

Dinàmica de varietats espacials: les autopistes de l'univers

ESTHER BARRABÉS I MERCÈ OLLÉ

C'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente.

Henri Poincaré (1854–1912)

Resum: En aquest article volem il·lustrar com la comprensió de la dinàmica d'alguns models de la mecànica celeste permet explicar alguns fenòmens astronòmics i dissenyar missions realistes a l'espai. El model paradigmàtic usat és el problema restringit de tres cossos, en el qual els objectes que tenen un paper essencial són les varietats invariants de les anomenades *òrbites de libració*, és a dir, òrbites periòdiques i quasiperiòdiques al voltant dels anomenats *punts d'equilibri col·lineals del model*. Descriurem alguns d'aquests fenòmens i esmentarem algunes missions concretes. Finalment, comentarem altres models també útils (i més sofisticats) a l'astrodinàmica i acabarem amb algun comentari de com les eines de sistemes dinàmics es poden traslladar del món macroscòpic (celeste) al microscòpic, com per exemple el de la física atòmica clàssica.

Paraules clau: problema restringit, varietats invariants, punts d'equilibri, òrbites periòdiques, òrbites quasiperiòdiques, connexions homoclíniques, connexions heteroclíniques.

Classificació MSC2010: 70F07, 70F10, 70F15, 70H12, 70H33, 70K44.

1 Introducció

La teoria de sistemes dinàmics comença a les darreries del segle XIX amb Poincaré, el qual estudiava els sistemes d'equacions de manera global, en comptes d'abordar les solucions de manera particular. La idea és usar mètodes qualitius i quantitius per obtenir una imatge global de l'evolució dels estats del sistema. En aquesta imatge, els actors principals són els objectes invariants del sistema: començant pels punts d'equilibri, seguint amb solucions

periòdiques i quasiperiòdiques, i les varietats invariants associades a tots els anteriors quan aquests són hiperbòlics. En el camp de la mecànica celeste, el problema de tres cossos restringit és el model paradigmàtic en el qual s'han explotat principalment les idees i tècniques dels sistemes dinàmics. En particular, la comprensió d'aquest model ha permès, en el camp de l'astrodinàmica, donar una empenta enorme al disseny de missions espacials, basat inicialment en l'assaig i error amb posterior refinament per obtenir la trajectòria desitjada. El resultat d'aplicar els mètodes de càlcul de solucions periòdiques i quasiperiòdiques, i també de parametrització de varietats invariants, ha permès poder determinar amb eficiència determinades trajectòries i incrementar enormement la capacitat de dissenyar-ne de noves que anteriorment eren impensables.

Aquestes trajectòries són solucions particulars de l'anomenat *problema de n cossos*. Considerem un sistema de referència inercial. El problema de n cossos de la mecànica clàssica correspon a la descripció del moviment de n masses puntuals m_1, m_2, \dots, m_n sota la llei d'atracció gravitatòria de Newton:

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = G \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{m_j m_k}{r_{jk}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

on \mathbf{r}_k , $k = 1, \dots, n$, és la posició de cada cos, $r_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$ la distància entre els cossos de massa m_j i m_k , i G la constant gravitatòria. Fixada una condició inicial per a cada cos (posició i velocitat), la solució $(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t))$ del sistema d'equacions conté la trajectòria o *òrbita* $\mathbf{r}_k(t)$ de cadascun.

El model més senzill és el problema de dos cossos, que es pot reformular com el problema de Kepler:

$$\ddot{\mathbf{r}} = G(m + M) \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

on \mathbf{r} és el vector de posició relativa d'un cos respecte a l'altre. Aquest problema és integrable; això vol dir que tenim suficients integrals primeres (constants sobre les trajectòries), de forma que cada trajectòria és intersecció de les hipersuperfícies de nivell i, per tant, tenim una equació (en general implícita) per a la trajectòria. Les seves solucions, conegudes com a *òrbites keplerianes*, són còniques: els dos cossos es mouen en òrbites circulars, el·líptiques, parabòliques o hiperbòliques.

El primer pas en el disseny de missions espacials comporta prendre un model prou senzill (però alhora prou acurat) que permeti el càlcul d'una trajectòria que segueixi el camí desitjat. La primera estratègia per dissenyar viatges interplanetaris consisteix en el que s'anomena *còniques empalmades* (*patching conics*): el problema de n cossos que representa el Sistema Solar es divideix en múltiples problemes de dos cossos encadenats, en cadascun dels quals intervenen el Sol o un planeta i el satèl·lit artificial, de manera que la trajectòria d'aquest últim és una seqüència d'òrbites keplerianes. Quan aquest es troba molt a prop d'un planeta, només es té en compte l'atracció gravitatòria

d'aquest cos, mentre que quan se n'allunya, la força gravitatòria que es té en compte és la del Sol. Això fa que la trajectòria del satèl·lit es pugui definir a trossos, en cadascun dels quals aquesta segueix una solució d'un problema keplerianà adient (Sol-satèl·lit o planeta-satèl·lit). Per exemple, una missió a Mart consistiria primer a dissenyar una òrbita hiperbòlica respecte a la Terra fins que el satèl·lit abandonés l'esfera d'influència del planeta. A continuació seguiria una òrbita el·líptica respecte al Sol fins a trobar-se en l'esfera d'influència de Mart, on de nou seguiria una òrbita hiperbòlica respecte a aquest. Els passos propers a algun planeta es coneixen com a *assistències gravitacionals* (també anomenades *flybys* en anglès), degut al fet que provoquen un canvi significatiu en la trajectòria prèvia i permeten canviar d'una òrbita el·líptica (respecte al Sol) a una altra de diferent.

En l'últim quart del segle xx ja queda palès que el problema de dos cossos és insuficient i que les missions requereixen òrbites més sofisticades. I el model que ha permès avançar en la comprensió de la dinàmica i el disseny de trajectòries amb itineraris prescrits és el *problema restringit de tres cossos* (PRTC), que descriurem al llarg d'aquest article. Un paper cabdal el tindran els punts d'equilibri inestables d'aquest problema, així com les varietats invariants associades no només als mateixos punts d'equilibri, sinó també a òrbites periòdiques i quasiperiòdiques que hi ha al seu voltant. Els treballs de Poincaré ja mostren que, malgrat que en un entorn dels punts d'equilibri inestables del PRTC no és possible predir exactament la trajectòria d'una solució, sí que és cert que les diferents trajectòries es poden agrupar en conjunts o famílies que tenen un comportament similar. Aquests conjunts són com tubs que s'allunyen o s'acosten als punts d'equilibri (o a les òrbites periòdiques o quasiperiòdiques properes) i formen precisament les seves varietats invariants associades. Seguint-los, buscant les seves interseccions amb altres tubs que connecten amb altres punts (o òrbites properes), es poden obtenir trajectòries interessants, no només des del punt de vista del disseny de missions espacials, sinó també per a la comprensió d'alguns fenòmens naturals.

Per exemple, el PRTC circular Sol-Terra-satèl·lit és el model de referència de la ISEE-3 llançada el 1978 per a l'estudi de les interaccions Sol-Terra i de l'anomenat *space weather*. La trajectòria dissenyada seguia una transferència directa a una òrbita quasiperiòdica al voltant d'un dels punts d'equilibri del PRTC (vegeu la figura 1). De fet, en les dues últimes dècades, el nombre de missions espacials al voltant dels punts d'equilibri del problema (amb objectius científics diversos) ha crescut enormement. I això ha estat possible gràcies a l'ampli i profund estudi del model des del punt de vista de sistemes dinàmics, i que descriurem breument a continuació. El nombre d'autors i referències és extensa, però citarem com a bàsiques els treballs per a l'Agència Espacial Europea (ESA) de Gómez, Jorba, Llibre, Martínez, Masdemont, Simó ([22, 23, 19, 20]). D'altra banda, el PRTC també permet donar una explicació d'alguns fenòmens astronòmics com són la trajectòria del cometa Oterma, els asteroides troians, o el moviment en forma de ferradura de les llunes Janus i Epimeteu de Saturn o dels asteroides Cruithne o el 2002 AA29 al voltant de la Terra.

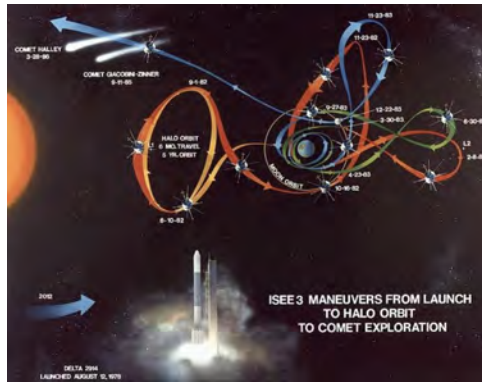


FIGURA 1: Projectió en el pla sinòdic (x, y) de la trajectòria de la missió ISEE-3 a punts de Lagrange. (Font: NASA.)

El PRTC i algunes aplicacions a l'astrodinàmica foren presentats per R. Martínez ([36]), en un article publicat en aquest mateix *Butlletí* com a resum de la lliçó inaugural del curs 2000–2001 a la llicenciatura de matemàtiques de la UAB. En el present article, primer revisem i recuperem la descripció dels conceptes més importants de la dinàmica del PRTC, fent esment d'alguns dels mètodes desenvolupats més recentment per a l'estudi dels sistemes dinàmics. A continuació fem èmfasi en la importància del coneixement de la dinàmica del PRTC per a la comprensió d'alguns fenòmens astronòmics i, sobretot, el disseny de missions espacials. Finalment, presentem altres models més enllà del PRTC, i altres contextos d'aplicació de les eines descrites, com és el món de la física atòmica. La llista de referències que donem, tot i ser extensa, no inclou ni de bon tros tots els autors i treballs de rellevància en aquest camp. En cada concepte, idea, model, resultat, etc., suggerim alguna referència com a font per a més informació per al lector interessat en el tema.

2 Un model paradigmàtic: el problema restringit de tres cossos circular

Considerem dos cossos de masses m_1 i m_2 , que anomenarem *primaris*, que es mouen seguint una solució del problema de dos cossos, i un tercer cos de massa infinitesimal que es mou degut a l'atracció gravitatòria dels dos primaris però sense afectar el seu moviment. Les equacions de moviment del PRTC descriuen la posició \mathbf{r} del tercer cos, i consisteixen en el sistema d'equacions diferencials ordinàries no autònom

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{m_1 G}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) + \frac{m_2 G}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)),$$

on $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, 2$ són les posicions dels dos primaris. Segons com siguin les trajectòries dels primaris, parlem del PRTC circular, el·líptic, parabòlic o hiper-

bòlic. En aquesta secció i la següent, ens concentrarem en el cas circular, en què els primaris descriuen òrbites circulars de velocitat angular constant. Per a més detalls sobre el PRTC, us recomanem [14] i [48].

Resulta especialment útil prendre un sistema de coordenades $q = (x, y, z)$ en rotació (anomenat *sinòdic*) que giri a la mateixa velocitat angular que els primaris, de manera que el nou sistema d'equacions sigui autònom. En aquest sistema, els primaris es troben fixos sobre l'eix de les x , i amb un canvi d'unitats de temps, massa i distància adequats, les equacions del problema es poden escriure com

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y, \\ \ddot{z} &= \Omega_z, \end{aligned} \tag{1}$$

on

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \tag{2}$$

$\mu = m_2/(m_1 + m_2) \in (0, 1/2]$ és l'anomenat *paràmetre de masses* (podem pensar que $m_1 \geq m_2$), i r_1, r_2 són les distàncies del cos infinitesimal als primaris que estan fixos a les posicions $(\mu, 0, 0)$ i $(\mu - 1, 0, 0)$ (vegeu la figura 2).

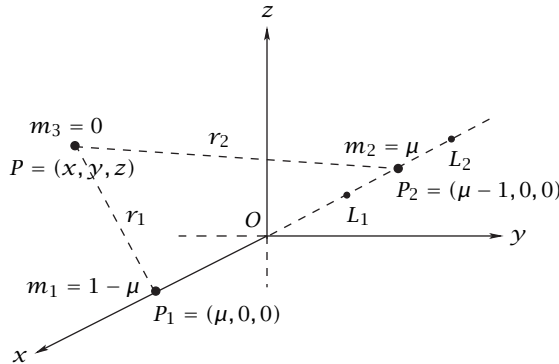


FIGURA 2: Sistema sinòdic de coordenades del problema restringit de tres cossos. Els punts colineals L_1 i L_2 també estan representats.

El PRTC té estructura hamiltoniana i en termes de posicions $q = (x, y, z)$ i moments $p = (p_x, p_y, p_z)$, on $p_x = \dot{x} - y$, $p_y = \dot{y} + x$, $p_z = \dot{z}$, les equacions es poden escriure de la forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

amb el hamiltonià (o la funció hamiltoniana) associat definit per

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + y p_x - x p_y - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}. \tag{3}$$

El problema, que depèn del paràmetre de masses μ , és no integrable i presenta una dinàmica molt rica i complicada. Una característica important és deguda al seu caràcter hamiltonià: el sistema d'equacions posseeix una integral primera. El valor de la funció hamiltoniana (3) és constant sobre cada solució del problema. Aquest valor $h = H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ s'anomena *energia de l'òrbita* (o de la solució) i és l'energia Kepler (cinètica més potencial) menys el moment angular. Si $\mu = 0$, es conserven ambdues quantitats per separat; si $\mu \neq 0$, només es conserva el hamiltonià, que és la diferència. Aquesta propietat permet estudiar el problema per nivells d'energia: fixat un valor de h , s'estudia el comportament de les solucions que *viuen* en aquell valor de l'energia, i d'aquesta manera es rebaixa el problema en una dimensió. En posicions i velocitats, l'energia també és coneguda com a *constant de Jacobi* i s'escriu com

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\Omega(x, y, z) - C_J, \quad (4)$$

on Ω està definida en (2). La relació entre l'energia i la constant de Jacobi és $h = -2C_J$.

La clau per a l'estudi de la dinàmica del model del PRTC circular està en el fet que el sistema d'equacions diferencials (1) presenta cinc punts d'equilibri denotats per L_i , $i = 1, \dots, 5$. Aquests es troben en el mateix pla de moviment que el dels primaris i són els punts crítics de la funció Ω . De fet, aquests punts d'equilibri són *solucions homogràfiques* del problema de tres cossos i foren descoberts per Euler (1767, configuració col·lineal que correspon a tres cossos en línia) i Lagrange (1772, formant una configuració triangular amb tres cossos en els vèrtexs d'un triangle equilàter). Així doncs, L_1 , L_2 i L_3 són els punts col·lineals, i estan situats entre els dos primaris ($\mu - 1 < x_{L_1} < \mu$), a l'esquerra del primari petit ($x_{L_2} < \mu - 1$), i a la dreta del primari gran ($x_{L_3} > \mu$), respectivament. Els altres dos punts són els anomenats *triangulars*, L_4 i L_5 , i formen un triangle equilàter amb els primaris. Vegeu la figura 3.

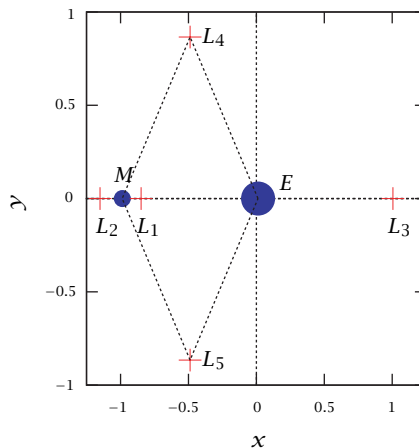


FIGURA 3: Punts d'equilibri del PRTC en el pla (x, y) en el model Terra-Lluna.

La constant de Jacobi ens permet introduir una altra característica del problema. Depenent del nivell d'energia, o valor de C_J , el tercer cos no pot bellugar-se lliurement per tot l'espai. A partir de (4), tenim definides les regions admissibles de moviment per al cos infinitesimal en l'espai (x, y, z) , donat que $2\Omega(x, y, z) - C_J \geq 0$: s'anomenen *regions de Hill*, i estan delimitades per les *superfícies de velocitat zero* definides per $2\Omega(x, y, z) - C_J = 0$. La topologia de les regions de Hill varia a mesura que el valor de C_J disminueix (o l'energia augmenta) i canvia quan C_J pren els valors corresponents als punts d'equilibri $C_J(L_i)$, $i = 1, \dots, 5$. En el pla (x, y) , les regions de Hill estan delimitades per les *corbes de velocitat zero*. Per a $C_J > C_J(L_1)$, la regió de Hill té tres components: dues d'acotades, on el moviment està confinat al voltant dels primaris, i una component no acotada, fora de la superfície de velocitat zero més externa. A $C_J(L_1)$ les dues components acotades es toquen en L_1 i per a $C_J(L_2) < C_J < C_J(L_1)$ hi ha un *coll d'ampolla* que connecta les regions al voltant dels dos primaris (figura 4, esquerra). Per a $C_J = C_J(L_2)$ les fronteres externa i interna es toquen en L_2 i per a $C_J(L_3) < C_J < C_J(L_2)$ apareix un nou coll d'ampolla que connecta la regió al voltant del primari petit amb l'exterior, tot i que encara hi ha la regió prohibida en forma de ferradura (figura 4, central). A $C_J(L_3)$ les corbes es toquen en L_3 i per a $C_J < C_J(L_3)$ ja és possible el moviment al voltant dels primaris i els punts col·lineals (figura 4, dreta). Per a valors de $C_J(L_{4,5}) < C_J < C_J(L_3)$ queda encara una regió prohibida de moviment al voltant dels punts d'equilibri triangulars, que en el pla acaba desapareixent per a $C_J < C_J(L_{4,5})$. Per a aquests valors encara queda una regió de moviment prohibida per a $z \neq 0$.

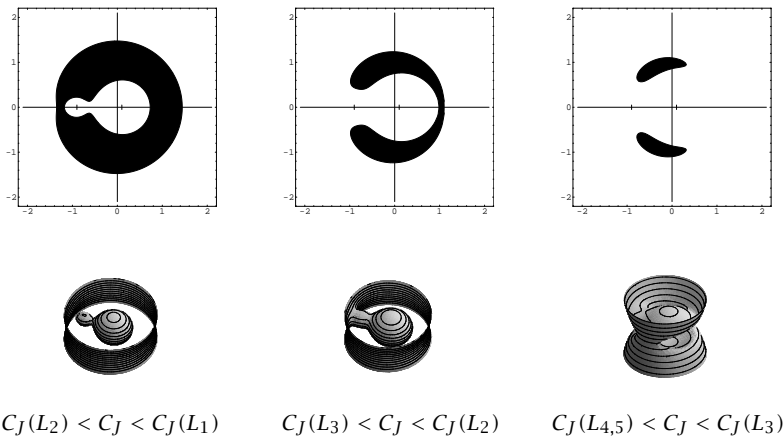


FIGURA 4: A dalt: regions de Hill (blanc) i regions prohibides de moviment (negre) al pla $z=0$. A baix: superfícies de velocitat zero a l'espai (x, y, z) .

Com avançàvem a la introducció, l'estudi de la dinàmica al voltant dels punts d'equilibri del PRTC circular i l'aplicació de la teoria de sistemes dinàmics han estat determinants tant per comprendre fenòmens naturals (l'existència dels

asteroides troians, el moviment de Janus i Epimeteu, satèl·lits de Saturn, o l'explicació de moviments coorbitals a la Terra com el de l'asteroide Cruithne) com per dissenyar missions espacials més sofisticades. El primer pas natural és estudiar l'estabilitat lineal dels punts d'equilibri i extreure la informació dinàmica que se'n deriva. Aquesta informació es troba en els valors propis de la matriu jacobiana Df del camp d'equacions (1) expressat com a sistema de primer ordre. Per al cas dels punts L_i , $i = 1, 2, 3$, els valors propis associats a la matriu diferencial del camp són

$$\text{Spec } Df(L_i) = \{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \pm\lambda\},$$

on $\omega_i, \lambda > 0$ ($i = \sqrt{-1}$). Diem que els punts d'equilibri col·lineals són del tipus centre \times centre \times sella. Prenent l'aproximació lineal de les equacions (1), les solucions al voltant dels punts d'equilibri es poden escriure de la forma

$$Q(t) = L_i + C \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \\ -\alpha_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) \\ \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ -\alpha_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \\ \xi_1 e^{\lambda t} \\ \xi_2 e^{-\lambda t} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

on C és la matriu de vectors propis associats als valors propis (prendrem la part real i imaginària dels vectors per a valors propis complexos). Essencialment, el comportament és el de dos oscil·ladors inestables, on ω_1 és la freqüència plana (en el pla de moviment dels primaris) i ω_2 és la freqüència vertical (moviment fora del pla (x, y)). El sistema lineal, doncs, exhibeix òrbites periòdiques de freqüència ω_i , $i = 1, 2$, òrbites quasiperiòdiques (si ω_1 i ω_2 no són commensurables), i òrbites d'escapament (en temps futur i passat) associades als valors propis reals. D'una banda, aplicant el teorema de Liapunov (vegeu, per exemple, [39]), quan els valors propis no són proporcionals entre si, de cada punt col·lineal neixen dues famílies uniparamètriques d'òrbites periòdiques, conegudes com a *famílies de Liapunov planes* (dins del mateix pla de moviment dels primaris) i *verticals* (viuen a \mathbb{R}^3), on el paràmetre de les famílies és l'energia (o C_j). Per tant, per a cada valor fixat de h , existeixen dues òrbites periòdiques, una de plana i una de vertical, almenys per a valors de h propers al valor en el punt d'equilibri. A més, a cada nivell d'energia proper a l'energia del punt col·lineal, existeix una família biparamètrica de tors 2-dimensionals, recorreguts per les anomenades *òrbites de Lissajous*, que connecten les dues famílies de Liapunov. Vegeu la figura 5. Quan prenem tots els nivells d'energia (en un cert rang proper al del punt d'equilibri), obtenim una varietat 4-dimensional, anomenada *varietat central*, on viuen tant les òrbites periòdiques com les quasiperiòdiques. Observem que si prenem $\xi_1 = \xi_2 = 0$ en l'expressió (5) obtenim una parametrització (d'ordre 1) de les condicions inicials de totes aquestes òrbites.

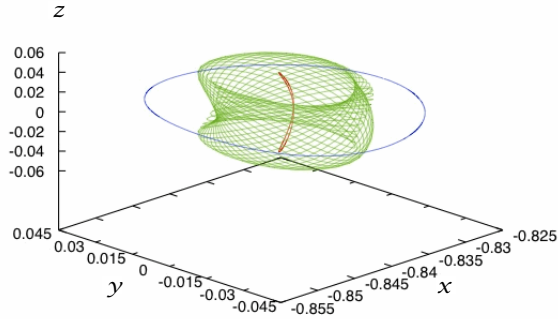


FIGURA 5: Òrbites periòdiques plana i vertical de Liapunov i òrbita quasiperiòdica de Lissajous al voltant del punt d'equilibri L_1 . (Figura cortesia de J. M. Mondelo.)

D'altra banda, degut a la sella associada als valors propis reals $\pm\lambda$, el punt col·lineal té un comportament hiperbòlic (o inestable) i apareixen les varietats invariants 1-dimensionals estable i inestable, $W^u(L_i)$, $W^s(L_i)$ respectivament, associades al punt (l'aproximació lineal s'obté de (5) fent $\alpha_{1,2} = 0$). En donarem la definició i en parlarem amb més detall a la propera secció. De retruc, les òrbites periòdiques de Liapunov hereten la hiperbolicitat i són inestables, de manera que cada òrbita té associades varietats invariants estable i inestable, ara 2-dimensionals. Aquesta inestabilitat fa difícil que ens fem una idea de com és l'espai de fases al voltant dels punts d'equilibri col·lineals. Observem que, en el cas d'un sistema hamiltonià de dos graus de llibertat, una estratègia numèrica per veure com és l'espai de fase consisteix a considerar iterats de l'aplicació de Poincaré fixat un valor de l'energia. L'aplicació de Poincaré es defineix com l'aplicació de retorn, via el flux del sistema d'equacions, a una secció fixada —anomenada *secció de Poincaré*. Usant l'energia i la secció, rebaixem la dimensió a dos, de manera que podem fer representacions gràfiques en un pla. En el cas de tenir òrbites periòdiques estables, veuríem típicament zones fitades corresponents a tors invariants. Però en el cas de punts i òrbites inestables, per a una condició inicial arbitrària a prop, els iterats s'escapen i el mapa de Poincaré no dona informació. Així doncs, per tal d'obtenir un bon retrat de la dinàmica corresponent a les òrbites periòdiques i quasiperiòdiques al voltant dels punts d'equilibri col·lineals, s'usen tècniques analítiques com la *reducció a la varietat central*, consistent a reduir el hamiltonià per tal d'eliminar les direccions hiperbòliques (vegeu [27]), o bé mètodes numèrics explícits (vegeu [24]).

En incrementar el valor de l'energia i seguir la família d'òrbites planes de Liapunov, la freqüència i l'estabilitat de les òrbites canvien. Quan les freqüències de les òrbites plana i vertical són iguals apareix una bifurcació que dona lloc a dues famílies d'òrbites espacials simètriques respecte al pla $y = 0$, que

s'anomenen *òrbites halo* (vegeu [24], on es fa una descripció àmplia de la dinàmica al voltant dels punts d'equilibri). El seu nom prové del fet que, si prenem el PRTC amb el Sol i la Terra com a primaris, i mirem des de la Terra la projecció en el pla (y, z) d'una d'aquestes òrbites, es veu com un halo al voltant del Sol.

Les òrbites al voltant dels punts d'equilibri col·lineals L_1 i L_2 , periòdiques i quasiperiòdiques (Liapunov, halo i Lissajous) també s'anomenen *òrbites de llibració*, i són el destí final de moltes missions espacials. Per exemple, les missions Genesis, ISEE-3 i SOHO són algunes de les missions on els satèl·lits han estat transferits a òrbites halo al voltant del punt L_1 del PRTC Sol-Terra.

Pel que fa als punts triangulars L_i , $i = 4, 5$, la tipologia dels valors propis de la matriu jacobiana depèn de μ : si $0 < \mu < \mu_R = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9}) = 0.0381\dots$ (conegut com a *valor de Routh*), llavors $\text{Spec } Df(L_i) = \{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \pm i\}$, $\omega_i > 0$. És a dir, el punt és centre \times centre \times centre, i quan podem aplicar de nou el teorema de Liapunov, tenim l'existència de tres famílies d'òrbites periòdiques: dues de planes —una família d'òrbites anomenades de *període curt* i una família d'òrbites anomenades de *període llarg*— i la família d'òrbites verticals. Quan $\mu = \mu_R$, es té un centre degenerat, ja que $\omega_1 = \omega_2$, i per a $\mu > \mu_R$, els valors propis són $\text{Spec } Df(L_i) = \{\pm a \pm ib, \pm i\}$, de manera que té una part de sella complexa en el pla (x, y) , el punt passa a ser inestable i té lloc una bifurcació de Hopf (vegeu, per exemple, [39, 42]).

Tot i que per a $\mu < \mu_R$ els punts $L_{4,5}$ són linealment estables, en el PRTC els punts d'equilibri triangulars són inestables ([34, 35]). Tot i això, hi ha estudis que mostren l'existència d'una regió de confinament efectiva, és a dir, que el cos de massa infinitesimal roman al voltant d'aquests punts per a intervals molt grans de temps. Els responsables d'aquest confinament són les varietats invariants (estable i inestable) de la varietat central associada al punt L_3 ([46]). Una aplicació real dels punts $L_{4,5}$ la trobem en els asteroides troians, conjunt d'asteroides localitzats al voltant dels punts $L_{4,5}$ del PRTC Sol-Jupiter, per al qual $\mu \approx 10^{-3}$ (vegeu, per exemple, [18]).

3 Varietats invariants en el PRTC circular

3.1 Definició i càlcul

Formalment, si Γ és un objecte invariant (punt d'equilibri, òrbita periòdica...) i $\phi_t(\mathbf{q})$ és la solució a temps t del PRTC circular amb condició inicial \mathbf{q} , definim les varietats inestable, $W^u(\Gamma)$, i estable, $W^s(\Gamma)$, associades a Γ , com a:

$$W^u(\Gamma) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6 \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_t(\mathbf{q}), \Gamma) = 0\},$$

$$W^s(\Gamma) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6 \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(\mathbf{q}), \Gamma) = 0\},$$

on $d(\phi_t(\mathbf{q}), \Gamma)$ és la distància entre $\phi_t(\mathbf{q})$ i el conjunt Γ .

Com hem explicat, els punts d'equilibri col·lineals L_i , $i = 1, 2, 3$, del PRTC tenen varietats invariants associades de dimensió 1. Conley, a [13], prova que cada varietat té dues branques, això és, cada varietat està formada per dues solucions del problema que tendeixen (temps endavant o endarrere) al punt d'equilibri. Concretament, usant l'aproximació lineal (5) i prenent $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, obtenim una parametrització d'ordre 1 de les varietats que es pot escriure com

$$\phi(\xi) = L_i + \xi v,$$

per a valors de ξ petits, on v és un vector propi unitari associat al valor propi λ (per a la varietat $W^u(L_i)$) o $-\lambda$ (per a la varietat $W^s(L_i)$). Escollint adequadament v , i per a valors de ξ petits, les branques $W_-^{u/s}$ s'allunyen cap al semiespai $x < x_{L_i}$ per a ξ negatiu, mentre que les branques $W_+^{u/s}$ s'allunyen cap a $x > x_{L_i}$ per a ξ positiu. Integrant el sistema diferencial, temps endavant o enrere amb aquestes condicions inicials, s'obtenen les varietats inestable i estable respectivament. Vegeu la figura 6.

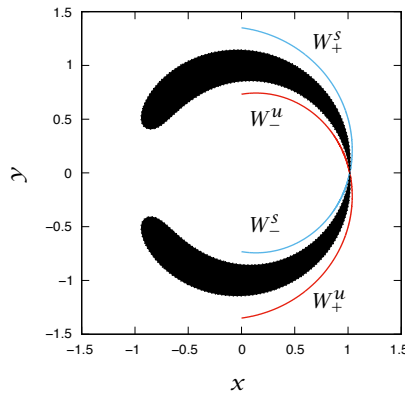


FIGURA 6: Projectió en el pla de configuracions (x, y) de les varietats invariants 1-dimensionals associades al punt d'equilibri L_3 del PRTC circular. Les internes són $W_-^{u/s}$ i les externes $W_+^{u/s}$.

Si ara ens situem en un nivell d'energia h a prop i per sobre del nivell dels punts d'equilibri col·lineals, tenim una òrbita periòdica plana, una de vertical i una família d'òrbites de Lissajous (quasiperiòdiques), cadascuna de les quals té associades les seves varietats invariants, en aquest cas de dimensió 2 (per a les òrbites periòdiques) i dimensió 3 (per a les òrbites quasiperiòdiques), les quals hereten el comportament (al voltant de l'òrbita periòdica) de les varietats 1-dimensionals dels punts d'equilibri. Podem pensar que el punt d'equilibri s'ha engreixat i ha donat lloc a una òrbita periòdica (o quasiperiòdica) i que les varietats invariants que abans eren 1d ara s'han engreixat i han passat a varietats 2d (o 3d). En el cas d'una òrbita periòdica Γ , $W^{u/s}(\Gamma)$, són varietats 2-dimensionals foliades per solucions del PRTC circular, totes elles

en el mateix nivell d'energia que l'òrbita periòdica. Geomètricament es poden veure com tubs que s'acosten (endavant o endarrere en el temps) cap a l'òrbita periòdica. Cadascuna de les varietats posseeix també dues branques, $W_{\pm}^{u/s}$, en un comportament similar al de les varietats dels punts d'equilibri. Vegeu la figura 7.

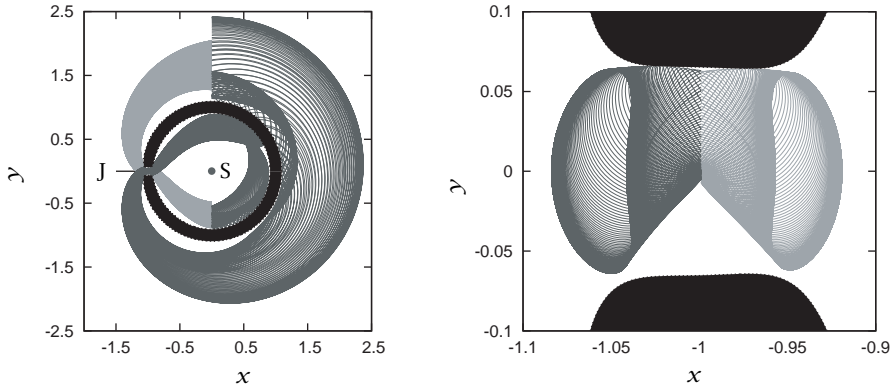


FIGURA 7: En el PRTC Sol-Júpiter, projecció en el pla de configuracions (x, y) de les branques $W_{\pm}^{u/s}(\Gamma_i)$ associades a Γ_i òrbita periòdica al voltant de L_i , $i = 1, 2$. Esquerra: branques internes $W_{+}^{u/s}(\Gamma_1)$ i branques externes $W_{-}^{u/s}(\Gamma_2)$. Dreta: detall de la regió al voltant de Júpiter, on es mostra la branca $W_{-}^u(\Gamma_1)$ i la branca $W_{+}^s(\Gamma_2)$. En gris fosc les varietats estables, en gris clar les inestables.

Anàlogament al cas de les varietats dels punts d'equilibri, per calcular numèricament les varietats invariants d'una òrbita periòdica prenem una aproximació lineal de la parametrització de la varietat, vàlida en un entorn de l'òrbita:

$$\psi(\theta, \xi) = \phi_{\frac{\theta}{2\pi}T}(\mathbf{q}_0) + \xi \Lambda^{-\theta/(2\pi)} D\phi_{\frac{\theta}{2\pi}T}(\mathbf{q}_0)\mathbf{v}, \quad (6)$$

on $\phi_t(\mathbf{q}_0)$ és la solució del PRTC començant a la condició inicial \mathbf{q}_0 de l'òrbita periòdica, T és el seu període, i Λ i \mathbf{v} són el valor i el vector propi de la matriu de monodromia $D\phi_T(\mathbf{q}_0)$ corresponents a la varietat (estable o inestable). Aquesta aproximació d'ordre 1 de la parametrització de les varietats és invariant pel flux, excepte termes d'ordre dos en ξ , ja que

$$\phi_t(\psi(\theta, \xi)) = \psi(\theta + t\omega, e^{t\lambda}\xi) + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (7)$$

on $\omega = 2\pi/T$, $\lambda = (\omega \ln \Lambda)/(2\pi)$. Partint de l'aproximació lineal (local) i mitjançant integració numèrica, obtenim la varietat global.

De manera similar podem calcular l'aproximació lineal de les corresponents parametritzacions de les varietats invariants associades a òrbites quasiperiòdiques, i globalitzar-les mitjançant integració numèrica.

Hi ha situacions, però, en les quals per tal de tenir una bona aproximació cal començar molt a prop del punt d'equilibri o de l'òrbita periòdica (ξ molt

petit), i llavors el temps d'integració per allunyar-se'n és molt gran. En aquest cas, és convenient expressar la parametrització ψ de la varietat com una expansió en sèrie de potències. En el cas dels punts d'equilibri, el mètode de la parametrització permet trobar ψ fins a un ordre desitjat resolent una equació d'invariància associada a les equacions. En el cas de les òrbites periòdiques, un mètode per obtenir aproximacions de qualsevol ordre de les parametritzacions consisteix a veure cada punt de l'òrbita periòdica com un punt fix d'una aplicació (el flux per a un temps igual al del període de l'òrbita) i aplicar el mètode de la parametrització per a punts fixos de difeomorfismes.

El mètode de la parametrització s'inicia cap a finals del segle xx i es desenvolupa a principis del XXI com un nou enfocament al càlcul de varietats invariants. Tot i que alguns trets del mètode remunten a Poincaré, els articles que estableixen els fonaments teòrics amb resultats rigorosos són [9, 10, 11]. Una referència recent en què es fa un recull dels desenvolupaments de la teoria, amb referències a autors diversos i les seves contribucions, així com la descripció de la metodologia numèrica aplicada concretament a varietats de punts fixos, tors invariants i al context general de varietats normalment hiperbòliques és [25]. Altres mètodes per al càlcul de varietats invariants consisteixen a obtenir altres expansions en sèries, per exemple, usant el mètode de Lindstedt-Poincaré o expandint el hamiltonià usant la reducció a forma normal (vegeu, per exemple, [38]).

3.2 Òrbites de trànsit i no trànsit, i connexions homoclíniques i heteroclíniques

Considerem el PRTC circular pla, això és, el tercer cos es mou només en el mateix pla que els primaris. Com hem dit, el problema restringit de tres cossos es pot estudiar fixant el nivell d'energia. Per a cada valor de h , les corbes de velocitat zero delimiten les regions admissibles de moviment en el pla de configuracions. En concret, per a un rang de h entre els valors de l'energia corresponents a L_1 i L_2 , es poden distingir clarament tres regions de moviment: al voltant del primari principal (regió interior), al voltant del secundari, i una zona «externa» lluny dels dos (essencialment r gran, vegeu la figura 4).

Fixada una òrbita periòdica al voltant dels punts d'equilibri col·lineals, en el cas del PRTC circular pla, les varietats invariants associades tenen codimensió 1, ja que en fixar l'energia ens situem en un espai de dimensió 3. Per tant, les varietats separen comportaments, això és, solucions a «costats» diferents de les varietats tenen comportaments diferents. Conley ([13]) defineix les òrbites de *trànsit* i de *no trànsit* de la manera següent: les primeres són solucions que s'apropen al coll d'ampolla determinat per la corba de velocitat zero i passen de la regió $\{x < x_{L_i}\}$ a la regió $\{x > x_{L_i}\}$, o a l'inrevés, mentre que les segones són solucions que s'acosten al coll d'ampolla però retornen cap al mateix semiespai. Perquè una òrbita que s'apropa cap a la regió on viu l'òrbita periòdica Γ sigui de trànsit és suficient i necessari que la solució corresponent estigui *dins* de la branca $W^s(\Gamma)$ de la mateixa regió, mentre que si està *fora* retorna cap a la mateixa regió. Vegeu la figura 8.

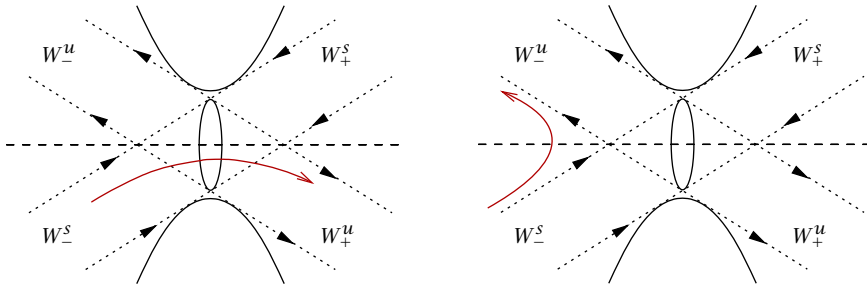


FIGURA 8: En el pla (x, y) , esquema de la dinàmica de trànsit i no trànsit en la regió de coll d'ampolla al voltant d'una òrbita periòdica inestable nascuda en un punt d'equilibri.

Per exemple, suposem que tenim el sistema restringit de tres cossos Sol-Júpiter (o qualsevol altre planeta) i que el tercer cos es troba orbitant a la regió exterior més enllà de l'òrbita de Júpiter. Perquè aquest pugui transitar cap a la regió interior (més a prop del Sol), primer cal un trànsit per la zona de L_2 per passar a la regió de Júpiter, i seguidament, un trànsit per la zona de L_1 per passar cap a la regió interior (vegeu la figura 9, esquerra). El primer trànsit es realitza dins la branca $W_-^s(\Gamma_2)$ (associada a una òrbita plana Γ_2 al voltant de L_2), i surt per l'interior de la branca $W_+^u(\Gamma_2)$, i en el segon trànsit, el tercer cos s'acosta primer al següent coll d'ampolla dins $W_-^s(\Gamma_1)$ i surt després per dintre de $W_+^u(\Gamma_1)$ (on Γ_1 és una òrbita periòdica al voltant de L_1 que viu en el mateix nivell d'energia que la primera). Un altre exemple de doble trànsit el tindríem si el tercer cos primer estigués donant voltes al voltant de Júpiter, escapés a través de la regió de L_1 a fer una (o diverses) voltes al Sol, i tornés a la regió de Júpiter. En aquest cas, la trajectòria ha de trobar-se primer dins $W_+^u(\Gamma_1)$ i després dins $W_-^s(\Gamma_1)$ (vegeu la figura 9, dreta).

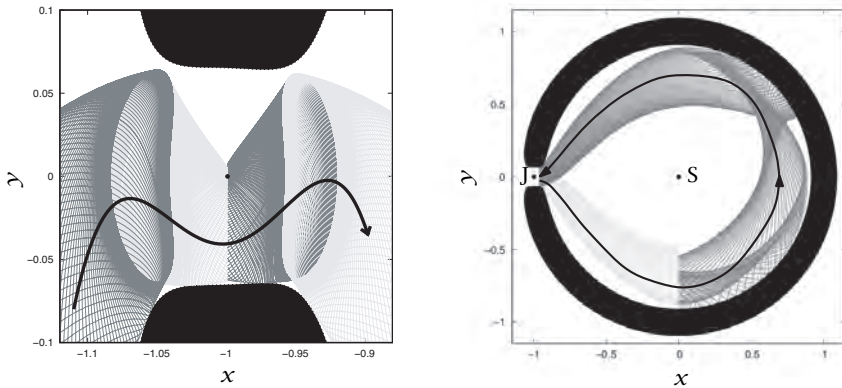


FIGURA 9: En el pla (x, y) . Esquerra: ampliació de la regió al voltant de Júpiter (punt marcat al centre), i esquema del doble trànsit des de la regió exterior fins a la interior al voltant del Sol. Dreta: doble trànsit del cos que comença a la regió al voltant de Júpiter, passa a la regió interior i torna a la primera regió.

Clarament, doncs, perquè hi pugui haver trànsit d'una regió a una altra, és necessari que dues branques, una de cadascuna d'algunes varietats estable i inestable, s'intersequin. Si les dues branques que es tallen estan associades a òrbites periòdiques diferents (com en el cas de la figura 9, esquerra), tindrem una connexió heteroclínica, això és, una solució del PRTC que temps endavant i endarrere tendeix a una òrbita periòdica diferent (figura 10, esquerra). En cas que les dues branques que es troben estiguin associades a la mateixa òrbita periòdica (figura 10, dreta), tindrem una connexió homoclínica.

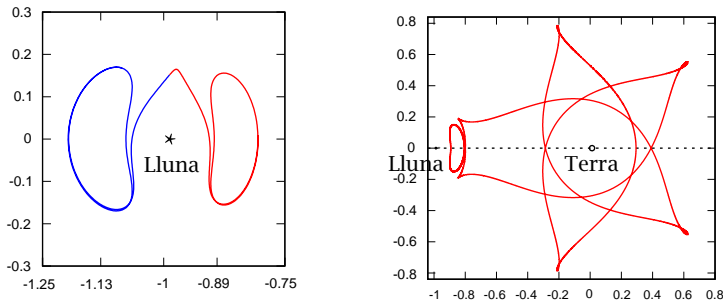


FIGURA 10: Exemples de connexions homo-heteroclíniques en el PRTC Terra-Lluna en l'espai de configuracions (x, y) . Esquerra: connexió heteroclínica entre dues òrbites periòdiques de Liapunov al voltant de L_1 i L_2 . Dreta: connexió homoclínica d'una òrbita periòdica de Liapunov al voltant de L_1 . (Figura cortesia de J. M. Mondelo.)

Una metodologia numèrica per calcular solucions homo-heteroclíniques consisteix a seguir un cert nombre de trajectòries sobre cadascuna de les branques de les varietats invariants involucrades fins que aquestes creuen una determinada secció de Poincaré. Donat que estem sobre un nivell d'energia fixat, el problema queda reduït a dos graus de llibertat i és fàcil comprovar visualment si les dues varietats s'intersequen o no. Un cop trobada una primera connexió, es pot dissenyar un mètode de continuació numèrica prenent l'energia com a paràmetre, per tal de trobar famílies de connexions homo-heteroclíniques. El procés requereix, per a cada pas corresponent a un nivell d'energia fix, resoldre un sistema d'equacions que té com a solució les noves òrbites periòdiques i la connexió entre elles ([5, 6]).

L'estudi de l'existència d'òrbites de trànsit i no trànsit, homoclíniques i heteroclíniques, i el seu càlcul són fonamentals tant per al disseny de trajectòries amb recorreguts específics, com per explicar fenòmens astronòmics reals. Per exemple, la construcció de cadenes de solucions heteroclíniques permet propostes com el *Petit grand tour*, que visita diverses llunes de Júpiter ([21, 30]), o l'existència de connexions homoclíniques permet calcular òrbites periòdiques properes amb un comportament semblant, com el cas dels cicles entre la Terra i la Lluna (òrbites que passen a prop dels dos cossos i d'interès per al suport de les telecomunicacions, la navegació, etc.); vegeu la figura 10, dreta, i [12]. La concatenació de trànsits i connexions homo-heteroclíniques que exhibeixen determinades ressonàncies permet explicar ressonàncies orbitals com les del

cometa Oterma ([29]). És desitjable, doncs, construir mapes de connexions homo-heteroclíniques entre objectes invariants (tant d'òrbites periòdiques com quasiperiòdiques) que ens permetin tenir una idea general de possibles connexions.

Per acabar, volem fer un esment al PRTC espacial. En aquest cas, les varietats invariants associades a òrbites periòdiques són objectes 2d dins d'un espai de dimensió 5 (pensem que sempre ens reduïm a l'espai d'energia constant), i, per tant, no separen comportaments. D'altra banda, hem de tenir en compte que també apareixen, a més de les òrbites planes, les òrbites periòdiques verticals i les òrbites quasiperiòdiques. Pel que fa a les òrbites de trànsit i no trànsit, a [44] es dona una condició necessària i suficient que caracteritza una òrbita de trànsit en el problema espacial. Pel que fa a les connexions homo-heteroclíniques, la metodologia explicada de continuació de famílies de connexions és adaptable al cas espacial, amb un increment de la complexitat del sistema a resoldre, molt especialment en el cas de connexions de tors. Vegeu, per exemple, [21, 38].

3.3 Altres varietats

Tot i que ens hem concentrat en el paper que fan les varietats invariants de punts d'equilibri i òrbites periòdiques i quasiperiòdiques, volem fer notar que el sistema d'equacions diferencials del PRTC té dues singularitats amb varietats associades que poden esdevenir importants a l'hora de descriure altres tipus de particularitats.

D'una banda, una de les singularitats correspon a la col·lisió amb un dels primaris. En aquest cas, mitjançant la tècnica de la regularització (que consisteix a introduir un canvi de coordenades i de temps) podem obtenir equacions diferencials que són regulars a un entorn dels primaris. En el cas del PRTC espacial, s'acostumen a utilitzar les coordenades de Kustaanheimo-Stiefel ([47]), i en el cas pla, es prenen típicament les anomenades coordenades de Levi-Civita i/o les de McGehee ([48, 33]). Utilitzant les coordenades de McGehee en el PRTC pla, la col·lisió es pot veure com un tor amb dues circumferències de punts d'equilibri inestables, que tenen varietats invariants associades estable i inestable, de manera que moure's al llarg d'aquestes varietats correspon a òrbites que surten o arriben a col·lidir amb el primari (amb temps asimptòticament grans, [43]). Per tant, una connexió heteroclínica entre dos punts d'equilibri de la varietat de col·lisió seria una òrbita d'ejecció-collisió amb el primari, mentre que una solució heteroclínica, per exemple, amb una òrbita de Liapunov, seria una trajectòria que connectaria el primari amb l'òrbita periòdica. Observem que la cerca de connexions heteroclíniques de col·lisió amb la Terra i una òrbita destí pot esdevenir útil per a possibles missions espacials.

D'altra banda, esmentem la singularitat de l'infinit. També en aquest cas, amb canvis de coordenades i temps adequats (típicament el canvi de coordenades de McGehee trasllada l'infinit a l'origen), podem estudiar les varietats de cert tipus d'òrbites que neixen de l'origen i que també tenen varietats invariants associades (tot i que les òrbites són parabòliques en lloc d'hiperbòliques, [37]). Aquestes varietats poden esdevenir un mecanisme per explicar el possible transport de matèria des de l'exterior del Sistema Solar cap al seu interior.

4 Camins celestes

Si mirem al cel, on són totes aquestes òrbites i les seves varietats invariants? Què ens expliquen o de què ens serveixen? Volem mostrar com les varietats invariants expliquen alguns fenòmens observables i com poden utilitzar-se per a la navegació espacial.

4.1 Viatges espacials

El nombre de viatges per explorar el Sistema Solar creix contínuament. L'estratègia bàsica per als viatges interplanetaris des de les missions *Pioneer* i *Voyager* dels anys setanta fins a les missions *Galileo* o *Mars Observer* dels noranta consisteix a aproximar una solució del problema de n cossos concatenant i enllaçant solucions de diferents problemes de dos cossos —l'anomenat mètode de *patching conics* esmentat a la introducció. El fet que les missions siguin cada cop més exigents quant a la trajectòria que es vol seguir fa que es necessitin millors aproximacions, i el problema restringit de tres cossos ha donat resposta a aquesta demanda.

Moure's a través del Sistema Solar requereix energia. En una missió espacial, la majoria de combustible es consumeix en el moment de l'enlairament i sortida de l'atmosfera terrestre. Per a la missió *Apollo 11* a la Lluna del 1969, varen fer falta uns 3 600 000 litres de combustible (la meitat només per a la primera part de sortida de l'atmosfera). Des de llavors, la tecnologia ha permès que avui dia un coet com el *Falcon 9* necessiti només un 15% del que va consumir el coet *Saturn V*. Però això és només per arribar a la distància de la Lluna. Un cop superat el pas inicial (sortir de l'atmosfera), per moure'ns cap al nostre destí necessitarem algun mecanisme que ens propulsi i ens faci canviar la trajectòria. És el que es coneix com a Δv (delta- v), un increment de velocitat per aconseguir-ho. La transferència de Hohmann ([8]) és la maniobra d'aquest tipus més senzilla i consisteix essencialment a passar d'una òrbita circular a una altra seguint una solució el·líptica del problema de dos cossos (el cost és major si l'òrbita inicial i final no estan al mateix pla). Per això cal un impuls inicial per sortir de l'òrbita inicial i un de final per inserir-se a l'òrbita d'aparcament. Per exemple, per arribar al punt d'equilibri L_1 del sistema Terra-Lluna sortint d'una òrbita LEO (*low earth orbit*), on es troben, per exemple, l'*Estació Espacial Internacional* (ISS), alguns satèl·lits d'observació terrestre o la constel·lació *Iridium* de 66 satèl·lits de comunicació telefònica, cal que $\Delta v = 3.15$ km/s. Per arribar a Mart amb una transferència de Hohmann, cal aproximadament $\Delta v = 5.5$ km/s, i a Júpiter $\Delta v = 14.5$ km/s. Aquest valor està al límit del que el coet més potent actualment podria assolir, i no hem tingut en compte la sortida de la Terra.

Afortunadament per a l'exploració espacial, existeixen els anomenats *camins de baix cost* (*low energy transfers*) que permeten moure's d'un lloc a un altre sense despesa en combustible (excepte un impuls inicial i un de final per entrar en el camí adequat, i maniobres de correcció). Aquests camins, que anomenarem *autopistes*, estan estretament relacionats precisament amb les

varietats invariants associades a òrbites periòdiques o quasiperiòdiques del model PRTC circular. Aquestes varietats ens donen l'esquelet bàsic que permet construir les trajectòries reals en el model complet del Sistema Solar. Viatges a cost baix energèticament parlant, però que, com tota autopista, tenen un peatge: el temps de viatge. En general, seguir aquests camins comporta temps llargs, i per dissenyar missions realistes (en temps) cal trobar punts intermedis on concatenar trajectòries diferents, usar mecanismes d'impuls puntuals (*low-thrust*), etc.

Les primeres aplicacions de l'existència i comportament de les varietats invariants serien les transferències a òrbites de libració, és a dir, òrbites periòdiques o quasiperiòdiques al voltant d'un punt d'equilibri. Per obtenir una trajectòria natural per a una missió que vulgui anar de la Terra a una òrbita de libració, primer haurem de posar el satèl·lit en una òrbita d'estacionament al voltant de la Terra de manera que aquesta intersequi la varietat estable de l'òrbita final de libració. Amb una Δv adequada, la nau s'insereix en la varietat estable, i aquesta anirà a l'òrbita de destí sense la necessitat de fer cap control ni maniobres amb costos addicionals durant el viatge. Des d'aquest punt de vista naveguem per una de les autopistes de l'espai. Així mateix, l'existència de connexions homoclíniques i heteroclíniques permet enllaçar unes autopistes amb altres i construir itineraris que comencen i acaben en entorns de diferents punts d'equilibri.

Posarem només alguns exemples de missions espacials que fan ús de la diversitat d'òrbites que exhibeix el PRTC circular:

- Les dues primeres missions a òrbites de libració al voltant d'un punt d'equilibri foren la ISEE-3 i SOHO. Aquesta última missió conjunta de l'ESA i la NASA, iniciada el 1995, ha estat especialment reeixida: va ser dissenyada per arribar a una òrbita halo al voltant del punt L_1 del sistema Sol-Terra i estar-s'hi dos anys, però la transferència fou quasiperfecta i la inserció va requerir un consum de combustible tan baix que porta més de vint anys orbitant i actualment encara continua explorant l'helioesfera i el vent solar i transmetent imatges i dades de l'activitat solar (*space weather*). Vegeu la figura 11.

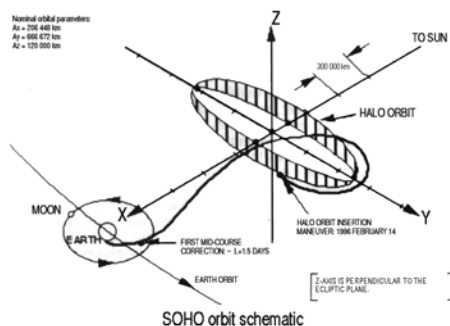


FIGURA 11: Esquema de la transferència de la missió SOHO a una òrbita halo al voltant del punt L_1 del sistema Sol-Terra. (Font: NASA.)

- Per commemorar que enguany fa cinquanta anys de la visita a la Lluna, parlarem d'alguna missió a punts d'equilibri del sistema Terra-Lluna. El 2007 es va iniciar la missió Themis, consistent en el llançament de cinc satèl·lits que es van posar en òrbita al voltant del punt de Lagrange L_2 del sistema Terra-Lluna per estudiar les tempestes espacials i les aurores. El 2010, dos dels satèl·lits es van reconvertir en la missió Artemis: un es va quedar orbitant al voltant del punt L_2 i l'altre va ser transferit al voltant del punt L_1 per poder fer observacions des de costats oposats. La transferència d'un costat a l'altre fou possible seguint una connexió heteroclínica entre dues òrbites al voltant de L_1 i L_2 respectivament. Prenent el PRTC circular amb la Terra i la Lluna com a primaris, mitjançant la metodologia numèrica descrita, s'obté la connexió heteroclínica entre dues òrbites periòdiques al voltant de L_1 i L_2 del sistema (com la que es mostra a la figura 10, esquerra), i és aquest tipus de connexió, amb l'ajut d'alguna maniobra addicional, la que s'utilitza per a la transferència. Vegeu la figura 12, esquerra.

Una altra missió que ha fet ús de *low energy transfers* en el sistema Terra-Lluna és Hiten (1990, de l'Institut de les Ciències de l'Espai i l'Astronàutica del Japó), en la qual es va llançar una sonda que va ser inserida en una òrbita lunar i més tard va visitar els punts d'equilibri L_4 i L_5 .

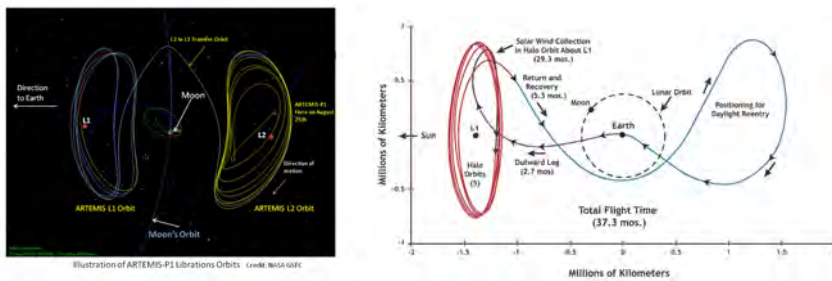


FIGURA 12: Projectió en el pla sinòdic (x, y) de les trajectòries de dues missions a punts de Lagrange: Artemis, en el sistema Terra-Lluna (esquerra), i Genesis, en el sistema Sol-Terra (dreta). (Font: NASA.)

- La missió Genesis (2001-2004) és considerada la primera que es va dissenyar usant la teoria moderna de sistemes dinàmics. Prenent ara com a model el sistema Sol-Terra, la missió fou definida de manera que, un cop la nau va ser inserida en una trajectòria cap a una òrbita quasiperiòdica al voltant de L_1 , no varen fer falta maniobres addicionals per arribar a la seva òrbita de destí. Això és possible si la trajectòria triada pertany a la varietat invariant estable de l'òrbita. El camí de tornada va fer ús de la varietat inestable de la mateixa òrbita i de l'existència de connexions heteroclíniques amb l'entorn del punt L_2 . Vegeu la figura 12, dreta.

Altres exemples de missions, en aquest cas amb el punt L_2 del sistema Sol-Terra com a destí, són Gaia (ESA, 2013), que des d'una òrbita al voltant del punt L_2 en el sistema Sol-Terra està fent un cens d'aproximadament 1 000 mi-

lions d'estrelles, o Herschel i Planck (ESA, 2009). Més recentment, tenim la sèrie Chang'e del programa d'exploració de la Lluna de l'agència espacial xinesa, anomenada així pel nom de la Lluna en la mitologia xinesa, de la qual, el Chang'e 2 (2010) ha estat estacionada en algun moment en una òrbita halo al voltant del punt L_2 .

4.2 Fenòmens naturals

El coneixement de la dinàmica del PRTC circular permet també entendre i donar una explicació a alguns fenòmens naturals per als quals el model de dos cossos és massa simple. Ja hem explicat el cas dels asteroides troians, els quals es troben confinats en una regió al voltant dels punts triangulars del problema Sol-Júpiter. La dinàmica al voltant dels punts col·lineals també ens permet explicar altres fenòmens.

Un d'aquests és el cometa Oterma. En aquest cas, l'existència de connexions homoclíniques i heteroclíniques i trànsits a través de les regions determinades per les corbes de velocitat zero ens permet explicar el moviment d'aquest cometa. S'ha observat que fins al 1980 el cometa segueix una trajectòria externa a la de Júpiter al voltant del Sol (amb una ressonància propera a 2:3, 2 voltes del cometa per 3 de Júpiter al voltant del Sol), passa prop de Júpiter per seguir una òrbita més interna a la del planeta (ara en ressonància 3:2), i torna a fer un pas cap a la regió exterior. Prenent el PRT3C circular amb el Sol i Júpiter, d'una banda existeixen connexions homoclíniques d'òrbites a l'entorn dels punts L_2 i L_1 amb aquestes ressonàncies i molt properes a les trajectòries externa i interna del cometa, respectivament, i d'altra banda, connexions heteroclíniques entre una òrbita al voltant de L_2 i una al voltant de L_1 (vegeu-ne un exemple a la figura 10, esquerra) que expliquen el trànsit de la zona externa a Júpiter a la interna (seguint la idea mostrada a la figura 9). Són justament aquestes connexions les que constitueixen l'esquelet o canal dinàmic, molt a prop del qual s'observa la trajectòria d'Oterma. Per a més detalls, citem les referències [29] i [6] (en aquesta última es donen rangs d'energia per als quals les transicions entre diferents ressonàncies és possible).

Un altre fenomen natural que s'explica per l'existència de varietats invariants és el de llunes i asteroides amb moviment coorbital o de ferradura. L'exemple més conegut és el de les llunes de Saturn, Janus i Epimeteu. En un sistema en rotació adequat, les òrbites que segueixen les dues llunes tenen forma de ferradura com la que es mostra a la figura 13, esquerra. Altres moviments semblants són els d'alguns asteroides propers a la Terra, com el Cruithne o el 2002 AA29, figura 13, dreta. Aquests asteroides segueixen una òrbita al voltant del Sol amb un semieix proper al de la Terra, que en un sistema en rotació té forma de ferradura, i s'acosten a la Terra dues vegades cada volta.

Aquests tipus d'òrbites es poden explicar a partir de les varietats invariants del punt L_3 i de les òrbites de Liapunov planes al seu voltant. Aquestes varietats s'autointersequen i donen lloc a òrbites homoclíniques. Al voltant d'aquestes connexions s'acumulen una infinitat d'òrbites periòdiques (fenomen conegut com a *blue sky catastrophe*, [15]) que ressegueixen un camí semblant. Aquest mecanisme seria el que explicaria l'existència d'aquest moviment de ferradura ([4, 32]).

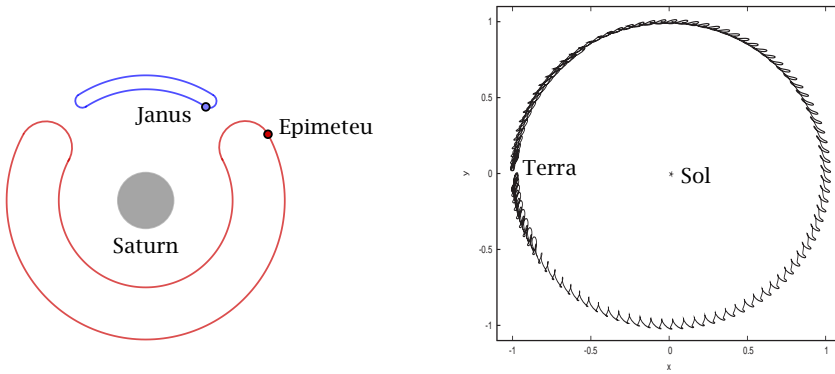


FIGURA 13: Esquerra: esquema aproximat de les trajectòries que descriuen Janus i Epimeteu. Dreta: òrbita de tipus ferradura descrita per l'asteroide 2002 AA29, en un PRTC Sol-Terra. (Font: referència [4].)

5 Altres models de la mecànica celeste

Fins ara ens hem concentrat principalment en el PRTC circular, i ja hem vist que era prou adequat per a diferents propòsits. No obstant, quan aquest model no és suficient, se'n consideren d'altres que s'ajusten millor a les situacions corresponents.

- El PRTC el·líptic: una de les primeres millores és tenir present que els primaris es mouen en òrbites el·líptiques (en lloc de circulars) al voltant del llur centre de masses, amb una excentricitat $e \neq 0$. En aquest cas, prenent unes coordenades adequades, rotatòries i pulsants (es divideix per la distància entre els primaris al llarg del temps), el sistema d'equacions diferencials que s'obté és no autònom, però periòdic. Aquest problema depèn de dos paràmetres $\mu \in (0, 0.5]$ i $e \in (0, 1]$, i té els mateixos punts d'equilibri L_i , $i = 1, \dots, 5$, tot i que canvia l'estabilitat depenent de μ i e ([48]). També deixa de tenir la integral primera, i les òrbites periòdiques apareixen aïllades (per a valors de μ i e fixats) en lloc d'agrupar-se en famílies (com passa al problema circular). Aquest model, per exemple, s'usa per a l'estudi dels asteroides troians a partir de la dinàmica al voltant dels punts L_4 i L_5 ([31]).
- El PRTC parabòlic, on ara els primaris descriuen òrbites parabòliques: introduint canvis adequats en les coordenades i en el temps, el sistema d'equacions és autònom i de tipus quasigradient (és a dir, presenta una funció monòtona a trossos). Una conseqüència important és que aquest problema no té òrbites periòdiques. Amb aquest problema es pot modelar de manera simple l'encontre entre dues galàxies. En particular es poden estudiar els mecanismes que expliquen el desplaçament de matèria (mo-

delada com a conjunts de partícules) del voltant d'una galàxia a l'altra, i explicar la formació de ponts i cues de matèria entre galàxies que s'observen a la realitat. Aquest mecanisme precisament es basa en connexions heteroclíniques entre la col·lisió amb un primari i un punt d'equilibri ([2]).

- El problema restringit de quatre cossos bicircular: és, de fet, un problema restringit de quatre cossos, obtingut del PRTC afegint un tercer primari. Més concretament, suposem dos primaris de masses m_1 i m_2 que descriuen òrbites circulars al voltant del centre de masses (localitzat a l'origen) i un tercer primari de massa m_3 que gira descrivint una òrbita circular al voltant de l'origen. El problema bicircular consisteix a descriure el moviment d'un cos de massa infinitesimal que es mou sota l'atracció dels tres primaris. En aquest cas, en coordenades adequades, el model és hamiltonià amb tres graus de llibertat i no autònom, però periòdic. Els punts d'equilibri col·lineals del PRTC amb primaris m_1 i m_3 es converteixen, en el problema bicircular, en òrbites periòdiques inestables, OPL_i , $i = 1, 2, 3$, amb les corresponents varietats invariants associades.

Remarquem que aquest model no és coherent en el sentit que les trajectòries circulars que suposem per als tres primaris no satisfan l'equació de Newton del problema de tres cossos. Malgrat aquest fet, és un problema que dona una primera aproximació força acurada d'alguns problemes de quatre cossos. Per exemple, podem considerar el model bicircular com una primera ampliació del model PRTC, en el qual, a més dels dos cossos primaris, s'afegeix com a tercer primari el següent cos del Sistema Solar de rellevància: en el sistema Terra-Lluna, afegim l'efecte gravitatori del Sol, o en el sistema Sol-Terra, si volem estudiar a prop de la Terra, afegim l'efecte de la Lluna, o en un sistema Sol-Júpiter, el següent cos a tenir en compte seria Saturn. El model bicircular també permet explicar el transport de matèria (cometes, asteroides i petites partícules) des dels planetes exteriors als interiors en el Sistema Solar. Considerem aquest com una concatenació de models bicirculars: primer Sol-Júpiter-Neptú, després Sol-Júpiter-Urà, etc., i en cadascun d'ells les varietats invariants associades a les òrbites OPL_i . La intersecció de les varietats invariants d'aquests models dona lloc a canals naturals de trànsit des del Sistema Solar exterior cap a l'interior ([3]).

- El problema bicircular coherent: és un problema restringit de quatre cossos on els tres primaris sí que es mouen seguint una solució del problema de tres cossos. Aquest model, en què s'obté un sistema hamiltonià no autònom, fou desenvolupat originalment per M. A. Andreu i C. Simó per tal d'estudiar el moviment al voltant del punt L_2 del sistema Terra-Lluna tenint en compte també l'efecte del Sol ([1]). Posteriorment s'ha aplicat per estudiar el moviment al voltant de les òrbites periòdiques substituïdes dels punts d'equilibri col·lineals del sistema Terra-Lluna tenint en compte a més el Sol (vegeu, per exemple, [26]), o al voltant dels triangles per estudiar els asteroides troians en el sistema Sol-Júpiter pertorbat per Saturn ([17]).

És clar que qualsevol dels models esmentats no s'ajusta exactament a la realitat i que, tenint en compte altres efectes, per exemple, l'aixafament d'un planeta, els efectes de radiació, o el nombre de cossos, o el moviment de tots ells, podem considerar altres models més complexos i sofisticats. Per exemple, el mètode JPL consisteix a prendre un problema de N cossos en què les trajectòries dels planetes estan donades per les efemèrides que publica la NASA. Un altre model d'aplicació a l'astrodinàmica és el PRTC en què el satèl·lit porta una *vela solar*, una superfície reflectant que s'aprofita de la pressió de radiació com a impuls extra ([16]). En general, una millora del PRTC porta a un model no autònom, en el qual el camp depèn periòdicament del temps, i un repte ha estat adequar les eines d'estudi a aquests nous models ([28]). No obstant, fins a la data d'avui, el PRTC, de formulació clarament més senzilla, ja proporciona un model força acurat per dissenyar determinades missions i explicar alguns fenòmens.

D'altra banda, a l'hora d'abordar altres problemes de tipus astronòmic, certament cap dels problemes anteriors no és suficient. Esmentem, per exemple, la modelització d'una galàxia barrada, on cal buscar una distribució de densitat de massa que approximi prou bé la seva lluminositat. El que és remarcable, però, és que, prenent altres models, també els punts d'equilibri, les òrbites periòdiques inestables i les seves varietats (del model resultant) tenen un paper cabdal a l'hora d'explicar una determinada fenomenologia. Esmentem l'article publicat en aquest *Butlletí* ([45]), en què els autors presenten una teoria que unifica la formació de braços espirals i anells en galàxies barrades.

Ja per acabar, és interessant observar com les eines de la teoria de sistemes dinàmics (concretades aquí en el rol de les varietats invariants) aplicades al macrocosmos (problemes de mecànica celeste i astronomia) es poden traslladar al món a escala atòmica. En les darreres dècades, s'han publicat diferents treballs que estudien, des del punt de vista de la mecànica clàssica, diverses qüestions rellevants a l'hora de descriure la dinàmica de determinats àtoms. Per esmentar-ne algun exemple concret, si es considera l'àtom d'hidrogen en un camp de microones circularment polaritzat, es plantegen algunes qüestions de manera natural: sota quines condicions ionitzarà l'electró? Com s'explica el seu moviment aparentment erràtic? Podem donar regions de comportament regular i d'altres de comportament caòtic? És possible que l'electró arribi a xocar amb el nucli? Totes elles es poden respondre a partir del comportament de certes varietats invariants d'un sistema d'equacions que té una forma semblant al sistema del PRTC ([7, 40, 41]).

Agraïments

E. Barrabés ha rebut el suport dels ajuts MTM2016-80117-P (MINECO/FEDER) i 2017 SGR 1374, i a M. Ollé se li han atorgat els ajuts MTM2015-65715 (MINECO/FEDER) i 2017SGR1049. Ambdues han rebut l'ajut PGC2018-100928-B-100.

Referències

- [1] ANDREU, M. «The quasi-bicircular problem». Tesi de màster. Universitat de Barcelona, 1999.

- [2] BARRABÉS, E.; CORS, J. M.; GARCÍA-TABERNER, L.; OLLÉ, M. «Tails and bridges in the parabolic restricted three-body problem». *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 472 (3) (2017), 2554–2568.
- [3] BARRABÉS, E.; GÓMEZ, G.; MONDELO, J. M.; OLLÉ, M. «Pseudo-heteroclinic connections between bicircular restricted four-body problems». *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 462 (1) (2016), 740–750.
- [4] BARRABÉS, E.; MIKKOLA, S. «Families of periodic horseshoe orbits in the restricted three-body problem». *A & A*, 432 (3) (2005), 1115–1129.
- [5] BARRABÉS, E.; MONDELO, J. M.; OLLÉ, M. «Numerical continuation of families of homoclinic connections of periodic orbits in the RTBP». *Nonlinearity*, 22 (12) (2009), 2901–2918.
- [6] BARRABÉS, E.; MONDELO, J. M.; OLLÉ, M. «Numerical continuation of families of heteroclinic connections between periodic orbits in a Hamiltonian system». *Nonlinearity*, 26 (10) (2013), 2747–2765.
- [7] BARRABÉS, E.; OLLÉ, M.; BORONDO, F.; FARRELLY, D.; MONDELO, J. M. «Phase space structure of the hydrogen atom in a circularly polarized microwave field». *Phys. D*, 241 (4) (2012), 333–349.
- [8] BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E. *Fundamentals of Astrodynamics*. Nova York: Dover Publications, Inc., 1971.
- [9] CABRÉ, X.; FONTICH, E.; DE LA LLAVE, R. «The parameterization method for invariant manifolds. I. Manifolds associated to non-resonant subspaces». *Indiana Univ. Math. J.*, 52 (2) (2003), 283–328.
- [10] CABRÉ, X.; FONTICH, E.; DE LA LLAVE, R. «The parameterization method for invariant manifolds. II. Regularity with respect to parameters». *Indiana Univ. Math. J.*, 52 (2) (2003), 329–360.
- [11] CABRÉ, X.; FONTICH, E.; DE LA LLAVE, R. «The parameterization method for invariant manifolds. III. Overview and applications». *J. Differential Equations*, 218 (2) (2005), 444–515.
- [12] CASOLIVA, J.; MONDELO, J. M.; VILLAC, B. F.; MEASE, K. D.; BARRABÉS, E.; OLLÉ, M. «Two classes of cycler trajectories in the earth-moon system». *J. Guid. Control Dynam.*, 33 (5) (2010), 1623–1640.
- [13] CONLEY, C. C. «Low energy transit orbits in the restricted three-body problem». *SIAM J. Appl. Math.*, 16 (4) (1968), 732–746.
- [14] DANBY, J. M. A. *Fundamentals of Celestial Mechanics*. 2a ed. Richmond, VA: Willmann-Bell, Inc., 1988.
- [15] DEVANEY, R. L. «Blue sky catastrophes in reversible and Hamiltonian systems». *Indiana Univ. Math. J.*, 26 (2) (1977), 247–263.
- [16] FARRÉS, A.; JORBA, À. «Periodic and quasi-periodic motions of a solar sail close to SL_1 in the Earth-Sun system». *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 107 (1-2) (2010), 233–253.

- [17] GABERN, F.; JORBA, À. «A restricted four-body model for the dynamics near the Lagrangian points of the Sun-Jupiter system». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1 (2) (2001), 143-182.
- [18] GIORGILLI, A.; SKOKOS, C. «On the stability of the Trojan asteroids». *A & A*, 317 (1997), 254-261.
- [19] GÓMEZ, G.; JORBA, À.; SIMÓ, C.; MASDEMONT, J. *Dynamics and Mission Design near Libration Points. Vol. III. Advanced Methods for Collinear Points*. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc., 2001. (World Scientific Monograph Series in Mathematics; 4)
- [20] GÓMEZ, G.; JORBA, À.; SIMÓ, C.; MASDEMONT, J. *Dynamics and Mission Design near Libration Points. Vol. IV. Advanced Methods for Triangular Points*. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc., 2001. (World Scientific Monograph Series in Mathematics; 5)
- [21] GÓMEZ, G.; KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; MASDEMONT, J.; ROSS, S. D. «Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial restricted three-body problem». *Nonlinearity*, 17 (5) (2004), 1571-1606.
- [22] GÓMEZ, G.; LLIBRE, J.; MARTÍNEZ, R.; SIMÓ, C. *Dynamics and Mission Design Near Libration Points. Vol. I. Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points*. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc., 2001. (World Scientific Monograph Series in Mathematics; 2)
- [23] GÓMEZ, G.; LLIBRE, J.; MARTÍNEZ, R.; SIMÓ, C. *Dynamics and Mission Design Near Libration Points. Vol. II. Fundamentals: The Case of Triangular Libration Points*. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc., 2001. (World Scientific Monograph Series in Mathematics; 3)
- [24] GÓMEZ, G.; MONDELO, J. M. «The dynamics around the collinear equilibrium points of the RTBP». *Phys. D*, 157 (4) (2001), 283-321.
- [25] HARO, À.; CANADELL, M.; FIGUERAS, J.-L.; LUQUE, A.; MONDELO, J.-M. *The Parameterization Method for Invariant Manifolds. From Rigorous Results to Effective Computations*. Cham: Springer, 2016. (Applied Mathematical Sciences; 195)
- [26] HOWELL, K. C.; GUZMÁN, J. J. «Spacecraft trajectory design in the context of a coherent restricted four-body problem with application to the map mission». A: *51st International Astronautical Congress* (2-6 octubre 2000, Rio de Janeiro, Brasil). Paper IAF-00-A.5.06.
- [27] JORBA, À.; MASDEMONT, J. «Dynamics in the center manifold of the collinear points of the restricted three body problem». *Phys. D*, 132 (1-2) (1999), 189-213.
- [28] JORBA, M. «Periodic time dependent Hamiltonian systems and applications». Tesi de màster. Universitat de Barcelona, 2019.
- [29] KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D. «Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics». *Chaos*, 10 (2) (2000), 427-469.

- [30] KOON, W. S.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D.; LO, M. W. «Constructing a low energy transfer between Jovian moons». A: *Celestial Mechanics*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002, 129–145. (Contemp. Math.; 292)
- [31] LHOTKA, CH.; EFTHYMIOPOULOS, C.; DVORAK, R. «Nekhoroshev stability at L_4 or L_5 in the elliptic-restricted three-body problem - application to Trojan asteroids». *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 384 (3) (2008), 1165–1177.
- [32] LLIBRE, J.; OLLÉ, M. «The motion of Saturn coorbital satellites in the Restricted Three-Body Problem». *A & A*, 378 (3) (2001), 1087–1099.
- [33] MCGEHEE, R. «Triple collision in the collinear three-body problem». *Invent. Math.*, 27 (1974), 191–227.
- [34] MCKENZIE, R.; SZEBEHELY, V. «Nonlinear stability around the triangular libration points». *Celestial Mech.*, 23 (3) (1981), 223–229.
- [35] MARKEEV, A. P. «Stability of the triangular Lagrangian solutions of the restricted three-body problem in the three-dimensional circular case». *Soviet Astronom. AJ*, 15 (1971), 682–686 (1972).
- [36] MARTÍNEZ BARCHINO, R. «Aplicació dels sistemes dinàmics a l'estudi d'òrbites de cometes i naus espacials». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 16 (1) (2001), 87–100.
- [37] MARTÍNEZ, R.; SIMÓ, C. «Invariant manifolds at infinity of the RTBP and the boundaries of bounded motion». *Regul. Chaotic Dyn.*, 19 (6) (2014), 745–765.
- [38] MASDEMONT, J. J. «High-order expansions of invariant manifolds of libration point orbits with applications to mission design». *Dyn. Syst.*, 20 (1) (2005), 59–113.
- [39] MEYER, K. R.; HALL, G. R. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem*. Nova York: Springer-Verlag, 1992. (Applied Mathematical Sciences; 90)
- [40] OLLÉ, M. «To and fro motion for the hydrogen atom in a circularly polarized microwave field». *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 54 (2018), 286–301.
- [41] OLLÉ, M.; PACHA, J. R. «Hopf bifurcation for the hydrogen atom in a circularly polarized microwave field». *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 62 (2018), 27–60.
- [42] OLLÉ, M.; PACHA, J. R.; VILLANUEVA, J. «Motion close to the Hopf bifurcation of the vertical family of periodic orbits of L_4 ». *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 90 (1–2) (2004), 89–109.
- [43] OLLÉ, M.; RODRÍGUEZ, Ò.; SOLER, J. «Ejection-collision orbits in the RTBP». *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 55 (2018), 298–315.
- [44] REN, Y.; SHAN, J. «Numerical study of the three-dimensional transit orbits in the circular restricted three-body problem». *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 114 (4) (2012), 415–428.

- [45] ROMERO-GÓMEZ, M.; SÁNCHEZ-MARTÍN, P.; MASDEMONT, J. J. «Com les varietats invariants formen espirals i anells en galàxies barrades». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 29 (1) (2014), 51-75.
- [46] SIMÓ, C.; SOUSA-SILVA, P.; TERRA, M. «Practical stability domains near $L_{4,5}$ in the restricted three-body problem: some preliminary facts». A: *Progress and Challenges in Dynamical Systems*. Heidelberg: Springer, 2013, 367-382. (Springer Proc. Math. Stat.; 54)
- [47] STIEFEL, E. L.; SCHEIFELE, G. *Linear and Regular Celestial Mechanics. Perturbed Two-body Motion, Numerical Methods, Canonical Theory*. Nova York; Heidelberg: Springer-Verlag, 1971. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 174)
- [48] SZEBEHELY, V. *Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies*. Nova York; Londres: Academic Press, Inc., 1967.

ESTHER BARRABÉS VERA
DEPARTAMENT D'INFORMÀTICA, MATEMÀTICA APLICADA I ESTADÍSTICA
UNIVERSITAT DE GIRONA
17003, GIRONA
esther.barrabes@udg.edu

MERCÈ OLLÉ TORNER
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
08028, BARCELONA
merce.olle@upc.edu