2-Normlu Uzaylarda Çift Fonksiyon Dizilerinin $\mathcal{I}_2$-Yakınsaklığı ve Bazı Özellikleri

Sevim Yegül, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Türkiye, sevimyegull@gmail.com
Erdinç Dündar, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Türkiye, edundar@aku.edu.tr

Özet

Çalışmamız boyunca, $\mathbb{N}$ tüm doğal sayılar kümesinin ve $\mathbb{R}$ tüm gerçek sayıların kümesini belirtecektir. Reel sayı dizilerinin bir genelleştirmesi olan istatistiksel yakınsaklık Fast (1951) tarafından tanımlandı. Daha sonra Schoenberg (1959) ve Fridy (1985) gibi matematikçiler tarafından istatistiksel yakınsaklığın bazı özellikleri incelendi. İstatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan $\mathcal{I}$-yakınsaklık Kostyrko vd. (2000) tarafından tanılmış olup, bu kavram $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin sınıfı olan $\mathcal{I}$ idealinin yapısına bağlıdır. Ayrıca bu çalışmada, $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramı tanımlanarak (AP) şartı yardımıyla $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile aralarındaki ilişkiler araştırılmıştır. Gezer ve Karakuş (2005) fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}$-noktasal ve düzgün yakınsaklığı ve $\mathcal{I}^*$-noktasal ve düzgün yakınsaklığını araştırıp ve aralarındaki ilişkiyi incelediler. Das vd. (2008) metrik uzaylarda çift dizilerinin $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramını tanıtıp bu bu yakınsaklığın bazı özellilerini incelemişlerdir. Dündar and Altay (2015, 2016) çift fonksiyon dizilerinin noktasal ve düzgün $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramını ve bununla ilgili özellikleri incelemişlerdir. Dahası Dündar (2015) çift fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}_2$-yakınsaklığının hakkında birçok araştırma yapmıştır.

2-normlu uzay kavramı 1960'lı yıllarda G$\ddot{a}$hler tarafından tanıtılmıştır. Gürdal ve Pehlivan (2009) 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak bu kavram ile ilgili özellikleri incelemişlerdir. Gürdal (2006) 2-normlu uzaylarda ideal yakınsaklığı çalışmıştır. 2-normlu uzayda fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizileri Yegül ve Dündar (2017) tarafından incelenmiştir. Ayrıca. Yegül ve Dündar (2018) 2-normlu uzaylardaki çift fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizilerinin noktasal ve düzgün yakınsaklık kavramlarını tanımladı. Son zamanlarda, Arslan and Dündar (2018) 2-normlu uzaylardaki fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi kavramlarını tanımladı.

Bu çalışmada, 2-normlu uzaylarda çift fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık kavramını tanımlayacağız. Ayrıca bu kavram ile ilgili bazı önemli özellikleri inceleyeceğiz.

Anahtar Kelimeler: Çift dizi, Fonksiyon dizisi, İdeal yakınsaklık, 2-normlu uzaylar.

Abstract

Throughout the paper, $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers and $\mathbb{R}$ the set of all real numbers. Statistical convergence, which is a generalization of the real number sequences, was defined by Fast (1951). Some features of statistical convergence were studied by mathematicians such as Schoenberg (1959) and Fridy (1985). The idea of $\mathcal{I}$-convergence was introduced by Kostyrko et al. (2000) as a generalization of statistical convergence which is based on the structure of the ideal $\mathcal{I}$ of subset of $\mathbb{N}$. Also, In this study, $\mathcal{I}^*$-convergence concept was defined and the relations between $\mathcal{I}$-convergence and its relations with (AP) condition were investigated. Gezer and Karakuş (2005) investigated $\mathcal{I}$-pointwise and uniform convergence and $\mathcal{I}^*$-pointwise and uniform convergence of function sequences and they examined the relations between them. Das et al. (2008) introduced the concept of $\mathcal{I}$ convergence of double sequences in a metric space and studied some properties of this convergence. Dündar and Altay (2015, 2016) studied the concepts of pointwise and uniformly $\mathcal{I}$ convergence and $\mathcal{I}_2^*$-convergence of double sequences of functions and investigated some properties about them. Furthermore, Dündar (2015) investigated some results of $\mathcal{I}_2$-convergence of double sequences of functions.

The concept of 2-normed spaces was initially introduced by G$\ddot{a}$hler in the 1960's. Gürdal and Pehlivan (2009) describe the concept of statistical convergence in 2-normed spaces and examined the properties related to this concept. Gürdal (2006) studied ideal convergence in 2-normed spaces. Statistical convergence and statistical Cauchy sequence of functions in 2-normed space were studied by Yegül and Dündar (2017). Also, Yegül and Dündar (2018) introduced concepts of pointwise and uniform convergence, statistical convergence and statistical Cauchy double sequences of functions in 2-normed space. Recently, Arslan and Dündar (2018) inroduced $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}$-Cauchy sequences of functions in 2-normed spaces.

In this study, we will describe the concept of $\mathcal{I}_2$-convergence of double function sequences in 2-normed spaces. We will also examine some important aspects of this concept.

Key Words: Double sequence, Function sequence, Ideal convergence, 2-normed spaces.

Giriş ve Temel Kavramlar

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı bilgiler verilmiştir. Vektör uzayı, topolojik uzay ve alt uzay gibi bazı kavramların bilindiği kabul edilmiştir.

$X,\ 2 \leq d < \infty$ olmak üzere d boyutlu bir vektör uzayı olsun. X üzerinde $\|.,.\|: X \times X \to \mathbb{R}$ 2-normlu uzayı aşağıdaki ifadeleri sağlıyorsa;

i. $\|x, y\| = 0$ olması için gerek ve yeter şart x ve y'nin lineer bağımlı olmasıdır.
ii. $\|x, y\| = \|y, x\|$.
iii. $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R}$.
iv. $\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$.

$(X, \|.,.\|)$ çiftine 2-normlu uzay denir. 2-normlu uzayın bir örneği 2-normla donatılmıs $X = \mathbb{R}^2$ dir. $\|x, y\| := x\ ve\ y$ vektörlerine dayalı paralel kenarın bölgesi

$$\|x, y\| := |x_1 y_2 - x_2 y_1|;\ \ x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$$

formülü ile verilebilir.
Çalışmamızda X ve Y iki 2-normlu uzay, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iki fonksiyon dizisi ve f, g X den Y ye iki fonksiyon olarak alacağız.
Her $x \in X$ için $f_n(x) \xrightarrow{\|.,.\|_Y} f(x)$ ise $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f ye yakınsaktır. $f_n \xrightarrow{\|.,.\|_Y} f$ olarak yazabiliriz.

$$(\forall y \in Y)(\forall x \in X)(\forall \mathcal{E} > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ \|f_n(x) - f(x), y\| < \mathcal{E}$$

formülü ile ifade edilebilir.

$\mathcal{I} \subseteq 2^X$ kümelerinin dizisi bir idealdir ancak ve ancak

i. $\emptyset \in \mathcal{I}$,
ii. Her $A, B \in \mathcal{I}$ için $A \cup B \in \mathcal{I}$ dir,
iii. Her $A \in \mathcal{I}$ ve her $B \subseteq A$ için $B \in \mathcal{I}$ dir.

$\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise ideal, nontrivial olarak adlandırılır ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ ise nontrivial ideale, uygun ideal denir.

$\mathcal{F} \subseteq 2^X$ kümelerin ailesi süzgeçtir ancak ve ancak

i. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
ii. Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$ dir,
iii. Her $A \in \mathcal{F}$ ve her $B \supseteq A$ için $B \in \mathcal{F}$ dir.

$\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de nontrivial idealdir ancak ve ancak $\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset \mathbb{N}: (\exists A \in \mathcal{I})(M = \mathbb{N}\backslash A)\}$, $\mathbb{N}$ de süzgeçtir.
Her $\mathcal{I}_2$ için $\{i\} \times \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N} \times \{i\}$, $\mathcal{I}_2$ ye ait ise $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de $\mathcal{I}_2$ ideali, kuvvetli uygun idealdir.

Çalışmamız boyunca $\mathcal{I}_2$ yi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de kuvvetli uygun ideal olarak alacağız.

Açıktır ki kuvvetli uygun ideal bir uygun idealdir. $\mathcal{I}_2^0 = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}: (\exists m(A) \in \mathbb{N})(i, j \geq m(A) \Rightarrow (i, j) \notin A)\}$. Buradan , $\mathcal{I}_2^0$ kuvvetli uygun idealdir ve açıktır ki $\mathcal{I}_2$ ideali, kuvvetli uygun idealdir ancak ve ancak $\mathcal{I}_2^0 \subset \mathcal{I}_2$ dir.

$\{f_n\}$ fonksiyon dizisi $D \subseteq \mathbb{R}$ kümesi üzerinde f ye (noktasal) $\mathcal{I}$-yakınsaktır ancak ve ancak her $\mathcal{E} > 0$ için ve her bir $x \in D$ için

$$\{n: |f_n(x) - f(x)| \geq \mathcal{E}\} \in \mathcal{I}$$

dir. Bu durumda D üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ yazabiliriz.

$\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f ye $\mathcal{I}$-noktasal yakınsak ise her $\mathcal{E} > 0$, her bir $x \in X$ ve her bir sıfırdan farklı $z \in Y$ için

$$A(\mathcal{E}, z) = \{n \in \mathbb{N}: \|f_n(x) - f(x), y\| \geq \mathcal{E}\} \in \mathcal{I}$$

ya da $\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x), z\|_Y = 0$ dır. Buradan $f_n \xrightarrow{\|.,.\|_Y}_{\mathcal{I}} f$ yazabiliriz.

$$(\forall z \in Y)(\forall \mathcal{E} > 0)(\exists M \in \mathcal{I})(\exists n_0 \in \mathbb{N}\backslash M)(\forall x \in X)(\forall n > n_0)\ \|f_n(x) - f(x), z\| < E$$

formülü ile ifade edebiliriz.

$\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi f ye noktasal yakınsak ise her bir $x \in X$ ve her bir $\mathcal{E} > 0$ için, $k_0 = k_0(x, \mathcal{E})$ pozitif tam sayısı vardır öyle ki tüm $m, n \geq k_0$, her sıfırdan farklı $z \in Y$ için $\|f_{mn}(x) - f(x), z\| < E$ dur. Bu durumda $f_{mn} \xrightarrow{\|.,.\|_Y} f$ yazabiliriz.

Yöntem

Bu çalışmada elde edilen teoremlerin ispatlarında, matematikte sıklıkla kullanılan

i. Doğrudan ispat yöntemi,
ii. Ters durum ispat yöntemi,
iii. Olmayana ergi (çelişki bulma) yöntemi,
iv. Tümevarım yöntemi

gibi yöntemler gerektikçe kullanılmıştır.

Bulgular

Çalışmamız X ve Y iki 2-normlu uzay $\{f_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ve $\{g_{mn}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ çift fonksiyonlar $f\ ve\ g$, X den Y ye foksiyonlar olara alınacaktır.

Tanım: $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi olsun. Her $\mathcal{E} > 0$ ve her bir sıfırdan farklı $z \in Y$ için

$$A(\mathcal{E}, z) = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \|f_{mn}(x) - f(x), z\| \geq \mathcal{E}\} \in \mathcal{I}_2$$

ise $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisi f ye (noktasal anlamda) $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır denir ve her bir $x \in X$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

dir.

$$(\forall z \in Y)(\forall x \in X)(\forall \mathcal{E} > 0)(\exists H \in \mathcal{I}_2)(\forall (m,n) \notin H)\ \|f_{mn}(x) - f(x), z\| < E$$

formülü ile ifade edilebilir. Bu durumda

$$f_n \xrightarrow{\|.,.\|_Y}_{\mathcal{I}_2} f$$

yazabiliriz.

Teorem 1: Her bir $x \in X$ ve her sıfırdan farklı $z \in Y$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|\ ise\ \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|$$

dır.

Teorem 2: Bir $\{f_{mn}\}$ çift fonksiyon dizisinin herhangi bir $\mathcal{I}_2$-limiti varsa tektir.

Teorem 3: Her bir $x \in X$ ve her sıfırdan farklı $z \in Y$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x), z\| = \|f(x), z\|\ ve\ \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|g_{mn}(x), z\| = \|g(x), z\|$$

ise

i. $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x) + g_{mn}(x), z\| = \|f(x) + g(x), z\|$,

ii. $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|c.f_{mn}(x), z\| = \|c.f(x), z\|, c \in \mathbb{R}$,

iii. $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} \|f_{mn}(x).g_{mn}(x), z\| = \|f(x).g(x), z\|$

eşitlikleri sağlanır.

Kaynakça

Arslan M, Dündar E. *$\mathcal{I}$-Convergence and $\mathcal{I}$-Cauchy Sequence of Functions In 2-Normed Spaces*. Konuralp Journal of Mathematics, **6**(1): (2018), 57-62.

Arslan M, Dündar E. *On $\mathcal{I}$-Convergence of sequences of functions in 2-normed spaces*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, **42**: (2018), 491-502.

Arslan M, Dündar *E. Rough convergence in 2-normed spaces.* Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, **10**(3): (2018), 1-9.

Baláz V, Červeňanský J, Kostyrko P, Šalát T. *$\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}$-continuity of real functions.* Acta Mathematica, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University, Nitra, **5**: (2004), 43-50.

Çakalli H, Ersan, S.*New types of continuity in 2-normed spaces*. Filomat, **30**(3): (2016), 525-532.

Das P, Kostyrko P, Wilczyński W, Malik P. *$\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$ convergence of double sequences*. Math. Slovaca, **58**(5): (2008), 605-620.

Dündar E, Altay B. *$\mathcal{I}_2$-convergence of double sequences of functions*. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, **3**(1): (2015), 111-121.

Dündar E, Altay B, *$\mathcal{I}_2$-convergence and $\mathcal{I}_2$-Cauchy of double sequences*. Acta Mathematica Scientia, **34**B(2): (2014), 343-353.

Dündar E, Altay B, *$\mathcal{I}_2$-uniform convergence of double sequences of functions*. Filomat, **30**(5): (2016), 1273-1281.

Dündar E, Altay B, *Multipliers for bounded $\mathcal{I}_2$-convergent of double sequences*, Math. Comput. Modelling, **55**(3-4) (2012), 1193-1198.

Dündar E. *On some results of $\mathcal{I}_2$-convergence of double sequences of functions*. Mathematical Analysis Sciences and Applications E-notes, **3**(1): (2015), 44-52.

Dündar E, Talo Ö. *$\mathcal{I}_2$-convergence of double sequences of fuzzy numbers*. Iranian Journal of Fuzzy Systems, **10(**3): (2013),37-50.

Dündar E, Arslan M, Yegül S. *On $\mathcal{I}$-Uniform Convergence of Sequences of Functions In 2-Normed Spaces*. (Under Review).

Fast H. *Sur la convergence statistique*. Colloq. Math. , **2**: (1951), 241-244.

Fridy JA. *On statistical convergence*. Analysis, **5**: (1985), 301-313.

Gähler S. *2-metrische Räume und ihre topologische struktur*. Math. Nachr. , **26**: (1963), 115-148.

Gähler S. *2-normed spaces.* Math. Nachr. **28**: (1964), 1-43.

Gezer F, Karakuş S. *$\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$convergent function sequences*. Math. Commun. **10**: (2005), 71-80.

Gökhan A, Güngör M, Et M. *Statistical convergence of double sequences of real-valued functions*. Int. Math. Forum. **2**(8): (2007), 365-374.

Gunawan H, Mashadi M. *On finite dimensional 2-normed spaces*. Soochow J. Math. **27**(3): (2001), 321-329.

Gürdal M, Pehlivan S. *The statistical convergence in 2-Banach spaces*. Thai J. Math. **2**(1): (2004), 107-113.

Gürdal M, Pehlivan S. *Statistical convergence in 2-normed spaces*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, **33**: (2009), 257-264.

Gürdal M, Açık I. On $\mathcal{I}$ -Cauchy sequences in 2-normed spaces. Math. Inequal. Appl. 11(2): (2008), 349-354.

Gürdal M. *On ideal convergent sequences in 2-normed spaces*. Thai J. Math. **4**(1): (2006), 85-91.

Kostyrko P, Šalát T, Wilczyński W. *$\mathcal{I}$-convergence. Real Anal*. Exchange, **26**(2): (2000), 669-686.

Mursaleen M, Alotaibi A. *On $\mathcal{I}$ I-convergence in random 2-normed spaces*. Math. Slovaca, **61**(6): (2011), 933-940.

Sarabadan S, Talebi S. *Statistical convergence and ideal convergence of sequences of functions in 2-normed spaces*. Internat. J. Math. Math. Sci. **2011**: (2011), 10 pages.

Şahiner A, Gürdal M, Saltan S, Gunawan H.Ideal convergence in 2-normed spaces. Taiwanese J. Math. **11**: (2007), 1477-1484.

Savaş E, Gürdal M. *Ideal Convergent Function Sequences in Random 2-Normed Spaces*. Filomat, **30**(3): (2016), 557-567.

Schoenberg IJ. The integrability of certain functions and related summability methods. Amer. Math. Monthly, **66**: (1959), 361-375.

Yegül S, Dündar E. *On Statistical Convergence of Sequences of Functions In 2-Normed Spaces*. Journal of Classical Analysis, **10**(1): (2017), 49-57.

Yegül S, Dündar E. *Statistical Convergence of Double Sequences of Functions and Some Properties In 2-Normed Spaces*, Facta Universitatis, Series Mathematics and Informatics **33**(5): (2018), 705-719.