

Розглянуто математичну постановку задачі пружно-пластичного стану сипкого матеріалу з використанням класичної моделі Друкера-Прагера. Виконано вдосконалення методики числового розв'язання задачі механічного стану сипкого матеріалу з використанням алгоритму зворотного відображення. Проведено числові розрахунки на прикладі матеріалу, що характеризується асоціативним законом течії, за різних значень кута природного укосу

Ключові слова: сипкий матеріал, критерій текучості Друкера-Прагера, алгоритм зворотного відображення, пластична деформація

Рассмотрена математическая постановка задачи упругопластического состояния сыпучего материала с использованием классической модели Друкера-Прагера. Выполнено усовершенствование методики численного решения задачи механического состояния сыпучего материала с использованием алгоритма обратного отображения. Проведены численные расчеты на примере материала, который характеризуется ассоциативным законом течения, при различных значениях угла естественного откоса

Ключевые слова: сыпучий материал, критерий текучести Друкера-Прагера, алгоритм обратного отображения, пластическая деформация

МОДИФІКАЦІЯ НЕЯВНОГО АЛГОРИТМУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОСТІ СИПКИХ МАТЕРІАЛІВ

А. Я. Карвацький

Доктор технічних наук, професор*

E-mail: anton@rst.kpi.ua

Є. М. Панов

Доктор технічних наук, професор*

E-mail: panov@rst.kpi.ua

А. Ю. Педченко

Кандидат технічних наук,

молодший науковий співробітник

Науково-дослідний центр

«Ресурсозберігаючі технології»**

E-mail: anatolek@rst.kpi.ua

В. І. Шкіль*

E-mail: tyutuut@gmail.com

*Кафедра хімічного, полімерного та

силікатного машинобудування**

**Національний технічний університет України

«Київський політехнічний

інститут ім. Ігоря Сікорського»

пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056

1. Вступ

Сипкі вуглеграфітові матеріали мають широке застосування в якості високотемпературних теплоізоляторів та нагрівальних елементів у печах опору електродної промисловості [1, 2]. Для врахування залежності фізичних властивостей сипких матеріалів від тиску під час числового аналізу теплоелектричного стану високотемпературного пічного обладнання електродного виробництва [3, 4] необхідно знання розподілу тиску в шарах цих матеріалів. Неврахування цієї залежності може призводити до значних похибок у результатах числового аналізу під час розробки нового обладнання та регламентів його експлуатації. Відомо, що інформацію про розподіл тиску в сипких матеріалах у вигляді середнього гідростатичного тиску можна отримати із розв'язку нелінійної задачі пластичності за критерієм текучості Друкера-Прагера [5, 6]. Тому проблема вдосконалення алгоритмів розв'язання задачі механічної поведінки сипких матеріалів є актуальною задачею.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Аналіз літературних даних показав, що модель Друкера-Прагера набула найбільшого поширення під час числових досліджень пружно-пластичного стану сипких та крихких матеріалів:

- дослідження міцності бетону різного складу [7–9];
- процес руйнування гірських порід [10, 11];
- механізм пресування фармацевтичних порошкових матеріалів [12, 13];
- процес формування металево-порошкових виробів [14–17].

В [7] наведено застосування розширеної моделі пластичності Друкера-Прагера під час числового моделювання поведінки армованого бетону. Числові експерименти виконано на базі пропрієтарного програмного забезпечення ABAQUS.

У [8] описано експериментальні дослідження з визначення границі міцності на стискання циліндричних бетонних зразків під час одновісного стискання. Наведено метод графічного визначення критеріїв

Друкера-Прагера для бетону під час його одновісного навантаження.

З метою отримання поверхні текучості Друкера-Прагера для зразків, виготовлених з різних марок бетону, у [9] експериментально визначено коефіцієнти когезії та кути внутрішнього тертя.

В роботі [10] представлено модель механічної поведінки гірських порід різної пористості, що основана на комбінації граничної поверхні Друкера-Прагера та еліптичної поверхні. Представлені співвідношення, що описують зміни поверхні граничного стану та коефіцієнта дилатансії під час незворотної деформації середовища. Використовується неасоціативний закон течій.

У [11] розглянуто модель деформування гірських порід, що є узагальненням моделі анізотропної пластичності Хілла, з одного боку, та моделі Друкера-Прагера – з іншого. В основі моделі лежить неасоціативний закон пластичної течії із зміцненням для анізотропного тіла, який враховує вплив об'ємних напружень. Розглянуто досить загальний випадок комбінації ізотропного та трансляційного зміцнення.

У [12] наведено результати числових досліджень механізму пресування порошкового матеріалу в таблетки. Використовуючи комерційне програмне забезпечення ABAQUS, проведено числові дослідження у вісесиметричній постановці. Розв'язання пружно-пластичної задачі з використанням моделі Друкера-Прагера дало можливість визначити розподіл тиску в матеріалі у вигляді середнього гідростатичного тиску, що є необхідним для визначення фізичних властивостей отриманого матеріалу.

У [13] наведено числові та експериментальні дослідження процесу пресування фармацевтичних порошкових матеріалів. Числові дослідження виконані із застосуванням моделі Друкера-Прагера. Використано програмне забезпечення ABAQUS.

У [14] представлено числові дослідження процесу пресування порошку оксиду алюмінію із застосуванням модифікованої моделі Друкера-Прагера. Числовий експеримент виконано із застосуванням програмного забезпечення ABAQUS.

В роботі [15] за допомогою методу скінченних елементів виконано дослідження процесів пластичної деформації металевих порошкових матеріалів. Показано, що для моделі Друкера-Прагера програмний пакет ABAQUS дає змогу отримати більш точні результати ніж за допомогою програмних продуктів DEFORM і ANSYS/LS-DYNA.

У [16, 17] виконано фізичний та числовий експерименти процесу пресування суміші металевих порошків. Числові дослідження представлені у вісесиметричній 3D постановці з використанням методу скінченних елементів. Розрахунки проводилися з використанням модифікованої моделі Друкера-Прагера, що реалізована в програмному забезпеченні ABAQUS.

До певних недоліків розглянутих праць, що присвячені застосуванню моделі Друкера-Прагера для сипких та крихких матеріалів можна віднести наступне:

- бракує повного математичного формулювання задачі та алгоритму розв'язання;
- наведено тільки формули для визначення критерія плинності, еквівалентних деформацій і напружень, результати та аналіз числових досліджень тощо;
- розрахунки проведені з використанням комерційного програмного забезпечення ABAQUS, для ко-

ристування яким необхідно придбання відповідної ліцензії.

Таким чином, у розглянутих роботах відсутня повна математична постановка задачі та алгоритм розв'язання, що ускладнює повноту розуміння проблеми, яка досліджується. Тому, до перспективного напрямку досліджень можна віднести:

- вдосконалення існуючих алгоритмів розв'язання задачі пластичної поведінки сипких матеріалів;
- розробку відповідного програмного коду та його верифікацію.

3. Мета та задачі дослідження

Метою даної роботи є вдосконалення алгоритмічних підходів розв'язання нелінійної задачі механічної поведінки сипких матеріалів за критерієм текучості Друкера-Прагера. Це надасть можливість мінімізувати вимоги до комп'ютерних ресурсів.

Для досягнення поставленої мети вирішувалися наступні задачі:

- формулювання математичної моделі пружно-пластичної поведінки ізотропного сипкого матеріалу;
- вдосконалення методики числового розв'язання задачі механічного стану сипкого матеріалу на базі алгоритму зворотного відображення;
- зіставлення даних числових експериментів з даними, отриманими з використанням комерційних програмних продуктів.

4. Матеріали та методи досліджень пружно-пластичного стану сипкого матеріалу

Згідно з інкрементальною теорією пластичності математична модель пружно-пластичної поведінки ізотропного сипкого матеріалу включає рівняння рівноваги, узагальнений закон Гука та геометричне рівняння [5, 6, 18]:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{ij,j} + \rho \dot{b}_i = 0; \\ \dot{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} \right) - \dot{\sigma}_{ij}^0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\epsilon}_{ij}^{el} + \dot{\epsilon}_{ij}^{pl}, \end{cases} \quad (1)$$

де $\dot{\sigma}_{ij}$ – компоненти симетричного тензора прирощення напруження 2-го рангу, Па; ρ – густина, кг/м³; \dot{b}_i – компоненти вектора прирощення масових сил, наприклад, гравітаційних, Н/кг; E – модуль пружності під час одновісного стискання, Па; ν – коефіцієнт Пуассона; δ_{ij} – символ Кронекера; $\dot{\sigma}_{ij}^0$ – компоненти тензора прирощення початкового напруження, Па; $\dot{\epsilon}_{ij}^{el}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{pl}$ – пружна та пластична складові тензора прирощення повних деформацій $\dot{\epsilon}_{ij}$, відповідно; \dot{u}_i – компоненти вектора прирощення переміщення, м.

У разі використання критерію настання стану пластичності Друкера-Прагера умова текучості сипкого матеріалу (функція пластичності) записується таким чином [5, 6]

$$F(\sigma_{ij}, c, \phi) = \sigma_{eqDP} - \sigma_y(c, \phi), \quad (2)$$

де F – функція поверхні текучості сипкого матеріалу;

$$\sigma_{eqDP} = 3\alpha(\phi)\sigma_m + \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}},$$

σ_{eqDP} – еквівалентне напруження за Дукером-Прагером, Па; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ – компоненти тензора дивіаторних напружень, Па; $\sigma_m = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$, Па; $\sigma_y(c, \phi)$ – границя текучості сипкого матеріалу, Па; c – сила зчеплення між гранулами сипкого матеріалу, Па; ϕ – кут внутрішнього тертя або кут природного укусу сипкого матеріалу, рад.

Якщо припустити, що поверхня плинності Друкера-Прагера огинає поверхню плинності Мора-Кулона [5, 6] то вирази для $\sigma_y(c, \phi)$ і $\alpha(\phi)$ набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_y(c, \phi) &= \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \\ \alpha(\phi) &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Початкові умови для (1), (2):

$$\dot{\sigma}_{ij}^0 = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Граничні умови для (1), (2):
– прирощення вектора переміщення

$$\dot{u}_i|_{S_u} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

де S_u – поверхня (або точка поверхні), на якій задано переміщення, м²;
– симетрії

$$n_i \dot{u}_i|_{S_{su}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

де n_i – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла; S_{su} – поверхня симетрії тіла, м².

Розглянемо основні теоретичні положення неявного алгоритму зворотного відображення (Return-mapping Algorithm) [5, 6]. Істинні пружні напруження у разі виникнення пружно-пластичних деформацій у сипкому матеріалі визначаються співвідношенням

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl}^{tr} - \epsilon_{kl}^{pl}), \quad (7)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напруження 2-го рангу, Па; C_{ijkl} – компоненти тензора четвертого рангу пружних констант матеріалу, Па; ϵ_{kl}^{tr} – компоненти тензора пробних (повних) деформацій 2-го рангу, що визначається в наближенні пружного середовища; $\epsilon_{kl}^{pl} = \sum_{i=1}^N (\Delta \epsilon_{kl}^{pl})_i$ – компоненти тензора пластичних деформацій 2-го рангу; $\Delta \epsilon_{kl}^{pl}$ – компоненти тензора прирощення пластичної деформації на i -у кроці навантаження; N – кількість кроків навантаження.

У разі неасоціативного закону пластичної течії, коли $\alpha \neq \beta$, маємо

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{pl} = \Delta \epsilon_{ij}^{pl} = \Delta \lambda m_{ij} \quad \text{або} \quad \dot{\epsilon}^{pl} = \Delta \hat{\epsilon}^{pl} = \Delta \lambda \hat{m}, \quad (8)$$

де

$$\beta(\gamma) = \frac{2 \sin \gamma}{\sqrt{3}(3 - \sin \gamma)};$$

γ – кут дилатансії, рад; $\hat{m} = \frac{\partial G}{\partial \hat{\sigma}}$.

Потенційна функція критерію плинності Друкера-Прагера виражається співвідношенням [3]

$$G = 3\beta(\gamma)\sigma_m + \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}} + \text{const}. \quad (9)$$

Скалярний асоціативний множник $\Delta \lambda$ або коефіцієнт пластичності (8) у разі відсутності зміцнення визначається за формулою

$$\Delta \lambda = \frac{n_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl}^{tr}}{n_{ij} C_{ijkl} m_{kl}} \quad \text{або} \quad \Delta \lambda = \frac{\hat{n} : \hat{C} : \hat{\epsilon}^{tr}}{\hat{n} : \hat{C} : \hat{m}^T}, \quad (10)$$

де

$$\hat{n} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\sigma}} = \alpha \hat{I} + \frac{1}{2} \frac{\hat{s}}{\sqrt{\frac{1}{2} \hat{s} : \hat{s}}}$$

і

$$\hat{m} = \frac{\partial G}{\partial \hat{\sigma}} = \beta \hat{I} + \frac{1}{2} \frac{\hat{s}}{\sqrt{\frac{1}{2} \hat{s} : \hat{s}}},$$

\hat{m} – тензори 2-го рангу, які є похідними від функцій (2) і (9) за тензором напруження, відповідно; \hat{C} – тензор пружних констант 4-го рангу, Па; \hat{I} – одиничний тензор 2-го рангу; $\hat{\epsilon}^{tr}$ – тензор пробних пружних деформацій на кожному кроці навантаження.

Із врахуванням (8) і (10) формулу (7) для $k+1$ кроку навантаження можна переписати у вигляді

$$\sigma_{ij}^{k+1} = \sigma_{ij}^{tr} - \Delta \lambda^{k+1} C_{ijkl} m_{ij} (\sigma_{ij}^{k+1})$$

або

$$\hat{\sigma}^{k+1} = \hat{\sigma}^{tr} - \Delta \lambda^{k+1} \hat{C} : \hat{m} (\hat{\sigma}^{k+1}), \quad (11)$$

де $\hat{\sigma}^{tr} = \hat{C} : \hat{\epsilon}^{tr}$ – тензор пробних напружень, що визначається у наближенні пружного середовища, Па.

Формула (11) дає відображення тензора пробного напруження $\hat{\sigma}^{tr}$ в напрямку поверхні текучості. Тому цей метод інтегрування, який побудовано на зворотному методі Ейлера, дістав назву алгоритму зворотного відображення [5, 6].

Система рівнянь (11) із врахуванням симетрії тензора напруження має 7 невідомих, а саме 6 незалежних компонент $\hat{\sigma}^{tr}$ і $\Delta \lambda$. Тому для однозначності системи рівнянь (11) треба доповнити скалярним рівнянням (2) у вигляді вимоги про те, що умова плинності дотримується у кінці стадії навантаження

$$F(\hat{\sigma}^{k+1}, \Delta \lambda) = 0. \quad (12)$$

Нелінійну систему рівнянь (11), (12) можна переписати у форматі неув'язок. При цьому необхідно

виконати перехід на шестивимірний простір із врахуванням симетрії тензорів напруження і деформації. Це дає змогу замінити тензори 2-го рангу $\hat{\sigma}^{k+1}$, $\hat{\sigma}^{tr}$, \hat{n} , \hat{m} на відповідні вектори $\hat{\sigma}^{k+1}$, $\hat{\sigma}^{tr}$, \mathbf{n} і \mathbf{m} із шістьма компонентами. Таким чином, замість тензора 4-го рангу $\hat{\mathbf{C}}$ можна використовувати тензор другого рангу пружних констант \mathbf{D}^{el} розмірністю 6x6:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^{tr} + \Delta\lambda^{k+1} \mathbf{D}^{el} \cdot \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}^{k+1}); \\ r_F = F(\boldsymbol{\sigma}^{k+1}, \Delta\lambda^{k+1}). \end{cases} \quad (13)$$

Для розв'язання системи нелінійних рівнянь (13) зазвичай використовується метод Ньютона, ітераційна процедура якого записується таким чином:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{j+1}^{k+1} \\ \Delta\lambda_{j+1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_j^{k+1} \\ \Delta\lambda_j^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \Delta\lambda} \\ \frac{\partial r_F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial r_F}{\partial \Delta\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\sigma^j \\ r_F^j \end{pmatrix}, \quad (14)$$

де

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{I}} + \Delta\lambda_j^{k+1} \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}_j^{k+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta\lambda} = \hat{\mathbf{D}}^{el} \cdot \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}_j^{k+1});$$

$$\frac{\partial r_F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n}^T(\boldsymbol{\sigma}_j^{k+1}); \quad \frac{\partial r_F}{\partial \Delta\lambda} = 0.$$

Тут індекс k відноситься до кроку навантаження, а індекс j до номеру ітерації за методом Ньютона.

На кожному кроці ітерацій за методом Ньютона (14) доцільно не знаходити обернену матрицю, а розв'язувати систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) методом виключення Гауса. Це дає змогу значно зменшити кількість арифметичних операцій, приблизно на $3n^2$, де n – розмірність СЛАР.

Для $k=1$ розв'язується звичайна пружна задача відносно повних переміщень за умови задання граничних умов (4)–(6), за якими визначаються пробні напруження. Далі в частині шару сипкого матеріалу, що знаходиться у пружно-пластичному стані, визначаються приращення пластичної деформації та тензор пружного напруження із розв'язку (14) і знаходяться початкові напруження за формулою

$$\boldsymbol{\sigma}^{0(k)} = \Delta\lambda^{(k)} \mathbf{D}^{el} \cdot \mathbf{m}^{(k)}. \quad (15)$$

Наступні кроки інтегрування (1), (2) для $k>1$ виконуються тільки з навантаженням початковими напруженнями (15), (16) тобто без врахування зовнішнього та гравітаційного навантаження і за граничних умов (5). При цьому розв'язуються пружна задача і визначаються приращення переміщень $\Delta\mathbf{u}^k$ та уточнюються значення повних переміщень, за якими знаходяться нові пробні напруження. Потім із розв'язку (14) визначається нове значення приращення пластичної деформації і тензора пружного напруження для частини тіла, що знаходиться у пружно-пластичному стані.

Далі для виконання наступного кроку навантаження знаходяться приращення початкових напружень за формулою

$$\boldsymbol{\sigma}^{0(k)} = \Delta\lambda^k \mathbf{D}^{el} \cdot \mathbf{m}^k - \boldsymbol{\sigma}^{0(k-1)}. \quad (16)$$

Критерієм закінчення розрахунків може бути, наприклад, виконання умови $|\Delta\mathbf{u}^k| \leq \delta_u$ або $|\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl(k)}| \leq \delta_\varepsilon$.

Нові пробні напруження $\boldsymbol{\sigma}^{tr(k)}$ в алгоритмі розв'язання задачі також можна визначати через попередні значення $\boldsymbol{\sigma}^{tr(k-1)}$ і приращення пружних деформацій $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^k$, що знаходяться через $\Delta\mathbf{u}^k$, за формулою

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr(k)} = \boldsymbol{\sigma}^{tr(k-1)} + \mathbf{D}^{el} \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^k(\Delta\mathbf{u}^k). \quad (17)$$

Для визначення $\Delta\mathbf{u}^k$ на кожному кроці інтегрування за часом використовується приращення початкових напружень у формі

$$\boldsymbol{\sigma}^{0(k-1)} = \Delta\lambda^{k-1} \mathbf{D}^{el} \cdot \mathbf{m}^{k-1}. \quad (18)$$

Сумарні пластичні деформації визначаються за формулою

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{pl(k-1)} + \Delta\lambda^k \mathbf{m}^k. \quad (19)$$

У разі асоціативного закону пластичної течії, коли $\alpha=\beta$ ($\gamma=\phi$), то функції плинності F (2) і G (9) збігаються між собою. Тоді $\mathbf{m}=\mathbf{n}$, а напрям приращення пластичної деформації під час течії стає нормальним до поверхні текучості. При цьому у формулах (6)–(19) треба виконати заміну \mathbf{m} на \mathbf{n} . Тобто задача дещо спрощується. Подальший алгоритм розв'язання задачі з асоціативним законом течії такий самий як і у разі неасоціативного.

Для числової реалізації наведеного алгоритму використано метод скінченних елементів (МСЕ) і мову програмування високого рівня Fortran з використанням інтегрованого середовища розробки Compaq Visual Fortran [19]. При цьому глобальна матриця СЛАР формується у стрічковому вигляді і СЛАР розв'язується методом Гауса із врахуванням стрічкової структури.

5. Результати числових досліджень пружно-пластичного стану сипкого матеріалу

Тестування розробленого програмного коду для розв'язання задачі пружно-пластичності сипкого матеріалу виконано на прикладі модельного матеріалу, що характеризується асоціативним законом течії, за різних значень кута природного укосу. Побудову тетраедної сітки виконано в САД-системі для генерації сіток Gmsh [20].

Тест. Задача пружно-пластичності сипкого матеріалу з використанням класичної моделі Друкера-Прагера. Розрахункова область – тривимірна, $1/4$ конуса з радіусом $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0,34$ м і висотою $z=0,3$ м. Фізичні властивості сипкого матеріалу: насипна густина – $\rho=800$ кг/м³, модуль пружності – $E=4000$ Па, коефіцієнт Пуассона – $\nu=0,45$, сила зчеплення між гранулами сипкого матеріалу – $c=400$ Па, кут природного укосу $\phi=15, 10, 5^\circ$. Навантаження – гравітація $g_z = -9,81$ м/с². Закон течії асоціативний $\alpha=\beta$. Граничні умови: закрі-

плення на площині $xOy - u_{z=0} = 0$, симетрія на площинах xOz і yOz . Тобто умови задачі та розв'язок відповідає двовимірній вісесиметричній задачі.

Результати розв'язання задачі та їх порівняння з даними отриманими за допомогою програмного про-

дукту ANSYS Mechanical APDL [21] для вісесиметричної геометрії наведено в табл. 1.

Результати числового моделювання задачі пластичності сипкого матеріалу з використанням розробленого програмного забезпечення наведено на рис. 1.

Таблиця 1

Порівняння розв'язків задачі пластичності сипкого матеріалу, отриманих у результаті використання власного програмного коду та програмного продукту ANSYS Mechanical APDL

Тип розв'язку	u_s , м	σ_{eqM} , Па	σ_{eqDP} , Па	ϵ_{eqM}^{el}	ϵ_{eqM}^{pl}	σ_m , Па
$\phi = 5^\circ, \sigma_y = 473,89$ Па						
ANSYS 2D axisymmetric, $N=630, El=1148$	0-0,070368	27,735-1000,69	-	0,0106-0,250173	0-0,370229	-1002,03-259,964
Fortran 3D, $N=3608, El=14641$	0-0,068858	35,234-1001,57	473,89	0,0088-0,250132	0-0,362502	-1006,91-284,346
Різниця, %	2,15	-0,09	-	0,02	2,09	-0,49
$\phi = 10^\circ, \sigma_y = 482,81$ Па						
ANSYS 2D axisymmetric, $N=630, El=1148$	0-0,05676	7,409-1182,76	-	0,007733-0,29569	0-0,16233	-939,98-177,104
Fortran 3D, $N=3608, El=14641$	0-0,056065	47,0435-1188,7	482,81	0,01176-0,296441	0-0,167898	-956,098-199,596
Різниця, %	1,22	-0,50	-	-0,25	-3,43	-1,71
$\phi = 15^\circ, \sigma_y = 488,27$ Па						
ANSYS 2D axisymmetric, $N=630, El=1148$	0-0,051986	0,7-1342,2	-	0,007514-0,335525	0-0,05423	-876,238-151,593
Fortran 3D, $N=3608, El=14641$	0-0,051518	37,94-1347,83	488,27	0,009485-0,336254	0-0,05709	-886,353-181,923
Різниця, %	0,90	-0,42	-	-0,22	-5,27	-1,23

Примітка: N – кількість вузлів; El – кількість скінченних трикутних або тетраедричних елементів; u_s – результуюче переміщення, м; σ_{eqM} – еквівалентне напруження за Мізесом, Па; σ_{eqDP} – еквівалентне напруження за Друкером-Прагером, Па; ϵ_{eqM}^{el} – еквівалентна пружна деформація за Мізесом; ϵ_{eqM}^{pl} – еквівалентна пластична деформація за Мізесом; σ_m – гідростатичний тиск, Па; ϕ – кут природного укосу, град.; σ_y – границя текучості матеріалу, Па

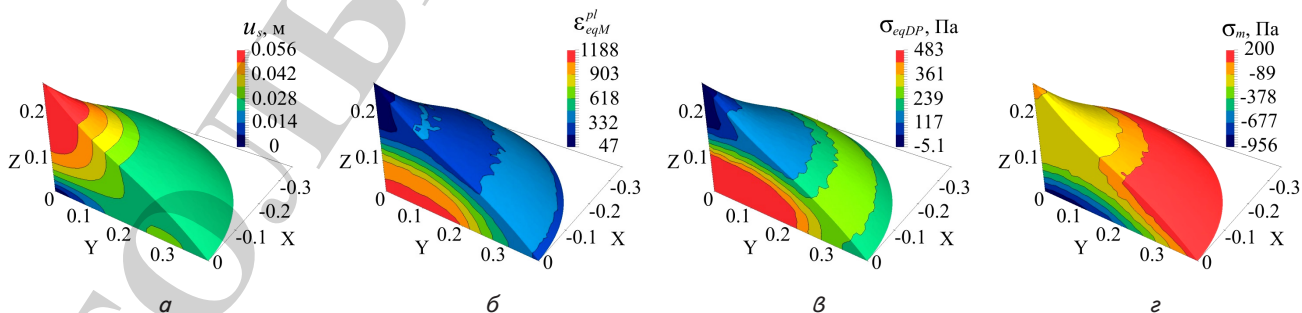


Рис. 1. Результати числового моделювання задачі пластичності сипкого матеріалу: а – сумарні переміщення; б – еквівалентні пластичні деформації за Мізесом; в – еквівалентні напруження за Друкером-Прагером; з – гідростатичний тиск

Для візуалізації результатів розрахунків застосовано відкритий графічний пакет для інтерактивної візуалізації ParaView [22].

6. Обговорення результатів числового моделювання пружно-пластичного стану сипкого матеріалу

Аналіз порівняння результатів показав, що дані моделювання за розробленим програмним забезпеченням збігаються з числовими розв'язками, які були отримані з використанням комерційного програмного забезпечення ANSYS Mechanical APDL [21]. При цьому максимальне значення похибки для таких величин як u_s , σ_{eqM} , ϵ_{eqM}^{el} і σ_m лежить у межах 0,25–1,71 %, а для ϵ_{eqM}^{pl} становить 2,1–5,3 %, що є цілком достатнім для виконання інженерних розрахунків.

У результаті апробації модифікованого алгоритму розв'язання задачі (1)–(7) встановлено, що:

– розв'язання лінеаризованої системи рівнянь (14) на кожному кроці ітерацій з використанням методу Гауса замість визначення оберненої матриці дає змогу зменшити кількість арифметичних операцій приблизно на $3n^2$ для кожного пластичного скінченного елемента;

– результати розв'язання задачі з початковими напруженнями через абсолютні значення переміщень за (15), (16) збігаються з результатами, отриманими через припущення переміщень за (17)–(19) за умов тестової задачі.

До переваг роботи можна віднести:

– наведено всі етапи розв'язання задачі від математичного формулювання, методики розв'язання до числової реалізації та верифікації, що є суттєвою методичною перевагою порівняно з [5–17];

– модифікація алгоритму зворотного відображення.

До недоліків роботи можна віднести:

– дослідження виконано тільки для класичної моделі Друкера-Прагера з асоціативним законом течії;

– програмне забезпечення розраховано лише на використання лінійних тетраедричних скінчених елементів;

– відсутність порівняння результатів числового моделювання з експериментом та даними, отриманими за допомогою програмного пакету ABAQUS.

Результати дослідження є корисними під час числового аналізу фізичних полів електротермічного обладнання, в якому застосовуються сипкі матеріали і є продовженням попередніх досліджень [3, 4, 18].

Подальші дослідження плануються виконати у напрямках розв'язання задач пластичної поведінки сипких матеріалів у наближенні CAP і Extended моделей Drucker-Prager з використанням шестигранних скінчених елементів.

7. Висновки

1. На підставі класичної моделі Друкера-Прагера, сформульовано математичну постановку задачі пружно-пластичної поведінки ізотропного сипкого матеріалу.

2. Вдосконалено методику числового розв'язання задачі механічного стану сипкого матеріалу з використанням алгоритму зворотного відображення. Модифікована методика дає можливість зменшити кількість арифметичних операцій приблизно на $3n^2$ (n – розмірність СЛАР) на кожному кроці ітерацій для кожного пластичного скінченного елемента.

3. Виконано тестування програмного коду на прикладі модельного матеріалу, що характеризується асоціативним законом течії, за різних значень кута природного укусу. Встановлено, що максимальне значення похибки для таких величин як u_s , σ_{eqM} , ϵ_{eqM}^{el} і σ_m лежить у межах 0,25–1,71 %, а для ϵ_{eqM}^{pl} становить 2,1–5,3 %.

Література

1. Фиалков, А. С. Процессы и аппараты производства порошковых углеродистых материалов [Текст] / А. С. Фиалков. – М.: Аспект Пресс, 2008. – 687 с.
2. Leleka, S. The study of uneven temperature field in billet electrodes during their graphitization in the Castner furnace [Text] / S. Leleka, T. Lazarev, A. Pedchenko, D. Shvachko // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2015. – Vol. 6, Issue 5 (78). – P. 28–32. – doi: 10.15587/1729-4061.2015.56642
3. Karvatskii, A. Numerical analysis of the physical fields in the process of electrode blanks graphitization in the castner furnace [Text] / A. Karvatskii, S. Leleka, A. Pedchenko, T. Lazarev // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 6, Issue 5 (84). – P. 19–25. doi: 10.15587/1729-4061.2016.83191
4. Kutuzov, S. V. Making the Heat-Insulating Charge of Acheson Graphitization Furnaces More Efficient [Text] / S. V. Kutuzov, V. V. Buryak, V. V. Derkach, E. N. Panov, A. Ya. Karvatskii, G. N. Vasil'chenko et. al. // Refractories and Industrial Ceramics. – 2014. – Vol. 55, Issue 1. – P. 15–16. doi: 10.1007/s11148-014-9648-5
5. De Borst, R. Non-linear finite element analysis of solids and structures [Text] / R. de Borst, M. A. Crisfield, J. J. C. Remmers, C. V. Verhoosel. – 2nd ed. – John Wiley & Sons Ltd, 2012. – 516 p. doi: 10.1002/9781118375938
6. Zienkiewicz, O. C. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics [Text] / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, D. D. Fox. – 7th ed. – Elsevier Ltd., 2014. – 624 p. doi: 10.1016/B978-1-85617-634-7.00016-8
7. Yu, T. Finite element modeling of confined concrete-I: Drucker-Prager type plasticity model [Text] / T. Yu, J. G. Teng, Y. L. Wong, S. L. Dong // Engineering Structures. – 2010. – Vol. 32, Issue 3. – P. 665–679. doi: 10.1016/j.engstruct.2009.11.014
8. Ivorra, S. Drucker-Prager yield criterion application to study the behavior of CFRP confined concrete under compression [Text] / S. Ivorra, R. Irlas, L. Estevan et. al. – World Congress on Housing. – Santander (Cantabria), Spain, 2010.
9. Öztekin, E. Experimental determination of Drucker-Prager yield criterion parameters for normal and high strength concretes under triaxial compression [Text] / E. Öztekin, S. Pul, M. Hüsem // Construction and Building Materials. – 2016. – Vol. 112. – P. 725–732. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2016.02.127

10. Стефанов, Ю. П. Моделирование поведения горных пород за пределом упругости [Текст] / Ю. П. Стефанов, Р. А. Бакеев, А. И. Ахтямова // Процессы в геосредах. – 2015. – № 4 (4). – С. 85–91.
11. Устинов, К. Б. О применении моделей пластического течения для описания неупругого деформирования анизотропных горных пород [Текст] / К. Б. Устинов // Процессы в геосредах. – 2016. – № 3 (7). – С. 278–287.
12. Sinha, T. A study on the sensitivity of Drucker–Prager Cap model parameters during the decompression phase of powder compaction simulations [Text] / T. Sinha, J. S. Curtis, B. C. Hancock, C. Wassgren // Powder Technology. – 2010. – Vol. 198, Issue 3. – P. 315–324. doi: 10.1016/j.powtec.2009.10.025
13. Diarra, H. FEM simulation of the die compaction of pharmaceutical products: Influence of visco-elastic phenomena and comparison with experiments [Text] / H. Diarra, V. Mazel, V. Busignies, P. Tchoreloff // International Journal of Pharmaceutics. – 2013. – Vol. 453, Issue 2. – P. 389–394. doi: 10.1016/j.ijpharm.2013.05.038
14. Shin, H. A numerical investigation on determining the failure strength of a powder compact in unconfined compression testing by considering the compressible character of the specimen [Text] / H. Shin, J.-B. Kim // Powder Technology. – 2015. – Vol. 277. – P. 156–162. doi: 10.1016/j.powtec.2015.02.054
15. Фук, Д. В. Исследование процесса уплотнения порошковых материалов с использованием программного пакета ABAQUS [Текст] / Д. В. Фук, С. В. Ганин, В. Н. Цеменко // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. – 2016. – № 1 (238). – С. 100–110. doi: 10.5862/jest.238.10
16. Zhou, M. A density-dependent modified Drucker-Prager Cap model for die compaction of Ag_{57.6}-Cu_{22.4}-Sn₁₀-In₁₀ mixed metal powders [Text] / M. Zhou, S. Huang, J. Hu, Y. Lei, Y. Xiao, B. Li et. al. // Powder Technology. – 2017. – Vol. 305. – P. 183–196. doi: 10.1016/j.powtec.2016.09.061
17. Zhou, M. Experiment and finite element analysis of compaction densification mechanism of Ag-Cu-Sn-In mixed metal powder [Text] / M. Zhou, S. Huang, J. Hu, Y. Lei, F. Zou, S. Yan, M. Yang // Powder Technology. – 2017. – Vol. 313. – P. 68–81. doi: 10.1016/j.powtec.2017.03.015
18. Карвацкий, А. Я. Застосування САД-систем для розв'язання пружно-пластичних задач з врахуванням ізотропного зміцнення [Текст] / А. Я. Карвацкий, Т. В. Лазарев, С. В. Лелека, А. Ю. Педченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – 2017. – № 7 (1229). – С. 55–63. doi: 10.20998/2413-4295.2017.07.08
19. Lawrence, N. Compaq Visual Fortran [Text] / N. Lawrence. – 1st ed. – Sydney: Digital Press, 2002. – 600 p.
20. Gmsh. A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities [Electronic resource]. – Available at: <http://geuz.org/gmsh/>
21. Thompson, M. ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis [Text] / M. Thompson, J. Thompson. – 1st ed. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2017. – 466 p.
22. ParaView. An open-source, multi-platform data analysis and visualization application [Electronic resource]. – Available at: <http://www.paraview.org/>

ТОЛЬКО ДЛЯ

