

*Розглянуто економіко-математичну модель конкуренції типу Лоткі-Вольтерра. Встановлено параметричні умови існування стійких положень рівноваги конкуруючих підприємств. Також розв'язано задачу синтезу керування відносно одного з конкурентів*

*Ключові слова: модель Лоткі-Вольтерра, конкуренція, синтез керування, стаціонарна точка, фазовий портрет*

*Рассмотрена экономико-математическая модель конкуренции типа Лотки-Вольтерра. Установлены параметрические условия существования устойчивых положений равновесия конкурирующих предприятий. Также решена задача синтеза управления относительно одного из конкурентов*

*Ключевые слова: модель Лотки-Вольтерра, конкуренция, синтез управления, стационарная точка, фазовый портрет*

УДК 517.925:330.46

# ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ВЗАЄМОДІЇ ПІДПРИЄМСТВ З ВИКОРИСТАННЯМ КОНКУРЕНТНОЇ МОДЕЛІ ЛОТКІ- ВОЛЬТЕРРА

А.М. Алілуйко

Кандидат фізико-математичних наук

Кафедра економіко-математичних методів

Тернопільський національний економічний університет

вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, Україна, 46004

Контактний тел.: 097-278-48-99

E-mail: aliluyko@imath.kiev.ua

## 1. Вступ

Для вироблення стратегічних рішень економістам-аналітикам поряд із багатьма фінансовими показниками важливим є можливість прогнозування ринкової частки підприємства. Адже цей показник характеризує обсяги реалізації продукції, що у свою чергу визначає прогнозований прибуток підприємства. При моделюванні економічних процесів є важливим не лише визначення частки підприємства на ринку через деякий проміжок часу, але й механізми впливу на цю частку, наприклад, при наявній конкуренції. Прогнозуванням та моделюванням економічних процесів займається фізична економіка та синергетика.

## 2. Аналіз досліджень і публікацій

В останні десятиліття в екології, економіці та інших областях для моделювання та прогнозування динамічних процесів широко використовується найпростіша екологічна модель типу «хижак-жертва» або модель Лоткі-Вольтерра [2, 7]. Різноманітні модифікації цієї моделі у моделюванні економіки висвітлюються у працях [3-6, 8, 10-12]. Так, в роботі [8] розглядається динаміка співвідношень «попит-пропозиція»; у [3, 5, 11, 12] вивчається дуопольно-дуопольна конкуренція підприємств; в [10] модель Лоткі-Вольтерра використано для дослідження динаміки виробничих систем на макрорівні. Щодо таких моделей, розглядаються задачі синергетичного управління в [4, 8].

Слід відмітити, що різноманітні об'єкти моделювання мають однаковий математичний опис і відносяться до класу нелінійних, відкритих, синергетичних систем. Щодо таких систем продовжують залишають-

ся актуальними дослідження умов стійкості та методів управління.

## 3. Мета і завдання дослідження

Успішна поведінка підприємства розробляється на основі конкурентної моделі Лоткі-Вольтерра. Така модель є базовою і описує суть конкуренції.

Використання конкурентної моделі Лоткі-Вольтерра дозволяє: розв'язувати задачі аналізу та прогнозування ринку, класифікувати ринки, виявляти закономірності конкуренції, моделювати взаємодію на ринку.

Метою дослідження є визначення закономірностей конкурентної взаємодії підприємств з використанням динамічної моделі Лоткі-Вольтерра.

Для досягнення поставленої мети необхідно побудувати алгебраїчні співвідношення або оптимальне керування в термінах економічних параметрів моделі, які б забезпечили функціонування підприємства на конкурентному ринку.

## 4. Основні результати досліджень

В основу математичної моделі динаміки конкуренції можна покласти біологічну модель чисельності популяцій «хижак-жертва».

Для цього здійснимо інтерпретацію екологічних показників як економічних.

Нехай  $x_i$  – річний обсяг реалізованої продукції (в грошових або натуральних одиницях) і-го підприємства. Можна вважати, що при позитивній динаміці реалізації продукції, обмеженості ринку та відсутності конкуренції швидкість зміни обсягу реалізованої

продукції пропорційна обсягу реалізованої продукції, тобто

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i(t), \quad t \geq 0,$$

де коефіцієнт  $r_i$  відображає потенційно можливий річний приріст доходів або продукції в натуральному виразі  $i$ -го підприємства.

Ріст доходів зменшується або припиняється внаслідок дії конкурента або насичення ринку. Відносно міру обмеженого впливу конкуренції можна описати співвідношенням

$$\left( k_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \right) / k_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де  $k_i$  – максимальний обсяг ринку або доступного ресурсу для  $i$ -го підприємства в грошових або натуральних одиницях,

$\alpha_{ij}$  – коефіцієнт конкуренції між  $i$ -м і  $j$ -м підприємствами, який пропорційний імовірності зіткнення споживчих інтересів даної пари конкурентів.

При  $i = j$   $\alpha_{ij} = 1$ . Врахувавши насичення ринку або вичерпність ресурсу в результаті діяльності  $i$ -го підприємства вираз (1) перепишемо у вигляді:

$$\left( k_i - x_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \right) / k_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

В (2) доданки взято із знаком «мінус», тому що процес конкуренції та насичення ринку (або нестачі ресурсів) призводить до зменшення обсягу реалізації продукції.

З урахуванням наведених міркувань отримаємо систему диференціальних рівнянь [9, с. 66] (*динамічна конкурентна модель Лоткі-Вольтерра*):

$$\dot{x} = r_i x_i \left( k_i - x_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \right) / k_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

У випадку двох конкурентів ( $n = 2$ ) систему (3) запишемо у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 - \frac{r_1}{k_1} x_1^2 - \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1} x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 - \frac{r_2}{k_2} x_2^2 - \frac{\alpha_{21} r_2}{k_2} x_2 x_1, \end{cases} \quad (4)$$

або в безрозмірних величинах

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 - a_1 x_1^2 - b_1 x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 - a_2 x_2^2 - b_2 x_2 x_1, \end{cases} \quad (5)$$

де  $a_1 = \frac{r_1}{k_1}$ ,  $a_2 = \frac{r_2}{k_2}$ ,  $b_1 = \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1}$ ,  $b_2 = \frac{\alpha_{21} r_2}{k_2}$ .

Система (5) має чотири стаціонарні точки (точки рівноваги):  $A_1(0;0)$ ,  $A_2(r_1 a_1^{-1}; 0)$ ,  $A_3(0; r_2 a_2^{-1})$ ,

$$A_4 \left( \frac{r_1 a_2 - b_1 r_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2}, \frac{r_2 a_1 - b_2 r_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2} \right).$$

При чому точка  $A_4$  має місце, якщо  $a_1 a_2 > b_1 b_2$ ,  $r_1 a_2 > b_1 r_2$ ,  $r_2 a_1 > b_2 r_1$  або  $a_1 a_2 < b_1 b_2$ ,  $r_1 a_2 < b_1 r_2$ ,  $r_2 a_1 < b_2 r_1$ . Всі чотири точки належать області  $R_+^2$ . При різних значеннях параметрів системи стаціонарні точки утворюють стійкі і нестійкі вузли та сідла. Для визначення типу стаціонарних точок можна знайти власні значення матриці Якобі

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} r_1 - 2a_1 x_1 - b_1 x_2 & -b_1 x_1 \\ -b_2 x_2 & r_2 - 2a_2 x_2 - b_2 x_1 \end{bmatrix},$$

з характеристичного рівняння  $\lambda^2 - \sigma \lambda + \Delta = 0$ , де  $\sigma = \text{tr} J(x_{1s}; x_{2s})$ ,  $\Delta = \det J(x_{1s}; x_{2s})$ ,  $x_{1s}$  та  $x_{2s}$  – координати стаціонарних точок [1, с. 97].

Тоді матимемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \Delta}.$$

Провівши аналітичні розрахунки, можна здійснити класифікацію стаціонарних розв'язків системи (4) та виділити основні типи ринків:

1. Точка  $A_1(0;0)$  є нестійким вузлом ( $\lambda_1 = r_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = r_2 > 0$ ). Цій точці відповідає ситуація, коли конкуренції немає (конкуренти відсутні). Такий стан системи немає практичного інтересу.

2. Точка  $A_2(k_1; 0)$  є стійким вузлом,

якщо  $\alpha_{21} > k_2 k_1^{-1}$ , та сідлом,

якщо  $\alpha_{21} < k_2 k_1^{-1}$  ( $\lambda_1 = r_1 k_1^{-1} (k_1 - \alpha_{12} k_2)$ ,  $\lambda_2 = -r_2 < 0$ ).

3. Точка  $A_3(0; k_2)$  є стійким вузлом, якщо  $\alpha_{12} > k_1 k_2^{-1}$ , та сідлом, якщо  $\alpha_{12} < k_1 k_2^{-1}$  ( $\lambda_1 = -r_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = r_2 k_2^{-1} (k_2 - \alpha_{21} k_1)$ ). Точки  $A_2$  та  $A_3$  є полярними, але однотипними за своїм змістом. Їм відповідає тип ринку агресивних конкурентів. Такий ринок рано чи пізно переходить в стан монополії. Ситуацію можна змінити, якщо на самому початку виробничої діяльності підприємство-аутсайдер підвищує свою конкурентоздатність, наприклад, за рахунок випуску нової продукції.

4. Точка  $A_4 \left( \frac{k_1 - \alpha_{12} k_2}{1 - \alpha_{12} \alpha_{12}}, \frac{k_2 - \alpha_{21} k_1}{1 - \alpha_{12} \alpha_{12}} \right)$

є стійким вузлом, якщо  $\alpha_{12} < k_1 k_2^{-1}$ ,

$\alpha_{21} < k_2 k_1^{-1}$

( $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1 x_{1s} + a_2 x_{2s}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_1 x_{1s} + a_2 x_{2s})^2}{4} - \Delta} < 0$  при

$\Delta = \frac{(r_2 a_2 - b_1 r_2)(r_2 a_1 - b_2 r_1)}{a_1 a_2 - b_1 b_2} > 0$ ).

Точці  $A_4$  відповідає конкурентний ринок, тобто ринок на якому підприємства конкуренти працюють стабільно досить тривалий час, зайнявши свою ринкову частку. Монополізувати ринок можна лише при зміні деяких параметрів системи.

Зобразимо лінії  $\alpha_{12} = k_1 k_2^{-1}$ ,  $\alpha_{21} = k_1 k_2^{-1}$ ,  $\alpha_{12} \alpha_{21} = 1$ , на яких відбувається зміна стійкості положення рівноваги в просторі параметрів  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$  (рис. 1).

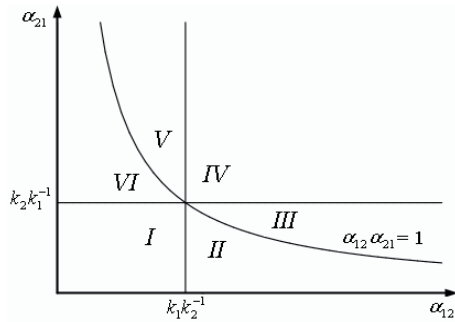


Рис. 1. Параметричний портрет системи (4) в просторі коефіцієнтів конкуренції  $\alpha_{12}$  та  $\alpha_{21}$

В областях II і III всі траєкторії на фазовому портреті прямують до асимптотично стійкого положення рівноваги  $A_3$ . В областях V та VI маємо аналогічну ситуацію, але з прямують до  $A_2$ . В області IV положення рівноваги  $A_4$  є нестійким (сідловаточка), а  $A_2$  і  $A_3$  – стійкі вузли.

У всіх розглянутих вище випадках одне з підприємств через деякий час обов'язково буде усунуте з ринку. В області I положення рівноваги  $A_4$  є асимптотично стійким (стійкий вузол), а усі інші положення нестійкими.

Числові розрахунки для системи (4) проводилися з використанням математичної системи Maple. Результати обчислень при значеннях параметрів  $r_1 = 0.9$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $k_1 = 300$ ,  $k_2 = 400$ ,  $\alpha_{12} = 0.7$ ,  $\alpha_{21} = 0.7$ ,  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = 20$  наведено на рис. 2. При цьому система (4) має положення рівноваги типу стійкий вузол  $A_4(103.448; 327.586)$ . Результати обчислень при  $r_1 = 0.9$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $k_1 = 300$ ,  $k_2 = 400$ ,  $\alpha_{12} = 0.8$ ,  $\alpha_{21} = 0.7$ ,  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = 20$  наведено на рис. 3. При цьому система (4) має положення рівноваги типу стійкий вузол  $A_3(0; 400)$ .

Як видно, зміна лише одного коефіцієнта  $\alpha_{12}$  привела до зміни положення рівноваги (відбувся перехід від конкурентного ринку до ринку агресивних конкурентів).

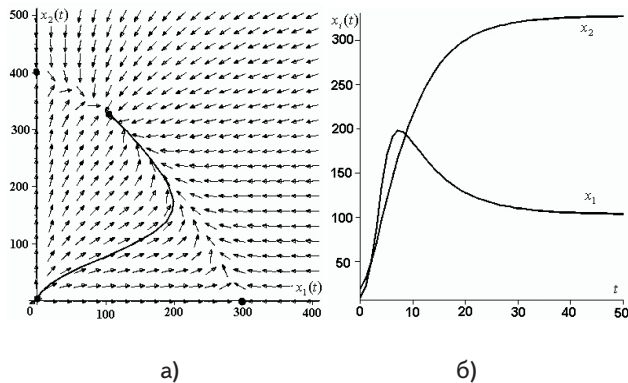


Рис. 2. Результати моделювання для стаціонарної точки типу  $A_4$ : а – фазовий портрет в просторі параметрів  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  протягом часу  $t \geq 0$ ; б – графіки залежності зайнятої частки ринку  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  підприємствами протягом часу  $t$

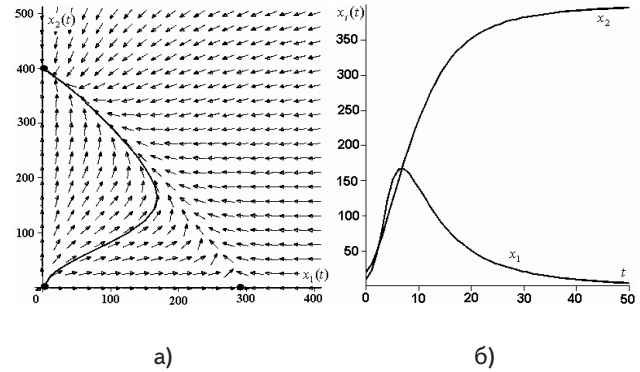


Рис. 3. Результати моделювання для стаціонарної точки типу  $A_3$ : а – фазовий портрет в просторі параметрів  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  протягом часу  $t \geq 0$ ; б – графіки залежності зайнятої частки ринку  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  підприємствами протягом часу  $t$

У зв'язку з цим можна розглянути задачу синтезу керування відносно одного з конкуруючих підприємств, яка б забезпечила стійку роботу підприємств при запланованому обсязі реалізації продукції. Математична модель задачі керування відносно другого підприємства матиме вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 - \frac{r_1}{k_1} x_1^2 - \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1} x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 - \frac{r_2}{k_2} x_2^2 - \frac{\alpha_{21} r_2}{k_2} x_2 x_1 + u(x_1, x_2). \end{cases} \quad (6)$$

Синтез керування  $u(x_1, x_2)$  здійснимо методом аналітичного конструювання агрегованих регуляторів [4]. Введемо макрозмінну

$$\psi(x_1, x_2) = x_2 - \gamma(d - x_1), \quad (7)$$

та підставимо її в функціональне рівняння

$$T\dot{\psi}(t) + \psi(t) = 0.$$

Звідси, з врахуванням (6), отримаємо керування

$$u = \gamma \left( r_1 - \frac{r_1}{k_1} x_1 - \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1} x_2 \right) x_1 - \left( r_2 - \frac{r_2}{k_2} x_2 - \frac{\alpha_{21} r_2}{k_2} x_1 \right) x_2 - \frac{1}{T} \psi, \quad (8)$$

яке переводить систему на многовид  $\psi = 0$  (7). Рівняння руху системи (6) на цьому многовиді має вигляд:

$$\dot{x}_{1\psi} = \left( r_1 - \gamma \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1} d - \frac{r_1}{k_1} (1 + \alpha_{12} d) x_{1\psi} \right) x_{1\psi}.$$

Дане рівняння є логістичного типу, яким можна задати бажану динаміку реалізації продукції за короткий проміжок часу.

Замкнута система (6), (8) переписеться у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 - \frac{r_1}{k_1} x_1^2 - \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1} x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = \gamma \left( r_1 x_1 - \frac{r_1}{k_1} x_1^2 - \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1} x_2 x_1 \right) - \frac{1}{T} \psi, \end{cases} \quad (9)$$

стан рівноваги якої визначається співвідношеннями:

$$x_{1s} = \frac{k_1 - \alpha_{12}\gamma d}{1 + \alpha_{12}\gamma}, \quad x_{2s} = \frac{\gamma(k_1 + d)}{1 + \alpha_{12}\gamma}.$$

Вибираючи значення параметрів  $\gamma$  і  $d$  в останніх формулах, можна задати бажаний стійкий обсяг реалізації продукції першого підприємства  $x_{1s}$  при сталому обсязі реалізації продукції іншого підприємства  $x_{2s}$ .

Фазовий портрет та графіки перехідних процесів для керованої системи (9) при  $r_1 = 0.9$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $k_1 = 300$ ,  $k_2 = 400$ ,  $\alpha_{12} = 0.8$ ,  $\alpha_{21} = 0.7$ ,  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = 20$ ,  $T = 1$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $d = 0.1$  наведені на рис. 4.

Як видно, система (4) при заданих коефіцієнтах має точку рівноваги  $A_3(0;400)$ , яка відповідає ситуації, коли перше підприємство з часом повністю втрачає ринок.

Після введення керування (8) обидва підприємства за короткий проміжок часу займають свої частки ринку, що відповідають точці рівноваги (214.257; 107.178).

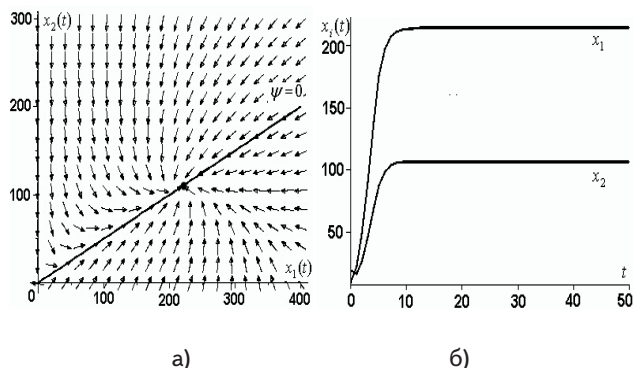


Рис. 4. Результати моделювання для керованої системи (9): а – фазовий портрет в просторі параметрів  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  протягом часу  $t \geq 0$ ; б – графіки залежності зайнятої частки ринку  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  підприємствами протягом часу  $t$

З врахуванням введених нами позначень розглянемо конкурентну модель з станом насичення одного з підприємств [5]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 - \frac{r_1}{k_1} x_1^2 - \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1} \frac{x_1 x_2}{(d + x_1)}, \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 - \frac{r_2}{k_2} x_2^2 - \frac{\alpha_{21} r_2}{k_2} \frac{x_2 x_1}{(d + x_1)}. \end{cases} \quad (10)$$

В статті [5] було відзначено, що підприємства досягають стійкого положення рівноваги не одночасно. Знову розглянемо задачу побудови керування системою (10) з метою підтримки бажаного обсягу реалізації продукції першого підприємства шляхом впливу на швидкість росту обсягів реалізації другого підприємства.

Тоді модель системи керування набуде вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 - \frac{r_1}{k_1} x_1^2 - \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1} \frac{x_1 x_2}{(d + x_1)}, \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 - \frac{r_2}{k_2} x_2^2 - \frac{\alpha_{21} r_2}{k_2} \frac{x_2 x_1}{(d + x_1)} + u(x_1, x_2). \end{cases} \quad (11)$$

Скориставшись методом аналітичного конструювання агрегованих регуляторів з макрозмінною (7), отримаємо закон керування

$$u = \gamma \left( r_1 - \frac{r_1}{k_1} x_1 - \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1} \frac{x_2}{d + x_1} \right) x_1 - \left( r_2 - \frac{r_2}{k_2} x_2 - \frac{\alpha_{21} r_2}{k_2} \frac{x_1}{d + x_1} \right) x_2 - \frac{1}{T} \psi. \quad (12)$$

Цей закон переводить систему (10) на многовид  $\psi = 0$  (7). Маємо рівняння руху системи на цьому многовиді:

$$\dot{x}_{1\psi} = \left( r_1 - \gamma \frac{\alpha_{12} r_1}{k_1} d - \frac{r_1}{k_1} x_{1\psi} \right) x_{1\psi}.$$

Положення рівноваги замкнутої система (11), (12) визначається співвідношеннями:

$$x_{1s} = k_1 - \alpha_{12} \gamma, \quad x_{2s} = \gamma(k_1 + d - \gamma \alpha_{12}).$$

Фазовий портрет та графіки перехідних процесів для керованої системи (11, 12) при:

$r_1 = 0.9$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $k_1 = 300$ ,  $k_2 = 400$ ,  $\alpha_{12} = 0.8$ ,  $\alpha_{21} = 0.7$ ,  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = 20$ ,  $T = 1$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $d = 1$  наведені на рис. 5.

Після введення керування (12) обидва підприємства за короткий однаковий проміжок часу займають свої частки ринку, що відповідають точці рівноваги (299.6; 150.2).

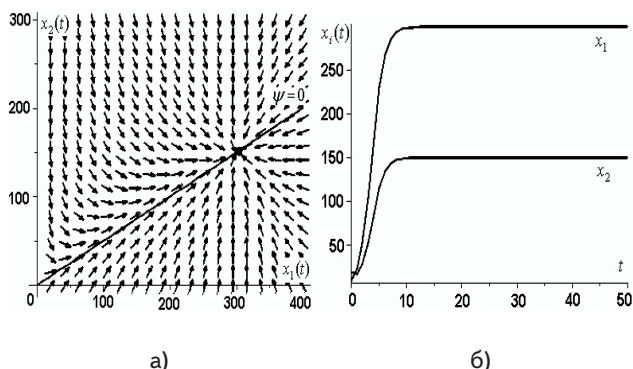


Рис. 5. Результати моделювання для замкнутої системи (11, 12): а – фазовий портрет в просторі параметрів  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  протягом часу  $t \geq 0$ ; б – графіки залежності зайнятої частки ринку  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  підприємствами протягом часу  $t$

## 5. Висновки

У статті розглянуто відому модель конкуренції біологічних популяцій Лоткі-Вольтерра в економічній інтерпретації. В результаті дослідження вдалося виділити основні залежності між параметрами моделі, що дозволяють виявити основні закономірності конкуренції та класифікувати ринки. Встановлено параметричні умови та побудовано керування, при яких можливе досягнення положення рівноваги конкуруючих підприємств.

Розглянута модель дозволяє визначити умови входу підприємства на ринок, оптимізувати витрати підприємства, а також прогнозувати ринок.

## Література

1. Братусь, А. С. Динамические системы и модели биологии [Текст] / А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. - М. : Физматлит, 2010. - 400 с.
2. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] : пер. с франц. / под ред. Ю. М. Свирижева. - М. : Наука, 1976. - 286 с.
3. Козик, В.В. Застосування моделі Лоткі-Вольтерра для опису дуопольно-дуопсонієвої конкуренції [Текст] / В. В. Козик, Ю. І. Сидоров, І. Б. Скворцов, О. Б. Тарасовська // Актуальні проблеми економіки. - 2010. - №2 (104). - С. 252–260.
4. Колесников, А. А. Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза [Текст] / А. А. Колесников. - М. : КомКнига, 2006. - 240 с.
5. Коляда, Ю. В. Моделивання дуопольно-дуопсонієвої конкуренції з долученням режиму насичення [Текст] / Ю. В. Коляда // Актуальні проблеми економіки. - 2011. - №5 (119). - С. 293-299.
6. Прасолов, А. В. Математические модели взаимодействия фирм как инструмент корпоративного управления [Текст] / А. В. Прасолов // Изв. С.-Петерб. ун-та экономики и финансов. - 2001. - № 2. - С. 32–48.
7. Свирижеев, Ю.М. Устойчивость биологических сообществ [Текст] / Ю. М. Свирижеев, Д. О. Логофет. - М. : Наука, 1978. - 350 с.
8. Серіков, А. В. Маркетинг як необхідна умова синергетичного управління господарською діяльністю [Текст] / А. В. Серіков, О. О. Зубова // Актуальні проблеми економіки. - 2010. - №5 (107). - С. 276-283.
9. Boccaro, N. Modeling complex systems [Текст] / N. Boccaro. - New York : Springer-Verlag, 2003. - 397 p.
10. Kamimura, A. The economic system seen as a living system: a Lotka-Volterra framework [Текст] / A. Kamimura, G. F. Burani, H. M. Franca // Emergence: Complexity & Organization. 2011. - Vol. 13, №. 3, pp. 80 – 93.
11. Wijeratne, A. W. Bifurcation analysis in the diffusive Lotka-Volterra system: an application to market economy [Текст] / A. W. Wijeratne, Fengqi Yi, Junjie Wei // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. - Vol. 40, №. 2, pp. 902–911.
12. Wijeratne, A. W. An empirical Lotka-Volterra system for competition dynamics in the telecommunication sector of Sri Lanka [Текст] / A. W. Wijeratne, J. A. Karunaratne, Chuncheng Wang, Junjie Wei // International Journal of Business Information Systems. 2008. - Vol. 3, №. 5, pp. 482–497.

**Abstract**

*The economic processes that evolve over time can be studied on the basis of linear and nonlinear dynamic models. The article analyzes the economic and mathematical model of competition of Lotka-Volterra type. The article classifies competitive markets on the basis of a study of stationary points of the system. We have determined the areas of stability in terms of the parameters of the model, at which the stable operation of competitive enterprises is possible. We have solved the problem of control synthesis relatively to one of the competing enterprises by the method of analytical construction of aggregate regulators. The formation of such control provides asymptotically stable existence of two competitors with the desired market share. The article represents the examples of calculations of the predicted market share of enterprises within the proposed model. Unlike the classical econometric models of competition, the economic model of Lotka-Volterra permits to fully assess the dynamics of economic processes, to reach the equilibrium state of the studied competitive systems, to predict theoretically and control the main parameters of the model*

**Keywords:** model of Lotka-Volterra, competition, control synthesis, stationary point, phase portrait