

*Досліджено вплив розміру та кількості корегувальних вантажів (куль або циліндричних роликів) в автобалансири на його балансувальну ємність та на тривалість перебігу перехідних процесів при автобалансуванні роторних систем. При цьому знайдені розміри та кількість корегувальних вантажів, при яких досягається найбільша балансувальна ємність автобалансира та найменша тривалість перехідних процесів*

*Ключові слова: автобалансири, автобалансування, куля, циліндричний ролик, балансувальна ємність, перехідні процеси, оптимізація*

*Исследовано влияние размера и количества корректирующих грузов (шаров или цилиндрических роликов) в автобалансири на его балансирующую емкость и на продолжительность протекания переходных процессов при автобалансировке роторных систем. При этом установлены размер и количество корректирующих грузов, при которых достигается наибольшая балансирующая емкость автобалансира и наименьшая продолжительность переходных процессов*

*Ключевые слова: автобалансири, автобалансировка, шар, цилиндрический ролик, балансирующая емкость, переходные процессы, оптимизация*

# ПІДВИЩЕННЯ БАЛАНСУВАЛЬНОЇ ЄМНОСТІ КУЛЬОВИХ ЧИ РОЛИКОВИХ АВТОБАЛАНСИРІВ ІЗ ЗМЕНШЕННЯМ ЧАСУ НАСТАННЯ АВТОБАЛАНСУВАННЯ

**В. В. Гончаров**

Кандидат фізико-математичних наук, доцент  
Кафедра вищої математики та фізики\*\*

E-mail: honchv@ukr.net

**Г. Б. Філімоніхін**

Доктор технічних наук, професор\*

E-mail: filimonikhin@yandex.ua

**А. Ю. Невдаха**

Кандидат технічних наук\*

E-mail: aunevdaha@ukr.net

**В. В. Пирогов**

Кандидат фізико-математичних наук\*

E-mail: vladimir-pirogovvv@rambler.ru

\*Кафедра деталей машин і прикладної механіки\*\*

\*\*Центральноукраїнський

національний технічний університет

пр. Університетський, 8,

м. Кропивницький, Україна, 25006

## 1. Вступ

Для балансування на ходу (в процесі експлуатації) швидкообертових роторів відцентрових машин, чия незрівноваженість постійно змінюється, використовуються пасивні автобалансири (АБ) [1–4]. З часом рух системи ротор-АБ встановлюється. На так званих основних (усталених) рухах АБ балансують ротор, а на побічних – ні.

Актуальними проблемами проектування АБ є:

- 1) визначення умов, при яких можливе автобалансування ротора одним чи декількома АБ;
- 2) вибір параметрів АБ, при яких:
  - досягається найбільша балансувальна ємність АБ і її вистачає для балансування ротора [1–4];
  - забезпечується найбільша точність балансування;
- 3) вибір параметрів АБ, при яких найшвидше настає балансування ротора.

## 2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Конструкції і принцип дії так званих класичних АБ з твердими корегувальними вантажами (КВ) (кільце-

вих, маятникових, кульових, роликів), призначених для зрівноваження переважно барабанів пральних машин, описано в роботі [1]. В класичних АБ центри мас КВ рухаються по колам, площини яких перпендикулярні поздовжній осі ротора і центри знаходяться на цій осі. Найбільш повно конструкції різних типів класичних АБ, призначених для зрівноваження різноманітних швидкообертових роторів, наведено у роботі [2]. Некласичні АБ з КВ спеціальної форми, що можуть певним чином обертатися навколо точки на поздовжній осі ротора описано в роботі [3].

Найбільш повно умови настання автобалансування при зрівноваженні роторів пасивними АБ визначалися в роботах: [4] – для двохкульових АБ у рамках плоскої моделі ротора, моделі ротора з нерухою точкою, моделі ротора на двох пружних опорах; [3] – для класичних і некласичних АБ у рамках зазначених вище моделей ротора.

В роботі [4] було отримано формули розрахунку балансувальної ємності кульових АБ окремо для парної і непарної кількості куль. Дослідженням балансувальної ємності на екстремум по радіусу куль (при фіксованій їх кількості). Було встановлено, що: найбільша ємність АБ досягається при одній кулі; якщо куль 6 і

більше, то з'являються зайві кулі, які можна відкинути, бо вони зменшують балансувальну ємність АБ.

В роботі [2] аналогічні дослідження проведено для роликів АБ. Було встановлено, що: використання роликів дає можливість збільшити балансувальну ємність АБ в 1,5 рази в порівнянні з кульовим АБ при тих же габаритах; найбільша ємність АБ досягається при трьох роликах в АБ.

Спільним недоліком робіт [2, 4] є те, що:

– формули обчислення балансувальної ємності АБ (мають вигляд суми) різні для парної і непарної кількості куль і тому незручні для використання та аналізу;

– не перевірено з технічної (інженерної) точки зору коректність задачі дослідження на екстремум балансувальної ємності АБ по радіусу КВ;

– отримані результати зв'язані тільки з балансувальною ємністю АБ і не враховують вимог підвищення точності та зменшення часу настання балансування.

Вплив різних факторів на точність балансування досліджувався в роботах [2, 4–6]. В роботі [5] названі наступні основні причини зниження точності балансування пасивними АБ роторів: ексцентриситет бігової доріжки; сили опору коченню КВ по доріжці; зовнішні вібрації (чи збуджуючі сили).

В роботі [4] оцінено вплив ексцентриситету бігової доріжки і сил опору коченню КВ на точність балансування ротора кульовими АБ. Було складено рівняння рівноваги КВ на доріжці в усталеному русі. Показано, що чим менший ексцентриситет і сили сухого тертя, тим менша похибка балансування. Запропоновано зменшувати сили опору коченню куль збільшенням їх радіусу. В роботі [2] аналогічні результати одержано і для роликів АБ. В роботі [6], з використанням механіки контакту Герца і врахуванням гістерезисних втрат, більш точно визначені зони застою куль в околі автобалансувального положення.

В роботах [7–10] по диференціальним рівнянням руху системи ротор-АБ досліджувався вплив на динаміку цієї системи сил опору коченню (в комбінації з іншими факторами). В роботі [7] встановлено, що за певних умов сили сухого тертя можуть збуджувати коливальні рухи куль. В роботі [8] показано, що невеликі зовнішні збуджуючі сили можуть не збуджувати коливань куль в околі автобалансувального положення через застій КВ, викликаний силами опору коченню. В роботі [9] показано, що на точність балансування можна впливати збуджуючими силами. В роботі [10] показано, що на динаміку системи ротор-АБ впливають і співударі між кулями.

Якщо в роботах [2, 4–10] виділити результати, що стосуються конструкції АБ, то можна заключити, що більша точність балансування досягається: з КВ більшого діаметру; при максимально точному виготовленні бігової доріжки і КВ із максимально твердого матеріалу.

Вплив параметрів АБ на швидкість настання автобалансування вивчався в роботах:

[11] – в рамках плоскої моделі двохкульового АБ і ротора;

[3, 12–14] – в рамках плоскої моделі багатокульового АБ і ротора;

[15] – в рамках моделі ротора в пружно-в'язко закріпленому корпусі з нерухомою точкою і одним АБ;

[16] – в рамках просторової моделі ротора на двох опорах, що балансується одним АБ;

[17] – в рамках просторової моделі ротора, поміщеного в важкий пружно-в'язко закріплений корпус, при балансуванні ротора одним АБ;

[18] – в рамках просторової моделі ротора на двох опорах, що балансується двома АБ;

[19] – в рамках дискретної моделі гнучкого двохопороного ротора, що балансується двома АБ, розміщеними біля опор.

В цих роботах швидкість настання автобалансування оцінювалася за коренями характеристичного рівняння, що описує стійкість основного руху або сім'ї основних рухів.

Для роторних машин з одним АБ з багатьма КВ було отримано корінь з найменшою за модулем від'ємною дійсною частиною:

$$\lambda = -[\tilde{b} - \sqrt{\tilde{b}^2 - (1-p)mnb_{cr}^2}] / 2, \quad (1)$$

де  $\tilde{b}$  – безрозмірний параметр, який характеризує величину сил опору відносному руху КВ;

$$p = \sqrt{\sum_{i,k=1}^n \cos 2(\tilde{\psi}_i - \tilde{\psi}_k)} / n \in [0; 1]; \quad (2)$$

– параметр, який визначається положеннями КВ на незбудженому основному русі;  $\tilde{\psi}_i, i=1, n$  – кути, що задають положення КВ на основному русі;  $n$  – кількість КВ в АБ,  $m$  – маса одного КВ;  $b_{cr}$  – безрозмірний параметр, що визначається масо-інерційними характеристиками роторної системи і не залежить від параметрів АБ.

З кореня (1) видно, що на швидкість настання автобалансування суттєво впливає розташування куль на основному русі.

У випадку моделі ротора на двох опорах з двома АБ (як для жорсткого [18], так і для гнучкого [19] ротора) тривалість перебігу перехідних процесів (ПП) залежить від положень КВ на основних рухах кожного АБ:

$$p_j = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n_j} \cos 2(\tilde{\psi}_{i,j} - \tilde{\psi}_{k,j})} / n_j \in [0; 1], \quad /j=1, 2/,$$

і корінь (1) в загальному випадку не можливо записати в явному вигляді, але тенденції впливу параметрів  $p, m, n, n_j, /j=1, 2/$  на тривалість перебігу ПП зберігаються.

З вигляду кореня (1) видно, що при  $p=1$  він дорівнює 0, що теоретично може збільшити час настання автобалансування до нескінченності.

В роботах [12–14] для КВ нескінченно малого радіусу доведено, що (при фіксованій незрівноваженості ротора у площині корекції АБ) параметр  $p$  змінюється у межах  $0 < p_{min} < p < p_{max} < 1$ , при переході КВ від одного до іншого основного руху з багатопараметричної сім'ї. Але незрівноваженість ротора може змінюватися за модулем від 0 до певного максимального значення, тому завжди існують такі незрівноваженості, які АБ будуть балансувати нескінченно довго. На практиці ж АБ дуже швидко відстежують зміну незрівноваженості ротора і балансують його, так як КВ мають скінченні розміри. А це не враховано при обчисленні параметра  $p$ .

Отже, на сьогодні не розв'язана комплексна задача підбору параметрів реальних кульових чи роликів

АБ (з скінченими розмірами КВ), при яких балансувальна ємність АБ найбільша, а час настання автобалансування найменший.

### 3. Мета і задачі досліджень

Метою роботи є дослідження впливу розміру КВ та їх кількості в АБ на балансувальну ємність АБ та тривалість перебігу ПП в АБ.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі досліджень:

- отримати загальну формулу для визначення балансувальної ємності АБ, придатну для парної і непарної кількості КВ;
- поставити правильно з інженерної точки зору задачу оптимізації параметрів АБ та встановити розмір та кількість КВ, при яких дана ємність є найбільшою;
- з врахуванням кінцевих розмірів КВ визначити межі зміни параметра  $p$ , радіуси та кількості КВ в АБ, при яких тривалість перебігу ПП найменша.

### 4. Методи досліджень залежності балансувальної ємності АБ та тривалості перебігу ПП від параметрів КВ

Досліджуються роторні системи з звичайними однорядними АБ з КВ у вигляді однакових куль або циліндричних роликів.

Для отримання загальної формули визначення балансувальної ємності АБ, придатної для парної і непарної кількості КВ використовуватимуться відомі тригонометричні тотожності.

Балансувальна ємність АБ розглядатиметься як функція багатьох змінних. Буде досліджено вплив кожного параметру на величину цієї функції. Балансувальна ємність АБ буде досліджена на екстремум по кількості КВ в АБ і по радіусу КВ. Одержані результати будуть оцінені з інженерної точки зору і абстрактні математичні результати будуть відкинуті.

З вигляду кореня (1) випливає, що тривалість перебігу ПП (швидкість настання автобалансування) можна оцінювати за функцією

$$a=(1-p)mn. \tag{3}$$

Тривалість перебігу ПП тим менша, чим більше  $a(p,n,m)$ . Тому, настання автобалансування проходить швидше при зменшенні параметра  $p$  та збільшенні маси  $m$  і кількості  $n$  КВ в АБ.

При визначенні меж зміни параметра  $p$  врахуваємо те, що КВ мають скінчений радіус і не можуть проходити один через одного.

### 5. Результати досліджень залежності балансувальної ємності АБ та тривалості перебігу ПП від параметрів КВ

#### 5.1. Обґрунтування використання в АБ не менше трьох КВ

На сьогодні досить добре розроблена теорія автобалансування ротора за допомогою двокульових АБ. Вона ґрунтується на теорії стійкості ізольованих рухів.

Але на практиці завжди використовуються АБ з багатьма КВ. Це дає можливість:

- збільшити балансувальну ємність АБ або зменшити його габарити;
- КВ швидше реагувати на зміну статичної незрівноваженості ротора.

Покажемо останнє на прикладі балансування елементарної статичної незрівноваженості ротора АБ з двома та трьома КВ (рис. 1).

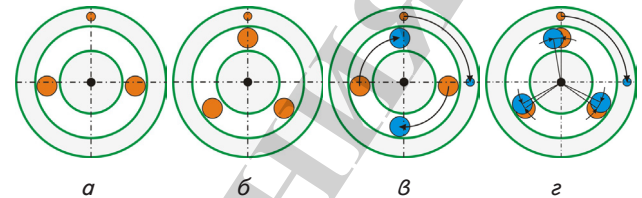


Рис. 1. Положення КВ при балансуванні елементарної статичної незрівноваженості ротора АБ з 2-ма і 3-ма КВ: а, б – положення КВ при початковій незрівноваженості; в, з – положення КВ при зміщенні незрівноваженості на 90°

В АБ з 2-ма КВ (рис. 1, а) останні завжди займають єдиноможливе положення, при якому вони балансують статичну незрівноваженість ротора, а в АБ з 3-ма КВ (рис. 1, б) останні займають одне з можливих положень з однопараметричної сім'ї, при якому вони балансують статичну незрівноваженість ротора.

Якщо елементарна статична незрівноваженість ротора зміститься на 90°, то КВ займуть положення, які показано на рис. 1, в, з, тобто:

- два КВ повернуться навколо центра на 90° (рис. 1, в) і пройдуть по доріжці значні відстані;
- три КВ здійснюють елементарні переміщення (рис. 1, з) і зупиняться в одному з автобалансувальних положень з однопараметричної сім'ї таких положень.

Таким чином, в АБ з трьома КВ процес автобалансування проходить набагато швидше. При більшій кількості КВ в АБ ( $n > 3$ ) існує  $(n-2)$  – параметрична сім'я автобалансувальних положень і автобалансування може наставати ще швидше.

#### 5.2. Обчислення балансувальної ємності АБ

Розглянемо АБ з  $n$  КВ (рис. 2). Нехай:

- радіус і маса КВ рівні, відповідно,  $r$  і  $m$ ;
- радіус бігової доріжки КВ рівний  $R$ ;
- КВ щільно притиснуті один до одного і розташовані симетрично відносно вертикальної осі.

Введемо кут  $\alpha$ :

$$\alpha = \arcsin[r / (R - r)] = \angle O_j O O_{j+1} / 2, \quad /j = \overline{1, n-1} /. \tag{4}$$

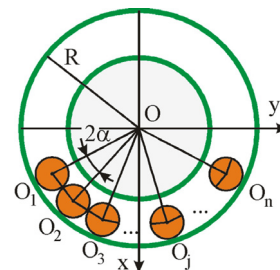


Рис. 2. Визначення балансувальної ємності АБ

Тоді:

$$\begin{aligned} \angle O_j O_x &= \angle O_1 O_x + 2\alpha(j-1) = \\ &= -\alpha(n-1) + 2\alpha(j-1) = -\alpha(n+1-2j), \quad / j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

і балансувальна ємність АБ рівна:

$$\begin{aligned} S_{AB} &= m(R-r) \sum_{j=1}^n \cos \angle O_j O_x = \\ &= m(R-r) \left\{ \sum_{j=1}^n \cos[\alpha(n+1-2j)] \sin \alpha \right\} / \sin \alpha. \end{aligned}$$

Після застосування тригонометричної тотожності і сумування отримуємо:

$$\begin{aligned} S_{AB} &= m(R-r) \left\{ \sum_{j=1}^n \sin[\alpha(n+2-2j)] - \sin[\alpha(n-2j)] \right\} / \sin \alpha = \\ &= m(R-r) \sin n\alpha / \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Враховуючи (4) рівність (5) приймає вигляд:

$$S_{AB} = m(R-r)^2 / r \cdot \sin\{n \arcsin[r / (R-r)]\}.$$

Маса кулі чи циліндричного ролика, відповідно, рівна:

$$m^{(b)} = 4\pi r^3 \gamma / 3, \quad m^{(r)} = \pi r^2 h \gamma, \quad (6)$$

де  $\gamma$  – густина матеріалу, з якого виготовлені КВ,  $h$  – висота циліндричного ролика. Тоді, балансувальна ємність кульового чи роликівого АБ, відповідно, рівна:

$$\begin{aligned} S_{AB}^{(b)} &= \frac{4\pi}{3} \gamma r^2 (R-r)^2 \sin \left( n \arcsin \frac{r}{R-r} \right) = \\ &= \frac{4\pi}{3} \gamma R^4 \rho^2 (1-\rho)^2 \sin \left( n \arcsin \frac{\rho}{1-\rho} \right); \\ S_{AB}^{(r)} &= \pi \gamma h r (R-r)^2 \sin \left( n \arcsin \frac{r}{R-r} \right) = \\ &= \pi \gamma R^4 \eta \rho (1-\rho)^2 \sin \left( n \arcsin \frac{\rho}{1-\rho} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\rho = r/R$ ,  $\eta = h/R$  – безрозмірні параметри. Отже,

$$S_{AB}^{(b)} = S_{AB}^{(b)}(\gamma, R, \rho, n), \quad S_{AB}^{(r)} = S_{AB}^{(r)}(\gamma, R, \eta, \rho, n),$$

тобто балансувальні ємності, кульового і роликівого АБ, відповідно, є функціями 4-х чи 5-и змінних.

Якщо в кульовому та роликівому АБ бігові доріжки мають однакову ширину і КВ повністю її заповнюють, то  $h=2r$ . При цьому

$$S_{AB}^{(r)} / S_{AB}^{(b)} = 3h / (4r) = 1,5,$$

тому роликівий АБ має в 1,5 рази більшу балансувальну ємність в порівнянні з кульовим.

### 5.3. Дослідження балансувальної ємності АБ на найбільше значення

Балансувальні ємності обох типів АБ є монотонно зростаючими функціями від параметрів  $\gamma$  і  $R$ . Тому, щоб одержати АБ найбільшої балансувальної ємності

треба брати матеріал для КВ найбільшої питомої ваги і виготовляти бігову доріжку найбільшого можливого радіусу.

Балансувальна ємність роликівого АБ монотонно зростає із збільшенням  $h$ . Тому найбільша балансувальна ємність досягається, коли циліндричні ролики мають найбільшу можливу висоту.

Дослідимо на максимум балансувальні ємності по параметрам  $n$  і  $\rho$ .

**5.3.1. Підбір кількості КВ з умови найбільшої балансувальної ємності АБ.** Нехай геометричні розміри бігової доріжки та КВ підбрані і обраний матеріал для виготовлення КВ. Тоді у формулах (7) константами є такі параметри  $\gamma, R, h, \rho$ . Знайдемо кількість КВ, при якій балансувальна ємність АБ буде найбільшою.

З формул (7) видно, що балансувальна ємність АБ формально найбільша, коли вираз

$$\sin\{\tilde{n} \arcsin[\rho / (1-\rho)]\}$$

рівний 1 або

$$\tilde{n} = \pi / \{2 \arcsin[\rho / (1-\rho)]\}. \quad (8)$$

Оскільки  $n$  є цілим числом, то кількість куль треба шукати за формулою  $n = [\tilde{n}]$ , де  $[\tilde{n}]$  – функція округлення  $\tilde{n}$  до найближчого цілого.

Якщо  $\tilde{n} \notin N$ , то в залежності від кута  $n\alpha$  КВ можуть займати дещо менше половини, чи дещо більше половини бігової доріжки.

Якщо  $\tilde{n} \in N$ , то  $n = \tilde{n}$  і КВ заповнюють рівно половину бігової доріжки. При цьому з (7) отримуємо:

$$S_{AB}^{(b)} = 4\pi / 3 \cdot R^4 \gamma \rho^2 (1-\rho)^2; \quad S_{AB}^{(r)} = \pi \gamma R^4 \eta \rho (1-\rho)^2.$$

Розв'язавши рівність (8) відносно  $\rho$  (при  $\tilde{n} = n$ ):

$$\rho = \sin[\pi / (2n)] / \{1 + \sin[\pi / (2n)]\},$$

знаходимо співвідношення між радіусами КВ і бігової доріжки, при якому  $n$  КВ займають рівно половину бігової доріжки.

### 5.3.2. Вплив радіуса КВ на балансувальну ємність АБ

Цей вплив будемо досліджувати по параметру  $\rho$ . Введемо безрозмірні функції:

$$s_{AB}^{(r)}(\rho) = \rho(1-\rho)^2 \sin\{n \arcsin[\rho / (1-\rho)]\},$$

$$s_{AB}^{(b)}(\rho) = \rho s_{AB}^{(r)}(\rho). \quad (9)$$

Балансувальні ємності АБ прямопропорційні цим функціям. Тому у подальшому досліджуємо на екстремум ці функції.

Функції (9) було досліджено при фіксованих кількостях КВ. В табл. 1 показані результати досліджень, де:  $n$  – кількість КВ в АБ;  $\rho^{(b)}, \rho^{(r)}$  – оптимальні значення параметра  $\rho$ , відповідно, для кульового та роликівого АБ;  $\varphi^{(b)}, \varphi^{(r)}$  – кути сектора бігової доріжки (в градусах), який заповнюють КВ;  $s_{AB}^{(b)}, s_{AB}^{(r)}$  – значення безрозмірних функцій, що характеризують балансувальні ємності відповідного АБ. Подібну таблицю, але без кутів секто-

рів, було одержано в роботі [2] з використанням інших формул для обчислення балансувальної ємності АБ.

Таблиця 1

Залежність балансувальної ємності АБ від кількості КВ

n	КВ – кулі			КВ – ролики		
	$\rho^{(b)}$	$\varphi^{(b)}$	$S_{AB}^{(b)}$	$\rho^{(r)}$	$\varphi^{(r)}$	$S_{AB}^{(r)}$
1	3/4	–	0,105	2/3	–	0,148
2	3/7	194	0,060	2/5	167	0,143
3	0,364	209	0,051	1/3	180	0,148
4	0,315	219	0,044	0,286	189	0,145
5	0,278	226	0,037	0,251	195	0,140
6	0,248	231	0,031	0,223	201	0,133
7	0,224	235	0,027	0,201	205	0,126
8	0,204	238	0,023	0,183	208	0,119

На рис. 3 показано приклади кульових АБ максимальної балансувальної ємності (при оптимальному радіусі кулі), при різній кількості куль в АБ.

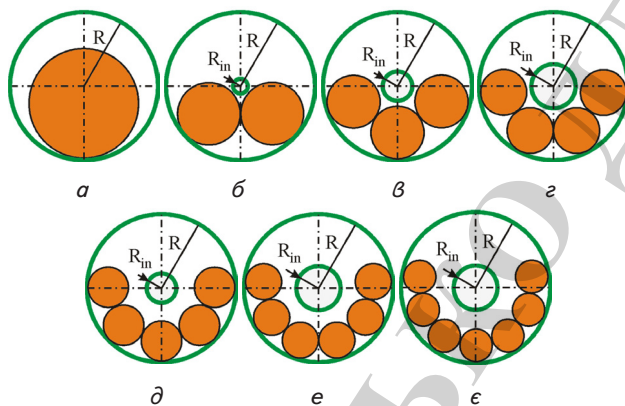


Рис. 3. Кульові АБ максимальної ємності, у випадку, коли куль: а – одна, б – дві, в – три, г – чотири, д – п'ять, е – шість, є – сім

З табл. 1 і рис. 3 видно, що найбільша балансувальна ємність кульового АБ (при невеликій кількості куль –  $p < 5$ ) досягається при займанні кулями трохи більше половини бігової доріжки. При великій кількості куль ( $p \geq 5$ ) можна показати, що балансувальна ємність АБ збільшується при відкиданні в ньому: однієї кулі при  $n = 5 \div 8$  (рис. 3, д–є); двох – при  $n = 9 \div 11$ ; більше двох – при  $n > 11$ . Для циліндричних роликів можна відкинути: один ролик при  $n = 8 \div 12$ , два – при  $n = 13 \div 16$ ; більше двох – при  $n > 17$ . Зауважимо, що можливість існування «зайвих» куль при  $p \geq 5$  уперше виявлено в роботі [4]. Але в ній не з'ясовано скільки таких куль і не даний аналіз коректності задачі оптимізації з технічної точки зору.

Абсолютна найбільша балансувальна ємність досягається при одній кулі чи одному ролику. З точки зору практики це непотрібний. Його, як і появу «зайвих» КВ (при  $p \geq 5$ ) можна пояснити не коректною з технічної точки зору постановкою задачі.

По перше, в математичній постановці задачі неявно покладається, що у випадку: кульового АБ бігова доріжка є сферою; роликового АБ – циліндром. На практиці АБ насаджуються на ротор чи вал і тому їх бігові доріжки є тороподібними. Це – обмежує зверху радіуси КВ.

По друге, при  $p \geq 5$  відбувається помилкова оптимізація. Із збільшенням радіусів КВ нижні КВ (рис. 3, д–є для куль) збільшують балансувальну ємність АБ швидше, ніж її зменшують «зайві» верхні КВ.

Отже, при проектуванні АБ треба враховувати наступне:

1) для працездатності АБ та пришвидшення процесу настання автобалансування в АБ потрібно поміщати не менше трьох КВ;

2) при цьому для збільшення балансувальної ємності АБ потрібно:

– використовувати КВ найбільшого можливого радіусу;

– кількість КВ обирати такою, щоб вони займали майже половину бігової доріжки і їх центри знаходились під горизонтальною віссю, що проходить через центр АБ.

Зауважимо, що у сфері можна розташувати некласичний КВ у вигляді півкулі, що має радіус сфери [3]. Такий КВ (один) може зрівноважити статичну незрівноваженість у поперечній площині, що перетинає подовжню вісь ротора у центрі сфери. Балансувальна ємність півкулі  $\pi R^4 \gamma / 4$  [3]. Балансувальна ємність однієї кулі при  $\rho = 3/4$  рівна  $9\pi R^4 \gamma / 64$ . Отже, заміна кулі на півкулю збільшує балансувальну ємність АБ в  $16/9$  рази і робить АБ повноцінним.

У циліндрі найбільшу балансувальну ємність дає КВ у вигляді півциліндричного сектору. Балансувальна ємність такого КВ  $S = 2R^3 h \gamma / 3$  [3]. Балансувальна ємність одного ролика при  $\rho = 2/3$  рівна  $4\pi R^3 h \gamma / 27$ . Отже, заміна ролика на півциліндричний сектор збільшує балансувальну ємність АБ в  $9/(2\pi) \approx 1,43$  рази. Щоб секторний АБ був повноцінним, треба використовувати 2 і більше циліндричних секторів. Для досягнення максимальної балансувальної ємності треба щоб разом ці сектори заповнювали половину бігової доріжки.

#### 5. 4. Підвищення швидкості настання автобалансування

Дослідимо вираз (3) на найбільше значення. Для цього спочатку проведемо оцінку параметра  $\rho$ .

##### 5. 4. 1. Найбільше значення параметра $\rho$

В роботі [17] при припущенні, що КВ не заважають рухатись один одному, показано, що найбільше значення параметра  $\rho$  рівне 1. Воно приймається, коли КВ розбиті на дві групи і знаходяться в діаметрально протилежних положеннях. Існує  $[n/2]$  різновидностей таких випадків – в одному положенні знаходиться  $j$  КВ ( $j = 0, 1, 2, \dots, [n/2]$ ), а усі інші – в діаметрально протилежному. Кожному з таких випадків відповідає певне значення статичної незрівноваженості ротора. При цьому автобалансування може наступати нескінченно довго.

В реальних АБ КВ можуть тільки дотикатися один одного. Тому випадок  $p = 1$  має місце тільки при двох КВ і відсутності статичної незрівноваженості ротора. В усіх інших випадках параметр  $p$  менший за 1. Визначимо залежність найбільшого значення параметра  $p$  від кількості та розміру КВ для реальних АБ (не допускається взаємопроникнення КВ).

Спочатку розглянемо граничний випадок, коли усі КВ знаходяться в одній стороні АБ (незрівноваженість ротора рівна балансувальній ємності АБ). В цьому випадку сума в (2) рівна:

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^n \cos 2(\tilde{\psi}_i - \tilde{\psi}_k) &= \\ &= n + 2[(n-1)\cos 4\alpha + \\ &+ (n-2)\cos 8\alpha + (n-3)\cos 12\alpha + \dots + \cos 4(n-1)\alpha] = \\ &= n + 2\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\cos 4i\alpha = \\ &= -n + \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)[\sin(2(2j+1)\alpha) - \sin(2(2j-1)\alpha)] \right\} / \sin 2\alpha = \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n \sin 2(2j-1)\alpha \right] / \sin 2\alpha = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n [\cos 4(j-1)\alpha - \cos 4j\alpha] \right\} / (2\sin^2 2\alpha) = \\ &= \sin^2 2n\alpha / (\sin^2 2\alpha) \end{aligned}$$

і з (2) отримуємо:

$$p = \sin 2n\alpha / (n \sin 2\alpha).$$

Якщо КВ заповнюють рівно половину бігової доріжки, то  $\alpha = \pi/n$  і  $p=0$ .

Розглянемо тепер інші критичні випадки. Будемо послідовно по одному перекидати КВ в діаметрально протилежну сторону. Параметр  $p$  при цьому буде збільшуватися. На рис. 4 показано залежність параметра  $p$  від кількості КВ  $j=0, [n/2]$  в діаметрально протилежній групі при  $n=20$  (крива 1),  $n=30$  (крива 2) та  $n=40$  (крива 3) КВ в АБ.

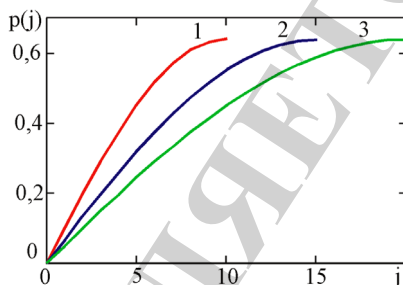


Рис. 4. Залежність параметра  $p$  від кількості КВ в діаметрально протилежному положенні: 1 – 20 КВ в АБ; 2 – 30 КВ в АБ; 3 – 40 КВ в АБ

З рис. 4 слідує, що найбільше значення параметр  $p$  приймає у випадку, коли КВ розбиті на дві однакові або майже однакові групи, відповідно, при парній ( $n=2q$ ) та непарній ( $n=2q+1$ ) кількості КВ, які знаходяться в діаметрально протилежних положеннях.

Нехай в АБ міститься парна кількість КВ і вони розташовані симетрично відносно вертикальної осі симетрії (рис. 5) (це можливо тільки при відсутності статичної незрівноваженості ротора).

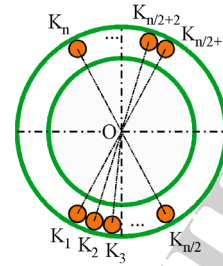


Рис. 5. Визначення найбільшого значення параметра  $p$

Виділимо в сумі (2) чотири групи доданків:

а) доданки, в яких  $i=j$ ; їх  $n$  і кожний з них рівний одиниці, тому  $\Sigma_1 = n$ ;

б) доданки, в які входять КВ тільки з нижньої або тільки з верхньої групи:

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= 2 \cdot 2 \cdot [(q-1)\cos 4\alpha + (q-2)\cos 8\alpha + \\ &+ (q-3)\cos 12\alpha + \dots + \cos 4(q-1)\alpha] = \\ &= 2 \sum_{j=1}^q (n-2j)\cos 4j\alpha; \end{aligned}$$

в) доданки, в які входить один КВ з нижньої, а інший з верхньої групи, але не діаметрально протилежні:

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= 2 \{ [2 + 2(q-2)]\cos 4\alpha + \\ &+ [4 + 2(q-4)]\cos 8\alpha + [6 + 2(q-6)]\cos 12\alpha + \dots + \\ &+ [2(q-1) + 2(q-2(q-1))]\cos 4(q-1)\alpha \} = \\ &= 2 \sum_{j=1}^q (n-2j)\cos 4j\alpha; \end{aligned}$$

г) доданки, в які входять діаметрально протилежні КВ ( $|i-j| = n/2$ ):

$$\Sigma_4 = 2 \cdot q = n.$$

З п. п. а–г отримуємо:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \cos 2(\tilde{\psi}_i - \tilde{\psi}_j) &= 2n + 4 \sum_{j=1}^q (n-2j)\cos 4j\alpha = \\ &= 2n + 2 \left\{ \sum_{j=1}^q (n-2j)[\sin 2(2j+1)\alpha - \sin 2(2j-1)\alpha] \right\} / \sin 2\alpha = \\ &= 2n + 2 \left[ -n \sin 2\alpha + 2 \sum_{j=1}^q \sin 2(2j-1)\alpha \right] / \sin 2\alpha = \\ &= 2 \left\{ \sum_{j=1}^q [\cos 4(j-1)\alpha - \cos 4j\alpha] \right\} / \sin^2 2\alpha = \\ &= 2(1 - \cos 2n\alpha) / \sin^2 2\alpha = (2 \sin n\alpha / \sin 2\alpha)^2. \end{aligned}$$

Підставивши останній вираз в (2), отримаємо:

$$p_{\max} = 2 \sin n\alpha / (n \sin 2\alpha). \tag{10}$$

Якщо КВ заповнюють половину бігової доріжки, то:

$$\alpha = \pi / (2n) \tag{11}$$

і

$$p_{\max}(n) = 2 / [n \sin(\pi / n)] \text{ при } n=2q. \tag{12}$$

Нехай в АБ непарна кількість КВ і вони розташовані симетрично відносно вертикальної осі. При цьому внизу знаходиться  $q+1$  КВ, а вгорі –  $q$  (це можливо при малій статичній незрівноваженості ротора, яка майже балансується одним КВ).

Аналогічно парній кількості КВ розбиваємо суму в (2) на три групи доданків (відсутня четверта група для діаметрально протилежних КВ). Суми для перших двох груп такі ж самі. Для третьої групи маємо:

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= 4[q \cos 2\alpha + (q-1) \cos 6\alpha + \\ &+ (q-3) \cos 10\alpha + \dots + \cos 2(2q-1)\alpha] = \\ &= 2 \sum_{j=1}^q (n+1-2j) \cos 2(2j-1)\alpha. \end{aligned}$$

Таким чином, для непарної кількості КВ отримуємо:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \cos 2(\tilde{\psi}_i - \tilde{\psi}_j) &= \\ &= n + 2 \sum_{j=1}^q [(n-2j) \cos 4j\alpha + (n+1-2j) \cos 2(2j-1)\alpha] = \\ &= n + 2 \sum_{j=1}^n (n-j) \cos 2j\alpha = \\ &= n + \left\{ \sum_{j=1}^n (n-j) [\sin(2j+1)\alpha - \sin(2j-1)\alpha] \right\} / \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{j=1}^n \sin(2j-1)\alpha = \\ &= \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \sum_{j=1}^n [\cos 2(j-1)\alpha - \cos 2j\alpha] = \frac{1 - \cos n\alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Підставивши останній вираз в (2) отримуємо:

$$r_{\max} = \sin n\alpha / (n \sin \alpha). \tag{13}$$

У випадку, коли КВ заповнюють половину бігової доріжки, отримуємо:

$$r_{\max}(n) = 1 / \{n \sin[\pi / (2n)]\} \text{ при } n=2q+1. \tag{14}$$

*Зауваження 1.* Можна показати, що праві частини в (10), (13) при  $n > 2$  є монотонно спадними функціями відносно кута  $\alpha$  або безрозмірного параметра  $\rho$  на їх області визначення.

*Зауваження 2.* Формули (12), (14), дають однакові результати, якщо в них кількість КВ рівна, відповідно,  $n_1=2q+1$  і  $n_2=2(2q+1)$ ,  $q=1, 2, 3, \dots$ . На рис. 6 показано приклади таких пар АБ при  $q=1$  і  $q=2$ .

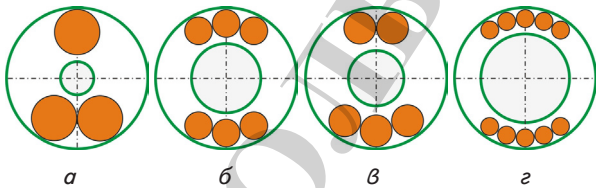


Рис. 6. Приклади АБ з непарними та парними кількостями КВ, при яких параметр  $\rho$  приймає однакове значення: а, б – три і шість КВ в АБ; в, з – п'ять і десять КВ в АБ

В (12) і (14) функція  $r_{\max}(n)$  є монотонно спадною і її найменше (граничне) значення рівне:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\max} = 2 / \pi \approx 0,637.$$

Так як  $r_{\max}(3) = 0,667$ , то для зменшення значення  $r_{\max}$  достатньо помістити в АБ 3 КВ. Перевищення параметром  $r_{\max}$  свого граничного значення при цьому складає 4,7 %.

#### 5. 4. 2. Визначення найменшого значення параметра $\rho$

При відсутності статичної незрівноваженості ротора і при більше двох КВ в АБ значення  $r_{\min}$  завжди рівне 0.

Дійсно, якщо  $n$  КВ розташувати в вершинах правильного  $n$ -кутника, то кути  $\tilde{\psi}_i$  в (2) рівні  $\tilde{\psi}_i = 2\pi(i-1)/n$ ,  $i=1, n$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \cos 2(\tilde{\psi}_i - \tilde{\psi}_j) &= \sum_{i,k=1}^n \cos[4\pi(i-j)/n] = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\sin(2\pi(2i-2j+1)/n) - \sin(2\pi(2i-2j-1)/n)] \right\} / [2 \sin(2\pi/n)] = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n [\sin(2\pi(2i-1)/n) - \sin(2\pi(2i-2n-1)/n)] \right\} / [2 \sin(2\pi/n)] = 0. \end{aligned}$$

При появі статичної незрівноваженості ротора та її збільшенні величина  $r_{\min}$  залежить як від величини статичної незрівноваженості, так і від кількості КВ. Із збільшенням кількості КВ суттєво збільшується кількість їхніх положень, при яких  $r_{\min} = 0$ .

#### 5. 4. 3. Дослідження тривалості перебугу ПП на найменше значення відносно радіусу та кількості КВ

Розглянемо випадок, коли відсутня незрівноваженість (при парній кількості КВ) або зрівноваженість балансується одним КВ (при непарній кількості КВ), тобто коли  $\rho = r_{\max}$ .

З (3), (6), (10), (13) введемо такі безрозмірні функції  $\tilde{a}^{(r)}(\rho)$ ,  $\tilde{a}^{(b)}(\rho)$ , які характеризують тривалість протікання ПП, відповідно, в роликовому та кульовому АБ. Для непарної кількості КВ вони мають вигляд (15), а для парної – (16):

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{(r)}(\rho) &= \{n\rho - (1-\rho) \sin[n \arcsin(\rho / (1-\rho))]\} \rho, \\ \tilde{a}^{(b)}(\rho) &= \rho \tilde{a}^{(r)}(\rho), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{(r)}(\rho) &= \{n\rho - (1-\rho)^2 \sin[n \arcsin(\rho / (1-\rho))]\} / \sqrt{1-2\rho} \rho, \\ \tilde{a}^{(b)}(\rho) &= \rho \tilde{a}^{(r)}(\rho). \end{aligned} \tag{16}$$

Більше значення цих функцій відповідає більш швидкому настанню автобалансування. Функції  $\tilde{a}^{(r)}(\rho)$ ,  $\tilde{a}^{(b)}(\rho)$  при будь-якій фіксованому  $n > 2$  є монотонно зростаючими на області  $\rho \in [0, \rho_{\max}(n)]$ , де  $\rho_{\max}(n)$  – значення параметра  $\rho$ , при якому  $n$  КВ повністю заповнюють бігову доріжку ((3), Зауваження 1, і (6)). На рис. 7 показано залежність значень цих функцій від кількості КВ в АБ при відповідних оптимальних значеннях параметра  $\rho$  (табл. 1).

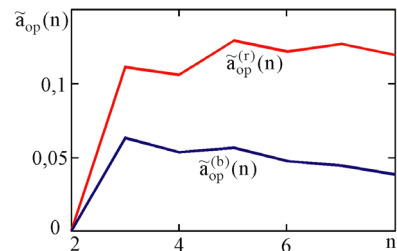


Рис. 7. Залежність оптимальних значень функції, яка характеризує тривалість ПП, від кількості КВ в АБ

З рис. 7 слідує, що найменша тривалість перебугу ПП досягається при 3 кулях або 5 циліндричних роликах.

## 6. Обговорення результатів дослідження впливу параметрів корегувальних вантажів на балансувальну ємність та тривалість перебігу ПП в АБ

1. Балансувальна ємність як кульового так і роликів АБ, при будь-якій кількості КВ описується компактною формулою, що піддається аналітичному дослідженню.

2. Для пришвидшення процесу настання автобалансування в АБ повинно бути не менше 3-х КВ. Для одержання найбільшої балансувальної ємності АБ в фіксованому об'ємі треба, щоб КВ майже на половину заповнювали бігову доріжку.

Задача пошуку радіусу КВ, що забезпечує найбільшу балансувальну ємність АБ при фіксованому діаметрі бігової доріжки не коректна з технічної точки зору. По перше, в математичній задачі пошуку екстремуму балансувальної ємності неявно покладається, що у випадку: кульового АБ бігова доріжка є сферою; роликів АБ – циліндром. Це призводить до безкорисного для практики результату, що найбільша балансувальна ємність забезпечується одним КВ. На практиці АБ насаджуються на ротор чи вал і тому їх бігові доріжки є тороподібними. Це – обмежує зверху радіуси КВ. По друге, при  $p \geq 5$  для куль і  $p \geq 8$  для роликів відбувається помилкова оптимізація. Із збільшенням радіусів КВ найбільш віддалені з них збільшують балансувальну ємність АБ швидше, ніж її зменшують «зайві» КВ, розташовані найближче до горизонтальної лінії, що проходить через центр АБ. Єдиним практично значимим результатом розв'язку такої задачі є вимога, щоб КВ мали найбільший можливий радіус.

Зауважимо, що використання КВ найбільшого радіуса підвищує точність балансування через зменшення сил опору коченню.

3. При дослідженні тривалості перебігу ПП на найменше значення встановлено, що:

- критичний випадок ( $p=1$  – процес автобалансування настає нескінченно довго) для реальних АБ може наступити тільки при двох КВ в АБ і відсутності статичної незрівноваженості ротора;
- при збільшенні кількості КВ в АБ найбільше можливе значення параметра  $p$  зменшується і наближається до  $2/\pi$ ;
- для пришвидшення настання автобалансування потрібно, щоб КВ займали майже половину бігової доріжки;

– найменший час настання автобалансування при цьому забезпечують 3 кулі або 5 циліндричних роликів.

Перевагами запропонованого підходу підбору параметрів КВ в АБ є те, що в ньому ув'язані між собою три вимоги:

- підвищення точності балансування через зменшення сил опору коченню КВ;
- одержання в фіксованому об'ємі найбільшої балансувальної ємності;
- забезпечення настання автобалансування за мінімальний проміжок часу.

До недоліків запропонованого підходу можна віднести те, що одержані результати не перевірено натурними чи віртуальними експериментами. Немає оцінок збільшення точності чи зменшення тривалості перебігу ПП для реальних роторів з АБ.

Результати роботи можна застосовувати при проектуванні АБ для балансування на ходу швидкообертливих жорстких та гнучких роторів.

У подальшому планується підтвердити правильність отриманих результатів на конкретних роторних машинах з АБ.

## 7. Висновки

Проведено дослідження з підбору оптимальних параметрів КВ в кульових і роликів АБ. Ув'язані між собою три вимоги: підвищення точності балансування через зменшення сил опору коченню КВ, одержання в фіксованому об'ємі найбільшої балансувальної ємності АБ, забезпечення настання автобалансування за мінімальний проміжок часу. Основні результати наступні.

1. Балансувальна ємність, як кульового, так і роликів АБ, при будь-якій кількості КВ описується компактною аналітичною формулою, що піддається аналітичному дослідженню.

2. Для пришвидшення процесу настання автобалансування в АБ повинно бути не менше 3-х КВ. Для одержання найбільшої балансувальної ємності АБ в фіксованому об'ємі треба, щоб КВ майже на половину заповнювали бігову доріжку і мали найбільший можливий радіус.

3. Для пришвидшення настання автобалансування КВ повинні займати майже половину бігової доріжки АБ. Найменший час настання автобалансування при цьому забезпечують 3 кулі або 5 циліндричних роликів.

## Література

1. Thearle, E. L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers [Text] / E. L. Thearle // Machine Design. – 1950. – Vol. 22, Issue 10. – P. 103–106.
2. Гусаров, А. А. Автобалансирующие устройства прямого действия [Текст] / А. А. Гусаров. – М.: Наука, 2002. – 119 с.
3. Філімоніхін, Г. Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами [Текст] / Г. Б. Філімоніхін. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
4. Нестеренко, В. П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы [Текст] / В. П. Нестеренко. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84 с.
5. Tadeusz, M. Position error occurrence in self balancers used on rigid rotors of rotating machinery [Text] / M. Tadeusz // Mechanism and Machine Theory. – 1988. – Vol. 23, Issue 1. – P. 71–78. doi: 10.1016/0094-114x(88)90011-0
6. Yang, Q. Study on the influence of friction in an automatic ball balancing system [Text] / Q. Yang, E.-H. Ong, J. Sun, G. Guo, S.-P. Lim // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 285, Issue 1-2. – P. 73–99. doi: 10.1016/j.jsv.2004.08.009
7. Chao, P. C.-P. Effects of Rolling Friction of the Balancing Balls on the Automatic Ball Balancer for Optical Disk Drives [Text] / P. C.-P. Chao, C.-K. Sung, H.-C. Leu // Journal of Tribology. – 2005. – Vol. 127, Issue 4. – P. 845. doi: 10.1115/1.2032992



8. Ishida, Y. Efficiency Improvement of an Automatic Ball Balancer [Text] / Y. Ishida, T. Matsuura, X. L. Zhang // Journal of Vibration and Acoustics. – 2012. – Vol. 134, Issue 2. – P. 021012. doi: 10.1115/1.4005013
9. Sung, C. K. Influence of external excitations on ball positioning of an automatic balancer [Text] / C. K. Sung, T. C. Chan, C. P. Chao, C. H. Lu // Mechanism and Machine Theory. – 2013. – Vol. 69. – P. 115–126. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2013.05.009
10. Haidar, A. M. A general model for passive balancing of supercritical shafts with experimental validation of friction and collision effects [Text] / A. M. Haidar, J. L. Palacios // Journal of Sound and Vibration. – 2016. – Vol. 384. – P. 273–293. doi: 10.1016/j.jsv.2016.08.023
11. Детинко, Ф. М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической балансировки [Текст] / Ф. М. Детинко // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и Машиностр. – 1956. – № 4. – С. 38–45.
12. Gorbenko, A. N. On the Stability of Self-Balancing of a Rotor with the Help of Balls [Text] / A. N. Gorbenko // Strength of Materials. – 2003. – Vol. 35, Issue 3. – P. 305–312. doi: 10.1023/a:1024621023821
13. Горбенко, А. Н. Изменение границы устойчивости автобалансировки ротора шарами в процессе эксплуатации [Текст] / А. Н. Горбенко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2008. – № 8. – С. 156–159. – Режим доступа: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit\\_2008\\_8\\_33](http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2008_8_33)
14. Горбенко, А. Н. Обобщенное характеристическое уравнение устойчивости роторных машин с автобалансиром [Текст] / А. Н. Горбенко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – № 1. – С. 76–82. – Режим доступа: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit\\_2012\\_1\\_14](http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2012_1_14)
15. Горбенко, А. Н. Массо-инерционные характеристики и безразмерные уравнения движения двухопорного ротора с автобалансиром с учетом массы компенсирующих грузов [Текст] / А. Н. Горбенко // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2015. – № 12. – С. 266–294. doi: 10.7463/1215.0827773
16. Филimoniхин, Г. Б. Уравновешивание автобалансиром ротора в упруго-вязко закрепленном корпусе с неподвижной точкой [Текст] / Г. Б. Филimoniхин, В. В. Гончаров // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 324, № 2. – С. 71–77.
17. Филimoniхин, Г. Б. Уравновешивание автобалансиром ротора в упруго-вязко закрепленном корпусе, совершающем пространственное движение [Текст] / Г. Б. Филimoniхин, В. В. Гончаров // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 325, № 2. – С. 41–49.
18. Гончаров, В. В. Дослідження стійкості ротора в корпусі на податливих опорах, який динамічно зрівноважується двома автобалансирами [Текст] / В. В. Гончаров // Вібрації в техніці та технологіях. – 2015. – № 4 (80). – С. 10–18.
19. Goncharov, V. Studying the peculiarities of balancing of flexible double-support rotors by two passive automatic balancers placed near supports [Text] / V. Goncharov, G. Filimonikhin, K. Dumenko, M. Lychuk // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 4, Issue 7 (82). – P. 4–9. doi: 10.15587/1729-4061.2016.75115

ТОЛЬКО ДЛЯ ЧЛЕНОВ

