

УДК 621.3

DOI: 10.15587/2312-8372.2019.154680

## РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА З АВТОНОМНИМ РЕГУЛЬОВАНИМ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИМ ПЕРЕТВОРЮВАЧЕМ ЕНЕРГІЇ

Острове́рхов М. Я., Трінчук Д. Я.

### 1. Вступ

Нелінійні електричні кола з автономними регульованими електромеханічними перетворювачами енергії на сьогоднішній день знаходять широке застосування. Найбільш розповсюдженим з таких є автономний електричний транспорт: електромобілі, електроскутери, електробуси, сігвеї тощо. Для покращення їхньої конкурентоспроможності потрібно підвищувати енергоефективність, в тому числі, досягати найменш можливого споживання енергії у динаміці руху. Задля цього необхідно мати достатньо точну і водночас просту модель електричного кола для проведення досліджень на етапі проектування.

Тому актуальним є завдання з розробки математичної моделі, достатньо адекватної для проведення точних енергетичних розрахунків нелінійного кола.

### 2. Об'єкт дослідження та його технологічний аудит

Об'єктом дослідження є нелінійне електричне коло з автономним регульованим електромеханічним перетворювачем енергії, яке моделює привід автономних електричних транспортних засобів. Таке коло містить наступні компоненти:

- джерело електричної енергії – зазвичай це літій-іонні акумулятори, до яких часто паралельно підключається батарея суперконденсаторів;
- перетворювач електричної енергії – напівпровідниковий перетворювач на транзисторах, який забезпечує параметри струму на джерелі енергії до параметрів струму на споживачі;
- електромеханічний перетворювач – електродвигун.

Якщо при розробці математичної моделі такого електричного кола врахувати всі параметри його складових, то складність системи математичних рівнянь не тільки не дозволить отримати аналітичний розв'язок, але й призведе до високої складності розрахунків при її чисельному розв'язку. Спрощення моделі шляхом нехтування певними параметрами може суттєво спростити систему рівнянь при збереженні необхідної точності розрахунків.

### 3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є розробка математичної моделі нелінійного електричного кола з автономним регульованим електромеханічним перетворювачем енергії, максимально простої для скорочення часу пошуку чисельних розв'язків. Але при цьому достатньо точної для проведення енергетичних розрахунків на етапі проектування.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

1. Скласти математичні моделі реальних елементів електричного кола.
2. Визначити, які параметри в цих моделях є достатньо несуттєвими, аби ними можна було знехтувати.
3. Завершити розробку математичної моделі кола, створивши відповідну їй комп'ютерну модель.

#### **4. Дослідження існуючих рішень проблеми**

На сьогоднішній день вже проводилась низка досліджень нелінійних електричних кіл з автономними регульованими електромеханічними перетворювачами енергії в цілому та їхніх елементів окремо. Для цих досліджень був створений ряд математичних моделей з акцентом уваги на той чи інший елемент.

Зокрема, в роботі [1] були представлені різні математичні моделі асинхронних двигунів, але без прив'язки до джерела живлення. В роботі [2] виділена найбільш зручна з цих моделей, але вона не враховує енергетичні втрати в магнітопроводі двигуна.

В роботі [3] була представлена модель акумулятора при його тривалій роботі з урахуванням його розряду. Вона також враховувала падіння напруги на активному опорі акумулятора, але не враховувала перехідних процесів, які протікають в цьому елементі. Вони були показані в роботах [4, 5], проте без прив'язки до навантаження.

Дослідження роботи акумулятора на навантаження, в тому числі на електричні двигуни, представлені в роботах [6, 7]. Сучасні тенденції показують, що окрім акумулятора часто використовується паралельно підключений до нього суперконденсатор, чого не було досліджено в жодній з вищевказаних робіт. Математична модель суперконденсатора наведена в роботі [8], але без прив'язки до інших елементів.

Повне електричне коло з акумулятором, суперконденсатором та навантаженням було досліджено в роботі [9]. Проте увага акцентувалась виключно на джерелі живлення, а модель навантаження була дуже спрощеною, неадекватною до електричного двигуна. Модель двигуна застосована в роботі [10], але система керування була спрощена для пришвидшення розрахунків. Така модель може бути доволі точною для динамічних розрахунків електропривода, але вона дає велику похибку в енергетичних розрахунках, оскільки не враховує енергетичні процеси при імпульсному режимі роботи з широтно-імпульсною модуляцією.

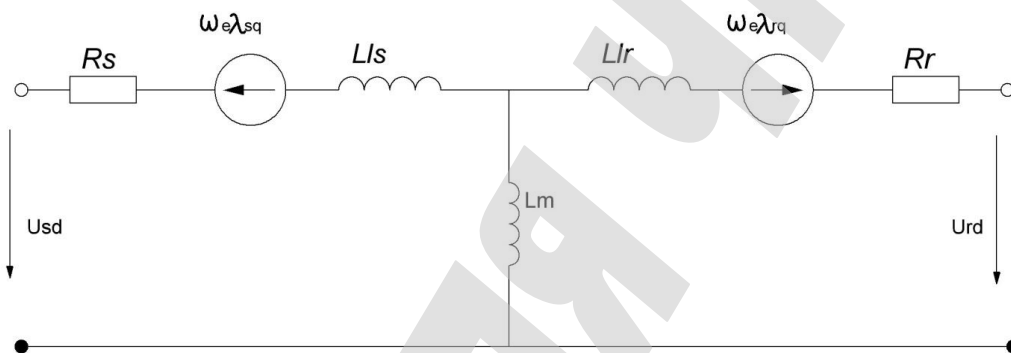
Таким чином, питання створення адекватної моделі нелінійного електричного кола з автономним регульованим електромеханічним перетворювачем енергії для проведення енергетичних розрахунків залишається перспективним.

#### **5. Методи дослідження**

Найскладнішим з точки зору математичного опису елементом даного кола є електричний двигун. Математична модель для нього буде відрізнятися в залежності від типу цього двигуна. Найбільш універсальним є опис асинхронного двигуна (АД). Це найбільш розповсюджений тип двигуна на сьогоднішній день, в тому числі він є дуже розповсюдженим в електричних транспортних засобах. Також від моделі АД можливо перейти до моделей інших типів двигунів.

Для зменшення кількості рівнянь в роботі розглядається модель не в природних трифазних координатах, а в ортогональній двофазній системі координат. Також, для спрощення поки що знехтуємо втратами енергії в магнітопроводі двигуна. Електрична схема заміщення однієї фази такої системи зображена на рис. 1, де позначено:

- $R_s, R_r$  – активні опори обмоток статора та ротора двигуна;
- $L_m$  – взаємна індуктивність обмоток статора та ротора;
- $L_{ls}, L_{lr}$  – індуктивності розсіювання обмоток статора та ротора відповідно;
- $\lambda_{sd}, \lambda_{sq}, \lambda_{rd}, \lambda_{ra}$  – електрорушійна сила (ЕРС) індукції обмоток статора та ротора в проекціях на  $d$ - та  $q$ -осі;
- $\omega_e$  – швидкість обертання магнітного поля;
- $u_{sd}$  – напруга на затискачах обмотки статора в проекції на  $d$ -вісь.



**Рис. 1.** Еквівалентне коло заміщення асинхронного двигуна в проекції на  $d$ -вісь

Після математичних перетворень можна отримати повну систему диференційних рівнянь для асинхронного двигуна [2]:

$$\begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + sL_s & -\omega_e L_s & sL_m & -\omega_e L_m \\ -\omega_e L_s & R_s + sL_s & -\omega_e L_m & sL_m \\ sL_m & (\omega_e - \omega_r)L_m & R_r + sL_r & (\omega_e - \omega_r)L_r \\ -(\omega_e - \omega_r)L_m & sL_m & -(\omega_e - \omega_r)L_r & R_r + sL_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_{qs} \\ u_{ds} \\ u_{qr} \\ u_{dr} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$T_e = T_L + \frac{2}{p} J \frac{d\omega_r}{dt},$$

$$T_e = \frac{3}{2} \left( \frac{p}{2} \right) (\Psi_{dm} i_{qs} - \Psi_{qm} i_{dr}),$$

де  $i_{qs}, i_{qr}, i_{ds}, i_{dr}$  – струми в обмотках статора і ротора в проекціях на  $d$ - та  $q$ -осі;

$\omega_r$  – швидкість обертання ротора;

$T_e$  – електромеханічний момент двигуна;

$T_L$  – статичний момент навантаження на валу двигуна;

$p$  – кількість пар полюсів двигуна;

$J$  – приведений момент інерції системи двигун-приводний механізм;

$\Psi_{dm}, \Psi_{qm}$  – потокозчеплення в проекціях на  $d$ - та  $q$ -осі;  
 $s$  – оператор Лапласа.

Ця система рівнянь має п'ятий порядок, проте в останньому рівнянні виникає нелінійність, а значить система не може бути розв'язана аналітично. При створенні такої моделі було знехтувано насиченістю магнітопроводу, несинусоїдальністю розподілу магнітного поля, нерівномірністю повітряного проміжку та втратами енергії в магнітопроводі на гістерезис та вихрові струми. Останні є доволі суттєвими, при енергетичних розрахунках виникає необхідність їх врахування, тому це буде зроблено пізніше.

Електрична схема заміщення акумулятора зображена на рис. 2, де показано:

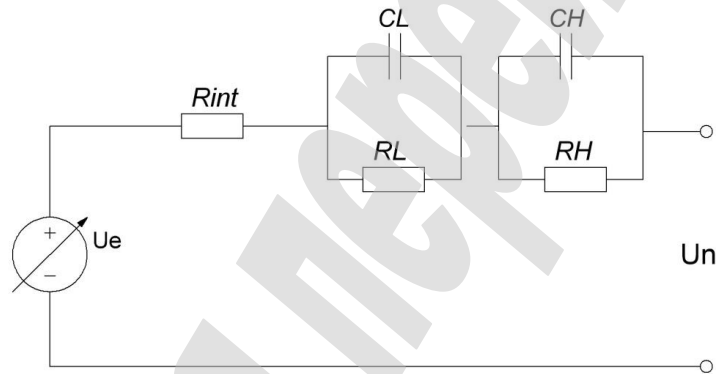
$U_e$  – напруга акумулятора, що залежить від стану його заряду;

$R_{int}$  – внутрішній активний опір акумулятора;

$C_L, R_L$  – ємність та опір, що пов'язані з інтеркаляцією та переносом маси літію;

$C_H, R_H$  – електрохімічні ємність та опір подвійного шару;

$U_n$  – напруга на виході акумулятора.



**Рис. 2.** Електрична схема заміщення акумулятора

У схемі на рис. 2 напруга акумулятора є змінною і вона залежить від стану заряду акумулятора. Цю залежність можна виразити за рівнянням Шефєрда [3]:

$$U_e = E_0 - K \left( \frac{q}{Q - q} \right) i_e + A \left( \exp \left( -B \frac{q}{Q} \right) - 1 \right), \quad (2)$$

де  $E_0$  – ЕРС акумулятора;

$Q$  – максимальна ємність акумулятора;

$q$  – повний заряд, який акумулятор віддав за час його роботи;

$i_e$  – струм через акумулятор;

$K, A, B$  – експериментальні константи.

Рівняння, отримані з такої математичної моделі, також мають нелінійності. Проте їх можна спростити, якщо припустити, що розрахунки на етапі проектування проводитимуться для режимів, що за тривалістю не перевищують десятків секунд. У такому разі з доволі високою точністю можна вважати, що стан заряду акумулятора за цей час не змінюватиметься, а отже  $U_e = const$ . Таким чином можна

позбутися нелінійності в моделі акумулятора. Окрім того, можна знехтувати і ємнісними колами у схемі заміщення. Попередні розрахунки показали, що їхній вплив на величину струму буде значно слабший, аніж вплив електродвигуна.

Для суперконденсатора існує низка схем заміщення. Найбільш розповсюджена з них зображена на рис. 3 [9], де показано:

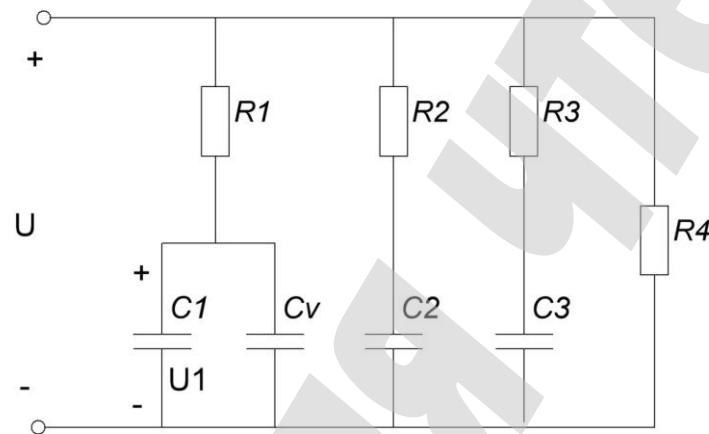
$C_{1-3}$  – сталі ємності суперконденсатора;

$R_{1-3}$  – опори ємнісних гілок суперконденсатора;

$R_4$  – опір саморозряду;

$C_V$  – ємність, величина якої залежить від напруги;

$U$  – напруга на обкладинках суперконденсатора.



**Рис. 3.** Схема заміщення суперконденсатора

На схемі на рис. 3 зображені три ємнісні гілки з різними сталими часу, які зростають зі збільшенням номеру індексу гілки. Ємність  $C_V(U_1)$  – залежна від напруги ємність. Функцію залежності можна прийняти за лінійну:

$$C_V = k_{CV} \cdot |U|, \quad (3)$$

де  $k_{CV}$  – коефіцієнт пропорційності, що визначається експериментально.

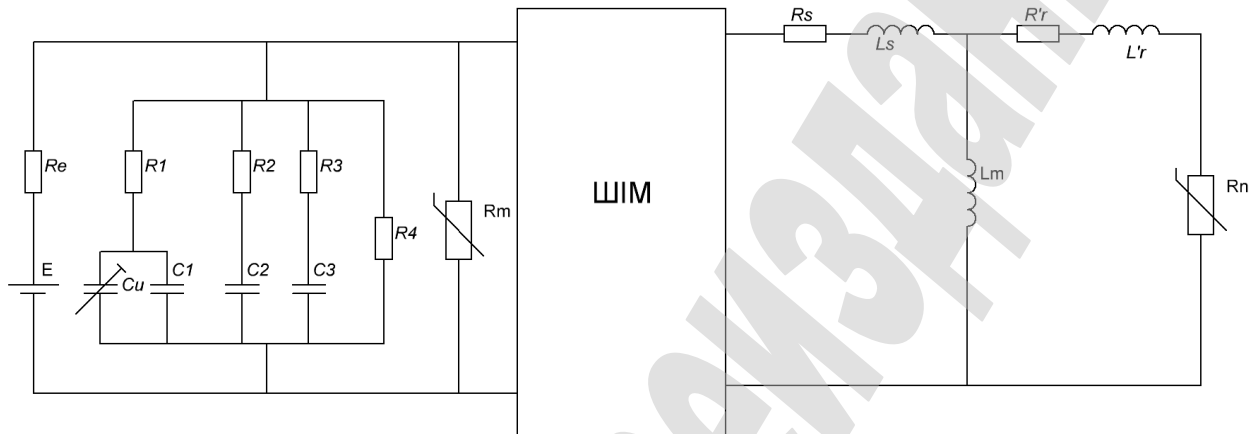
Математична модель суперконденсатора виглядатиме наступним чином:

$$\begin{aligned}
 I_C &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \\
 I_1 &= (C_1 + k_{CV} |U_C - I_1 R_1|) \frac{d(U_C - I_1 R_1)}{dt}, \\
 I_2 &= C_2 \frac{d(U_C - I_2 R_2)}{dt}, \\
 I_3 &= C_3 \frac{d(U_C - I_3 R_3)}{dt}, \\
 I_4 &= \frac{U_C}{R_4},
 \end{aligned} \quad (4)$$

де  $I_i$  – струм  $i$ -ї гілки кола;

$I_c$  – повний струм, що протікає через суперконденсатор.

Отже, маючи моделі кожного з елементів, можна зобразити схему заміщення електричного кола (рис. 4), де показано широтно-імпульсний модулятор (ШІМ), який виконує перетворення електричної енергії та узгоджує параметри струму на акумуляторі та двигуні.



**Рис. 4.** Спрощена електрична схема заміщення електричного кола: ШІМ – широтно-імпульсний модулятор

Окрім описаних вище моделей, схема має два додаткових елементи:  $R_n$  та  $R_m$  – це опори, що враховують навантаження та магнітні втрати. Обидва ці опори є нелінійними. Опір навантаження  $R_n$  можна визначити з механічної потужності навантаження:

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_n}, \quad R_n = \frac{U_2^2}{P_2}, \quad (5)$$

де  $P_2$  – механічна потужність, яка задається навантажувальною характеристикою для бажаних режимів роботи;

$U_2$  – напруга на виході схеми заміщення двигуна, яку можна визначити з системи (1).

Вираз для визначення значення опору  $R_m$  знаходиться з рівності потужності електричних втрат на опорі та потужності магнітних втрат в двигуні і має наступний вигляд:

$$\frac{U_1^2}{R_m} = k_m \Psi^2 f^{1,5},$$

$$R_m = \frac{U_1^2}{k_m \Psi^2 f^{1,5}}, \quad (6)$$

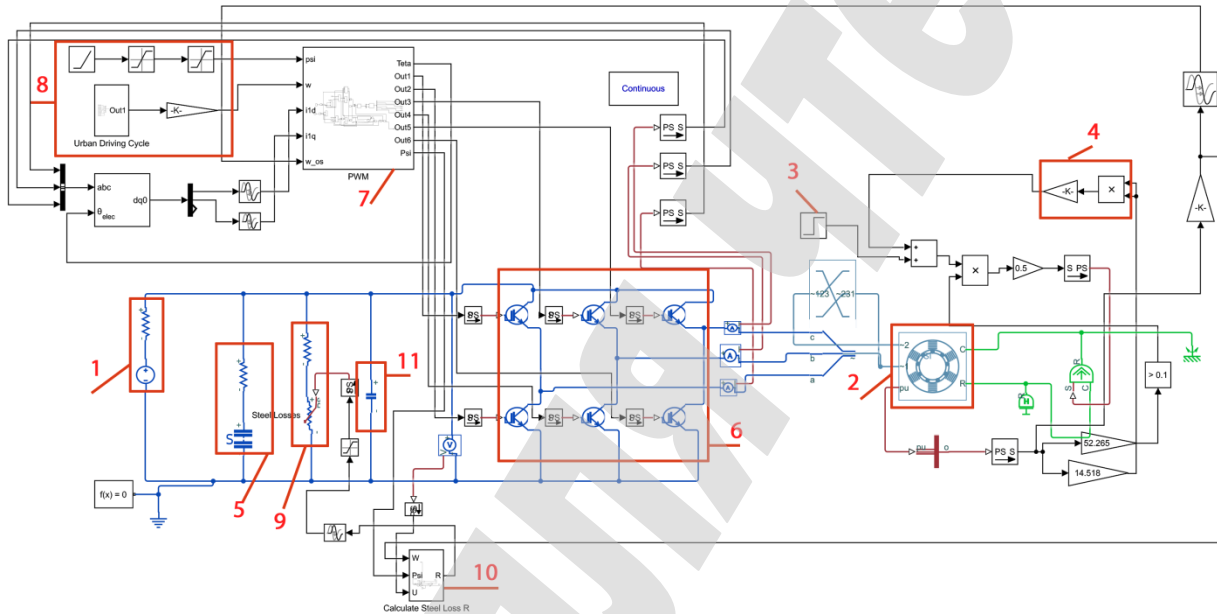
де  $U_1$  – напруга на вході ШІМ;

$\Psi$  – магнітний потік, який задається векторним керуванням;

$f$  – частота струму в колі АД, яка задається векторним керуванням;  
 $k_m$  – коефіцієнт пропорційності, який визначається експериментально.

## 6. Результати дослідження

Отримана система математичних рівнянь містить чотири нелінійності: добутки потокозчеплення та струмів в асинхронному двигуні, нелінійна ємність у суперконденсаторі та нелінійні резистори  $R_m$  та  $R_n$ . Отже, для вирішення такої системи виникає необхідність до застосування чисельних розрахунків. Для цього в роботі розроблена комп'ютерна модель даного кола в програмному пакеті Matlab Simulink (рис. 5).



**Рис. 5.** Комп'ютерна модель нелінійного електричного кола з автономним регульованим електромеханічним перетворювачем енергії: 1 – акумулятор; 2 – асинхронний двигун (АД); 3 – постійна складова моменту навантаження; 4 – змінна складова моменту навантаження, пропорційна до квадрату швидкості обертання ротора двигуна; 5 – суперконденсатор; 6 – широтно-імпульсний модулятор (ШІМ); 7 – блок векторного керуванні ШІМ; 8 – блоки завдання швидкості та магнітного потоку для векторного керування; 9 – нелінійний резистор, що моделює втрати в сталі АД; 10 – блоки розрахунки опору нелінійного резистора; 11 – ємнісний фільтр

Ця модель дозволяє з достатньою точністю проводити дослідження та розрахунки параметрів кола на стадії проектування. В якості навантаження електродвигуна користувач може задавати як постійний момент опору, так і момент, пропорційний до квадрату швидкості (вентиляторна характеристика), або їх суму. Керування електромеханічним перетворювачем виконується за законами векторного регулювання при завданні швидкості обертання ротора двигуна та магнітного потоку. Дослідження моделі показало адекватність електромагнітних процесів в розробленому еквівалентному електричному колі до процесів у реальному колі з автономним регульованим електромеханічним перетворювачем.

## 7. SWOT-аналіз результатів досліджень

*Strengths.* В ході досліджень були розроблені математична та комп'ютерна моделі нелінійного електричного кола з автономним регульованим електромеханічним перетворювачем енергії. На відміну від вже існуючих моделей ця модель допомагає проводити більш точні розрахунки енергетичних процесів та ефективності кола при урахуванні імпульсних режимів роботи, створених широтно-імпульсним модулятором. А також враховує втрати в магнітному колі двигуна на гістерезис та вихрові струми. За рахунок цього при використанні моделі для розрахунків на етапі проектування можливо підібрати більш раціональні параметри елементів кола для покращення його ККД.

*Weaknesses.* Модель за рахунок підвищеної точності і, як наслідок, складності, більш громіздка для оцінки динамічних показників електричного кола з регульованим електромеханічним перетворювачем. Оскільки більш прості існуючі моделі дозволяють це зробити з набагато меншими обчислювальними витратами.

*Opportunities.* Модель розроблена з врахуванням електромагнітних процесів у колі найбільш розповсюдженого асинхронного електродвигуна. Перспективним є розробка аналогічної моделі з урахуванням електромагнітних процесів в інших типах двигунів, зокрема, вентильних та синхронних з постійними магнітами.

*Threats.* Модель не була підтверджена експериментально в повному складі. Експериментально підтверджена адекватність тільки основних елементів, тому до проведення повірочних експериментів вона не може вважатися надійною.

## 8. Висновки

1. В роботі була створена математична модель нелінійного електричного кола з автономним регульованим електромеханічним перетворювачем енергії. Модель розроблена з урахуванням вимог до точності, необхідної для енергетичних розрахунків.

При розробці моделі кола було досліджено існуючі математичні моделі окремих елементів реального кола: асинхронного двигуна, літій-іонного акумулятора та суперконденсатора, та на основі них складені найбільш оптимальні моделі для цих елементів в даному колі.

2. В ході аналізу цих моделей було виявлено, що для прискорення розрахунків можливо спростити модель акумулятора, в той час як модель двигуна була недостатньо точною, оскільки не враховувала втрати в магнітопроводі. Ці втрати були враховано в еквівалентній моделі кола шляхом включення до нього нелінійного резистора.

3. На основі математичної моделі в програмному пакеті Matlab Simulink була розроблена комп'ютерна модель даного кола. Модель дозволяє проводити дослідження та розрахунки кола з точністю достатньою для визначення його енергетичних характеристик при помірних обчислювальних витратах.



## Література

1. Панкратов В. В. Векторное управление асинхронным электроприводом. Новосибирск, 1999. 66 с.
2. Стаття о векторном управлении. URL: <http://xn---8sbecmada0aoptggbmsmf4a0a.xn--p1ai/stati-o-vektornom-upravlenii.html>
3. Shepherd C. M. Design of Primary and Secondary Cells // Journal of The Electrochemical Society. 1965. Vol. 112, Issue 7. P. 657–664. doi: <http://doi.org/10.1149/1.2423659>
4. Tang X. Li-ion battery parameter estimation for state of charge // American Control Conference (ACC). 2011. P. 941–946. doi: <http://doi.org/10.1109/acc.2011.5990963>
5. Wang C., Appleby A. J., Little F. E. Electrochemical impedance study of initial lithium ion intercalation into graphite powders // Electrochimica Acta. 2001. Vol. 46, Issue 12. P. 1793–1813. doi: [http://doi.org/10.1016/s0013-4686\(00\)00782-9](http://doi.org/10.1016/s0013-4686(00)00782-9)
6. Battery Management System: An Overview of Its Application in the Smart Grid and Electric Vehicles / Rahimi-Eichi H. et. al. // IEEE Industrial Electronics Magazine. 2013. Vol. 7, Issue 2. P. 4–16. doi: <http://doi.org/10.1109/mie.2013.2250351>
7. Lee J., Nam O., Cho B. H. Li-ion battery SOC estimation method based on the reduced order extended Kalman filtering // Journal of Power Sources. 2007. Vol. 174, Issue 1. P. 9–15. doi: <http://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2007.03.072>
8. Matching the nanoporous carbon electrodes and organic electrolytes in double layer capacitors / Maletin Y. et. al. // Applied Physics A. 2005. Vol. 82, Issue 4. P. 653–657. doi: <http://doi.org/10.1007/s00339-005-3416-9>
9. Білецький О. О. Енергетичні процеси в колах заряду суперконденсаторів зі змінними початковими напругами: дис. ... канд. тех. наук: 05.09.05. Київ, 2016. 195 с.
10. A MPC based energy management strategy for battery-supercapacitor combined energy storage system of HEV / Liu S. et. al. // 35th Chinese Control Conference. 2016. P. 8727-8731. doi: <http://doi.org/10.1109/chicc.2016.7554751>