

УДК 539.3

DOI: 10.15587/1729-4061.2017.114359

Дослідження пружної взаємодії тріщини з лінією спаю різнорідних напівнескінченних пластин

В. М. Зеленьак, Л. І. Коляса, О. Г. Оришин, С. М. Возна, О. Є. Токар

Розглянуто двовимірну задачу теорії пружності для двох спаяних різнорідних півплощин, що містять тріщини. Побудовано системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду на контурах тріщин. Числовий розв'язок інтегральних рівнянь одержано методом механічних квадратур для випадків довільно орієнтованої, а також дволанкової ламаної тріщини. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини в залежності від кута нахилу для різних пружних характеристик півплощин

Ключові слова: коефіцієнт інтенсивності напружень, сингулярне інтегральне рівняння, рівномірно розподілений тиск, спаяні різнорідні півплощини

1. Вступ

В реальних твердих тілах, які є елементами інженерних конструкцій, завжди є певна кількість мікродфектів, розвиток яких під дією прикладених силових навантажень призводить до появи тріщин і росту, а в результаті до локального чи повного руйнування тіла. Досвід показує, що таке явище характерне для високоміцних і мало пластичних матеріалів. Тому важливе теоретичне і практичне значення має вивчення розподілу напружень в околі концентраторів напружень типу тріщин. При цьому інтенсивність напружень у вершинах тріщин виражають через коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН). Ці параметри дають змогу визначити граничне значення силового навантаження при якому тріщина починає рости, а тіло локально руйнуватися.

Методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) вивчено інтенсивність напружень в околі вершин довільно орієнтованої, а також ламаної тріщини, що перетинає лінію спаю двох різнорідних півплощин. При цьому на берегах тріщини задано рівномірно розподілений нормальний тиск. Така теоретична модель в певній мірі відображає механізм руйнування інженерних конструкцій з тріщинами під час замерзання в них води до стану льоду. Створений таким чином тиск на берегах тріщини може спричинити ріст тріщини.

Отже, такі дослідження важливі для розрахунку на міцність з погляду механіки руйнування. Зокрема, у випадку кусково однорідних тіл з тріщиною можна домогтися зменшення коефіцієнтів інтенсивності напружень, шляхом відповідного підбору механічних характеристик складових композита.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Дослідженню пружного стану в спаяних різнорідних півплощинах з тріщинами присвячено низку праць. Зокрема розглядали тріщину, розміщену паралельно лінії спаю різнорідних півплощин, коли на нескінченності складеної

площини задані розтягуючі напруження [1]. Термопружну задачу для такої області з рівномірним розподілом температури у всій кусково-однорідній площині з тріщиною розглянуто в [2, 3].

В роботі [4] у двовимірній моделі розглянута задача згину пластини, послабленої співвісними тріщиною та щілиною. Отриманий розв'язок дає змогу проаналізувати вплив взаємодії різнотипних дефектів на напружений стан поблизу вершин.

Проаналізована [5] пружна взаємодія між двома сферичними тріщинами, розташованими вздовж зовнішньої поверхні пустотілих частин, розміщених в різнорідному середовищі за дії одновісного розтягуючого навантаження.

В [6] отримано аналітичний розв'язок для двовимірної задачі теорії пружності гвинтової дислокації поблизу поверхневої тріщини моди III, тріщини зсуву за дії антиплоского напруження. Визначено вплив дислокації на коефіцієнт інтенсивності напружень.

В роботі [7] проблема взаємодії між тріщиною і пружним включенням зведена до розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь типу Коші. На основі цього результату аналізується сингулярна поведінка розв'язку для тріщини з відгалуженнями.

На основі числового розв'язку зв'язаної тривимірної пружнодинамічної задачі досліджено вплив масивного включення жорсткого диска на сусідню щілиноподібну тріщину [8].

Задачу про кругове абсолютно жорстке включення довільної форми, яке знаходиться в трансверсально-ізотропному півпросторі в умовах гладкого контакту з другим півпростором, зведено до системи двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Досліджено асимптотику напружень в околі включення і визначено напрями найбільшої та найменшої концентрації напружень [9].

В роботі [10] задача теорії пружності для півплощини з багатьма тріщинами зведена до сингулярного інтегрального рівняння з використанням модифікованого комплексного потенціалу за умови вільного розтягу. Одержана система сингулярних інтегральних рівнянь з розподіленою дислокаційною функцією.

Нехай безмежне тіло (площина) складається із двох пружних ізотропних різнорідних тіл (півплощин) s^+ і s^- з лінією спаю L_0 . Тіло послаблене N прямолінійними тріщинами $L_n (n = \overline{1, N})$. Вважаємо, що всі контури $L_n (n = \overline{1, N})$ не мають спільних точок і кожен з них зв'язаний з локальною системою координат $x_n O_n y_n$, вісь $O_n x_n$ котрої утворює кут α_n з віссю Ox , що збігається з контуром L_0 . Точки O_n визначають системі координат xOy комплексні координати N). Тоді зв'язок між координатами точок площини в локальній і основній системах координат задано залежностями: $z = z_n e^{i\alpha_n} + z_n^0$, $\mu_k(t_k)$, $k = \overline{1, N}$, $z_n = x_n + iy_n$.

Нехай на контурі L_0 задано ідеальний механічний контакт

$$[N(t_0) + iT(t_0)]^+ = [N(t_0) + iT(t_0)]^-;$$

$$(u_0 + iv_0)^+ - (u_0 + iv_0)^- = 0, \quad t_0 \in L_0, \quad (1)$$

береги тріщин не контактують у процесі деформування і на них задане самозрівноважене навантаження

$$[N(t_n) + iT(t_n)]^\pm = p_n^*(t_n), \quad n = \overline{M+1, N}, \quad (2)$$

t_n – комплексні координати точки на контурі L_n в локальній системі координат $x_n O_n y_n$.

Огляд основних літературних джерел показав, що малодослідженими та нерозробленими залишилися математичні моделі, за допомогою яких вивчають взаємодію тріщини з лінією з'єднання двох різнорідних півплощин, а також перетин тріщини з лінією спаю півплощин у кусково-однорідних тілах з тріщинами. У зв'язку з цим виникає необхідність побудови математичних моделей для визначення таких механічних навантажень, за яких тріщина починає рости, а тіло локально руйнуватись. Вивчення таких моделей дасть можливість запропонувати один з підходів, наприклад шляхом підбору складових спаяних півплощин з відповідними механічними характеристиками, для недопущення росту тріщини.

3. Мета і завдання дослідження

Метою роботи є визначення двовимірного пружного стану у спаяних різнорідних напівнескінчених пластинах, що містять прямолінійну довільно-орієнтовану або дволанкову ламану тріщину за умов силового навантаження на берегах тріщини. Це дасть можливість визначити критичні значення механічного навантаження на берегах тріщини з метою недопущення росту тріщини, що не дозволить локального руйнування тіла.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

– отримати двовимірні математичні моделі у вигляді сингулярних інтегральних рівнянь на контурах тріщин для визначення збурених силових напружень внаслідок наявності тріщин;

– знайти числові розв'язки сингулярних інтегральних рівнянь задачі теорії пружності для вказаної області за дії нормально розподіленого тиску на берегах тріщини;

– визначити та дослідити коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини та виявити ефекти механічного характеру.

4. Основні результати дослідження напруженого стану в спаяних різнорідних півплощинах, послаблених тріщиною.

4. 1. Система інтегральних рівнянь задачі теорії пружності для спаяних різнорідних півплощин, послаблених тріщинами.

Комплексні потенціали $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ виберемо у вигляді [1]

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (3)$$

де

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \frac{g'_k(t_k) e^{i\alpha_k} dt_k}{\zeta_k - z}; \quad \zeta_k = t_k e^{i\alpha_k} + z_k^0; \quad (4)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \left[\frac{\overline{g'_k(t_k) e^{-i\alpha_k} dt_k}}{\zeta_k - z} - \frac{\zeta_k \overline{g'_k(t_k) e^{i\alpha_k} dt_k}}{(\zeta_k - z)^2} \right];$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1 - \Gamma_0}{2\pi(1 + \chi_- \Gamma_0)} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \left[\frac{g'_k(t_k) dt_k}{z - \zeta_k} + \frac{(\zeta_k - \overline{\zeta_k}) \overline{g'_k(t_k) dt_k}}{(\zeta_k - z)^2} \right];$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1 - \Gamma_0}{2\pi(1 + \chi_- \Gamma_0)} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \left\{ \frac{\overline{\zeta_k} g'_k(t_k) dt_k}{(\zeta_k - z)^2} + \left[\frac{(\overline{\zeta_k} - \zeta_k)(\overline{\zeta_k} + z)}{(\zeta_k - z)^3} - \frac{1}{\zeta_k - z} \right] \overline{g'_k(t_k) dt_k} \right\};$$

$\Gamma_0 = G_+/G_-$; $G_+(G_-)$ – модуль зсуву, $\mu^+(\mu^-)$ – коефіцієнт Пуассона верхньої (нижньої) півплощини відповідно, $\chi = (3 - \mu)/(1 + \mu)$, – для узагальненого плоского напруженого стану, $g'_k(t_k)$ – невідомі похідні від стрибка переміщень за переходу через лінію тріщин $L_n (n = \overline{1, N})$. Функції $g'_k(t_k)$ повинні мати на кінцях тріщини інтегровані особливості.

Відзначимо, що вибір комплексних потенціалів у вигляді (3), (4) забезпечує точне задоволення другої рівності крайової умови (1) на контурі L_0 . Внаслідок цього порядок системи інтегральних рівнянь, яку одержуємо після задоволення решти крайових умов, зменшено на одиницю.

Задовольнивши з допомогою інтегральних зображень (3), (4) крайові умови на контурах тріщин (2), одержимо систему N сингулярних інтегральних рівнянь першого роду відносно N невідомих функцій на контурах тріщин $L_k, k = \overline{1, N}$, які не містять невідомої функції на контурі L_0

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{L_n} \left[R_{nk}(t_k, \tau_n) g'_k(t_k) dt_k + S_{nk}(t_k, \tau_n) \overline{g'_k(t_k) dt_k} \right] = P_n(\tau_n), \quad (5)$$

де

$$R_{nk}(t_k, \tau_n) = R_{nk}^1(t_k, \tau_n) - \frac{1 - \Gamma_0}{1 + \chi_- \Gamma_0} e^{i\alpha_k} \left\{ \frac{1}{T_{nk}} - \frac{(\bar{\zeta}_k - \zeta_k)}{T_{nk}^2} - e^{-2i\alpha_n} \cdot \frac{(2\eta_n - \zeta_k - \bar{\eta}_n)(\bar{\zeta}_k - \zeta_k)}{T_{nk}^3} - \frac{1}{T_{nk}} \right\};$$

$$S_{nk}(t_k, \tau_n) = S_{nk}^1(t_k, \tau_n) + \frac{1 - \Gamma_0}{1 + \chi_- \Gamma_0} e^{-i\alpha_k} \left[\frac{(\zeta_k - \bar{\zeta}_k)}{T_{nk}^2} - \frac{1}{T_{nk}} + e^{-2i\alpha_n} \cdot \frac{H_{kn}}{T_{nk}^2} \right];$$

$$R_{nk}^1(t_k, \tau_n) = e^{i\alpha_k} \left[\frac{1}{H_{nk}} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{H_{nk}} \right];$$

$$S_{nk}^1(t_k, \tau_n) = e^{-i\alpha_k} \left[\frac{1}{H_{nk}} - \frac{e^{-2i\alpha_n} H_{nk}}{H_{nk}^2} \right];$$

$$H_{kn} = \zeta_k - \eta_n; T_{nk} = \zeta_k - \bar{\eta}_n, \eta_n = \tau_n e^{i\alpha_n} + z_n^0.$$

Система інтегральних рівнянь (5) у випадку внутрішніх тріщин має, для довільної правої частини, єдиний розв'язок у класі функцій $g'_k(t_k) \in H^*$, $k = \overline{1, N}$ за виконання умов

$$\int_{L_k} g'_k(t_k) dt_k = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (6)$$

які забезпечують однозначність переміщень за обходу контурів тріщин.

4. 2. Перетин дволанкової ламаної тріщини з лінією спаю півплощин

Розглянемо ламану тріщину, утворену двома розрізами із спільною точкою на лінії спаю різнорідних півплощин. Нехай у нижній півплощині міститься перпендикулярний до межі спаю L_0 розріз L_1 завдовжки $2l_1$. Із верхнього кінця розрізу L_1 під кутом α до осі Ox виходить у верхню півплощину бічний розріз L_2 завдовжки $2l_2$ (рис. 1). На берегах ламаної тріщини задано нормально розподілений тиск p . В цьому разі із системи інтегральних рівнянь (5) одержимо два інтегральні рівняння першого роду на контурах L_1 і L_2 відносно невідомих функцій $g'_1(t_1)$ і $g'_2(t_2)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} [R_{11}(t_1, \tau_1) g'_1(t_1) dt_1 + S_{11}(t_1, \tau_1) \overline{g'_1(t_1)} \overline{dt_1}] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} [R_{12}(t_2, \tau_1) g'_2(t_2) dt_2 + S_{12}(t_2, \tau_1) \overline{g'_2(t_2)} \overline{dt_2}] = p_1^*(\tau_1),$$

$\tau_1 \in L_1;$ (7)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} [R_{21}(t_1, \tau_2) g_1(t_1) dt_1 + S_{21}(t_1, \tau_2) \overline{g_1(t_1)} \overline{dt_1}] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} [R_{22}(t_2, \tau_2) g'_2(t_2) dt_2 + S_{22}(t_2, \tau_2) \overline{g'_2(t_2)} \overline{dt_2}] = p_2^*(\tau_2),$$

$\tau_2 \in L_2.$

Умова однозначності переміщень після обходу контуру ламаної тріщини має вигляд

$$\frac{2G_-}{1 + \chi_-} e^{i\alpha_1} \int_{L_1} g'_1(t_1) dt_1 + \frac{2G_+}{1 + \chi_+} e^{i\alpha_2} \int_{L_2} g'_2(t_2) dt_2 = 0. \quad (8)$$

Враховуючи, що

$$\alpha_1 = \pi / 2, \quad z_1^0 = -il_1, \quad \alpha_2 = \alpha, \quad z_2^0 = l_2 e^{i\alpha}, \quad \varepsilon = l_2 / l_1$$

і використовуючи заміну

$$t_1 = l_1 \xi, \quad \tau_1 = l_1 \eta, \quad t_2 = l_2 \xi, \quad \tau_2 = l_2 \eta$$

систему двох інтегральних рівнянь запишемо у параметризованій формі

$$\int_{-1}^1 [R_{11}^*(\xi, \eta) \psi_1(\xi) + S_{11}^*(\xi, \eta) \overline{\psi_1(\xi)}] d\xi +$$

$$+ \int_{-1}^1 [R_{12}^*(\xi, \eta) \psi_2(\xi) + S_{12}^*(\xi, \eta) \overline{\psi_2(\xi)}] d\xi = 2\pi R_1(\eta),$$

$|\eta| < 1;$ (9)

$$\int_{-1}^1 \left[R_{21}^*(\xi, \eta) \psi_1(\xi) + S_{21}^*(\xi, \eta) \overline{\psi_1(\xi)} \right] d\xi + \int_{-1}^1 \left[R_{22}^*(\xi, \eta) \psi_2(\xi) + S_{22}^*(\xi, \eta) \overline{\psi_2(\xi)} \right] d\xi = 2\pi R_2(\eta), \quad |\eta| < 1;$$

де

$$\psi_1(\xi) = g'_1(l_1 \xi);$$

$$\psi_2(\xi) = g'_2(l_1 \xi);$$

$$R_1(\eta) = p_1^*(\eta_1);$$

$$R_2(\eta) = p_2^*(\eta_2);$$

$$R_{nk}^*(\xi, \eta) = l_k R_{nk}(l_k \xi, l_n \eta);$$

$$S_{nk}^*(\xi, \eta) = l_k S_{nk}(l_k \xi, l_n \eta),$$

$$(k=1, 2; n=1, 2)$$

$$\eta_1 = l_1 \eta e^{-i\pi/2} - il_1;$$

$$\eta_2 = l_2 \eta e^{-i\alpha} - l_2 e^{i\alpha}.$$

Умова (8) набуде вигляду

$$\frac{2G_-}{1+\chi_-} \int_{-1}^1 \psi_1(\xi) d\xi + \frac{2\varepsilon G_+}{1+\chi_+} e^{i\alpha} \int_{-1}^1 \psi_2(\xi) d\xi = 0. \quad (10)$$

Для ламаної тріщини в однорідній пластині інтегральне рівняння досліджено в [11], зокрема показано, що особливість в точці зламу тріщини завжди менша, ніж на кінцях. Оскільки в даній задачі важливо визначити коефіцієнти інтенсивності напружень в вершинах тріщини, то скористаємось підходом, запропонованим в [11], де показано, що ядра $R_{12}^*(\xi, \eta)$, $S_{12}^*(\xi, \eta)$, $R_{21}^*(\xi, \eta)$, $S_{21}^*(\xi, \eta)$ мають нерухомі особливості. Тоді функції $\psi_1(\eta)$ і $\psi_2(\eta)$ відповідно в точках $\eta=1$ і $\eta=-1$ мають особливість, відмінну від кореневої. Але, як відомо [11], порядок особливостей функцій $g'_1(t_1)$ і $g'_2(t_2)$ у кутових точках завжди

менший, ніж на кінцях розрізу. Отже функції $\Psi_1(\eta)$ і $\Psi_2(\eta)$ можна подати у вигляді

$$\psi_1(\eta) = u_1(\eta) / \sqrt{1 - \eta^2},$$

$$\psi_2(\eta) = u_2(\eta) / \sqrt{1 - \eta^2},$$

вважаючи, що справджуються умови

$$u_1(1) = 0; u_2(-1) = 0. \quad (11)$$

Застосувавши до інтегральних рівнянь (9) і умови (10) квадратурні формули Гаусса-Чебишова, одержимо систему $2n - 1$ алгебричних рівнянь для визначення $2n$ невідомих функцій $u_1(\xi_k)$ і $u_2(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [R_{11}^*(\xi_k, \eta_m) u_1(\xi_k) + S_{11}^*(\xi_k, \eta_m) u_1(\xi_k)] + \\ & + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [R_{12}^*(\xi_k, \eta_m) u_2(\xi_k) + S_{12}^*(\xi_k, \eta_m) u_2(\xi_k)] = 2\pi R_1(\eta_m), \end{aligned} \quad (12)$$

$$m = 1, 2, \dots, n - 1;$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [R_{21}^*(\xi_k, \eta_m) u_1(\xi_k) + S_{21}^*(\xi_k, \eta_m) u_1(\xi_k)] + \\ & + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [R_{22}^*(\xi_k, \eta_m) u_2(\xi_k) + S_{22}^*(\xi_k, \eta_m) u_2(\xi_k)] = 2\pi R_2(\eta_m), \end{aligned}$$

$$m = 1, 2, \dots, n - 1;$$

$$\frac{2iG_-}{1 + \chi_-} \sum_{k=1}^n u_1(\xi_k) + \frac{2\varepsilon G_+}{1 + \chi_+} e^{i\alpha} \sum_{k=1}^n u_1(\xi_k) = 0; \quad (13)$$

$$\xi_k = \cos(\pi(2k - 1) / 2k), \quad \eta_m = \cos(\pi m / n).$$

Для одержання замкненої системи рівнянь приєднуємо до системи (12), (13) ще одне з рівнянь

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k u_1(\xi_k) \operatorname{ctg} \frac{2k - 1}{4n} \pi = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} u_2(\xi_k) \operatorname{tg} \frac{2k-1}{4n} \pi = 0, \quad (14)$$

які одержано на основі рівностей (11).

Розрахунки показують, що числовий розв'язок практично не залежить від вибору першої чи другої рівності (14).

Для коефіцієнтів інтенсивності напружень у нижній (–) і верхній (+) вершинах ламаної тріщини маємо вирази [11]

$$K_I^+ - iK_{II}^+ = \frac{\sqrt{\pi l_2}}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} u_2(\xi_k) \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi;$$

$$K_I^- - iK_{II}^- = \frac{\sqrt{\pi l_1}}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} u_1(\xi_k) \operatorname{tg} \frac{2k-1}{4n} \pi.$$

В даних формулах КІН K_I^\pm , K_{II}^\pm є дійсні величини, які характеризують напружено-деформований стан в околі вершин тріщини.

4. 3. Дві спаяні півплощини з довільно орієнтованою тріщиною

Розглянемо дві спаяні різнорідні півплощини з лінією спаю L_0 , вздовж якої має місце ідеальний механічний контакт (рівність напружень і переміщень). Нижня півплощина послаблена тріщиною L_1 , довжиною $2l_1$ з центром в точці $(0; -ih)$. Тріщина утворює кут α з віссю Ox і на берегах задано рівномірно розподілений нормальний тиск інтенсивності p (рис. 2, *a*). В цьому випадку із системи рівнянь (11) одержимо одне інтегральне рівняння на контурі L_1 в якому права частина рівна

$$p_1^*(\tau_1) = -p.$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} [R_{11}(t_1, \tau_1) g_1'(t_1) dt_1 + S_{11}(t_1, \tau_1) \overline{g_1'(t_1)} dt_1] = p_1^*(\tau_1), \quad \tau_1 \in L_1, \quad (15)$$

і яке має єдиний розв'язок за виконання умови.

$$\int_{L_1} g_1'(t_1) dt_1 = 0, \quad (16)$$

яка забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини.

5. Аналіз отриманих числових результатів

Враховуючи, що на берегах ламаної тріщини задано рівномірно розподілений нормальний тиск p , в рівняннях (7) праві частини набудуть вигляду

$$p_1^*(\tau_1) = p_2^*(\tau_2) = -p.$$

Графіки для безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I/K_0 і K_{II}/K_0 ($K_0 = p\sqrt{l}$) зображено на рис. 1, а, б.

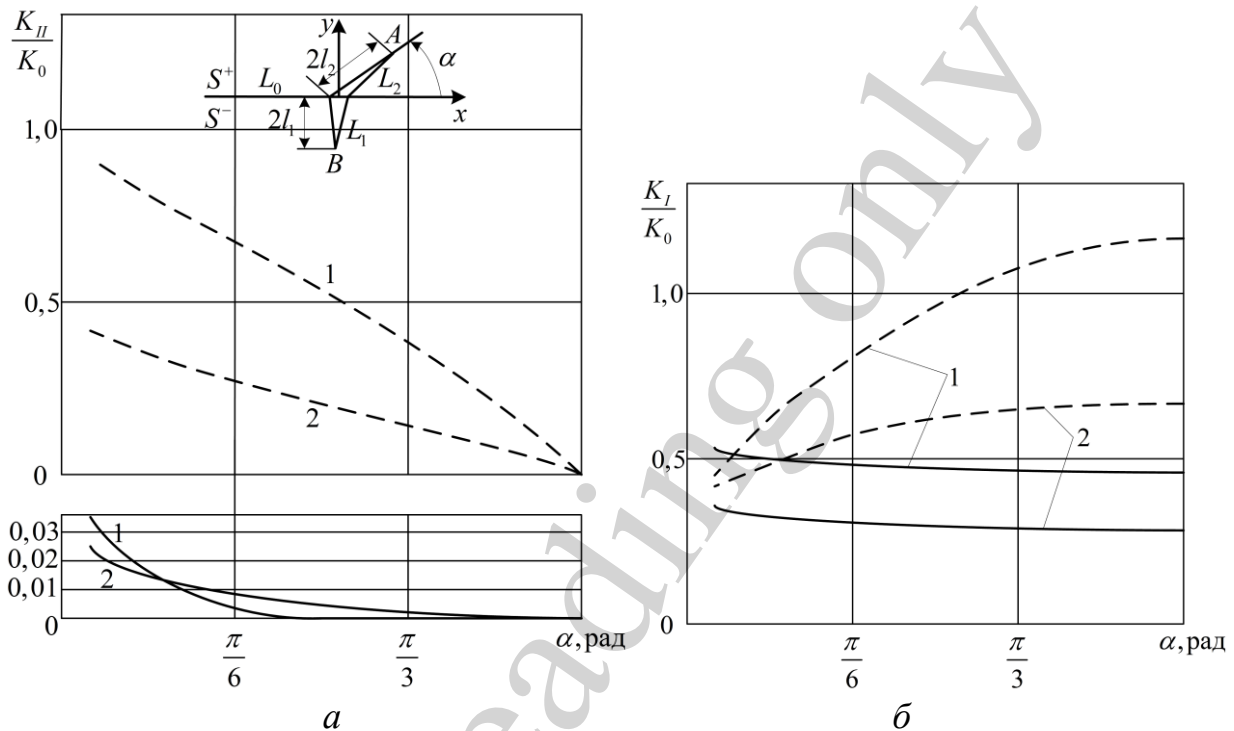


Рис. 1. Залежність безрозмірних КІН від кута нахилу α верхньої ланки ламаної тріщини: а – K_{II}/K_0 ; б – K_I/K_0

Штрихові криві відповідають значенням коефіцієнтів інтенсивності у верхній вершині тріщини (вершина А), суцільні – у нижній (вершина В). Криві 1 відповідають значенню $l_2/l_1=1$, криві 2 – $l_2/l_1=0,5$. Числовий розв'язок алгебраїчних рівнянь (12)–(14) рівнянь одержано методом механічних квадратур [11] коли $\chi_+=\chi_-=2$, $G_+/G_-=0,2$.

Графіки для безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I/K_0 і K_{II}/K_0 ($K_0 = p\sqrt{l}$), у випадку довільно орієнтованої тріщини, зображено на рис. 2, 3.

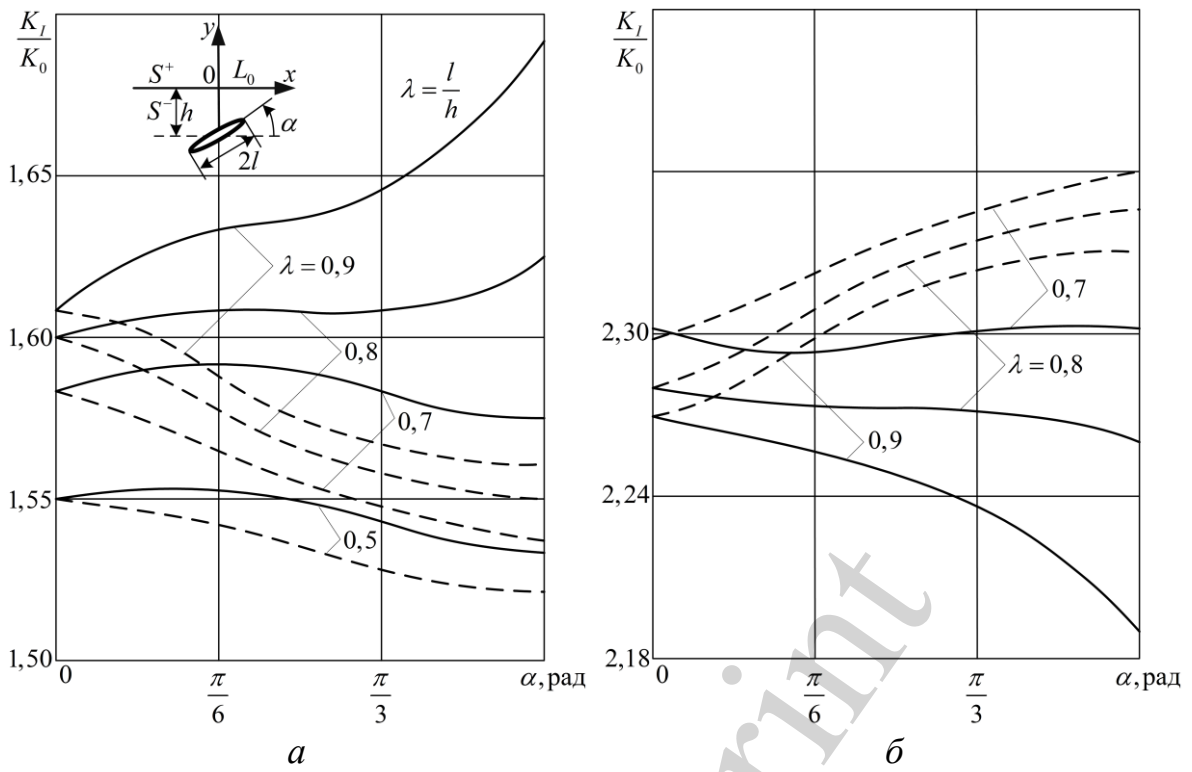


Рис. 2. Залежність безрозмірного КІН K_I/K_0 від кута нахилу тріщини α :
 а – $G_+/G_- = 0,5$; б – $G_+/G_- = 2$

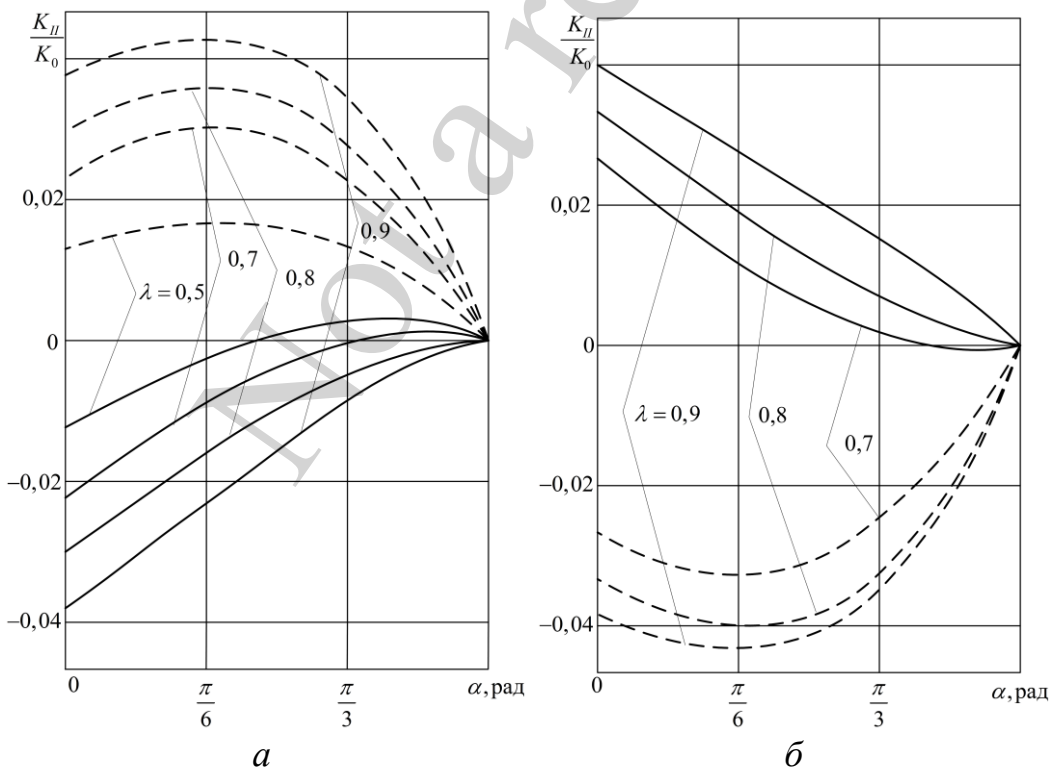


Рис. 3. Залежність безрозмірного КІН K_{II}/K_0 від кута нахилу тріщини α :
 а – $G_+/G_- = 0,5$; б – $G_+/G_- = 2$

Побудовано залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від кута нахилу тріщини α для різних значень параметра $\lambda=1/h$, коли $G_+/G_-=0,5$ (рис. 2, *a*, рис. 3, *a*), і $G_+/G_-=2$ (рис. 2, *б*, рис. 3, *б*). Суцільні криві відповідають коефіцієнтам інтенсивності у правій вершині тріщини (ближчої до лінії поділу півплощин), штрихові – у лівій. Числовий розв’язок інтегральних (15), (16) рівнянь одержано методом механічних квадратур [11] коли $\chi_+=\chi_-=2$.

6. Обговорення результатів досліджень взаємодії тріщини з лінією спаю різнорідних півплощин

Якщо бічна ланка тріщини знаходиться в менш жорсткій півплощині ($G_+<G_-$), то КІН K_I/K_0 у вершині нижньої ланки (вершина В) не значно збільшується з наближенням верхньої ланки до межі спаю L_0 . КІН K_I/K_0 верхньої ланки (вершина А) досягає максимальне значення, коли ламана тріщина стає прямою тріщиною, перпендикулярною до лінії спаю півплощин (рис. 1, *б*). КІН K_{II}/K_0 для обох вершин ламаної тріщини досягають максимуму одночасно з наближенням верхньої бічної ланки до лінії з’єднання півплощин (рис. 1, *a*). При цьому значення КІН K_{II}/K_0 у нижній вершині В на порядок менші, ніж у верхній вершині А.

Коефіцієнт інтенсивності напружень K_I/K_0 , завжди більший (менший) для тої вершини тріщини, яка ближче до верхньої м’якшої (жорсткішої) півплощини (рис. 2, *a*, *б*). При значному віддаленні тріщини від верхньої менш жорсткої ($G_+<G_-$) півплощини коефіцієнт K_I/K_0 , приймає максимальні значення, коли $\alpha=0$ (тріщина паралельна до лінії поділу L_0). З наближенням тріщини до межі поділу максимум K_I/K_0 , зміщується до кута $\alpha=\pi/2$ (рис. 2, *a*). Якщо верхня півплощина жорсткіша ($G_+>G_-$), то максимум K_I/K_0 завжди досягається при $\alpha=\pi/2$ для більш віддаленої вершини тріщини (рис. 2, *б*). Коефіцієнт інтенсивності K_{II}/K_0 завжди більший для тої вершини тріщини, яка ближча до лінії поділу півплощин, незалежно від жорсткості верхньої півплощини. При цьому коефіцієнт інтенсивності напружень K_{II}/K_0 приймає максимальне значення для кутів нахилу тріщини близьких до $\alpha=\pi/6$ (рис. 3, *a*, *б*).

У задачі для двох спаяних півплощин з довільно орієнтованою прямолінійною тріщиною береги тріщини не дотикаються. Тоді, згідно з σ_θ –критерієм (за гіпотезою про початковий ріст тріщини), із рівнянь граничної рівноваги [12]

$$\cos^3 \frac{\theta_*^\pm}{2} \left(K_I^\pm - 3K_{II}^\pm \operatorname{tg} \frac{\theta_*^\pm}{2} \right) = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi}}$$

можна знайти критичні значення нормального тиску інтенсивності $p_{кр}$, коли тіло починає локально руйнуватись за формулою

$$p_{\diamond\diamond} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \cdot \frac{K_{IC}}{\cos^3 \frac{\theta_*^\pm}{2} \left(k_1^\pm - 3k_2^\pm \operatorname{tg} \frac{\theta_*^\pm}{2} \right)},$$

де $k_1^\pm = K_I^\pm / K_0$, $k_2^\pm = K_{II}^\pm / K_0$, $K_0 = p\sqrt{l}$, K_{IC} – стала, яка характеризує опір матеріалу руйнуванню і яку визначають експериментально;

$$\theta_*^\pm = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1^\pm - \sqrt{(k_1^\pm)^2 + 8(k_2^\pm)^2}}{4k_2^\pm},$$

θ_*^\pm – кути початкового росту тріщини з вершин l^\pm .

Таблиця 1

Відносні значення інтенсивності нормального тиску на берегах тріщини $\tilde{p} / p_{кр}$, для різних кутів нахилу тріщини α і параметра $\lambda=1/h=0,9$.

α	$G_+/G = 5$		$G_+/G = 0,2$	
	Γ	l^+	Γ	l^+
0	0,632	0,632	0,438	0,438
$\pi/6$	0,634	0,624	0,436	0,443
$\pi/3$	0,638	0,612	0,432	0,449
$\pi/2$	0,640	0,595	0,430	0,456

Із числових результатів табл. 1 випливає, що з наближенням вершини тріщини до лінії спаю з більш жорстким середовищем ($G < G_+$), критичне значення інтенсивності нормального тиску $p_{кр}$ зростає, а з менш жорстким середовищем ($G_+ < G$) – зменшується.

Одержана спрощена числова схема розв'язування інтегральних рівнянь (12), (13), (14) ефективна у випадку, коли необхідно визначити розподіл напружень тільки в околі вершин тріщини. Якщо необхідно додатково дослідити інтенсивність напружень в околі точки зламу тріщини, то розв'язок слід шукати за допомогою квадратурних формул Гаусса-Якобі. Ці формули правильно відображають особливості розв'язку в кутовій точці.

Практична цінність роботи полягає в можливості повнішого врахування реального напружено-деформованого стану в кусково-однорідних елементах конструкції з тріщинами, які працюють за умов різних механічних навантажень. Результати конкретних досліджень, що наведені у вигляді графіків, можуть бути корисні при розробці раціональних режимів роботи конструкційних елементів. При цьому отримується можливість недопущення росту тріщини завдяки відповідному підбору складових композита з відповідними механічними характеристиками.

Дані дослідження є продовженням раніше розглянутих задач для кусково-однорідних тіл подібної геометрії за дії теплового навантаження і є розширенням на застосування для механічних навантажень.

7. Висновки

1. Побудовано двовимірну математичну модель задачі теорії пружності для двох спаяних різнорідних півплощин з тріщинами у вигляді системи сингуляр-

них інтегральних рівнянь (СІР) першого роду на контурах тріщини. Такий підхід дає можливість отримати числовий розв'язок СІР шляхом застосування високоточного методу механічних квадратур. Цей метод полягає в представленні СІР у вигляді відповідної скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, на основі розв'язків якої знаходять наближений розв'язок інтегральних рівнянь з наперед заданою точністю.

2. Одержано числові розв'язки СІР (методом механічних квадратур) у частинних випадках двох спаяних різнорідних півплощин з однією довільно-орієнтованою тріщиною, а також дволанковою ламаною тріщиною, що перетинає лінію спаю, коли на берегах тріщини діє рівномірно розподілений нормальний тиск. Це дає можливість визначити коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершинах тріщини, які в подальшому використовуються для визначення критичних значень нормального тиску на берегах тріщини, за якого тріщина починає рости.

3. Побудовано графічні залежності КІН, які характеризують розподіл інтенсивності напружень у вершинах тріщини, від кута нахилу тріщини і пружних характеристик півплощин. Визначено відносні критичні значення нормального тиску на берегах тріщини з рівнянь рівноваги для різних кутів нахилу тріщини. Ці результати дають можливість визначити межу допустимих значень нормального тиску на берегах тріщини та можуть бути використані при розробці раціональних режимів роботи елементів конструкцій з точки зору недопущення росту тріщини.

Література

1. Зеленьяк, В. Напруження в спаяних різнорідних півплощинах з включенням і тріщиною за дії розтягу [Текст] / В. Зеленьяк, Р. Мартиняк, Б. Слободян // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – 2008. – № 625. – С. 54–58.
2. Savruk, M. P. Plane problem of thermal conductivity and thermal elasticity for two joined dissimilar half-planes with curved inclusions and cracks [Text] / M. P. Savruk, V. M. Zelenyak // Soviet Materials Science. – 1988. – Vol. 24, Issue 2. – P. 124–129. doi: 10.1007/bf00736348
3. Зеленьяк, В. Моделювання термопружного двовимірного стану двох спаяних різнорідних півплощин з включеннями і тріщинами [Текст] / В. Зеленьяк, Б. Слободян // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 94–101.
4. Шацький, І. П. Взаємодія тріщини з колінеарною щілиною за згину пластини [Текст] / І. П. Шацький, Т. М. Даляк // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2015. – № 1. – С. 211–218.
5. Tagliavia, G. Elastic interaction of interfacial spherical-cap cracks in hollow particle filled composites [Text] / G. Tagliavia, M. Porfiri, N. Gupta // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol. 48, Issue 7-8. – P. 1141–1153. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2010.12.017

6. Chu, S. N. G. Elastic interaction between a screw dislocation and surface crack [Text] / S. N. G. Chu // Journal of Applied Physics. – 1982. – Vol. 53, Issue 12. – P. 8678–8685. doi: 10.1063/1.330465
7. Ming-huan, Z. Interaction between crack and elastic inclusion [Text] / Z. Ming-huan, T. Ren-ji // Applied Mathematics and Mechanics. – 1995. – Vol. 16, Issue 4. – P. 307–318. doi: 10.1007/bf02456943
8. Mykhas'kiv, V. V. Interaction between rigid-disc inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence [Text] / V. V. Mykhas'kiv, O. M. Khay // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – Vol. 46, Issue 3-4. – P. 602–616. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.09.005
9. Kryvyy, O. F. Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space [Text] / O. F. Kryvyy // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 184, Issue 1. – P. 101–119. doi: 10.1007/s10958-012-0856-6
10. Elfakhakhre, N. R. F. Stress intensity factor for multiple cracks in half plane elasticity [Text] / N. R. F. Elfakhakhre, N. M. A. Nik long, Z. K. Eshkuvatov // AIP Conference Proceedings. – 2017. – P. 020010-1–020010-8. doi: 10.1063/1.4972154
11. Саврук, М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
12. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках [Текст] / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.