

EL BATEC INVISIBLE

La bellesa i l'ànima de les matemàtiques

Víctor Mañosa

Ens aproximem a l'experiència estètica matemàtica des d'un punt de vista proper al de la psicologia analítica. Analtzem el mite segons el qual l'univers és un ens harmònic que pot ser descrit mitjançant les matemàtiques, les quals li atorguen la seva bellesa, i estudiem el romanent inconscient d'aquesta idea arquetípica en la ciència contemporània. La bellesa matemàtica es presenta, finalment, com a vincle entre l'Arquetip del Cosmos i el de la totalitat de la psique.

1. Introducció

La matemàtica sovint és vista com una activitat estrictament racional on les emocions i els sentiments no intervenen, però entre els matemàtics és usual referir-se a la seva activitat i motivacions en altres termes: així, es parla de joia i d'un plaer per l'obtenció del qual es persevera durant jornades de treball incert. Aquest gaudi matemàtic està lluny de ser una mera experiència intel·lectual i, per contra, involucra sentiments complexos. Un exemple vívid de l'expressió d'aquesta sensibilitat emocional el podem trobar a la intrahistòria de la demostració de la desigualtat de correlació gaussiana que va trobar l'estadístic Thomas Royen, qui explica que la demostració li va venir al cap mentre es rentava les dents el 17 de juliol de 2014:

El “sentiment *d'alegria i gratitud profunda*” que prové de trobar una prova important ha estat prou recompensa. “És com *una mena de gràcia*”, va dir. “Podem treballar durant molt de temps en un problema i, de sobte, *un àngel*, que cal entendre com una al·lusió poètica als misteris de les nostres neurones, aporta una bona idea” (Wolchover 2017; l'èmfasi és meu).

Moltes vegades aquest plaer està vinculat a una experiència estètica. Així, als textos matemàtics tradicionalment es parla de demostracions elegants, d'arguments subtils o

d'objectes i construccions particularment bonics (Hardy 1992), (Rota 1997), (Russell 1919). El gran matemàtic Jacques Hadamard, qui juntament amb Charles-Jean de la Vallée-Poussin va demostrar el teorema dels nombres primers, va destacar el paper de la bellesa matemàtica per explicar la vinculació emocional dels matemàtics amb la seva ciència. Tot citant al poeta Paul Valéry al seu llibre sobre la psicologia dels processos de la invenció matemàtica, escriu:

Pot resultar sorprenent veure invocada la sensibilitat emocional a propòsit de les demostracions matemàtiques, les quals semblarien interessar únicament a l'intel·lecte. Això suposaria oblidar el sentiment de bellesa matemàtica, de l'harmonia dels nombres i les formes, de l'elegància geomètrica. Aquest és un sentiment estètic veritable que tots els autèntics matemàtics coneixen, i segur que pertany a la sensibilitat emocional (Hadamard 1954).

La relació entre matemàtica i bellesa és de ple dret un dels capítols importants de la filosofia de les matemàtiques però també és una qüestió elusiva i recurrent. Tradicionalment s'enumeren alguns elements "objectius" que atorgarien a un resultat, una demostració o la construcció d'un objecte matemàtic la seva bellesa. Alguns d'aquests elements serien, per exemple, el minimalisme i l'elementalitat de recursos emprats, o bé el grau de sorpresa davant de resultats particularment antiintuïtius o que relacionen conceptes aparentment inconnexos. Però també cal destacar l'enumeració d'altres elements difícilment objectivables i que transmeten molta informació sobre l'empremta psíquica del quefer matemàtic com ara la qualitat "d'inevitable" (inevitability en paraules de Hardy) o la sensació de "profunditat" d'un resultat (Hardy 1992), (Russell 1919)¹.

En aquest treball eludiré els suposats elements objectius i em centraré en alguns aspectes psicològics del quefer matemàtic, situant l'experiència estètica matemàtica al lloc que li pertany: l'ànima. També veurem que antigament, de forma col·lectiva i conscient, la sensibilitat emocional vinculada a l'experiència estètica matemàtica es va desplegar d'una forma molt propera a una actitud religiosa, per incòmoda i connotada que pugui resultar la paraula, especialment entre els propis matemàtics contemporanis. També examinarem les traces inconscients d'aquesta filiació espiritual al quefer matemàtic contemporani (el

¹ Per una crítica al paper de l'element de sorpresa en l'experiència estètica matemàtica vegeu (Rota 1997). Una llista reveladora d'adjectius emprats per la comunitat matemàtica per referir-se a resultats i demostracions es pot trobar a (Johnson, Steinerberger 2019).

testimoni de Royen és eloqüent en aquest sentit). Crec que fer consciència d'aquesta filiació pot servir per trobar un bon marc de referència per explicar els fenòmens de l'experiència estètica i de la "no raonable" efectivitat de les matemàtiques per descriure el món. Fenòmens que avui són vistos amb perplexitat (Wigner 1960). També serviria per restituir el sentit a la motivació inconscient del treball de molts matemàtics i matemàtiques contemporanis, i permetria incardinar aquest treball alhora en una tradició centenària i en un procés de fer ànima proper al procés d'individuació.

2. Aspectes psicològics de l'experiència estètica matemàtica

La relació entre bellesa i transcendència queda perfectament reflectida al primers versos de l'Endymion de Keats que podrien servir com a substitut d'una definició acadèmica de bellesa de la qual no disposem, versos que també vinculen l'experiència de la bellesa a una forma d'emoció:

Una cosa bella és una eterna alegria:
el seu encant augmenta; mai no
es dissoldrà en el no-res; sinó que mantindrà
una estança quieta per nosaltres (...)

Alegria, encant, quietud i apel·lacions a l'eternitat que clarament evoquen plaer, ordre i transcendència. Potser no sigui anar gaire lluny afirmar que, segons el poeta, a les coses belles podem sentir l'influx d'una presència invisible i benèvola, i que als seus versos es suggereixi l'experiència de la bellesa com una forma d'experiència religiosa. Per això és interessant contraposar allò que els versos de Keats transmeten amb l'experiència de la bellesa matemàtica referida per Bertrand Russell en un fragment citat profusament, i que ha esdevingut paradigmàtic a l'hora d'explicar l'experiència estètica matemàtica.

La matemàtica posseeix no només veritat, sinó també bellesa suprema; una bellesa freda i austera com aquella de l'escultura, sense apel·lació a cap part de la nostra naturalesa feble, sense els ornaments magnífics de la pintura o la música, però sublim i pura, i capaç d'una perfecció severa com només les millors arts poden presentar. El veritable esperit del delit, d'exaltació, el sentit de ser

més gran que l'home, que és el criteri amb el qual es mesura la més alta excel·lència pot ser trobat en la matemàtica tan segurament com en la poesia (Russell 1919).

La tria de les paraules i la diferència del que transmet aquest passatge amb allò que transmeten els versos de Keats és eloqüent: perfecció severa (*stern*), fredor, austeritat, puresa, i una excel·lència que sembla antagònica amb l'alegria, la qual empal·lideix en presència d'allò que és més gran que l'ésser humà. En darrera instància, Keats i Russell descriuen dos formes d'experiència transcendent, però la benèvola atmosfera dels versos de l'Endymion és suprimida al text de Russell per l'aclaparadora experiència directa del numen, per una aura de *majestas*, tremenda i fascinant (Otto 1970).

És molt curiós comprovar com l'experiència estètica matemàtica referida al passatge de Russell s'ha convertit en un lloc comú entre aquells que no conreen la matemàtica, els quals solen creure que la relació dels matemàtics amb la seva ciència és una relació “freda”. Però encara és més curiós i sorprenent comprovar com sovint aquest passatge és citat –i tàcitament acceptat– entre la comunitat matemàtica. Dic curiosament, perquè a l'experiència Russeliana no sembla haver lloc per l'element afectiu, indispensable en els processos creatius tal i com va fer notar Hadamard (Hadamard 1954)². Tampoc no sembla que hi puguem trobar l'alta significació psíquica i el potencial transformador que s'espera del contacte amb allò *sublim* –vegeu per exemple el testimoni de Royen referit a l'inici³–. Llegint el passatge de Russell es pot sentir que l'experiència transcendent que en ell es reflecteix és estèril: al col·locar la bellesa matemàtica en un pla molt superior a l'experiència humana, al situar-la fora de l'ànima, irromp la fredor. En paraules de C.G. Jung, “si acceptem el fet que un déu és absolut i més enllà de qualsevol experiència humana, em deixa fred. Ni jo puc afectar-lo a ell, ni ell m'afecta a mi” (Jung 1967).

En definitiva, el passatge de Russell transmet una impressió d'esterilitat que es contraposa al fet que la bellesa matemàtica és àmpliament considerada com un criteri fecund en ciència. En una obra recent, el premi Nobel de física Frank Wilczek (Wilczek 2015) abunda en aquest

² Hadamard ens indica com l'element afectiu constitueix una part essencial a tot descobriment o invenció i ho exemplifica en l'anàlisi de la vida i obra de Henry Poincaré, en la qual veiem que el sentit de la bellesa era un mitjà indispensable en la seva recerca. També sobre l'element afectiu, Arthur Koestler dedica passatges inspirats i documentats a la seva obra “Act of creation” (Koestler 1964).

³ Vegeu també (Schmidt 2019).

fet i cita diversos exemples en els que confiant en la bellesa d'una teoria es va arribar a descobriments sorprenents: Urbain Le Verrier i John Couch Adams tot confiant en la bellesa de la teoria newtoniana de la gravitació, que en aquell moment era desafiada pel comportament anòmal d'Urà, van predir l'existència d'un nou planeta que no s'havia observat fins aleshores, Neptú; Heinrich Hertz va poder produir i observar ones de ràdio tot confiant en la bellesa de les equacions de Maxwell, i Paul Dirac usant una equació "estranya i bella" va predir l'existència de les antipartícules que van poder ser detectades poc després. És ben conegut també que la fe en la bellesa també ha conduït a errors. Un exemple que ja pertany la èpica de la ciència va ser l'intent per part de Johannes Kepler de crear un sistema planetari en el que les distàncies de les òrbites (considerades circulars) del sol als sis planetes que es coneixien aleshores vindrien donades en termes d'esferes inscrites i circumscrites en sòlids platònics. Kepler va haver de corregir el seu model per una petita discrepància observacional i va haver de plantejar que les òrbites no havien de ser circulars sinó el·líptiques. És coneguda l'enorme decepció de Kepler al comprovar que les òrbites el·líptiques s'ajustaven millor que els cercles a les dades observades: etimològicament *éllipsis* significa *insuficiència* i, per tant, l'el·lipse era considerada una figura defectiva, sense el valor estètic i metafísic atribuïts al cercle (McAllister 1996, 178). Avui en dia, les tres lleis de Kepler i la seva derivació a partir de les lleis de Newton es consideren una peça bellíssima d'orfebreria matemàtica (Fitzpatrick 2012). També hi ha, però, posicions crítiques respecte de la fertilitat de la bellesa com a criteri rector: un enfoc crític i sòlidament documentat es pot trobar a (Hossenfelder 2018).

En aquest punt vull plantejar la possibilitat que l'experiència de la bellesa en matemàtiques pugui ser un fenomen de projecció, és a dir un procés inconscient i autònom pel qual dipositem en els objectes matemàtics qualitats que pertanyen a la nostra realitat psíquica personal i col·lectiva. Veurem més endavant que la bellesa d'aquests objectes sovint ve referida a qualitats que la psicologia analítica atribueix a certes representacions del *Selbst*, l'arquetip de la totalitat de la psique. Algunes d'aquestes qualitats tenen característiques religioses i posen de manifest com s'ha dipositat sobre les matemàtiques la càrrega d'un anhel molt antic: el desig que l'univers sigui un Cosmos (κόσμος), una realitat ordenada. De fet, veurem com aquest mite va ser explícit al llarg de molts segles i com, en conseqüència, la dedicació a les matemàtiques era viscuda com una forma de fer ànima. Veurem també, com amb l'adveniment del paradigma mecanicista i el procés de secularització de les motivacions científiques, aquesta creença va romandre de forma inconscient. Així doncs, la seva

manifestació en la ciència contemporània es tractaria també d'un fenomen de projecció, en aquest cas col·lectiu. Les matemàtiques serien el recipient simbòlic d'aquest anhel, el lloc on l'Arquetip Cosmos està projectat.

3. Bellesa matemàtica, sentiment religiós i Arquetip Cosmos

És usual presentar la ciència com una disciplina que s'acosta a la realitat d'una forma objectiva, aquest relat forma part del seu propi mite. Realment, però, no cal aprofundir gaire en la història del pensament científic per copsar que aquest està impregnat, quan no impulsat, per un bon nombre de supòsits culturals no explícits, de cosmovisions i aspiracions molt freqüentment inconscients, de tal manera que la imatge del món que ens presenta la ciència és un reflex de les creences i els anhels propis de cada època⁴.

El principal supòsit a partir del qual es construeix la ciència és aquell segons el qual la realitat té un ordre que és accessible a les nostres ments. En la mesura que aquest supòsit no es sol fer explícit podem considerar que es tracta d'un plantejament que exerceix el seu influx d'una forma inconscient. Aquest supòsit és l'expressió d'un desig que batega al cor del pensament científic occidental, fins i tot del secularitzat pensament científic occidental del segle XXI. Un segon supòsit, vigent avui amb un vigor renovat⁵, és que aquest ordre no pot ser altre cosa que un ordre matemàtic. Les matemàtiques, doncs, han esdevingut les dipositàries culturals de la projecció de l'Arquetip Cosmos i la seva bellesa implícita.

El paper de les matemàtiques en l'activitat científica es remunta a les tradicions d'inspiració pitagòrica i platònica⁶, però la seva entrada al nucli del pensament científic es produeix a

⁴ Per una presentació de l'evolució del pensament científic en el context del desenvolupament de la cultura occidental vegeu (Tarnas 1991). Una visió centrada en el camp de les matemàtiques es pot trobar a (Kline 1980). Tres textos clàssics, complementaris en fons i en forma, que han servit per qüestionar el relat de la ciència com un procés lineal resultant de l'aplicació sistemàtica d'una metodologia objectiva es poden trobar a (Kuhn 1957), (Kuhn 1962) i (Feyerabend 1975). En un treball recent, el biòleg Rupert Sheldrake (Sheldrake 2012) examina deu dogmes que, segons l'autor, al ser assumits de manera inconscient limiten la creativitat de la ciència. També són destacables les figures arquetípiques que Arthur Koestler va identificar en els impulsos motivacionals de l'activitat científica (Koestler 1964, 255-258).

⁵ Em refereixo a la progressiva matematització de la biologia i les ciències socials.

⁶ Contràriament al que solen presentar els textos d'història de les matemàtiques, la figura de Pitàgores representa la supervivència de les diferents tradicions místiques del mediterrani i, alhora, una evolució filosòfica d'aquestes que incorpora elements de la tradició precientífica i que han arribat a nosaltres a través de l'enorme influència de Plató. En aquest sentit, l'escola de Plató farà de mitjancera entre la breu però determinant, "il·lustració" grega —que va incorporar el discurs racional a la filosofia, determinant allò que és acceptable en la filosofia occidental i allò que no— i l'antiga forma de coneixement basada en la preeminència d'allò sobrenatural

partir del Renaixement quan els filòsofs naturals de l'època i posteriors, amarats d'un platonisme recentment redescobert, comencen a elaborar una física en la qual l'univers és descrit matemàticament. Evidentment, en èpoques molt anteriors existien *models* matemàtics de la natura (mecanismes astronòmics, per exemple), la novetat es produeix en considerar que les descripcions matemàtiques eren l'expressió literal de les *lleis* segons les quals el món havia estat ordenat: l'autèntic ordre geomètric del món (Barfield 1957)⁷. La història de la ciència, i en particular la de la matemàtica, ens mostra com aquesta indagació en la geometria de la natura tenia caràcter espiritual. Grosso modo, el supòsit explícit (i per tant conscient) dels treballs de Copèrnic, Kepler, Galileu, Pascal, o de forma molt eloqüent els de Newton era que l'univers ha estat dissenyat d'acord a principis matemàtics. En paraules de Leibniz, “Cum Deus calculat et cogitationem exercet, fit mundus” (amb els seus càlculs i pensaments Déu va fer el món). Vegem dos exemples explícits:

Per fer, doncs, aquest sistema amb tots els seus moviments, calia una Causa que sabés i comparés les quantitats de matèria en els diversos cossos del Sol i dels planetes i les potències gravitatòries resultants d'aquí; de les diverses distàncies dels planetes primaris del Sol i els secundaris de Saturn, Jupiter i la terra; de les velocitats amb les quals aquests planetes podrien girar en aquestes distàncies; i de les quantitats de matèria als cossos centrals. I per comparar i ajustar totes aquestes coses en tan gran varietat de cossos cal que la causa no sigui cega ni fortuïta, sinó bona coneixedora de la Mecànica i la Geometria (Newton 1692).

Aquesta “Causa” que planifica l'univers, és un “Ésser” que ho fa bellament:

i del ritual com a forma d'accedir al coneixement (Dodds 1973). És probable que l'origen de les doctrines del pitagorisme “científic” es trobi en els treballs de Filolau de Crotona i d'Arquites de Tarent a la segona meitat del segle V a.C. i la primera meitat del segle IV a.C. Aquests treballs tracen una frontera entre el pitagorisme antic, més interessat en la doctrines de l'ànima i la constitució d'una forma de vida filosòfica, i un pitagorisme nou, de caràcter matemàtic i cosmològic que s'imposarà a la mort de Pitàgores (Burkert 1972) i (Hernández de la Fuente 2014).

⁷ Observem que el concepte antropocèntric de *lei* de la naturalesa es pot contraposar al concepte *d'hàbit* de la naturalesa –potser també antropocèntric– plantejat per alguns pensadors influïts pel descobriment de l'evolució de les espècies, que van obrir-se a la possibilitat que l'univers també fos un ens en evolució, no regit per principis immutables (lleis) sinó per hàbits que evolucionarien en el temps tal i com fan els organismes. Vegeu (Sheldrake 2012) que cita a F. Nietzsche, C.S. Pierce, W. James, H. Bergson i A.N. Whitehead.

Aquest sistema, el més bonic de tots, del Sol, els planetes i els estels, només podria procedir del consell i domini d'un ésser intel·ligent i poderós (...) Aquest Ésser governa totes les coses, *no com l'ànima del món*, sinó com a Senyor de tot (Newton 1729, 387-393; l'èmfasi és meu).

En paraules d'Arthur Koestler (Koestler 1964), la primera ciència sorgida del Renaixement va ser inspirada per un sentiment *oceànic* de misticisme religiós ("oceanic feeling of religious mysticism"). Aquest plantejament es pot seguir fins ben entrat el segle XVIII, el veiem per exemple en la defensa en termes teològics del principi de mínima acció per part Mapertius i Euler (Kline 1980)⁸:

Com que el teixit de l'univers és el més perfecte, i és el treball del més savi Creador, res no es produeix a l'univers en el qual no aparegui cap relació de màxim i mínim (Euler 1744).

Aquests testimonis, entre molts d'altres, evidencien com l'activitat científica era viscuda com una manera de conrear l'ànima: al matematitzar, el filòsof natural contemplava els elements amb els quals el creador havia bastit el món: la geometria era pre-existent a la creació, era co-eterna a la ment de Déu, era Déu pròpiament dit, tal i com deia Kepler (Koestler 1964). Les relacions harmòniques dels objectes matemàtics, la presència de simetria o la simplicitat dels arguments en la seva forma definitiva constituïen una forma elevadíssima de bellesa i per tant, des d'una perspectiva platònica, assimilada al bé. El contacte amb aquesta bellesa indefectiblement havia de transformar l'ànima del filòsof natural. La bellesa de l'univers, expressada en la bellesa de les matemàtiques, era un reflex de la bellesa i la bondat de la ment del creador. És impossible no interrogar-se sobre quin devia ser l'efecte del cultiu de les matemàtiques sobre la psique d'algú que creu d'una forma conscient, com per exemple creia Newton, que fer geometria era resseguir el pensament de Déu.

Les arrels d'aquesta forma de fer ànima que suposava immersir-la en l'etern pel contacte amb els seus símbols (els nombres, les figures geomètriques) es podria remuntar a l'antic

⁸ És interessant fer notar la paradoxa per la qual en el transcurs dels anys, la investigació (espiritual) en el disseny del gran pla que propiciava el descobriment de noves lleis (avui diríem la creació de nous models físics) van anar conformant la idea d'un creador que posa en marxa un mecanisme i el deixa evolucionar, ja sense cura. El *deisme* serà un pas clau cap el paradigma de l'univers-mecanisme.

pitagorisme, del que certament sabem que atribuïa als nombres una naturalesa simbòlica. Alguns autors han assenyalat que la *contemplació* de la bellesa matemàtica s'assimilava a una forma de culte:

Els déus es comparaven als nombres perquè eren purs i estaven lliures de canvis materials; posseïen una existència independent de la dels cossos tridimensionals, que eren mortals i peribles. Quan la ment medita sobre els nombres s'està comunicant amb els déus, els quals no desitgen altra cosa dels mortals que la seva completa admiració i contemplació. La contemplació és, per tant, una forma d'oració que no demana cap favor als déus (Gorman 1979).

Arthur Koestler afegeix més detalls, incloent el vincle etimològic entre *contemplació* i *teoria*:

(...) (els pitagòrics) van transformar el culte místic òrfic en una religió que considerava els estudis matemàtics i astronòmics com les principals formes de culte i pregària. La intoxicació física que havia acompanyat els ritus bàquics va ser substituïda per la intoxicació mental derivada de la filo-sofia, l'amor al coneixement. Aquest va ser un dels molts conceptes clau que van encunyar i que són encara unitats bàsiques en la nostra moneda verbal. El clixé sobre els "misteris de la natura" s'origina en la revolucionària innovació d'aplicar la paraula referida als ritus secrets dels adoradors d'Orfeu a les devocions de l'observació de les estrelles. (...) La ciència pura és un altre dels seus neologismes; significava no només un contrast amb les ciències "aplicades", sinó que la contemplació dels nous misteris era considerada com un mitjà per purificar l'ànima per la seva immersió en l'etern. La contemplació de la "dansa divina dels nombres" que contenia els secrets de la música i dels moviments celestes es va convertir en una forma d'unió mística entre el pensament humà i *l'ànima mundi* (Koestler 1964, 59-260).

En aquest punt es fa difícil no establir una analogia entre el treball matemàtic posterior a la revolució científica i el treball alquímic estudiat per Jung i la seva escola.

Però sempre hi havia uns quants per als quals el treball de laboratori era principalment una qüestió de símbols i del seu efecte psíquic. (...) Tot i que els seus treballs amb la retorta van ser un esforç seriós per descobrir els secrets de la transformació química, va ser al mateix temps —i sovint de forma aclaparadora— el reflex d'un procés psíquic paral·lel que es podria projectar amb més facilitat en la química desconeguda de la matèria ja que aquest procés és un fenomen inconscient de la natura, igual que la misteriosa alteració de les substàncies. El que expressa la simbologia de l'alquímia és tot el problema de l'evolució de la personalitat descrita anteriorment, l'anomenat procés d'individuació (Jung 1968, par. 40).

És important assenyalar que mentre aquestes idees eren conscients, els filòsofs naturals podien *participar* en el cosmos. De fet, aquest punt és la base sobre la qual descansa la teoria platònica del coneixement segons la qual la psique pot accedir a l'estructura última de la realitat (matemàtica-ideal) perquè *participa* d'aquesta realitat. Per Plató i la seva escola, la psique ha tingut accés a aquesta realitat en un estadi anterior a la nostra vida i només li cal recuperar allò que ja sap (*anamnesis*) (Kline 1980, 21). Sota aquests supòsits explícits (conscients), la relació no sensorial entre el filòsof natural i el món, i per tant la seva experiència de la ciència i el conreu de la matemàtica podia ser fecunda i transformadora: es descobreix un cosmos bell fruit d'uns elements, les matemàtiques, que són bells i que estan *alhora a l'ànima i al món*. De fet, la distinció entre ment i món encara no ha estat perfilada d'una forma taxativa, encara no és vigent la distinció cartesiana entre *res cogitans* i *res extensa*.

Irònicament, la física i les matemàtiques desenvolupades durant el *període de participació* al que ens hem referit, van consolidar la imatge del món com la d'un mecanisme. Aquesta idea, que ja es troba al tractat d'astronomia *De sphaera mundi* (c. 1230) de Johannes de Sacrobosco va ser adoptada pels herois de la revolució científica com ara Kepler i més endavant Leibniz, i va ser propugnada pels deistes de la Il·lustració sobre tot a partir de la publicació el 1687 dels *Principia Mathematica* de Newton. És interessant notar aquí com l'aparició de la metàfora del mecanisme del rellotge està vinculada amb l'Arquetip Cosmos i com aquest arquetip està vinculat a una experiència estètica i transcendent, vinculada al procés d'individuació, que perdura en el món contemporani: vegeu per exemple el somni final de la seqüència de quatre-cents somnis de Wolfgang Pauli analitzada per Jung, on el Premi Nobel de Física refereix

la visió del “rellotge del món” com la causant d’una impressió de “l’harmonia més sublim” (Jung 1968b, 203-214) i (Jung 1969, 64-105): notem el paral·lelisme amb els testimonis de Royen, Valéry o Russell referits anteriorment. L’experiència d’allò sublim en el context del procés d’individuació és tractada també a (Schmidt 2019).

4. Crisis matemàtiques i canvis en la percepció estètica

No deixa de ser una paradoxa que la física matemàtica, originada a partir d’un sentiment oceànic de misticisme, propiciés l’aparició de la concepció mecànica del món que finalment ha anat imposant-se no només en les ciències físiques, tot i que avui estigui en recessió⁹, sinó també en àrees com la medicina, la biologia o fins i tot la psicologia (Riskins 2016), (Shamdasani 2003) i (Sheldrake 2012). El paradigma mecànic va acabar per escindir formalment la motivació transcendent de l’activitat científica. Algunes conseqüències de la instauració d’aquest paradigma han estat la progressiva des-animació del món¹⁰ i també el progressiu allunyament de la pròpia ànima en els homes i dones de la modernitat i el món contemporani (Tarnas 1991). Pel que fa a l’objecte del nostre estudi, consignarem que malgrat ser desposseïdes del seu paper de *llenguatge sagrat* que estableix un vincle entre el món i l’ànima del científic (la participació a que ens hem referit) les matemàtiques seguiran sent el llenguatge de la ciència en el món secularitzat dels segles XIX al XXI, posant de manifest que la creença platònica d’un ordre subjacent de la natura (l’Arquetip Cosmos) roman, sovint, de forma inconscient.

En un context en què el sentiment religiós es desvincula de la recerca científica, les matemàtiques es lliuren a uns períodes de gran creativitat però també a successives crisis sobre la naturalesa dels seus fonaments (Kline 1980). Períodes de crisi paral·lels als períodes de convulsió i efervescència social i cultural del seu temps. Tampoc les matemàtiques de

⁹ La pervivència del paradigma mecanicista i el seu avenç a les ciències de la vida es produeix mentre es va retirant progressivament de la interpretació de la física: el 1931, James Jeans escriu pel gran públic el següent:

Avui hi ha una ampli acord, que a la part física de la ciència s’aproxima gairebé a la unanimitat, que el corrent del coneixement es dirigeix cap a una realitat no mecànica; l’univers comença a assemblar-se més a un gran pensament que no pas a una gran màquina. La ment ja no apareix com una intrusa accidental en l’àmbit de la matèria... més aviat hauríem de considerar-la com la creadora i governadora de l’àmbit de la matèria (Jeans 1931).

¹⁰ Em refereixo a la caducitat de la concepció d’un univers viu i poblat d’ànimes, una concepció que perdura fins ben entrat el Renaixement. Vegeu per exemple, l’èmfasi afegit al segon text de Newton reproduït anteriorment.

finals del segle XIX i del segle XX queden excloses del procés d'extrema sofisticació del coneixement i el confinament de la psique en laberints acadèmics (recordem el sarcasme amb què l'escriptor i físic Ernesto Sabato reflexiona al seu "Uno y el universo" sobre l'extrema artificialitat de la definició de nombre 1 proposada per Burali-Forti, vinculant-la al pervenir de la ignorància¹¹). L'efecte de la complexitat d'aquests laberints sobre l'ànima es torna a projectar sobre la naturalesa gràcies a l'adveniment de les geometries no euclidianes i de la topologia, o l'aparició d'objectes com els conjunts de Cantor, les corbes de Peano o d'altres vinculats a les paradoxes de la teoria de la mesura. Objectes que propicien l'aparició, ja al segle XX, de noves formes geomètriques que *creiem* presents a la natura (Mandelbrot 1982): la recurrència obsessiva dels fractals, la voluptuositat de la turbulència o la complexitat del caos i altres fenòmens dels què ens proveeix la teoria dels sistemes dinàmics són un exemple. Totes aquestes estructures són el resultat d'una nova forma d'ordre, una evolució doncs de l'Arquetip Cosmos, i totes elles exerceixen una fascinació numinosa en molts d'aquells que les contemplen.

La progressiva aparició d'aquests nous objectes propicia, doncs, una evolució de l'experiència estètica de les matemàtiques, que també es sofisticava i evolucionava paral·lelament amb el que passa a les arts plàstiques amb el naixement de les avantguardes, a vegades influint-se mútuament (Pont 1982) i, en tot cas, en consonància amb la resta de fenòmens culturals del moment i allò que l'assagista Joan Fuster va qualificar brillantment com "el descrèdit de la realitat". En constatar aquest paral·lelisme i donant per fet que l'evolució del sentit estètic està influïda pels canvis a la consciència i l'inconscient col·lectius, legítimament podem preguntar-nos si l'evolució de la descoberta està lligada a l'evolució del nostre sentit estètic, una qüestió analitzada a (McAllister 1996).

A la propera secció veurem que malgrat aquests canvis en la sensibilitat estètica i malgrat la laïcització de les motivacions de la ciència, l'Arquetip Cosmos segueix bategant a la física i la matemàtica contemporània. Tant a la geometria de l'anomenat *model estàndard* com a la teoria de la complexitat hi perviu la idea de la *invariància* i de la *simetria*, que són els símbols per excel·lència d'aquest arquetip i també de l'arquetip de la totalitat de la psique.

¹¹ Aquesta definició es pot consultar, per exemple, a (Ewald 1996, 1029).

5. Fascinació, mandales, simetria: L'herència inconscient del platonisme

Hem vist com alguns autors han referit la *contemplació* de la bellesa matemàtica com una forma d'oració. Els objectes matemàtics serien recipients dels continguts psíquics i alhora símbols. Durant mil·lennis hem sabut que la contemplació dels símbols és una via d'accés a una altra forma de consciència. Podem resseguir aquest saber des dels òrfics i els pitagòrics a una filòsofa del segle XX com Maria Zambrano –que ens diu que en contacte amb els símbols la paraula no pot sinó destil·lar el seu saber més pur (Colinas 2019)–. Resulta difícil no relacionar aquesta forma de contemplació dels objectes matemàtics amb l'antiquíssima tradició hinduista de la contemplació de *yantres*, diagrames emprats per conduir una meditació. Els yantres són instruments que interpel·len les estructures psíquiques inconscients. Aquesta forma de contemplació, desposseïda del seu element místic, perdura en la comú fascinació que certs objectes matemàtics exerceixen sobre nosaltres –tinguem novament present que la fascinació és un dels elements de l'experiència numinosa–.

La simetria és una d'aquestes propietats dels objectes matemàtics que són alhora dipositàries (per projecció) del nostre anhel d'un ordre transcendent, l'expressió de la totalitat de la psique, i un vehicle de contemplació. El conegudíssim passatge de Jung al voltant de l'harmonia del mandala fins i tot és citat en algun excel·lent text de divulgació de les matemàtiques en aquest sentit (Du Satoy 2008)

Esbossava cada matí en un quadern un petit dibuix circular (...) que semblava correspondre amb la meua situació interior d'aquell moment (...) Només gradualment vaig anar descobrint el que el Mandala realment és: (...) el Si-mateix, la totalitat de la personalitat, que si tot va bé és harmoniós (Jung 1965).

És interessant fer notar l'equivalència entre l'harmonia deguda a la simetria i el benestar (“si tot va bé”).

En un llibre de text actual de mètodes matemàtics per a la física se'ns diu que val la pena estudiar la simetria només per la seva bellesa però també pel seu paper fonamental a la física:

Per als matemàtics, val la pena estudiar la simetria simplement per la seva bellesa, però la simetria també és molt important a la física, ja que permet comprendre, si més no parcialment, situacions que d'una altra manera serien massa complicades. Les teories gauge són les més boniques i simètriques lleis de la física que coneixem, i les nostres actuals teories de l'electromagnetisme, les forces fortes i febles, i la gravetat són totes teories gauge (Baez, Muniain 1994).

De forma resumida, les teories gauge són descripcions matemàtiques de la natura en què les equacions, i per tant les seves solucions, són *invariants* sota certes transformacions. Aquesta és precisament la definició de simetria, la invariància, i aquí novament el llenguatge és també revelador.

El conjunt de transformacions que deixen invariant un objecte formen una estructura matemàtica anomenada *grup*. De fet, a partir de l'obra de Felix Klein i del cèlebre Programa d'Erlangen (1872), es defineix la geometria com l'estudi de les propietats d'un conjunt que romanen invariants per grups de transformacions (Kline 1972). És a dir, *en el món contemporani la simetria és gairebé un sinònim de geometria*.

Els objectes que estudia la física són majoritàriament *camp*s. En essència els camps representen com es distribueix una certa propietat a l'espai. Aquests camps es poden representar mitjançant equacions diferencials. Les equacions que modelitzen les interaccions de les partícules en el model estàndard, però també les equacions clàssiques de l'electromagnetisme i de la relativitat especial i general són invariants per certs grups de transformacions.

En resum, es pot dir que avui en dia “descobrir les lleis de la física” vol dir descobrir quines són les equacions les solucions de les quals són invariants per grups de transformacions concrets, és a dir, que tenen certes simetries prescrites (per una definició més formal de simetria i un exemple senzill de camp simètric vegeu l'Apèndix 1).

Aquesta cerca de la simetria en la física matemàtica contemporània –insisteixo: també en la física matemàtica de la teoria de la complexitat– és significativa i posa de manifest un platonisme inconscient. A l'actualitat existeixen diverses formes de platonisme matemàtic

però tots comparteixen en diversos graus dos principis: (a) Que la natura està estructurada d'acord amb principis matemàtics que són relacions subjacents a les aparences que unifiquen i revelen la seva ordenació; (b) Que aquesta estructura és accessible a la nostra psique.

Són conegudes les posicions obertament platòniques d'alguns científics, com ara Werner Heisenberg. La forma més radical de platonisme matemàtic afirma que el món *és* una construcció matemàtica. Aquesta és la posició, per exemple, del cosmòleg Max Tegmark (Tegmark 2008), però el platonisme més interessant en el context del nostre estudi és aquell que no es declara, per ser revelador de les motivacions profundes del quefer matemàtic. Per aquest platonisme inconscient *la simetria és un símbol, el dipositari d'un contingut arquetípic*, i alhora la seva cerca reiterada evidència com per manifestar-se, aquest arquetip necessita d'un instrument per a la seva projecció¹². *La simetria, doncs, juga el paper del mandala en el pensament científic contemporani*. La seva cerca és l'expressió del romanent d'una espiritualitat inconscient.

En contra d'aquestes afirmacions i davant del fet que molts objectes matemàtics siguin bells i elegants fins i tot de forma “poc raonable”, hi ha una resposta en forma de principi antròpic que diria: «Si aquests objectes no fossin agradables i regulars no els entendríem i no els sabríem descriure» (Hazewinkel 2009). Proposo integrar aquest principi i anar més enllà afegint que *som capaços de desenvolupar matemàtiques i física en la mesura que el que descobrim participa d'un sentit d'harmonia i bellesa que és propi de nosaltres*. Una harmonia que la nostra psique malda per restablir, també, a través del contacte amb els objectes matemàtics i en l'expressió de la seva bellesa. Per això el gran arquetip còsmic de l'harmonia de l'univers fa servir el mateix element (la simetria) que l'arquetip de la totalitat de la psique, el Selbst. Proposo doncs que *la bellesa és el vincle –l'element de continuïtat– entre el Selbst i el Cosmos*.

6. Conclusió

La tesi que hem intentat exposar en aquest treball és que l'intent de descriure d'una forma ordenada l'univers, l'intent de descriure un Cosmos, està correlacionat amb l'intent de restablir una harmonia en la totalitat de la psique. Un procés que es pot vincular al procés d'individuació. Històricament aquest procediment ha estat explícit, i per tant conscient, a

¹² Recentment, i en el context d'un assaig crític amb el paper que la cerca de la bellesa té en la física teòrica, Sabine Hossenfelder presenta un seguit de testimonis que evidencien fins a quin punt la bellesa i la simetria són les dipositàries de la projecció dels anhels de la comunitat de la física teòrica. Els testimonis ofereixen molta informació psicològica i constitueixen un document revelador (Hossenfelder 2018).

través del vincle de l'activitat científica amb l'actitud religiosa. En la ciència del nostre temps, plenament secularitzada, aquesta relació roman a través de supòsits inconscients i es manifesta en la cerca de la bellesa en les teories físiques, que actuen com autèntics mandales. La relació etimològica entre teoria i contemplació segueix, doncs, vigent.

Adicionalment, la “poc raonable efectivitat de les matemàtiques” per a descriure el món (Wigner 1960) s'explica millor si som conscients que la imatge del món que la ciència ens retorna potser digui més dels pressupòsits i continguts inconscients de la nostra cultura que no pas d'una suposada descripció neutra dels fets. És més, la pròpia idea de la descripció neutra dels fets és en si mateixa una forma de mite. En altres paraules, tot és més clar si som capaços de veure l'argument circular: a causa dels romanents inconscients del pitagorisme i el platonisme, projectem sobre l'univers la seva qualitat de matematitzable (que ha de ser llegit com a sinònim d'ordenat i harmònic) i recollim, amb èxit i un punt de perplexitat, la imatge d'un univers matematitzable.

D'on surt aquest anhel per construir una imatge ordenada? Per suposat del nostre interior. La idea de Cosmos potser no sigui cap altra cosa que una projecció del Selbst que necessita ser reconegut i assimilat. En aquest sentit, i a un nivell estrictament personal, afegiré que crec que la matemàtica és bella també en la mesura que participa de l'ànima de l'univers, que no és ni fred, ni auster, ni sever com es dedueix del paradigma mecànic, sinó animat, divers i resplendent. Busquem la bellesa, la matemàtica entre d'altres, perquè és un mirall d'allò més íntim, sublim i finalment constitutiu de cadascú de nosaltres. I perquè és un vincle d'aquesta part amb l'univers. La bellesa és el batec invisible que ens mena a esdevenir el que realment som.

Agraïments

Aquestes notes contenen una versió resumida dels continguts de les conferències “El batec invisible. La bellesa i l'ànima de les matemàtiques” i “Les fronteres dels nostres prejudicis”, pronunciades a la Casa de Cultura de Girona l'octubre de 2015 i el setembre de 2018 respectivament, dins del cicle “Contemporàlia” organitzat per la Càtedra Lluís Santaló d'Aplicacions de la Matemàtica. Vull expressar la meua gratitud a la Càtedra i al seu director, el Dr. David Juher, per la seva confiança i el seu estímulo.

Apèndix 1. Simetria

Formalment, un objecte és simètric si algunes de les seves propietats romanen *invariants* sota certes transformacions. Per exemple, la posició d'un triangle equilàter és invariant per qualsevol reflexió respecte de les seves medians i també per rotacions de 0° , 120° i 240° .

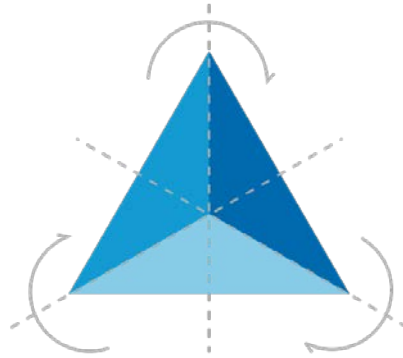


Figura 1. Simetries d'un triangle equilàter

Proposem ara un exemple senzill per il·lustrar el concepte de simetria en el context de la teoria de camps. Com hem esmentat, els objectes que estudia la física són majoritàriament camps. En essència els camps expliquen com es distribueix una certa propietat a l'espai. Considerem el camp vectorial al pla

$$\mathcal{X}(x, y) = (-x + y + x^3 + xy^2) \frac{\partial}{\partial x} + (-x - y + x^2y + y^3) \frac{\partial}{\partial y}.$$

De forma intuïtiva podem imaginar que en cada punt de coordenades (x, y) aquest camp és el vector velocitat que tindria un objecte que interactués amb ell. El moviment d'aquest objecte vindria donat per les solucions de l'equació diferencial associada a aquest camp:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + x^3 + xy^2 \\ \dot{y} = -x - y + y^3 + x^2y \end{cases}$$

Aquest camp és invariant per una rotació d'angle a qualsevol, és a dir per una transformació de la forma

$$\begin{aligned} u &= \cos(a)x - \sin(a)y, \\ v &= \sin(a)x + \cos(a)y. \end{aligned}$$

Això vol dir que les equacions que descriuen la dinàmica en unes i altres coordenades (x,y) i (u,v) són les mateixes, el que implica que qualsevol rotació del pla transforma solucions de l'equació diferencial en altres solucions. A la Figura 2 es representen algunes de les infinites solucions de l'equació diferencial. Es pot observar que la forma d'aquestes solucions és invariant per rotacions.

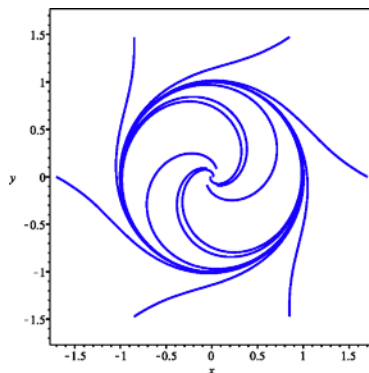


Figura 2.

El conjunt de transformacions que deixen invariant un objecte formen una estructura matemàtica anomenada *grup*. El conjunt de totes les rotacions del pla es coneix com el grup $SO(2)$, també representat per $U(1)$. Per aquesta raó diem que el camp de l'exemple és *invariant* per l'acció del grup $SO(2)$. Les equacions del model estàndard, per exemple, són invariants per un grup de transformacions molt més sofisticat que es denota per $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ (Baez, Muniain 1994).

Apèndix 2. Textos en anglès.

Text de N. Wolchover sobre l'estadístic Thomas Royen:

The “feeling of deep joy and gratitude” that comes from finding an important proof has been reward enough. “It is like a kind of grace,” he said. “We can work for a long time on a problem and suddenly an angel –[which] stands here poetically for the mysteries of our neurons- brings a good idea” (Wolchover 2017).

Text de J. Hadamard citant al poeta Paul Valéry:

It may be surprising to see emotional sensibility invoked apropos of mathematical demonstrations which, it would seem, can interest only the intellect. This would be to forget the feeling of mathematical beauty, of the harmony of numbers and forms, of geometric elegance. This is a true esthetic feeling that all real mathematicians know, and surely it belongs to emotional sensibility (Hadamard 1954, 31).

Versos inicials de l'Endymion de Keats:

A thing of beauty is a joy for ever:
Its loveliness increases; it will never
Pass into nothingness; but still will keep
A bower quiet for us (...)

Text de B. Russell sobre la bellesa matemàtica:

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty –a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as poetry (Russell 1919).

Textos de Newton:

To make this systeme therefore with all its motions, required a Cause which understood & compared together the quantities of matter in the several bodies of the Sun & Planets & the gravitating powers resulting from thence, the several distances of the primary

Planets from the Sun & secondary ones from Saturn Iupiter & the earth, & the velocities with which these Planets could revolve at those distances about those quantities of matter in the central bodies. And to compare & adjust all these things together in so great a variety of bodies argues that cause to be not blind & fortuitous, but very well skilled in Mechanicks & Geometry (Newton 1692).

This most beautiful System of the Sun, Planets, and Comets, could only proceed from the counsel and dominion of an intelligent and powerful being (...) This Being governs all things, not as the soul of the world, but as Lord over all (Newton 1729, 387-393).

Text d'Euler sobre el principi de mínima acció:

For since the fabric of the universe is most perfect, and is the work of a most wise Creator, nothing whatsoever takes place in the universe in which some relation of maximum and minimum does not appear (Euler 1744).

Pel que fa al text de Gorman (Gorman 1979) al voltant de la contemplació dels nombres com una forma d'oració, no he tingut accés a l'original en anglès i he fet servir la versió en Castellà de D. Álvarez.

Text de Koestler sobre l'herència del pitagorisme:

(...) (the Pythagoreans) transformed the Orphic mystery cult into a religion which considered mathematical and astronomical studies as the main forms of divine worship and prayer The physical intoxication which had accompanied the Bacchic rites was superseded by the mental intoxication derived from philo-sophia, the love of knowledge. It was one of the many key concepts they coined and which are still basic units in our verbal currency. The cliché about the 'mysteries of nature' originates in the revolutionary innovation of applying the word referring to the secret rites of the

worshippers of Orpheus, to the devotions of stargazing. (...) 'Pure science' is another of their coinages; it signified not merely a contrast to the 'applied' sciences, but also that the contemplation of the new mysteria was regarded as a means of purifying the soul by its immersion in the eternal. Contemplation of the 'divine dance of numbers' which held both the secrets of music and of the celestial motions became the link in the mystic union between human thought and the *anima mundi* (Koestler 1964, 259-260).

Text de Jung sobre el treball alquímic i el procés d'individuació:

But there were always a few for whom laboratory work was primarily a matter of symbols and their psychic effect. (...) Although their labours over the retort were a serious effort to elicit the secrets of chemical transformation, it was at the same time –and often in overwhelming degree– the reflection of a parallel psychic process which could be projected all the more easily into the unknown chemistry of matter since that process is an unconscious phenomenon of nature, just like the mysterious alteration of substances. What the symbolism of alchemy expresses is the whole problem of the evolution of personality described above, the so-called individuation process (Jung 1968, par. 40).

Text de Jeans sobre el paradigma mecanicista:

To-day there is a wide measure of agreement which on the physical side of science approaches almost to unanimity that the stream of knowledge is heading towards a non-mechanical reality; the Universe begins to look more like a great thought than like a great machine. Mind no longer appears to be an accidental intruder into the realm of matter... we ought rather to hail it as the creator and governor of the realm of matter (Jeans 1931).

Text de Jung sobre el mandala:

I sketched every morning in a notebook a small circular drawing, (...) which seemed to correspond to my inner situation at the time.... Only gradually did I discover what the mandala really is: (...) the Self, the wholeness of the personality, which if all goes well is harmonious (Jung 1965).

Text de Baez i Muniain sobre les teories gauge:

For mathematicians, symmetry is worth studying simply for the sake of its beauty, but symmetry is also very important in physics, because it allows us to at least partially understand situations that would be otherwise be too complicated. Gauge theories are among the most beautiful, symmetrical laws of physics we know, and our current theories of electromagnetism, the strong and weak forces, and gravity are all gauge theories (Baez, Muniain 1994).

Referències

Barfield, O. (1957). *Saving the Appearances: a Study in Idolatry*. London: Faber & Faber. [Trad. Cast. de J. Chamorro Mielke: *Salvar las apariencias*. Vilaür: Atalanta, 2015.]

Baez, J., Muniain, J.P. (1994). *Gauge Fields, Knots and Gravity*. Singapore: World Scientific.

Burkert, W. (1972). *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism* (Trad. Angl. d'E.L. Minar Jr). Boston: Harvard University Press.

Colinas, A. (2019). *Sobre María Zambrano. Misterios encendidos*. Madrid: Siruela.

Dodds, E.R. (1973). *The Greeks and the Irrational*. Berkeley: University of California Press. [Trad. Cast. de M. Araujo: *Los griegos y lo irracional*. Madrid: Alianza Editorial, 1999.]

Du Sautoy, M. (2008). *Symmetry: A Journey into the Patterns of Nature*. New York: HarperCollins. [Trad. Cast. d'E.J. Gómez de Ayala: *Simetría*. Barcelona: Acantilado, 2009.]

Euler, L. (1744). *De Curvis Elasticis, Additamentum I to his Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes*. A: W. A. Oldfather, C. A. Ellis & D. M. Brown (1933) Leonhard Euler's Elastic Curves. *Isis* 20 (1), 72-160. [Consulta: 27 de juliol de 2019] <http://www.jstor.org/stable/224885>

Ewald, W.B. (1996). *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. II*. Oxford: Oxford University Press.

Feyerabend, P. (1975). *Against Method: Outline of an Anarchistic Theory of Knowledge*. New Jersey: Atlantic Highlands, and London: Humanities Press. [Trad. Cast. de D. Ribes: *Tratado contra el método*. Madrid: Tecnos, 1997].

Fitzpatrick, R. (2012). *An Introduction to Celestial Mechanics*, Cambridge: Cambridge University Press.

Gorman, P. (1979). *Pythagoras: A Life*. London: Routledge 1979. [Trad. Cast. de D. Álvarez: *Pitágoras*. Barcelona, Crítica, 1988].

Hadamard, J. (1954). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover Publications. Unaltered reprint of the 1945 first edition by Princeton University Press. [Trad. Cast. de L. Santaló: *Psicología de la invención en el campo matemático*. Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1947. Re-editat en edició facsímil per la Real Sociedad Matemática Española.]

Hardy, G.H. (1992). *A Mathematician's Apology*, Cambridge: Cambridge University Press. Reprinted from the 1940 first edition. [Trad. Cat. de M. Merín i Sales: *Apologia d'un matemàtic*. Santa Coloma de Queralt: Obrador Edèndum, 2008.]

Hazewinkel, M. (2009). Niceness Theorems. A: B. Kruglikov, V. Lychagin & E. Straume (Eds.) *Differential Equations: Geometry, Symmetries and Integrability: the Abel symposium 2008*. New York: Springer.

Hernández de la Fuente, D. (2014). *Vidas de Pitágoras*. Vilaür: Atalanta.

Hossenfelder, S. (2018). *Lost in Math: How Beauty Leads Physics Astray*. New York: Basic Books. [Trad. Cast. de Jorge Paredes: *Perdidos en las matemáticas. Como la belleza confunde a los físicos*. Barcelona. Ariel, 2019.]

Jeans, J.H. (1931) *The Mysterious Universe*. Cambridge: Cambridge University Press. [Consulta: 5 de maig de 2019]
<https://archive.org/details/TheMysteriousUniverseSirJamesJeans>

Johnson, S.G.B., Steinerberger S. (2019) The Universal Aesthetics of Mathematics. *The Mathematical Intelligencer* 41 (1), 67-70. DOI 10.1007/s00283-018-09857-5

Jung, C.G. (1967). *Commentary on the Secret of the Golden Flower (1929)*. A: *Collected Works of C.G. Jung, Vol. 13*. Princeton NJ: Princeton University Press. [Trad. Cast. de L.S. Carugati: *Estudios sobre representacions alquímicas*. Madrid, Trotta, 1995.]

Jung, C.G. (1968). *Psychology and Alchemy (1944)*. A: *Collected Works of C.G. Jung, Vol. 12*. Princeton NJ: Princeton University Press. [Trad. Cast. d'A.L. Bixio: *Psicología y alquimia*. Madrid, Trotta, 2005.]

Jung, C.G. (1968b). *Individual dream symbolism in relation to the alchemy: a study of the unconscious processes at work in dreams. 3. The symbolism of the mandala. III. The vision of the world clock*. A: *Collected Works of C.G. Jung, Vol. 12*. Princeton NJ: Princeton University Press. [Trad. Cast. d'A.L. Bixio: *Psicología y alquimia*. Madrid, Trotta, 2005.]

Jung, C.G. (1969). *Psychology and religion. 3. The history and psychology of a natural symbol*. A: *Collected Works of C.G. Jung, Vol. 11*. Princeton NJ: Princeton University Press. [Trad. Cast. de R. Fernández de Maruri: *Acercas de la psicología de la religión occidental y de la religión oriental*. Madrid, Trotta, 2008.]

Jung, C.G., Jaffé, A. (1965). *Memories, Dreams, Reflections*. New York: Random House. [Trad. Cast. de M.R. Borrás. *Recuerdos, sueños, pensamientos*, Barcelona: Seix Barral, 2014.]

Kline, M. (1972). *Mathematics through from ancient to modern times*. Oxford: Oxford University Press, 1972. [Trad. Cast. d'A. Garciadiego i M. Martínez. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, Vol. III*. Madrid: Alianza Editorial, 1992.] [Consulta: 27 de juliol de 2019] <https://archive.org/details/MathematicalThoughtFromAncientToModernTimes>

Kline, M. (1980). *Mathematics: The Loss of Certainty*. Oxford: Oxford University Press. [Trad. Cast. d'A. Ruiz Merino: *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI editores, 1998.]

Koestler, A. (1964). *The Act of Creation*. New York: The Macmillan Company.

Kuhn, T.S. (1957). *The Copernican Revolution*. Boston: Harvard University Press. [Trad. Cast. de D. Bergadá: *La revolución copernicana*. Barcelona: Ariel, 1996.]

Kuhn, T. S (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press. [Trad. Cast. d'A. Contín: *La estructura de las revoluciones científicas*. Madrid: Fondo de cultura econòmica, 1997.]

Mandelbrot, B. (1982). Des monstres de Cantor et de Peano à la géométrie fractale de la nature. A: F. Guénard & G. Lelièvre (Eds.), *Penser les mathématiques*. Paris: Éditions du Seuil. [Trad. Cast. de C. Bidón-Chanal. *Pensar la matemàtica*. Barcelona: Tusquets, 1999.]

McAllister, J.W. (1996). *Beauty and Revolution in Science*. Ithaca NY: Cornell University Press. [Consulta: 10 de september de 2019] <https://openaccess.leidenuniv.nl/handle/1887/10158>

Newton, I. (1729). *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. (Trad. Angl. d'A. Motte). London. [Consulta: 3 de març de 2019] <http://inters.org/Newton-Scholium-Principia-Mathematica>

Newton, I. (1692). Original letter from Isaac Newton to Richard Bentley, dated 10 December 1692 Source: 189.R.4.47, ff. 4A-5, Trinity College Library, Cambridge, UK. [Consulta: 3 de març de 2019] <http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/THEM00254>

Otto, R. (1970). *The Idea of the Holy*. (Trad. Angl. de J.W. Harvey). New York: OUP. Reprint of the 1923 edition. Publicada originalment el 1917. [Trad. Cast. de F. García Vela: *Lo santo. Lo racional y lo irracional en la idea de Dios*. Madrid: Alianza Editorial, Madrid, 2016.] [Consulta: 23 de maig de 2019] <https://archive.org/details/theideaoftheholy00ottouoft>

Riskins, J. (2016). *The Restless Clock: A History of the Centuries-Long Argument over What Makes Living Things Tick*. Chicago: University of Chicago Press.

Rota, G.-C. (1997). The Phenomenology of Mathematical Beauty. *Synthese* 111 (2), 171-182. DOI 10.1023/A:1004930722234

Russell, B. (1919). *The Study of Mathematics. Mysticism and Logic: And Other Essays*. London: Longman. [Consulta: 27 de juliol de 2019] https://archive.org/stream/mysticism00russuoft/mysticism00russuoft_djvu.txt

Schmidt, M. (2019). Beauty, ugliness and the sublime. *Journal of Analytical Psychology*, 64, I, 73-93.

Shamdasani, S. (2003). *Jung and the Making of Modern Psychology: The Dream of a Science*. Cambridge: Cambridge University Press. [Trad. Cast. de F. Borrajo: *Jung y la creación de la psicología moderna occidental*. Vilaur: Atalanta, 2018.]

Sheldrake, R. (2012). *The Science Delusion: Freeing the spirit of enquiry*. London: Coronet. [Trad. Cast. d'A.F. Rodríguez: *El espejismo de la ciencia*. Barcelona: Kairós, 2013.]

Tarnas, R. (1991). *The Passion of the Western Mind*. New York: Ballantine books. [Trad. Cast. de M.A. Galmarini: *La pasión de la mente occidental*. Vilaur: Atalanta, 2012.]

Tegmark, M. (2008). The Mathematical Universe. *Foundations of Physics* 38 (2), 101-150. arXiv:0704.0646v2 [gr-qc]

Pont, J.-C. (1982). Peinture et géométrie au XXe siècle. A: F. Guénard & G. Lelièvre (Eds.), *Penser les mathématiques*. Paris: Éditions du Seuil. [Trad. Cast. de C. Bidón-Chanal. *Pensar la matemàtica*. Barcelona: Tusquets, 1999.]

Wigner, E. (1960). The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13 (I), 1-14.
DOI 10.1002/cpa.3160130102

Wilczek, F. (2015). *A Beautiful Question: Finding Nature's Deep Design*. London: Allen Lane.
[Trad. Cast. de J. Sampedro: *El mundo como obra de arte*. Barcelona: Crítica, 2016.]

Wolchover, N. (2017). A Long-Sought Proof, Found and Almost Lost. *Quanta Magazine* March 28, 2017. [Consulta: 21 d'abril de 2019]
<https://www.quantamagazine.org/statistician-proves-gaussian-correlation-inequality-20170328/>

Crèdit de la Figura 1:

Bea.miau [CC0], Simetria-rotacion.svg

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simetria-rotacion.svg>

[Consulta: 20 de juliol de 2019]

Víctor Mañosa
Departament de Matemàtiques,
Universitat Politècnica de Catalunya.
Colom 11, 08222 Terrassa.

e-mail: victor.manosa@upc.edu