REVISTA DE LA
UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA
Volumen 45, Número 2, 2004, Páginas 21–39

REGULARIDAD CON RESPECTO A PARÁMETROS DE LAS SOLUCIONES DE PROBLEMAS PARABÓLICOS ABSTRACTOS SEMILINEALES†

RUBÉN D. SPIES

Resumen. Se determinan condiciones suficientes bajo las cuales la solucion $z(t;q)$ de un problema parabólico abstracto semilineal de la forma $\frac{d}{dt}z(t) = A(q)z(t) + F(q,t,z(t))$ es derivable Fréchet con respecto al parámetro q. Se prueba que la derivada de Fréchet $D_q z(t;q)$ es la solución de un problema de valores iniciales lineal no homogéneo en el espacio de estados Z. Se provee una forma explícita para este problema de valores iniciales que constituye la llamada "ecuación de sensitividad"para la solución $z(t;q)$.

1. Introducción

En este artículo consideramos el problema de determinar condiciones bajo las cuales la solución $z(t;q)$ del problema parabólico abstracto semilineal

$$(\mathcal{P})_q \begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = A(q)z(t) + F(q,t,z(t)) & z(t) \in Z, \\ z(0) = z_0 & t \in [0,T] \end{cases}$$

depende continuamente del parámetro q y, más aún, condiciones que garanticen la diferenciabilidad Fréchet de la misma.

En $(\mathcal{P})_q$, Z es un espacio de Banach, $q \in Q_{ad} \subset Q$, dónde Q es un espacio normado, Q_{ad} es un subconjunto abierto de Q, y $A(q)$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico $T(t;q)$ sobre Z para todo $q \in Q_{ad}$. Nos referiremos a Z como el espacio de estados, a Q como el espacio de parámetros y a Q_{ad} como el conjunto de parámetros admisibles. El conjunto Q_{ad} refleja el hecho de que a veces no todos los elementos del espacio Q son "admisibles"para el problema con el que se esté trabajando, aunque muy a menudo se tiene que $Q_{ad} = Q$.

Problemas de identificación de parámetros en sistemas del tipo $(\mathcal{P})_q$ y otros tipos similares de ecuaciones ([2], [5], [7]) se resuelven usualmente por métodos directos de identificación tales como cuasilinealización. Para la aplicación de estos métodos, es esencial que las soluciones sean diferenciables con respecto al parámetro q. Más aún, su implementación

---

Palabras claves. Problemas de Cauchy abstractos, operadores sectoriales, semigrupos analíticos, generador infinitesimal, derivadas de Fréchet.

†Financiado en parte por el CONICET, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, por la ANPCyT, Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica a través del proyecto PICT98 03-4375, por la UNL, Universidad Nacional del Litoral a través del projecto CAI+D 2002, P.E. 222, y por la Fundación Antorchas de Argentina.

computacional requiere de estimaciones precisas de las derivadas de Fréchet $D_q z(t;q)$. Para una aplicación concreta de un algoritmo basado en cuasilinealización en un modelo similar a $(\mathcal{P})_q$ para la dinámica de las transiciones de fase en materiales con memoria de forma, véase [10].

En 1977, Clark y Gibson ([4]) analizaron el problema de la diferenciabilidad de las soluciones en problemas de Cauchy abstractos lineales del tipo

$$\frac{d}{dt}z(t) = A(q)z(t) + u(t),$$

donde $A(q)$ genera un semigrupo fuertemente continuo y $A(q) = A + B(q)$ donde $B(q)$ es acotado. Es decir, la dependencia de q es a través de una componente acotada de $A(q)$.

Más tarde, en 1982 ([1]) este problema se estudió bajo condiciones más débiles que permitían que el parámetro q aparezca en componentes no acotadas de $A(q)$.

En 2000 Burns et al ([3]) obtuvieron condiciones bajo las cuales las soluciones de problemas de Cauchy no lineales del tipo

$$\frac{d}{dt}z(t) = Az(t) + F(q,t,z(t)),$$

son diferenciables con respecto al parámetro q. En este caso el parámetro q no podía aparecer en la parte lineal de la ecuación.

En este artículo obtenemos condiciones bajo las cuales las soluciones del problema de Cauchy $(\mathcal{P})_q$ son derivables según Fréchet con respecto al parámetro q. Más aún, probaremos que, bajo ciertas condiciones, las correspondientes derivadas de Fréchet son soluciones de ciertas ecuaciones de evolución lineales no homogéneas, llamadas "ecuaciones de sensitividad"y daremos una forma explícita para estas ecuaciones. Este problema no ha sido estudiado previamente.

2. Resultados Preliminares

Consideraremos las siguientes hipótesis, que supondremos válidas de ahora en adelante:

H1: Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que el tipo del semigrupo $T(t;q)$, denotémoslo con w_q, es menor ó igual que $-\varepsilon_0$ para todo $q \in Q_{ad}$ y existe $C_q > 0$ tal que $\|T(t;q)\| \leq C_q e^{-\varepsilon_0 t} \quad \forall t \geq 0, \forall q \in Q_{ad}$. La constante C_q depende de q pero puede elegirse independiente de q en subconjuntos compactos de Q_{ad}.

Nota: Aunque utilizaremos explícitamente la hipótesis $w_q \leq -\varepsilon_0 \quad \forall\, q \in Q_{ad}$, esta puede relajarse requiriendo solamente que $\sup_{q\in Q_{ad}} w_q < \infty$.

H2: $\mathcal{D}(A(q)) = D$ es independiente de $q \in Q_{ad}$ y D es un subespacio denso de Z.

Para $q \in Q_{ad}$, denotamos con $\sigma(A(q))$, $\rho(A(q))$ el espectro y resolvente, respectivamente, del operador $A(q)$. Puesto que $w_q \leq -\varepsilon_0$, se tiene que $\sup\{Re(\lambda), \lambda \in \sigma(A(q))\} \leq -\varepsilon_0$. Por lo tanto, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\lambda) > -\varepsilon_0$, $A(q) - \lambda I$ es un operador sectorial y las potencias fraccionarias $(\lambda I - A(q))^\delta$ de $\lambda I - A(q)$ están bien definidas y son operadores cerrados, lineales e inversibles sobre $Z \quad \forall \delta \in [0,1]$ (véase [13], sección 2.6). Denotaremos con $Z_{q,\delta}$ al espacio $\mathcal{D}((-A(q))^\delta)$ con la norma del grafo de $(-A(q))^\delta$. Para δ fijo, estos espacios son todos iguales $\forall q$, puesto que $\mathcal{D}((-A(q))^\delta) = [D,Z]_{1-\delta}$ (el espacio de interpolación real de orden $1-\delta$ entre D y Z) en el sentido de un isomorfismo (véase [8], Corolario 2.2.3). Por lo tanto, para todo $q \in Q$, estos espacios son conjuntísticamente iguales y topológicamente isomorfos. Para simplificar la notación denotaremos entonces $\mathcal{D}((-A(q)))^\delta$ con D_δ y $Z_{q,\delta}$ con Z_δ. Puesto que $0 \in \rho(A(q))$ se sigue que la norma del grafo es equivalente a $\|z\|_{q,\delta} = \|(-A(q))^\delta z\|$. Además, existe una constante M_q tal que $\|(-A(q))^\delta T(t;q)\| \leq M_q \frac{e^{-\varepsilon_0 t}}{t^\delta}$, $\forall t > 0$ (véase [13], Teorema 2.6.13).

H3: Existe una constante $\delta \in (0,1)$ tal que la función $F : Q_{ad} \times [0,T] \times Z_{q,\delta} \to Z$ es localmente Lipschitz continua en t y z; i.e. para cualquier $q \in Q_{ad}$ y para todo subconjunto acotado U de $[0,T] \times Z_{q,\delta}$ existe una constante $L = L(q,U)$ tal que

$$\|F(q,t_1,z_1) - F(q,t_2,z_2)\|_Z \leq L(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|_{q,\delta})$$
$$\forall (t_i, z_i) \in U, i = 1, 2,$$

donde la constante L puede elegirse independiente de q sobre cualquier conjunto compacto de Q_{ad}.

Esta condición de regularidad ($(-A(q))^\delta$-acotación de F) garantiza la existencia y unicidad (local) de soluciones del problema $(\mathcal{P})_q$, siempre que la condición inicial z_0 esté en Z_δ. Véase [11] y [12] para más detalles relacionados con la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones de $(\mathcal{P})_q$.

Ahora pasamos a enunciar y demostrar dos resultados que necesitaremos más adelante.

Lema 1: *Bajo las hipótesis H1 y H2, para todo $q_1, q_2 \in Q_{ad}$ y $\delta \in (0,1)$ se tiene que:*
i) $A(q_1)(-A(q_2))^{-\delta}$ *es acotado en* $Z_{1-\delta}$.

ii) $A(q_1)T(\cdot;q_2) \in L^1(0,\infty : \mathcal{L}(Z))$ y $A(q_1)T(\cdot;q_2) \in L^\infty(\eta,\infty;\mathcal{L}(Z))$, $\forall \eta > 0$.

iii) $T(\cdot;q_2) \in L^1(0,\infty : \mathcal{L}(Z, Z_{q_1,\delta}))$ y $T(\cdot;q_2) \in L^\infty(\eta,\infty : \mathcal{L}(Z; Z_{q_1,\delta}))$, $\forall \eta > 0$.

Demostración: Puesto que $A(q_2)$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico $T(t;q_2)$, este semigrupo conmuta con toda potencia fraccionaria de $-A(q_2)$. Por lo tanto, para cualquier $z \in D((-A(q_2))^\delta)$ y cualquier $t > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} A(q_1)T(t;q_2)z &= A(q_1)T(t;q_2)(-A(q_2))^{-\delta}(-A(q_2))^\delta z = \\ &= A(q_1)(-A(q_2))^{-\delta}T(t;q_2)(-A(q_2))^\delta z. \end{aligned}$$

Notemos que $(-A(q_2))^{-\delta} \in \mathcal{L}(Z)$ y $A(q_1)$ es cerrado. Por el Teorema del Grafo Cerrado, se sigue que $A(q_1)(-A(q_2))^{-\delta}$ es acotado sobre $D((-A(q_2))^{1-\delta})$ (esto prueba i)), que es denso en Z. Por lo tanto, para $z \in D\left((-A(q_2))^\delta\right)$

$$\begin{aligned} \|A(q_1)T(t;q_2)z\| &\leq \|A(q_1)(-A(q_2))^{-\delta}\|_{\mathcal{L}(Z_{1-\delta},Z)}\|T(t;q_2)(-A(q_2))^\delta z\| \\ &\leq C(q_1,q_2)M_{q_2}\frac{e^{-\varepsilon_0 t}}{t^\delta}\|z\| \end{aligned} \tag{1}$$

Puesto que $z \in D\left((-A(q_2))^\delta\right)$ es denso en Z y $A(q_1)T(t;q_2)$ está definido sobre todo Z, se sigue que (1) se verifica para todo $z \in Z$.

Por lo tanto

$$\|A(q_1)T(t;q_2)\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq C(q_1,q_2)M_{q_2}t^{-\delta}e^{-\varepsilon_0 t}, \qquad t>0,$$

lo que claramente implica ii) puesto que $0<\delta<1$ y $\varepsilon_0>0$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\left\|(-A(q_1))^{\delta}\,T(t;q_2)\right\|_{\mathcal{L}(Z)} &= \left\|(-A(q_1))^{\delta-1}\,A(q_1)T(t;q_2)\right\|_{\mathcal{L}(Z)}\\ &\leq \left\|(-A(q_1))^{\delta-1}\right\|_{\mathcal{L}(Z)}\ \|A(q_1)T(t;q_2)\|_{\mathcal{L}(Z)}\\ &\leq C(q_1)\,\|A(q_1)T(t;q_2)\|_{\mathcal{L}(Z)}\end{aligned}$$

Así, para $t>0$

$$\|T(t;q_2)\|_{\mathcal{L}(Z;Z_{q_1,\delta})} \leq C(q_1)\,\|A(q_1)T(t;q_2)\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq \tilde{C}(q_1,q_2)t^{-\delta}e^{-\varepsilon_0 t}.$$

de donde se obtiene (iii). ■

Nota: Aunque este resultado claramente implica que el operador $A(q_1)T(t;q_2)$ es acotado para todo $t>0$, no es posible encontrar una cota uniforme para todo t en un entorno de $t=0$. Para $q_1=q_2=q$, el Lema 1 implica, en particular, que la derivada $\frac{d}{dt}T(t;q)$ del operador solución de la ecuación homogénea asociada al problema $(\mathcal{P})_q$ es integrable en un entorno de $t=0$.

También requeriremos que el operador $A(q)$ tenga la siguiente propiedad de regularidad con respecto al parámetro q:

H4: Para δ como en la hipótesis H3 y para cualesquiera $q_1,q_2\in Q_{ad}$, existen constantes $M=M(q_1,q_2)$ y $C=C(q_1,q_2)$, que dependen de q_1 y q_2, tales que $\|(-A(q_1))^{\delta}(-A(q_2))^{-\delta}\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq M(q_1,q_2)$, $\quad\|A(q_1)[A(q_2)]^{-1}-I\| \leq C(q_1,q_2)$ y $C(q_1,q_2)\to 0$ cuando $q_1\to q_2$.

Es importante destacar que esta condición de regularidad no implica que los operadores $A(q)$ sean continuos. Para un ejemplo de una familia de operadores diferenciales que satisface la hipótesis H4 véase [12], Lema 2.4.

Nota: Es suficiente pedir que H4 sea válida para $\delta=1$ puesto que en este caso se puede probar que la primera desigualdad de H4 es entonces válida para todo $\delta\in[0,1]$ (véase [9], Lema 3.3). Es también importante mencionar que el Teorema 2, a continuación, puede probarse reemplazando H4 por la siguiente hipótesis de regularidad sobre la familia de operadores $A(q)$:

H4': Para cada $q_0\in Q_{ad}$ existe $C=C(q_0)$ tal que

$$\|(A(q)-A(q_0))z\| \leq C|q-q_0|\|A(q_0)z\| \quad z\in D, \quad q\in Q_{ad}.$$

TEOREMA 2: *Supongamos que se verifican las hipótesis H1-H4. Entonces para cualquier* $q_0\in Q_{ad}$ y $\varepsilon>0$, existe $\widetilde{\delta}>0$ *tal que*

$$\|A(q)T(\cdot,q_0)z - A(q_0)T(\cdot,q_0)z\|_{L^1(0,\infty;Z)} \leq \varepsilon\|z\|$$

para todo $z \in Z$, *y para todo* $q \in Q_{ad}$ *que satisface* $\|q - q_0\| < \widetilde{\delta}$, *es decir*

$$\|A(q)T(\cdot, q_0) - A(q_0)T(\cdot, q_0)\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))} \leq \varepsilon,$$

o equivalentemente, para cada $q_0 \in Q_{ad}$ *fijo, el operador de* Q en $L^1(0, \infty; \mathcal{L}(Z))$ definido por

$$q \to A(q)T(\cdot, q_0)$$

es continuo en Q_{ad} .

Demostración: Sean $\varepsilon > 0$, $q_0 \in Q_{ad}$. Entonces para $z \in Z$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|A(q)T(\cdot; q_0)z - A(q_0)T(\cdot; q_0)z\|_{L^1(0,\infty;Z)} \\
&\quad = \int_0^\infty \|A(q)T(t; q_0)z - A(q_0)T(t; q_0)z\|_Z dt \\
&\quad = \int_0^\infty \|(A(q)A(q_0)^{-1} - I)A(q_0)T(t; q_0)z\|_Z dt \\
&\quad \leq \|A(q)A(q_0)^{-1} - I\| \int_0^\infty \|A(q_0)T(t; q_0)z\|_Z dt \\
&\quad \leq C(q, q_0)\|A(q_0)T(\cdot, q_0)\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))} \; \|z\| \qquad \text{(en virtud de H4 y del Lema 1(ii))} \\
&\quad \leq \varepsilon\|z\| \qquad\qquad \text{para } \|q - q_0\| < \tilde{\delta},
\end{aligned}$$

dónde $C(q, q_0)$ es la constante de la hipótesis H4 y la última desigualdad se obtiene eligiendo $\tilde{\delta}$ lo suficientemente pequeño de manera que $C(q, q_0) \leq \varepsilon[\|A(q_0)T(\cdot; q_0)\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))}]^{-1}$ para $\|q - q_0\| < \tilde{\delta}$.

■

3. Resultados principales

Procederemos ahora a probar los resultados principales. Recordemos que para $z_0 \in Z_\delta$, la solución $z(t; q)$ de $(\mathcal{P})_q$ satisface la ecuación integral

$$\begin{aligned}
z(t; q) &= T(t; q)z_0 + \int_0^t T(t - s; q)F(q, s, z(s; q))ds \\
&\doteq T(t; q)z_0 + S(t; q), \qquad\qquad t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Es importante destacar que mientras que $S(t; q)$ está definido sólo para $t \in [0, T]$ (dónde las soluciones de $(\mathcal{P})_q$ existen), $T(t; q)z_0$ está definido para todo $t \geq 0$.

Consideremos ahora las siguientes hipótesis sobre la q-regularidad de $\frac{d}{dt}T(t; q)$.

H5: El operador $q \to A(q)T(\cdot; q_0)$ de Q en $L^1(0, \infty; \mathcal{L}(Z))$ es diferenciable en el sentido de Fréchet en q_0 para todo $q_0 \in Q_{ad}$ (bajo H1-H4, ya sabemos que este operador es continuo, en virtud del Teorema 2).

Observación: No se conocen condiciones generales sobre la familia de operadores $A(q)$ que garanticen la validez de la hipótesis H5. Sin embargo, en algunos ejemplos se puede demostrar que H5 efectivamente se satisface. Tal es el caso por ejemplo de los operadores asociados a ecuaciones diferenciales lineales con retardos y problemas hereditarios en general, en los que q denota el vector de retardos (véase [1]).

TEOREMA 3: *Supongamos que valen H1-H5. Entonces:*

i) El operador $q \to T(\cdot;q)$ de Q en $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Z))$ es diferenciable Fréchet en q_0, para cada $q_0 \in Q_{ad}$. Más aún, para todo $t > 0$ y $h \in Q$ la derivada de Fréchet con respecto a q de $T(t;q)$ evaluada en $q_0 \in Q_{ad}$ y aplicada a $h \in Q$, i.e. $[D_qT(t;q_0)]h$, es la solución $v_h(t)$ del siguiente problema lineal no homogéneo de valores iniciales en $\mathcal{L}(Z)$:

$$(S_1): \begin{cases} \frac{d}{dt} v_h(t) = A(q_0)v_h(t) + \left[D_qA(q)T(t;q_0)\big|_{q=q_0} \right] h \\ v_h(0) = 0. \end{cases}$$

Esta es la llamada "ecuación de sensitividad"para $T(t;q)$.

ii) Para todo $q_0 \in Q_{ad}$, $D_qT(\cdot;q_0) = D_qT(\cdot;q)|_{q=q_0} \in L^\infty\left(0,\infty;\mathcal{L}\left(Q;\mathcal{L}(Z)\right)\right)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $q_0 \in Q_{ad}$. A partir del Lema 1(ii) y del Teorema 2 se sigue inmediatamente que para $z_0 \in D$, $A(q)T(\cdot;q_0)z_0$, considerado como operador de Q en $L^1(0,\infty;Z)$ satisface las hipótesis del Teorema 1 en [1] y por lo tanto $T(t;q)z_0$ Fréchet diferenciable con respecto a q en q_0, como operador de Q en Z (en efecto, la hipótesis H5 implica la hipótesis H6 in [1], el Lema 1(ii) implica la hipótesis H4 en [1] y el Teorema 2 implica la hipótesis H5 en [1]). Más aún

$$[D_qT(t;q_0)z_0](\cdot) = \int_0^t T(t-s;q_0)\left[D_qA(q)T(s;q_0)z_0\big|_{q=q_0} \right](\cdot)\, ds \tag{2}$$

Resta probar la diferenciabilidad Fréchet de $q \to T(\cdot;q)$ considerado como operador de Q en $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Z))$, i.e., en la norma más fuerte de $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Z))$. Para ello, sean $\varepsilon > 0$, $t > 0$ y $q_0 \in Q_{ad}$.

En primer lugar notemos que para cualquier $h \in Q$ con $\|h\| < \tilde{\delta}$ ($\tilde{\delta}$ como en el Teorema 2) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[T(t;q_0+h)z_0 - T(t;q_0)z_0] &= A(q_0+h)T(t;q_0+h)z_0 - A(q_0)T(t;q_0)z_0 \\ &= A(q_0+h)[T(t;q_0+h)z_0 - T(t;q_0)z_0] + (A(q_0+h) - A(q_0))T(t;q_0)z_0 \end{aligned}$$

Del Teorema 2 tenemos que $(A(q_0+h) - A(q_0))T(\cdot;q_0)z_0 \in L^1(0,\infty;Z)$. Se sigue entonces que (véase [13], Corolario 2.2)

$$T(t;q_0+h)z_0 - T(t;q_0)z_0 = \int_0^t T(t-s;q_0+h)\left(A(q_0+h) - A(q_0)\right)T(s;q_0)z_0\, ds. \tag{3}$$

Por lo tanto, $\forall h \in Q$ con $\|h\| \le \tilde{\delta}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|T(t;q_0+h)z_0 - T(t;q_0)z_0\|_Z &\le \int_0^t M_{q_0+h}e^{-\varepsilon_0(t-s)}\,\|(A(q_0+h)T(s;q_0) - A(q_0)T(s;q_0))z_0\|_Z\,ds\\ &\le C\,\|(A(q_0+h)T(\cdot;q_0) - A(q_0)T(\cdot;q_0))z_0\|_{L^1(0,\infty;Z)}\\ &\le C\varepsilon\|z_0\|_Z, \qquad \text{(siempre que } \|h\|\le\tilde{\delta})\end{aligned}$$

dónde la última desigualdad es consecuencia de H5. Así, para todo $t>0$

$$\|T(t;q_0+h) - T(t;q_0)\|_{\mathcal{L}(Z)} \le C\varepsilon, \qquad \text{para } \|h\|<\tilde{\delta} \tag{4}$$

y puesto que C no depende de t,

$$\|T(\cdot;q_0+h) - T(\cdot;q_0)\|_{L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Z))} \le C\varepsilon, \qquad \text{para } \|h\|<\tilde{\delta}.$$

Tenemos entonces la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}&\left\|T(t;q_0+h) - T(t;q_0) - \int_0^t T(t-s;q_0)\,[D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}]\;h\,ds\right\|_{\mathcal{L}(Z)} \qquad \text{(en virtud de (3))}\\
&= \left\|\int_0^t \{T(t-s;q_0+h)\,(A(q_0+h)-A(q_0))\,T(s;q_0) - T(t-s;q_0)\,[D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}]\,h\}\;ds\right\|_{\mathcal{L}(Z)}\\
&= \left\|\int_0^t [T(t-s;q_0+h) - T(t-s;q_0)]\,(A(q_0+h)T(s;q_0) - A(q_0)T(s;q_0))\;ds\,+\right.\\
&\quad\left. + \int_0^t T(t-s;q_0)\,[A(q_0+h)T(s;q_0) - A(q_0)T(s;q_0) - [D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}]\,h]\;ds\right\|_{\mathcal{L}(Z)}\\
&\le \int_0^t \|T(t-s;q_0+h) - T(t-s;q_0)\|_{\mathcal{L}(Z)}\,\|A(q_0+h)T(s;q_0) - A(q_0)T(s;q_0)\|_{\mathcal{L}(Z)}\;ds\,+\\
&\quad + \int_0^t \|T(t-s;q_0)\|_{\mathcal{L}(Z)}\,\|A(q_0+h)T(s;q_0) - A(q_0)T(s;q_0) - [D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}]\,h\|_{\mathcal{L}(Z)}\;ds\\
&\le \varepsilon C\int_0^t \|A(q_0+h)T(s;q_0) - A(q_0)T(s;q_0)\|_{\mathcal{L}(Z)}\;ds \qquad \text{(para } \|h\|\le\tilde{\delta},\ \text{por (4))}\\
&\quad + C\int_0^t \|A(q_0+h)T(s;q_0) - A(q_0)T(s;q_0) - [D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}]\,h\|_{\mathcal{L}(Z)}\;ds\\
&= \varepsilon C\,\|A(q_0+h)T(\cdot;q_0) - A(q_0)T(\cdot;q_0)\|_{L^1(0,t;\mathcal{L}(Z))} +\\
&\quad + C\,\|A(q_0+h)T(\cdot;q_0) - A(q_0)T(\cdot;q_0) - [D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0}]\,h\|_{L^1(0,t;\mathcal{L}(Z))}\\
&\le \varepsilon C\,\|A(q_0+h)T(\cdot;q_0) - A(q_0)T(\cdot;q_0) - [D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0}]\,h\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))}\\
&\quad + \varepsilon C\,\|[D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0}]\,h\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))}\;+\\
&\quad + C\,\|A(q_0+h)T(\cdot;q_0) - A(q_0)T(\cdot;q_0) - [D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0}]\,h\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (\varepsilon+1)C\,\|A(q_0+h)T(\cdot;q_0) - A(q_0)T(\cdot;q_0) - [D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0}]\,h\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))}\;+\\
&\qquad + \varepsilon C\,\|[D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0}]\,h\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))}\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, se sigue a partir de la hipótesis (H5) que para el $\varepsilon>0$ dado, existe $\xi>0$ tal que

$$\|A(q_0+h)T(\cdot;q_0) - A(q_0)T(\cdot;q_0) - [D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0}]\,h\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))} \leq \varepsilon\|h\| \tag{6}$$

para $\|h\| \leq \xi$.

Además, puesto que $D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0} \in \mathcal{L}\left(Q, L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))\right)$, existe M, $0 < M < \infty$ tal que

$$\|D_qA(q)T(\cdot,q_0)|_{q=q_0}\|_{\mathcal{L}(Q,L^1(0,\infty,\mathcal{L}(Z)))} \leq M \tag{7}$$

Finalmente, empleando (6) y (7) en (5) obtenemos que para $\|h\| \leq \text{mín}(\tilde{\delta},\xi)$

$$\begin{aligned}&\left\|T(t;q_0+h) - T(t;q_0) - \int_0^t T(t-s;q_0)\,[D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}]\,h\,ds\right\|_{\mathcal{L}(Z)}\\ &\quad\leq (\varepsilon+1)C\varepsilon\|h\| + \varepsilon CM\|h\| \leq K\varepsilon\|h\|.\end{aligned}$$

Aquí, la constante K depende de q_0 (y también de $\tilde{\delta}$ y de ξ), pero no de t. En consecuencia, el operador de Q en $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Z))$ definido por $q \to T(\cdot;q)$ es Fréchet q-diferenciable en q_0 y

$$[D_qT(t;q_0)]\,(\cdot) = \int_0^t T(t-s;q_0)\,[D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}]\,(\cdot)\,ds. \tag{8}$$

Resulta entonces claro que para todo $h \in Q$, la q-derivada de Fréchet $[D_qT(t;q_0)]h$ es, en efecto, la solución $v_h(t)$ del problema de valores iniciales (S_1) en $\mathcal{L}(Z)$. Puesto que $q_0 \in Q_{ad}$ es arbitrario, la parte (i) del teorema está probada.

Para probar (ii) notemos en primer lugar que por H5, si $q_0 \in Q_{ad}$, $D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0} \in \mathcal{L}\left(Q; L^1\left(0,\infty;\mathcal{L}(Z)\right)\right)$ y por lo tanto existe una constante $C = C(q_0)$ tal que para $h \in Q$

$$\|D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0}\,h\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))} \leq C(q_0)\,\|h\|\,. \tag{9}$$

Ahora, se sigue a partir de (8) que para $t > 0$, $q_0 \in Q_{ad}$ y $h \in Q$

$$\begin{aligned}\|\,[D_qT(t;q_0)]\;h\|_{\mathcal{L}(Z)} &\leq M_{q_0}\int_0^t \|D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}\,h\|_{\mathcal{L}(Z)}\;ds\\ &\leq M_{q_0}\,\|D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0}\,h\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Z))}\\ &\leq M_{q_0}C(q_0)\,\|h\| \qquad\qquad \text{(en virtud de (9))}\\ &= \tilde{C}(q_0)\,\|h\|\,.\end{aligned}$$

Así

$$\|D_qT(t;q_0)\|_{\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z))} \leq \tilde{C}(q_0),$$

y puesto que $\tilde{C}(q_0)$ no depende de $t > 0$, se sigue que $D_qT(\cdot;q_0) \in L^\infty\left(0,\infty;\mathcal{L}\left(Q;\mathcal{L}(Z)\right)\right)$. ■

Los dos teoremas siguientes muestran que, bajo hipótesis ligeramente mas fuertes sobre el operador $q \to A(q)T(\cdot;q_0)$, es posible obtener la continuidad Lipschitz del operador $q \to D_qT(\cdot;q_0)$ de Q en $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z)))$ y de Q en $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z,Z_\delta)))$. Más precisamente, consideremos las siguientes hipótesis.

H6: El operador $q \to D_qA(q)T(\cdot;q_0)$ de Q en $L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z)))$ es localmente Lipschitz continuo en q_0, para todo $q_0 \in Q_{ad}$.

TEOREMA 4: *Sea $q_0 \in Q_{ad}$ y supongamos que se verifican las hipótesis H1-H6. Entonces el operador $q \to D_qT(\cdot;q_0)$ de Q en $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z)))$ es localmente Lipschitz continuo en q_0.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, notemos que las hipótesis H1-H5 implican, en virtud del Teorema 3(ii), que $D_qT(\cdot;q_0) \in L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z)))$.

Ahora, sean $t > 0$, $q_0 \in Q_{ad}$, $h \in Q$ tal que $\|h\| < \tilde{\delta}$ ($\tilde{\delta}$ como en el Teorema 2) y denotemos con $G_q(t;q_0)(\cdot) = D_qA(q)T(t;q_0)|_{q=q_0}(\cdot) \in \mathcal{L}(Q,\mathcal{L}(Z))$. Entonces

$$
\begin{aligned}
&\|D_qT(t;q_0+h)(\cdot) - D_qT(t;q_0)(\cdot)\|_{\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z))} = \qquad\qquad \text{(en virtud del Teorema 3)}\\
&= \left\| \int_0^t [T(t-s;q_0+h)G_q(s;q_0+h)(\cdot) - T(t-s;q_0)G_q(s;q_0)(\cdot)]\, ds \right\|_{\mathcal{L}(Q,\mathcal{L}(Z))}\\
&\le \int_0^t \|[T(t-s;q_0+h)[G_q(s;q_0+h) - G_q(s;q_0)]\,(\cdot)\|_{\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z))}\, ds\\
&\quad + \int_0^t \|(T(t-s;q_0+h) - T(t-s;q_0))\, G_q(s;q_0)(\cdot)\|_{\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z))}\, ds\\
&\le M_{q_0+h} \int_0^t e^{-\varepsilon_0(t-s)} \|G_q(s;q_0+h) - G_q(s;q_0)\|_{\mathcal{L}(Q,\mathcal{L}(Z))}\, ds\\
&\quad + \int_0^t \|D_qT\,(t-s;q_0+\alpha(h)h)\, G_q(s;q_0)(\cdot)h\|_{\mathcal{L}(Q,Z)}\, ds \qquad \text{(por el Teor. 3, dónde } 0 \le |\alpha(h)| \le 1)\\
&\le M_{q_0+h} \|G_q(\cdot;q_0+h) - G_q(\cdot;q_0)\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z)))}\\
&\quad + \|D_qT(\cdot;q_0+\alpha(h)h)\|_{L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z)))}\, \|G_q(\cdot;q_0)\|_{L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z)))}\, \|h\|\\
&\le C\|h\|\,,
\end{aligned}
$$

dónde la última desigualdad se sigue de H6, por el hecho que $D_qT(\cdot,q)$ pertenece a $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z)))$, lo que se sigue del Teorema 3(ii), y por el hecho que $G_q(\cdot,q_0) \in L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z)))$, que es una consecuencia de H6. Aquí la constante C depende de q_0 y de h pero puede elegirse independiente de h en subconjuntos compactos de Q. Se obtiene entonces el resultado deseado.

■

Como veremos más adelante, para obtener la diferenciabilidad Fréchet de $S(\cdot;q)$ con respecto a q necesitaremos resultados de regularidad más fuertes sobre el operador $q \to D_qT(\cdot;q_0)$ que los que hemos obtenido en el Teorema 4. En particular, necesitaremos la continuidad Lipschitz local de este operador, considerado como operador de Q en el espacio $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta)))$. Este resultado se puede obtener exigiendo condiciones ligeramente más fuertes al operador $q \to D_qA(q)T(\cdot;q_0)$ que las impuestas por H6. Más precisamente, consideremos la siguiente hipótesis.

H7: Para cada $q_0 \in Q_{ad}$, $D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0} \in L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta)))$ y el operador $q \to D_qA(q)T(\cdot;q_0)$ de Q en $L^1(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta)))$ es localmente Lipschitz continuo en q_0, para todo $q_0 \in Q_{ad}$.

Claramente, H7 implica H6 (puesto que la norma de Z_δ es más fuerte que la norma de Z).

Teorema 5:*Supongamos que valen H1-H5 y H7. Entonces, para todo $q_0 \in Q_{ad}$, $D_qT(\cdot;q_0) \in L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta)))$ y, más aún, el operador $q \to D_qT(\cdot;q)$ de Q en el espacio $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta)))$ es localmente Lipschitz continuo en q_0.*

Demostración: Sea $t>0$, $z\in Z$, $h\in Q$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
&\|\,[D_qT(t;q_0)h]\;z\|_{Z_\delta} \;=\; \left\|(-A(q_0))^\delta\left([D_qT(t;q_0)]\;h\right)z\right\|_Z\\
&= \left\|(-A(q_0))^\delta\int_0^t T(t-s;q_0)\left\{[D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}]\;h\right\}z\,ds\right\|_Z\\
&= \left\|\int_0^t T(t-s;q_0)\,(-A(q_0))^\delta\left[D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}\right]h\,z\,ds\right\|_Z\\
&\le \int_0^t \left\|T(t-s;q_0)\,(-A(q_0))^\delta\left[D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}\right]h\,z\right\|_Z\,ds\\
&\le M_{q_0}\int_0^t e^{-\varepsilon_0(t-s)}\left\|(-A(q_0))^\delta D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}\right\|_{\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z))}\|h\|\,\|z\|_Z\,ds\\
&\le M_{q_0}\|h\|\,\|z\|_Z\int_0^t\left\|(-A(q_0))^\delta D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}\right\|_{\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z))}ds\\
&= M_{q_0}\|h\|\,\|z\|_Z\int_0^t\|D_qA(q)T(s;q_0)|_{q=q_0}\|_{\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z,Z_\delta))}\,ds\\
&= M_{q_0}\|h\|\,\|z\|_Z\,\|D_qA(q)T(\cdot;q_0)|_{q=q_0}\|_{L^1(0,t;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta)))}\\
&\le C(q_0)\,\|h\|\,\|z\|_Z \qquad\qquad \text{(en virtud de H7)}
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\|D_qT(t;q_0)\,h\|_{\mathcal{L}(Z;Z_\delta)} \;\le\; C(q_0)\,\|h\|$$

y se tiene entonces que

$$\|D_qT(t;q_0)\|_{\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta))} \;\le\; C(q_0).$$

Puesto que la constante $C(q_0)$ no depende de $t>0$, se sigue que $D_qT(\cdot;q_0) \in L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta)))$. La continuidad Lipschitz de este operador se obtiene inmediatamente siguiendo exactamente los mismos pasos que en el Teorema 4. ■

Veremos a continuación que este resultado implica que $q \to T(\cdot;q)$ es differentiable Fréchet como operador de Q en $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta)))$. En efecto, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 6: *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 5, $T(\cdot;q)$ es q-diferenciable Fréchet en q_0, para cada $q_0 \in Q_{ad}$, como operador de Q en $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Z;Z_\delta))$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $q_0 \in Q_{ad}$. Entonces para $h \in Q$ (suficientemente pequeño de manera que $q_0+\alpha h \in Q_{ad}$ para todo α tal que $|\alpha| \le 1$) y todo $t>0$ podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&\|T(t;q_0+h)-T(t;q_0)-[D_qT(t;q_0)]\,h\|_{\mathcal{L}(Z;Z_\delta)}\\
&=\|\,[D_qT(t;q_0+\beta(h)h)]\,h-[D_qT(t;q_0)]\,h\|_{\mathcal{L}(Z;Z_\delta)} \qquad (\text{dónde } 0\le|\beta(h)|\le 1)\\
&\le \|D_qT(t;q_0+\beta(h)h)-D_qT(t;q_0)\|_{\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta))}\,\|h\|\\
&\le \|D_qT(\cdot;q_0+\beta(h)h)-D_qT(\cdot;q_0)\|_{L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta)))}\,\|h\|\\
&\le C(q_0)\,\|\beta(h)h)\|\,\|h\| \qquad (\text{en virtud del Teorema 5})\\
&\le C(q_0)\|h\|^2\\
&\le C(q_0)\,\epsilon\,\|h\|, \qquad \text{para } \|h\|<\epsilon.
\end{aligned}$$

Queda así probado del teorema. ■

Es importante notar que los Teoremas 3 y 6 implican que la solución $z_h(t;q)=T(t;q)z_0$ del problema lineal homogéneo asociado a $(\mathcal{P})_q$ es differentiable Fréchet respecto de q, como función a valores en Z y como función a valores en Z_δ, respectivamente. Los Teoremas 4 y 5 implican, más aún, que las correspondientes derivadas de Fréchet son localmente Lipschitz continuas.

Enunciamos a continuación una generalización del Lema de Gronwall para núcleos singulares, cuya demostración puede encontrarse en [6], Lema 7.1.1. Este Lema será de fundamental importancia para nuestros próximos resultados.

LEMA 7: *Sean L,T,δ constantes positivas, $\delta<1$, $a(t)$ una función a valores reales, no negativa y localmente integrable sobre $[0,T]$ y $\mu(t)$ una función a valores reales definida sobre $[0,T]$ que satisface la desigualdad integral*

$$\mu(t)\le a(t)+L\int_0^t \frac{\mu(s)}{(t-s)^\delta}\,ds, \quad t\in[0,T].$$

Entonces, existe una constante K, que depende solo de δ tal que

$$\mu(t)\le a(t)+KL\int_0^t \frac{a(s)}{(t-s)^\delta}\,ds, \quad t\in[0,T].$$

Observación 1: De aquí en más $\|\cdot\|_\delta$ denotará la norma $\|\cdot\|_{q_0,\delta}=\|(-A(q_0))^\delta(\cdot)\|_Z$.

Recordemos de todos modos que para $q_0\in Q$, todas estas normas son equivalentes. Más aún, se puede probar fácilmente que todas estas normas son uniformemente equivalentes para q_0 en cualquier subconjunto Q_c de Q para el cual la constante C en H4 pueda elegirse independiente de q_1, $q_2\in Q_c$.

Observación 2: Puesto que $(-A(q_0))^\delta T(t;q_0+h) = (-A(q_0))^\delta(-A(q_0+h))^{-\delta}T(t;q_0+h)(-A(q_0+h))^\delta$ sobre D_δ, se sigue que

$$\left\|(-A(q_0))^\delta T(t;q_0+h)\right\| \leq \frac{Ce^{-\varepsilon_0 t}}{t^\delta} \quad \forall t>0, \qquad \text{(en virtud de H4).}$$

También aquí la constante C depende de q_0 y de h, pero puede elegirse independientemente de h y de q_0 en cualquier subconjunto Q_c de Q para el que la constante C en H4 pueda elegirse independiente de q_1, $q_2 \in Q_c$.

Recordemos ahora que la solución $z(t;q)$ de $(\mathcal{P})_q$ satisface la ecuación integral $z(t;q) = T(t;q)z_0 + S(t;q)$ dónde $S(t;q) \doteq \int_0^t T(t-s;q)F(q,s,z(s;q))\,ds$. Antes de probar la diferenciabilidad Fréchet del operador $q \to S(\cdot;q)$ de Q en $L^\infty(0,T;Z_\delta)$, probaremos que si $F(q,t,z)$ satisface condiciones de regularidad apropiadas, entonces tal operador es localmente Lipschitz continuo en q_0, para todo $q_0 \in Q_{ad}$. Este es un resultado que necesitaremos más adelante.

Consideremos la siguiente hipótesis.

H8: El operador $q \to F(q,\cdot;z)$ de Q en $L^\infty(0,T;Z)$ es localmente Lipschitz continuo para todo $z \in Z_\delta$ con constante Lipschitz independiente de z sobre conjuntos Z_δ-acotados.

TEOREMA 8: *Sea $q_0 \in Q_{ad}, z_0 \in D_\delta$ y supongamos válidas las hipótesis H1-H5, H7 y H8. Entonces el operador $q \to S(\cdot;q)$ de Q en $L^\infty(0,T;Z_\delta)$ es localmente Lipschitz continuo en q_0.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $t \in [0,T]$ y $q_0 \in Q_{ad}$. Dado que Q_{ad} es abierto, existe $\gamma_1 > 0$ tal que $q_0 + h \in Q_{ad}$ $\forall h$ con $\|h\| < \gamma_1$. Entonces

$$\begin{aligned}
&S(t;q_0+h) - S(t;q_0) = \\
&\quad = \int_0^t \left[T(t-s;q_0+h)F(q_0+h,s,z(s;q_0+h)) - T(t-s;q_0)F(q_0,s,z(s;q_0))\right] ds \\
&\quad = \int_0^t T(t-s;q_0+h)\left[F(q_0+h,s,z(s;q_0+h)) - F(q_0,s,z(s;q_0+h))\right] ds + \\
&\quad + \int_0^t T(t-s;q_0+h)\left[F(q_0,s,z(s;q_0+h)) - F(q_0,s,z(s;q_0))\right] ds + \\
&\quad + \int_0^t \left[T(t-s;q_0+h) - T(t-s;q_0)\right]F(q_0,s,z(s;q_0))\,]\, ds \\
&\quad = \int_0^t T(t-s;q_0+h)\left[F(q_0+h,s,z(s;q_0+h)) - F(q_0,s,z(s;q_0+h))\right] ds + \\
&\quad + \int_0^t T(t-s;q_0+h)\left[F(q_0,s,z(s;q_0+h)) - F(q_0,s,z(s;q_0))\right] ds + \\
&\quad + \int_0^t D_qT(t-s;q_0+\beta(h)h)\,hF(q_0,s,z(s;q_0))\,ds \quad \text{(por el Teor. 3, siempre que } \|h\| \leq \gamma_1, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dónde } 0 \leq |\beta(h)| \leq 1).
\end{aligned}$$

A partir de esta identidad obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
&\|S(t;q_0+h)-S(t;q_0)\|_\delta \\
&\le \int_0^t \|T(t-s;q_0+h)\|_{\mathcal{L}(Z;Z_\delta)} \|F(q_0+h,s,z(s;q_0+h))-F(q_0,s,z(s;q_0+h))\|_Z\, ds \\
&\quad + \int_0^t \|T(t-s;q_0+h)\|_{\mathcal{L}(Z;Z_\delta)} \|F(q_0,s,z(s;q_0+h))-F(q_0,s,z(s;q_0))\|_Z\, ds \\
&\quad + \|D_qT(\cdot;q_0+\beta(h)h)\|_{L^\infty(0,t;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z,Z_\delta)))} \|h\| \int_0^t \|F(q_0,s,z(s;q_0))\|_Z\, ds \\
&\le \int_0^t \frac{M_{q_0+h}e^{-\varepsilon_0(t-s)}}{(t-s)^\delta} C_1\|h\|\, ds \qquad \text{(en virtud de H8)} \\
&\quad + \int_0^t \frac{M_{q_0+h}e^{-\varepsilon_0(t-s)}}{(t-s)^\delta} L\, \|z(s;q_0+h)-z(s;q_0)\|_\delta \qquad \text{(en virtud de H3)} \\
&\quad + C_2\|h\| \qquad \text{(en virtud del Teor.5, y porque } z(s;q_0) \text{ es acotado} \\
&\qquad\qquad \text{para } s\in[0,T] \text{ y } F(q,s,z) \text{ es continua en } s \text{ y } z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le C_3\|h\| + C_4\int_0^t \frac{\|z(s;q_0+h)-z(s;q_0)\|_\delta}{(t-s)^\delta}\, ds \\
&= C_3\|h\| + C_4\int_0^t \frac{\|T(s;q_0+h)z_0-T(s;q_0)z_0+S(s;q_0+h)-S(s;q_0)\|_\delta}{(t-s)^\delta}\, ds \\
&= C_3\|h\| + C_4\int_0^t \frac{\|\,[D_qT\,(s;q_0+\beta(h)h)\,h]\,z_0+S(s;q_0+h)-S(s;q_0)\|_\delta}{(t-s)^\delta}\, ds \\
&\le C_5\|h\| + C_4\int_0^t \frac{\|S(s;q_0+h)-S(s;q_0)\|_\delta}{(t-s)^\delta}\, ds \qquad \text{(en virtud del Teor. 5).}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Lema 7, existe una constante K tal que

$$\|S(t;q_0+h)-S(t;q_0)\|_\delta \le C_5\|h\| + KC_4C_5\|h\| \int_0^T \frac{1}{(t-s)^\delta}\, ds \doteq C_6\|h\|, \quad t\in[0,T],$$

siempre que $\|h\|\le\gamma_1$. El teorema queda entonces demostrado. ■

Observación: Notemos que este resultado, junto con el Teorema 6 implica que el operador $q\to z(\cdot;q)$ de Q en $L^\infty(0,T;Z_\delta)$ es localmente Lipschitz continuo en q_0.

Ahora probaremos la diferenciabilidad Fréchet del operador $q\to S(t;q)$, correspondiente a la parte no lineal del problema $(\mathcal{P})_q$.

Consideremos la siguiente hipótesis:

H9: El operador $(q,z(\cdot))\to F(q,\cdot\,,z(\cdot))$ de $Q_{ad}\times L^1(0,T;Z_\delta)$ en $L^\infty(0,T;Z)$ es diferenciable Fréchet en ambas variables, el operador $(q,z(\cdot))\to F_q(q,\cdot\,,z(\cdot))$ de $Q\times L^\infty(0,T;Z_\delta)$ en $L^\infty(0,T:\mathcal{L}(Q;Z_\delta))$ es localmente Lipschitz continuo con respecto a q y z, con constante de Lipschitz independiente de z sobre conjuntos Z_δ-acotados y $F_z(q,\cdot\,,z(\cdot\,;q))\in L^\infty(0,T;\mathcal{L}(Z;Z_\delta))$.

Teorema 9: *Sea $q_0 \in Q_{ad}$, $z_0 \in D_\delta$ y supongamos que valen H1-H5, H7 y H9. Entonces el operador $q \to S(t;q) = \int_0^t T(t-s;q)F(q,s,z(s;q))\,ds$ de Q en $L^\infty(0,T;Z_\delta)$ es diferenciable Fréchet en q_0. Más aún, para cualquier $t \in [0,T]$, y cualquier $h \in Q$, $[D_q S(t;q_0)]h \doteq w_h(t)$ satisface la ecuación integral*

$$w_h(t) = \int_0^t \Big\{ T(t-s;q_0)\Big[F_q(q_0,s,z(s;q_0))h + F_z\left(q_0,s,z(s;q_0)\right)[D_qT(s;q_0)z_0]h + \tag{10}$$
$$+ F_z(q_0,s,z(s;q_0))w_h(s)\Big] + [D_qT(t-s;q_0)F(q_0,s,z(s;q_0))]\; h\Big\}\, ds$$

y $w_h(t)$ es la solución del siguiente problema lineal no homogéneo de valores iniciales en Z:

$$(S_2)\begin{cases} \frac{d}{dt}w_h(t) = \big(A(q_0) + F_z(q_0,t,z(t;q_0))\big)w_h(t) + F_q(q_0,t,z(t;q_0))h + \\ \qquad F_z(q_0,t,z(t;q_0))[D_qT(t;q_0)z_0]h + \int_0^t D_qA(q)T(t-s;q_0)\big|_{q=q_0} h\, F\left(q_0,s,z(s;q_0)\right)\, ds \\ w_h(0) = 0 \end{cases}$$

Esta es la llamada "ecuación de sensitividad"para $S(t;q)$.

Observación: Claramente la hipótesis H9 es más fuerte que H8. Esta observación es importante puesto que para probar este teorema necesitaremos utilizar los resultados del Teorema 8, para el cual H8 debe ser válida.

Demostración: Utilizando la formula de variación de los parámetros de la teoría de semigrupos, la ecuación de sensitividad (S_1) para $T(t;q)$ dada en el Teorema 3 y recordando que $[D_qT(0;q_0)z]h = 0$ para $z \in Z$ y $h \in Q$, se sigue inmediatamente que la solución $w_h(t)$ del PVI (S_2) satisface la ecuación integral (10).

Para $t \in (0,T]$ escribimos:

$$S(t;q_0+h) - S(t;q_0) - w_h(t) =$$
$$= \int_0^t \Big\{ T(t-s;q_0+h)F(q_0+h,s,z(s;q_0+h)) - T(t-s;q_0)F(q_0,s,z(s;q_0)) +$$
$$- T(t-s;q_0)\big[F_q(q_0,s,z(s;q_0))h + F_z(q_0,s,z(s;q_0))[T_q(s;q_0)z_0]h +$$
$$+ F_z(q_0,s,z(s;q_0))w_h(s)\big] - D_qT(t-s;q_0)F(q_0,s,z(s;q_0))h\Big\}\, ds$$
$$= \int_0^t T(t-s;q_0)\big[F(q_0+h,s,z(s;q_0)) - F(q_0,s,z(s;q_0)) - F_q(q_0,s,z(s;q_0))h\big]\, ds +$$
$$+ \int_0^t T(t-s;q_0)\Big[F(q_0,s,z(s;q_0+h)) - F(q_0,s,z(s;q_0)) +$$
$$- F_z(q_0,s,z(s;q_0))\big(z(s;q_0+h) - z(s;q_0)\big)\Big]\, ds +$$

$$+\int_0^t T(t-s;q_0)F_z(q_0,s,z(s;q_0))\big[S(s;q_0+h)-S(s;q_0)-w_h(s)\big]\,ds+$$

$$+\int_0^t T(t-s;q_0)F_z(q_0,z(s;q_0))\Big[\left[D_qT(s;q_0+\alpha(h)h)z_0\right]h-\left[D_qT(s;q_0)z_0\right]h\Big]\,ds+$$

$$+\int_0^t \Big\{T(t-s;q_0+h)F(q_0,s,z(s;q_0))-T(t-s;q_0)F(q_0,s,z(s;q_0))+$$
$$-\big[D_qT(t-s;q_0)F(q_0,s,z(s;q_0))\big]h\Big\}\,ds+$$

$$+\int_0^t T(t-s;q_0+h)\big[F(q_0+h,s,z(s;q_0+h))-F(q_0,s,z(s;q_0))\big]\,ds+$$

$$-\int_0^t T(t-s;q_0)\big[F(q_0+h,s,z(s;q_0))-2F(q_0,s,z(s;q_0))+F(q_0,s,z(s;q_0+h))\big]\,ds$$

$$\doteq\sum_{i=1}^{7}I_i,$$

dónde I_i es el i-ésimo término en la expresión de arriba. En I_2, I_3 e I_4 hemos utilizado el hecho que $z(s;q_0+h)-z(s;q_0)=\left[D_qT(s;q_0+\alpha(h)h)z_0\right]h+S(s;q_0+h)-S(s;q_0)$, para algún $\alpha(h)$, dónde $0\le|\alpha(h)|\le 1$.

En lo que sigue, C_i denotará una constante genérica finita positiva que en general depende de q_0.

Observamos que podemos escribir:

$$I_6+I_7=$$
$$=\int_0^t T(t-s;q_0+h)\big[F(q_0+h,s,z(s;q_0+h))-F(q_0,s,z(s;q_0+h))\big]\,ds+$$
$$+\int_0^t\big[T(t-s;q_0+h)-T(t-s;q_0)\big]\,\big[F(q_0,s,z(s;q_0+h))-F(q_0,s,z(s;q_0))\big]\,ds+$$
$$-\int_0^t T(t-s;q_0)\big[F(q_0+h,s,z(s;q_0))-F(q_0,s,z(s;q_0))\big]\,ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t T(t-s;q_0+h)F_q\left(q_0+\alpha_1(h)h,s,z(s;q_0+h)\right)h\,ds+\\
&+\int_0^t \Big[D_qT\left(t-s;q_0+\alpha_2(h)h\right)F_z(q_0,s,z_h^*(q_0))\big(z(s;q_0+h)-z(s;q_0)\big)\Big]h\,ds+\\
&-\int_0^t T(t-s;q_0)F_q\left(q_0+\alpha_3(h)h,s,z(s;q_0)\right)h\,ds \qquad (\text{para } \|h\| \text{ sufic. pequeño}\\
&\qquad\qquad\qquad \text{de manera que } q_0+\beta h\in Q_{ad}\ \forall\beta,\ -1\le\beta\le 1, \text{ digamos, para } \|h\|\le\gamma_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \big[T(t-s;q_0+h)-T(t-s;q_0)\big]F_q\left(q_0+\alpha_1(h)h,s,z(s;q_0+h)\right)h\\
&+\int_0^t T(t-s;q_0)\big[F_q\left(q_0+\alpha_1(h)h,s,z(s;q_0+h)\right)h-F_q\left(q_0+\alpha_3(h)h,s,z(s;q_0)\right)h\big]\,ds\\
&+\int_0^t \big[D_qT\left(t-s;q_0+\alpha_2(h)h\right)F_z\left(q_0,s,z_h^*(q_0)\right)\left(z(s;q_0+h)-z(s;q_0)\right)\big]h\,ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \big[D_qT\left(t-s;q_0+\alpha_2(h)h\right)F_q\left(q_0+\alpha_1(h)h,s,z(s;q_0+h)\right)h\big]h\,ds\\
&+\int_0^t T(t-s;q_0)\big[F_q\left(q_0+\alpha_1(h)h,s,z(s;q_0+h)\right)h-F_q\left(q_0+\alpha_3(h)h,s,z(s;q_0)\right)h\big]\,ds\\
&+\int_0^t \big[D_qT\left(t-s;q_0+\alpha_2(h)h\right)F_z(q_0,s,z_h^*(q_0))\big(z(s;q_0+h)-z(s;q_0)\big)\big]h\,ds
\end{aligned}
$$

dónde $0\le|\alpha_i(h)|\le 1$, $i=1,2,3$ y $z_h^*(q_0)\doteq z(s;q_0)+\beta\left(z(s;q_0+h)-z(s;q_0)\right)$ para algún β que satisface $0\le|\beta|\le 1$.

En virtud del Teorema 8 y de la hipótesis H9, se sigue que existen constantes positivas C_1, C_2, L, y γ_1 tales que:

$$
\begin{aligned}
\|I_6+I_7\|_\delta &\le C_1\|h\|^2+\int_0^t \frac{L}{(t-s)^\delta}\Big(|\alpha_1(h)-\alpha_3(h)|\,\|h\|+\|z(s;q_0+h)-z(s;q_0)\|_\delta\Big)\|h\|\,ds\\
&\quad+\int_0^t \frac{C_2}{(t-s)^\delta}\,\|z(s;q_0+h)-z(s;q_0)\|_\delta\,\|h\|\,ds\\
&\le C_3\|h\|^2, \quad \text{siempre que } \|h\|\le\gamma_1, \qquad (11)
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad se sigue de la continuidad Lipschitz el operador $q\to z(\cdot;q)$ de Q en $L^\infty(0,T;Z_\delta)$ en q_0 (véase la observación después del Teorema 8).

Ahora, sea $\varepsilon>0$. Se sigue de la hipótesis H9 que existen constantes $\gamma_2>0$ y $\gamma_3>0$ tales que

$$\|I_1\|_\delta \le \int_0^t \frac{C_4}{(t-s)^\delta}\,\varepsilon\|h\|\,ds\le C_5\,\varepsilon\,\|h\|, \tag{12}$$

siempre que $\|h\| \leq \gamma_2$, y

$$\begin{aligned} \|I_2\|_\delta &\leq \int_0^t \frac{C_6\,\varepsilon}{(t-s)^\delta} \|z(s;q_0+h) - z(s;q_0)\|_Z \; ds \\ &\leq C_7\,\varepsilon\,\|h\|, \end{aligned} \tag{13}$$

siempre que $\|h\| \leq \gamma_3$. La última desigualdad se sigue en virtud de la observación inmediata posterior al Teorema 8 y del hecho que $\|\cdot\|_Z \leq \|\cdot\|_\delta$.

Con respecto a I_3, en virtud de H9 tenemos que existe una constante $C_8 > 0$ tal que

$$\|I_3\|_\delta \leq C_8 \int_0^t \frac{\big\|S(s;q_0+h) - S(s;q_0) - w_h(s)\big\|_\delta}{(t-s)^\delta} \; ds \tag{14}$$

dónde también hemos utilizado el hecho que $\|\cdot\|_Z \leq \|\cdot\|_\delta$.

Análogamente, en virtud de la continuidad Lipschitz de $D_q T(\cdot;q_0)$ (Teorema 4) tenemos que existe $\gamma_4 > 0$ tal que

$$\|I_4\|_\delta \;\leq\; \int_0^t \frac{C_9}{(t-s)^\delta} |\alpha(h)|\, \|h\|^2 \; ds \leq C_{10}\|h\|^2, \text{ siempre que } \|h\| \leq \gamma_4. \tag{15}$$

Finalmente, del Teorema 6 se sigue que existen constantes positivas C_{10} y γ_5 tales que

$$\begin{aligned} \|I_5\|_\delta \;&=\; \left\| \int_0^t \big[T(t-s;q_0+h) - T(t-s;q_0) - D_qT(t-s;q_0)h\big] F(q_0,s,z(s;q_0))\; ds \right\|_\delta \\ &\leq \|T(\cdot;q_0+h) - T(\cdot;q_0) - D_qT(\cdot;q_0)h\|_{L^\infty(0,t;\mathcal{L}(Z;Z_\delta))} \int_0^t \|F(q_0,s,z(s;q_0))\|_Z \; ds \\ &\leq C(q_0)\varepsilon\|h\| \int_0^t \|F(q_0,s,z(s;q_0))\|_Z \; ds \qquad \text{(en virtud del Teor. 6, para } \|h\| \leq \gamma_5) \\ &\leq C_{10}\,\varepsilon\,\|h\|, \qquad \text{(en virtud de H9).} \end{aligned} \tag{16}$$

A partir de las estimaciones (11)-(16) concluímos que existen constantes positivas finitas C_{11}, C_{12}, y γ tales que para $t \in [0,T]$ y $h \in Q_{ad}$ con $\|h\| \leq \gamma$

$$\begin{aligned} \|S(t;q_0+h) - S(t;q_0) - w_h(t)\|_\delta \leq{}& C_{11}\,\varepsilon\|h\| + \\ &+ C_{12} \int_0^t \frac{\|S(s;q_0+h) - S(s;q_0) - w_h(s)\|_\delta}{(t-s)^\delta} \, ds. \end{aligned}$$

El Lema 7 implica entonces que

$$\begin{aligned} \|S(t;q_0+h) - S(t;q_0) - w_h(t)\|_\delta &\leq C_{11}\,\varepsilon\|h\| + KC_{12}C_{11}\varepsilon\|h\| \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\delta} \, ds \\ &\leq C_{13}\varepsilon\|h\|, \quad t \in [0,T], \quad \|h\| \leq \gamma. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador $q \to S(\cdot;q)$ de Q en $L^\infty(0,T;Z_\delta)$ es diferenciable Fréchet en q_0 y $w_h(t)$ es la derivada de Fréchet de $S(t;q)$ en q_0 evaluada en h, i.e. $[D_qS(t;q_0)]h = w_h(t)$.■

TEOREMA 10: *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 9, el operador $q \to z(\cdot;q)$ del espacio de parámetros Q en el espacio de soluciones $L^\infty(0,T;Z_\delta)$, es diferenciable Fréchet en q_0. Más aún, para cualquier $h \in Q$, $t \in [0,T]$, la q-derivada de Fréchet de $z(t;q)$ evaluada en q_0 y aplicada a h, i.e. $[D_q z(t;q_0)]h$ es la solución $v_h(t)$ del siguiente problema de valores iniciales lineal no homogéneo en Z:*

$$(S)\begin{cases} \frac{d}{dt}v_h(t) = \big(A(q_0) + F_z(q_0,t,z(t;q_0))\big)\, v_h(t) \;+\; F_q(q_0,t,z(t;q_0))h + \\ \qquad + D_q A(q)T(t;q_0)z_0\big|_{q=q_0} h \;+\; \int_0^t D_q A(q)T(t-s;q_0)\big|_{q=q_0} h\, F\,(q_0,s,z(s;q_0))\; ds \\ \\ v_h(0) = 0 \end{cases}$$

Esta es la llamada "ecuación de sensitividad"para $z(t;q)$.

DEMOSTRACIÓN: La diferenciabilidad Fréchet de $z(t;q) = T(t;q)z_0 + S(t;q)$ se sigue inmediatamente a partir de los Teoremas 6 y 9 y la ecuación de sensitividad se obtiene combinando las ecuaciones de sensitividad (S_1) y (S_2). ■

4. Conclusiones y observaciones finales

En este artículo hemos obtenido condiciones que garantizan que las soluciones del problema de Cauchy abstracto no lineal

$$(\mathcal{P})_q \begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = A(q)z(t) + F(q,t,z(t)) & z(t) \in Z, \\ z(0) = z_0 & t \in [0,T] \end{cases}$$

son diferenciables Fréchet con respecto al parámetro q. Este tipo de resultado de regularidad es necesario para la implementación de métodos directos de identificación de parámetros, tales como los de cuasi-linealización.

Finalmente, formulamos algunas observaciones importantes. En los Teoremas 1-6 todos los espacios se consideraron sobre el intervalo $[0,\infty)$. Esto es así puesto que la solución $T(t;q_0)z_0$ del problema lineal homogéneo asociado a $(\mathcal{P})_q$ existe para todo $t \in [0,\infty)$.

Es interesante observar en los Teoremas 2, 3 y 4 cómo la q-regularidad L^∞ de la solución del problema lineal asociado depende total y exclusivamente de la q-regularidad L^1 del operador derivada temporal del C_0-semigrupo asociado, es decir, de $A(q)T(\,\cdot\,;q_0)$.

Para la q-regularidad del término en la solución correspondiente a la parte no lineal de la ecuación, es decir de $S(t;q_0)$, no solamente se requieren condiciones de suavidad sobre el término no lineal $F(q,t,z)$ (H8 y H9) en $(\mathcal{P})_q$, sino también condiciones de regularidad más fuertes sobre $A(q)T(\,\cdot\,;q_0)$ (H6 y H7). Estas condiciones garantizan la diferenciabilidad Fréchet de $T(\,\cdot\,;q_0)$ visto como operador del espacio de parámetros Q en el espacio $L^\infty(0,\infty;\mathcal{L}(Q;\mathcal{L}(Z;Z_\delta)))$, dónde utilizamos la norma más fuerte de Z_δ.

Es posible permitir que las normas en el espacio de estados Z también dependan de q. Sin embargo, los dominios de los operadores $A(q)$ no pueden depender de q. Aún no se conoce ningún resultado para este caso de dominios variables.

Referencias

[1] Brewer, D., *The Differentiability with Respect to a Parameter of the Solution of a Linear Abstract Cauchy Problem*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 13, N 4, 1982, pp. 607-620.

[2] Brewer, D., Burns, J. and Cliff E., *Parameter Identification for an Abstract Cauchy Problem by Quasilinearization*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol 51, 1993, pp. 1-22.

[3] Burns, J., Morin P. and Spies R., *Parameter Differentiability of the Solution of a Nonlinear Abstract Cauchy Problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 252, 2000, pp. 18-31.

[4] Clark, L. G. and Gibson, J. S., *Sensitivity Analysis for a Class of Evolution Equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 58, 1977, pp. 22-31.

[5] Hammer, P. W., *Parameter Identification in Parabolic Partial Differential Equations Using Quasilinearization*, PhD thesis, ICAM Report 90-07-01, Interdisciplinary Center for Applied Mathematics, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1990.

[6] Henry, D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, 840, Springer-Verlag, 1989.

[7] Herdman T., Morin P. and Spies R., *Parameter Identification for Nonlinear Abstract Cauchy Problems Using Quasilinearization*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 113, N 2, May 2002, pp. 227-250.

[8] Lunardi, A., *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, 1995.

[9] Morin, P. and Spies, R., *Identifability of the Landau-Ginzburg Potential in a Mathematical Model of Shape Memory Alloys*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 212, 1997, pp. 292-315.

[10] Morin, P. and Spies, R., *A Quasilinearization Approach for Parameter Identification in a Nonlinear Model of Shape Memory Alloys*, Inverse Problems, Vol. 14, 1998, pp. 1551-1563.

[11] Spies, R., *A State-Space Approach to a One-Dimensional Mathematical Model for the Dynamics of Phase Transitions in Pseudoelastic Materials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 190, 1995, pp. 58-100.

[12] Spies, R., *Results on a Mathematical Model of Thermomechanical Phase Transitions in Shape Memory Materials*, Smart Materials and Structures, Vol. 3, 1994, pp. 459-469.

[13] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983.

Rubén D. Spies
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral,
IMAL,CONICET, Güemes 3450,
3000 Santa Fe, Argentina.
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Química,
Universidad Nacional del Litoral, Santiago del Estero 2829,
3000 Santa Fe, Argentina.
`rspies@imalpde.ceride.gov.ar`

Recibido: 27 de julio de 2003
Revisado: 12 de abril de 2005