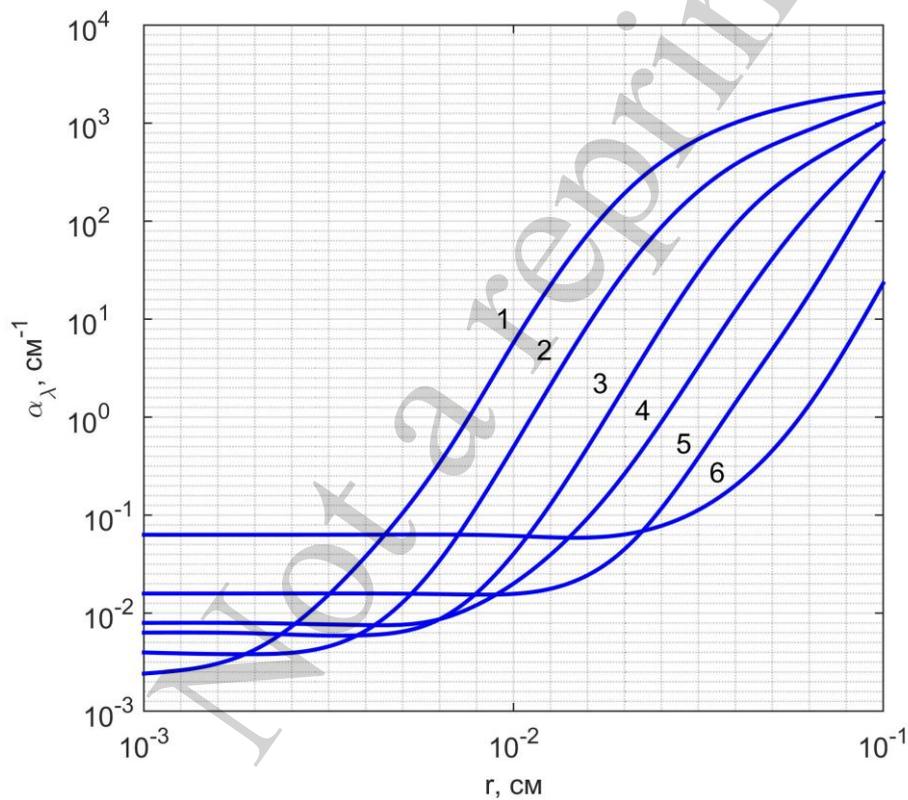


Рис. 8. Зависимость  $\alpha_\lambda$  от среднего радиуса взвешенных частиц при различной частоте ультразвуковых колебаний: 1 –  $\nu_1=10^7$  Гц; 2 –  $\nu_2=5 \cdot 10^6$  Гц; 3 –  $\nu_3=2,5 \cdot 10^6$  Гц; 4 –  $\nu_4=1,6 \cdot 10^6$  Гц; 5 –  $\nu_5=10^6$  Гц; 6 –  $\nu_6=5 \cdot 10^5$  Гц;  $n=10^2$  см<sup>-3</sup>

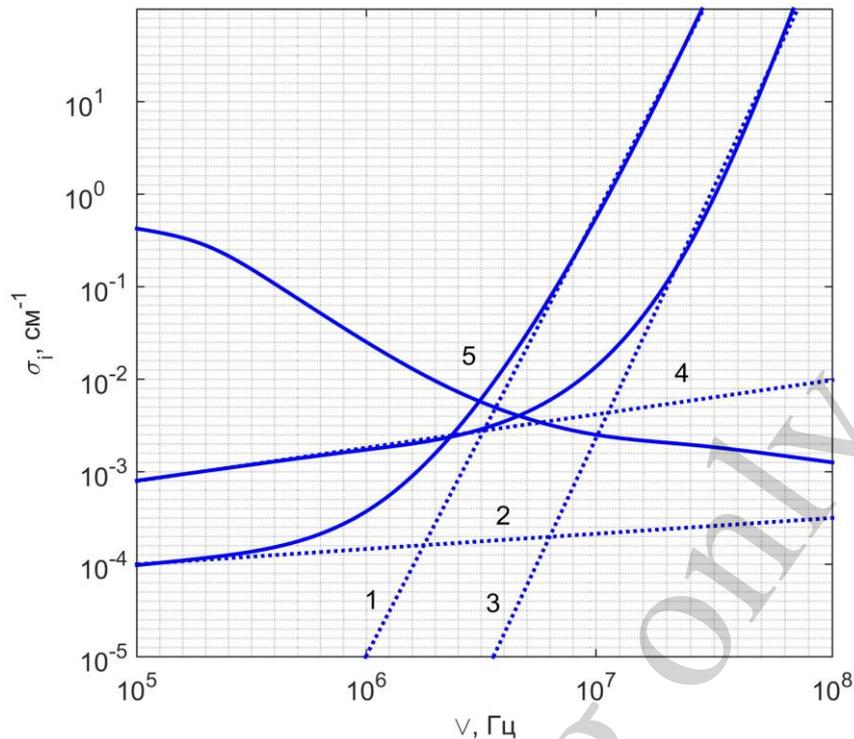


Рис. 9. Зависимость частоты компонент  $\sigma_i$  от частоты ультразвуковых колебаний: 1, 3 – компоненты, обусловленные рассеянием на твердых частицах; 2, 4 – компоненты, обусловленные поглощением твердыми частицами; 5 – компоненты ослабления воздушными пузырьками; 1, 2 –  $\bar{r}=0,01$  см; 3,4 –  $\bar{r}=0,001$  см

Здесь же указаны частоты  $\nu_{k1}$  и  $\nu_{k2}$ , которые целесообразно использовать для измерения содержания в пульпе частиц твердой фазы со средними  $10^{-2}$  и  $10^{-3}$  см соответственно. Значения частоты  $\nu_k$  не зависят от концентрации частиц.

Направлением развития полученных результатов является исследование эффектов воздействия ультразвуковых колебаний на траекторию движения частиц в потоке пульпы. Возможность оказывать целенаправленное влияние позволит в перспективе смещать в зону измерений частицы определенного класса крупности. Таким образом, может быть получена важная с технологической точки зрения информация о распределении физико-механических и химико-минералогических характеристик частиц твердой фазы по классам крупности.

## 7. Выводы

1. Получено интегральное уравнение, позволяющее определить характеристики поглощения и рассеяния поля излучения ультразвука при наличии частиц твердой фазы в исследуемой среде. Решение данного уравнения может быть записано в виде ряда Неймана. Для численного решения уравнения применим метод Монте-Карло. Установлено, что рассеяние ультразвука становится существенным, когда длина волны акустических колебаний соизмерима с размерами частиц.

2. Установлено, что в отличие от частиц твердой фазы поглощение и рассеяние ультразвуковых волн на газовых пузырьках носит резонансный характер. Величины поглощения и рассеяния пузырьков достигают максимального значения при равенстве частоты ультразвуковых колебаний и резонансной частоты пузырьков определенного радиуса.

3. Для корректной оценки влияния воздушных пузырьков на величину ослабления ультразвукового пучка необходимо учитывать как флуктуацию числа пузырьков в объеме, так и распределение пузырьков по размерам. Установлены зависимости интегральной интенсивности ультразвуковых колебаний, прошедших через контролируемый объем пульпы от флуктуаций числа и размеров частиц твердой фазы. Полученные зависимости позволяют определять средний размер и концентрацию взвешенных частиц в исследуемой среде.

### Литература

1. Ржевский, В. В. Ультразвуковой контроль и исследования в горном деле [Текст] / В. В. Ржевский, В. С. Ямщиков. – М.: Недра, 1968. – 120 с.
2. Morkun, V. Automation of iron ore raw materials beneficiation with the operational recognition of its varieties in process streams [Text] / V. Morkun, V. Tron // Metallurgical and Mining Industry. – 2014. – Issue 6. – P. 4–7.
3. Morkun, V. Identification of control systems for ore-processing industry aggregates based on nonparametric kernel estimators [Text] / V. Morkun, N. Morkun, V. Tron // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Issue 1. – P. 14–17.
4. Golik, V. Metal deposits combined development experience [Text] / V. Golik, V. Komashchenko, V. Morkun, O. Burdzieva // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Issue 6. – P. 591–594.
5. Morkun, V. Formalization and frequency analysis of robust control of ore beneficiation technological processes under parametric uncertainty [Text] / V. Morkun, N. Morkun, V. Tron // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Issue 5. – P. 7–11.
6. Morkun, V. Distributed closed-loop control formation for technological line of iron ore raw materials beneficiation [Text] / V. Morkun, N. Morkun, V. Tron // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Issue 7. – P. 16–19.
7. Golik, V. Feasibility of using the mill tailings for preparation of self-hardening mixtures [Text] / V. Golik, V. Komashchenko, V. Morkun // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Issue 3. – P. 38–41.
8. Morkun, V. Ore preparation multi-criteria energy-efficient automated control with considering the ecological and economic factors [Text] / V. Morkun, V. Tron // Metallurgical and Mining Industry. – 2014. – Issue 5. – P. 4–7.
9. Cao, Q. Surface cleaning and oxidative effects of ultrasonication on the flotation of oxidized pyrite [Text] / Q. Cao, J. Cheng, Q. Feng, S. Wen, B. Luo // Powder Technology. – 2017. – Vol. 311. – P. 390–397. doi: 10.1016/j.powtec.2017.01.069
10. Morkun, V. Simulation of the Lamb waves propagation on the plate which contacts with gas containing iron ore pulp in Waveform Revealer toolbox

[Text] / V. Morkun, N. Morkun, A. Pikilnyak // Metallurgical and Mining Industry. – 2014. – Issue 5. – P. 16–19.

11. Golik, V. Innovative technologies of metal extraction from the ore processing mill tailings and their integrated use [Text] / V. Golik, V. Komashchenko, V. Morkun // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Issue 3. – P. 49–52.

12. Бражников, Н. И. Ультразвуковые методы [Текст] / Н. И. Бражников. – Л.; М.: Энергия, 1965. – 248 с.

13. Викторов, И. А. Звуковые поверхностные волны в твёрдых телах [Текст] / И. А. Викторов. – М.: Наука, 1981. – 286 с.

14. Kundu, S. Love wave propagation in heterogeneous micropolar media [Text] / S. Kundu, A. Kumari, D. K. Pandit, S. Gupta // Mechanics Research Communications. – 2017. – Vol. 83. – P. 6–11. doi: 10.1016/j.mechrescom.2017.02.003

15. Бражников, Н. И. Использование волн Лэмба для сигнализации уровня жидких сред [Текст] / Н. И. Бражников, Н. С. Шавыкина, А. П. Гордеев, В. С. Скрипалёв // Приборы и системы управления. – 1975. – № 9. – С. 31–32.

16. Гончаров, С. А. Повышение эффективности обогатительных технологий путем воздействия высокоэнергетического ультразвука на перерабатываемое сырьё [Текст] / С. А. Гончаров // Вісник Криворізького технічного університету. – 2009. – Вип. 23. – С. 236–239.

17. Подгородецкий, Н. С. Автоматическое управление процессом раскрытия полезного компонента при измельчении руды [Текст] / Н. С. Подгородецкий // Вісник Криворізького технічного університету. – 2007. – № 19. – С. 120–124.

18. Louisnard, O. A simple model of ultrasound propagation in a cavitating liquid. Part I: Theory, nonlinear attenuation and traveling wave generation [Text] / O. Louisnard // Ultrasonics Sonochemistry. – 2012. – Vol. 19, Issue 1. – P. 56–65. doi: 10.1016/j.ultsonch.2011.06.007

19. Louisnard, O. A simple model of ultrasound propagation in a cavitating liquid. Part II: Primary Bjerknes force and bubble structures [Text] / O. Louisnard // Ultrasonics Sonochemistry. – 2012. – Vol. 19, Issue 1. – P. 66–76. doi: 10.1016/j.ultsonch.2011.06.008

20. Jamshidi, R. Dissipation of ultrasonic wave propagation in bubbly liquids considering the effect of compressibility to the first order of acoustical Mach number [Text] / R. Jamshidi, G. Brenner // Ultrasonics. – 2013. – Vol. 53, Issue 4. – P. 842–848. doi: 10.1016/j.ultras.2012.12.004

21. Zhang, Y. Influences of non-uniform pressure field outside bubbles on the propagation of acoustic waves in dilute bubbly liquids [Text] / Y. Zhang, X. Du // Ultrasonics Sonochemistry. – 2015. – Vol. 26. – P. 119–127. doi: 10.1016/j.ultsonch.2015.02.016

22. Sastre, M. T. T. A numerical model for the study of the difference frequency generated from nonlinear mixing of standing ultrasonic waves in bubbly liquids [Text] / M. T. Tejedor Sastre, C. Vanhille // Ultrasonics Sonochemistry. – 2017. – Vol. 34. – P. 881–888. doi: 10.1016/j.ultsonch.2016.07.020

23. Vanhille, C. Nonlinear ultrasonic waves in bubbly liquids with nonhomogeneous bubble distribution: Numerical experiments [Text] / C. Vanhille,

C. Campos-Pozuelo // *Ultrasonics Sonochemistry*. – 2009. – Vol. 16, Issue 5. – P. 669–685. doi: 10.1016/j.ultsonch.2008.11.013

24. Merouani, S. A method for predicting the number of active bubbles in sonochemical reactors [Text] / S. Merouani, H. Ferkous, O. Hamdaoui, Y. Rezgui, M. Guemini // *Ultrasonics Sonochemistry*. – 2015. – Vol. 22. – P. 51–58. doi: 10.1016/j.ultsonch.2014.07.015

25. Vanhille, C. Numerical simulations of the primary Bjerknes force experienced by bubbles in a standing ultrasonic field: Nonlinear vs. linear [Text] / C. Vanhille, C. Campos-Pozuelo // *Wave Motion*. – 2014. – Vol. 51, Issue 7. – P. 1127–1137. doi: 10.1016/j.wavemoti.2014.06.001

26. Xu, Z. Numerical simulation of liquid velocity distribution in a sonochemical reactor [Text] / Z. Xu, K. Yasuda, S. Koda // *Ultrasonics Sonochemistry*. – 2013. – Vol. 20, Issue 1. – P. 452–459. doi: 10.1016/j.ultsonch.2012.04.011

27. Tudela, I. Simulation of the spatial distribution of the acoustic pressure in sonochemical reactors with numerical methods: A review [Text] / I. Tudela, V. Sáez, M. D. Esclapez, M. I. Díez-García, P. Bonete, J. González-García // *Ultrasonics Sonochemistry*. – 2014. – Vol. 21, Issue 3. – P. 909–919. doi: 10.1016/j.ultsonch.2013.11.012

28. Vanhille, C. Nonlinear frequency mixing in a resonant cavity: Numerical simulations in a bubbly liquid [Text] / C. Vanhille, C. Campos-Pozuelo, D. N. Sinha // *Ultrasonics*. – 2014. – Vol. 54, Issue 8. – P. 2051–2054. doi: 10.1016/j.ultras.2014.07.004

29. Xu, Y. Study of the ultrasonic propagation law in the gas-liquid two-phase flow of deepwater riser through numerical simulation [Text] / Y. Xu, Z. Guan, Y. Jin, Y. Tian, Y. Liu, C. Xu, Y. Shi // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2017. – Vol. 159. – P. 419–432. doi: 10.1016/j.petrol.2017.09.051

30. Gubaidullin, D. A. Sound waves in two-fraction polydispersed bubbly media [Text] / D. A. Gubaidullin, Yu. V. Fedorov // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2013. – Vol. 77, Issue 5. – P. 532–540. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2013.12.008