

**uc3m** | Universidad **Carlos III** de Madrid

Grado en Ingeniería en Tecnologías de  
Telecomunicación

Curso 2017/2018

Trabajo de Fin de Grado

# **Evaluación de Métodos de Igualación Ciega de Canal**

---

Miguel Fernández Díaz

Tutor

Marcelino Lázaro Teja

Leganés, 3 de julio de 2018



Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative Commons **Reconocimiento - No Comercial - Sin Obra Derivada**



# Abstract

Equalization is one of the most popular methods that have been used to reduce the presence of intersymbol interference at the receivers of digital communication systems. One type of equalization known as blind equalization is based on the statistic information obtained from the received symbols, since the channel used during the transmission and the transmitted information are completely unknown.

A series of experiments done on several blind equalization batch SISO (which stands for *Single Input Single Output*) algorithms will be shown and discussed throughout this document.

The experiments that will be discussed consist of the analysis of the effect of scaling the equalizer coefficients for some of the most common algorithms; the development of a new blind equalization algorithm, including an evaluation of its performance by comparing to one of the most used algorithms; and the analysis of the cost function at the equalizer output.

# Resumen

La igualación es uno de los métodos más populares utilizados para combatir el efecto de la interferencia intersimbólica en los receptores de sistemas digitales de comunicaciones. Dentro de la igualación, la igualación ciega basa su metodología en la información estadística de los símbolos obtenidos, ya que se desconoce tanto el canal como la información transmitida.

A lo largo de este documento se expondrán y argumentarán una serie de pruebas realizadas a varios algoritmos de igualación ciega en bloque para sistemas de entrada y salida únicas o SISO (del inglés *Single Input Single Output*).

Entre las pruebas a efectuar se analizará el efecto de escalar los coeficientes del igualador para varios de los algoritmos más comunes en el campo, el desarrollo de un algoritmo nuevo de igualación ciega y la evaluación de su rendimiento frente a uno de los algoritmos más empleados, y el estudio de la función de coste a la salida del igualador del algoritmo desarrollado.

# Índice general

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Introducción</b>                                     | <b>1</b> |
| 1.1. Motivación del trabajo . . . . .                      | 1        |
| 1.2. Objetivos del trabajo . . . . .                       | 2        |
| 1.3. Entorno socio-económico . . . . .                     | 3        |
| 1.4. Marco legal . . . . .                                 | 5        |
| 1.4.1. Patentes de algoritmos . . . . .                    | 5        |
| 1.4.2. Software y licencias . . . . .                      | 5        |
| 1.4.3. Relación con la situación legal en España . . . . . | 6        |
| 1.5. Organización y contenidos . . . . .                   | 6        |
| <b>2. Estado del arte</b>                                  | <b>8</b> |
| 2.1. Igualación de canal . . . . .                         | 9        |
| 2.1.1. Planteamiento del problema . . . . .                | 9        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 2.1.2.    | Tipos de igualadores de canal . . . . .                          | 12        |
| 2.2.      | Algoritmos de igualación lineal ciega . . . . .                  | 15        |
| 2.2.1.    | Algoritmo CMA . . . . .  | 18        |
| 2.2.2.    | Algoritmo MCMA . . . . .   | 19        |
| 2.2.3.    | Algoritmo MRC . . . . .  | 20        |
| <b>3.</b> | <b>Soluciones propuestas</b>                                     | <b>22</b> |
| 3.1.      | Alternativas de diseño . . . . .                                 | 22        |
| 3.1.1.    | Modificación del factor de escala . . . . .                      | 23        |
| 3.1.2.    | Algoritmo MRC . . . . .  | 24        |
| 3.1.3.    | Análisis de las funciones de coste a la salida del igualador . . | 28        |
| 3.2.      | Metodología . . . . .  | 29        |
| 3.2.1.    | Modificación del factor de escala . . . . .                      | 30        |
| 3.2.2.    | Desempeño del algoritmo MRC . . . . .                            | 30        |
| 3.2.3.    | Análisis de las funciones de coste a la salida del igualador . . | 30        |
| <b>4.</b> | <b>Resultados</b>  | <b>31</b> |
| 4.1.      | Modificación del factor de escala . . . . .                      | 31        |
| 4.1.1.    | Algoritmo CMA mediante descenso por gradiente . . . . .          | 37        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 4.1.2.    | Algoritmo MCMA mediante descenso por gradiente . . . . .               | 39        |
| 4.1.3.    | Algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM . . .                | 41        |
| 4.1.4.    | Algoritmo MRC mediante descenso por gradiente . . . . .                | 42        |
| 4.1.5.    | Algoritmo MRC mediante método matricial iterativo . . . . .            | 44        |
| 4.2.      | Desempeño del algoritmo MRC . . . . .                                  | 45        |
| 4.3.      | Análisis de las funciones de coste a la salida del igualador . . . . . | 47        |
| <b>5.</b> | <b>Conclusiones y líneas futuras</b>                                   | <b>51</b> |
| 5.1.      | Modificación del factor de escala . . . . .                            | 51        |
| 5.2.      | Desempeño del algoritmo MRC . . . . .                                  | 52        |
| 5.3.      | Análisis de las funciones de coste a la salida del igualador . . . . . | 53        |
| 5.4.      | Líneas futuras . . . . .   | 53        |
| <b>6.</b> | <b>Planificación y presupuesto</b>                                     | <b>54</b> |
| 6.1.      | Planificación y lista de tareas . . . . .                              | 54        |
| 6.2.      | Presupuesto . . . . .  | 55        |
| 6.2.1.    | Costes de personal . . . . .   | 55        |
| 6.2.2.    | Costes de equipamiento . . . . .                                       | 55        |
| 6.2.3.    | Costes indirectos de la universidad . . . . .                          | 56        |

|   |           |
|---|-----------|
| 6.2.4. Coste total . . . . .  | 56        |
| <b>Anexos</b>   | <b>57</b> |
| <b>A. Canales empleados</b>   | <b>58</b> |
| <b>B. Tablas de resultados de la modificación del factor de escala</b>                            | <b>64</b> |
| B.1. Tablas de resultados del algoritmo CMA mediante descenso por<br>gradiente . . . . .          | 64        |
| B.2. Tablas de resultados del algoritmo MCMA mediante descenso por<br>gradiente . . . . .         | 67        |
| B.3. Tablas de resultados del algoritmo CMA mediante la formulación<br>de una SVM . . . . .       | 70        |
| B.4. Tablas de resultados del algoritmo MRC mediante descenso por gra-<br>diente . . . . .        | 71        |
| B.5. Tablas de resultados del algoritmo MRC mediante el método ma-<br>tricial iterativo . . . . . | 74        |
| <b>C. Tablas de resultados del algoritmo MRC</b>  | <b>75</b> |
| <b>D. Figuras de las funciones de coste a la salida del igualador</b>                             | <b>79</b> |
| D.1. Constelación 4-PAM . . . . .   | 79        |
| D.2. Constelación 8-PAM . . . . .   | 82        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>E. Summary</b>                                     | <b>86</b> |
| E.1. Introduction . . . . .                           | 86        |
| E.1.1. Motivation . . . . .                           | 86        |
| E.1.2. Objectives . . . . .                           | 87        |
| E.2. State of the art . . . . .                       | 87        |
| E.2.1. Problem statement . . . . .                    | 87        |
| E.2.2. Blind linear equalization algorithms . . . . . | 89        |
| E.3. Proposed solutions . . . . .                     | 90        |
| E.3.1. Scaling factor . . . . .                       | 90        |
| E.3.2. MRC algorithm . . . . .                        | 91        |
| E.3.3. Cost function analysis . . . . .               | 92        |
| E.4. Results and conclusions . . . . .                | 92        |
| E.4.1. Scaling factor . . . . .                       | 92        |
| E.4.2. MRC Algorithm . . . . .                        | 94        |
| E.4.3. Cost function analysis . . . . .               | 94        |

# Índice de tablas

|  |    |
|--|----|
| 4.1. Valores de los símbolos, de la constante $R$ de CMA y de la condición para distintos tamaños de constelación . . . . .  | 34 |
| 4.2. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 5, bloque de 750 muestras . . . . .                                 | 37 |
| 4.3. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 256-QAM, canal 7, bloque de 750 muestras . . . . .                                | 38 |
| 4.4. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 64-QAM, canal 1, bloque de 500 muestras . . . . .                                | 39 |
| 4.5. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 350 muestras . . . . .                               | 40 |
| 4.6. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 5, bloque de 750 muestras . . . . .                              | 41 |
| 4.7. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 8, bloque de 500 muestras, $l = 1$ , $p = 4$ . . . . . | 42 |

|   |    |
|---|----|
| 4.8. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 7, bloque de 750 muestras, $l = 4$ , $p = 5$ . . . . .                                  | 43 |
| 4.9. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 8, bloque de 500 muestras, $l = 1$ , $p = 4$ . . . . .  | 44 |
| 4.10. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM y del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 250 muestras . . . . . | 45 |
| 4.11. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM y del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 350 muestras . . . . .  | 45 |
| 4.12. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM y del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 9, bloque de 750 muestras . . . . .  | 46 |
| 4.13. Valores que minimizan la función de coste de CMA a la salida del igualador . . . . .  | 48 |
| 4.14. Valores que minimizan la función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador . . . . .   | 48 |
| 6.1. Costes de personal . . . . .   | 55 |
| 6.2. Costes de equipamiento . . . . .   | 55 |
| 6.3. Costes indirectos de la universidad . . . . .  | 56 |
| 6.4. Coste total del trabajo de fin de grado . . . . .  | 56 |

|   |    |
|---|----|
| B.1. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 1, bloque de 350 muestras . . . . .  | 64 |
| B.2. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 2, bloque de 250 muestras . . . . .  | 65 |
| B.3. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 5, bloque de 750 muestras . . . . .  | 65 |
| B.4. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 256-QAM, canal 7, bloque de 750 muestras . . . . . | 66 |
| B.5. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 256-QAM, canal 8, bloque de 500 muestras . . . . . | 66 |
| B.6. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 4-QAM, canal 10, bloque de 150 muestras . . . . .  | 67 |
| B.7. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 64-QAM, canal 1, bloque de 500 muestras . . . . . | 67 |
| B.8. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 64-QAM, canal 2, bloque de 250 muestras . . . . . | 68 |
| B.9. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 4-QAM, canal 6, bloque de 150 muestras . . . . .  | 68 |

|  |    |
|--|----|
| B.10. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 64-QAM, canal 7, bloque de 500 muestras . . . . .                           | 69 |
| B.11. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 256-QAM, canal 9, bloque de 500 muestras . . . . .                          | 69 |
| B.12. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 350 muestras . . . . .                          | 70 |
| B.13. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 3, bloque de 750 muestras . . . . .                         | 70 |
| B.14. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 5, bloque de 750 muestras . . . . .                         | 71 |
| B.15. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 3, bloque de 350 muestras, $l = 1, p = 2$ . . . . | 71 |
| B.16. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 750 muestras, $l = 2, p = 3$ . . . . | 72 |
| B.17. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 5, bloque de 350 muestras, $l = 1, p = 5$ . . . . | 72 |
| B.18. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 7, bloque de 750 muestras, $l = 4, p = 5$ . . . . | 73 |

|  |    |
|--|----|
| B.19. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 8, bloque de 500 muestras, $l = 1, p = 4$ . . . . . | 73 |
| B.20. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 350 muestras, $l = 1, p = 5$ . . . . .      | 74 |
| B.21. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 500 muestras, $l = 1, p = 2$ . . . . .       | 74 |
| C.1. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 350 muestras . . . . .                            | 75 |
| C.2. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 350 muestras, $l = 1, p = 2$ . . . . .        | 75 |
| C.3. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 350 muestras, $l = 1, p = 3$ . . . . .        | 75 |
| C.4. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 350 muestras, $l = 2, p = 3$ . . . . .        | 76 |
| C.5. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 6, bloque de 500 muestras . . . . .                            | 76 |
| C.6. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 6, bloque de 500 muestras, $l = 1, p = 2$ . . . . .        | 76 |

|   |    |
|---|----|
| C.7. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 6, bloque de 500 muestras, $l = 1, p = 3$ . . . . .   | 76 |
| C.8. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 6, bloque de 500 muestras, $l = 2, p = 3$ . . . . .   | 76 |
| C.9. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 9, bloque de 750 muestras . . . . .                       | 77 |
| C.10. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 9, bloque de 750 muestras, $l = 1, p = 2$ . . . . .  | 77 |
| C.11. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 9, bloque de 750 muestras, $l = 1, p = 3$ . . . . .  | 77 |
| C.12. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 9, bloque de 750 muestras, $l = 2, p = 3$ . . . . .  | 77 |
| C.13. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 250 muestras . . . . .                     | 77 |
| C.14. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 250 muestras, $l = 1, p = 2$ . . . . . | 78 |
| C.15. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 250 muestras, $l = 1, p = 3$ . . . . . | 78 |

|   |    |
|---|----|
| C.16. Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 250 muestras, $l = 2$ , $p = 3$ . . . . .  | 78 |
| E.1. Convergence probability and ISI level of the CMA algorithm using stochastic gradient descent, 16-QAM modulation, channel 5, blocks of 750 samples . . . . .  | 93 |
| E.2. Convergence probability and ISI level of the MCMA algorithm using stochastic gradient descent, 16-QAM modulation, channel 10, blocks of 350 samples . . . . .  | 93 |
| E.3. Convergence probability and ISI level of the CMA algorithm using the SVM formulation and convergence probability and ISI level of the MRC algorithm using the iterative approach, 16-QAM modulation, channel 10, blocks of 250 samples . . . . . | 94 |

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Porcentaje de hogares de la Unión Europea con acceso a internet entre 2007 y 2016. Tomada de Eurostat [3] . . . . . | 3  |
| 1.2. Ranking mundial de empresas por capitalización bursátil. Tomada de [5] . . . . .                                    | 4  |
| 2.1. Modelo de un sistema digital de comunicaciones . . . . .  | 9  |
| 2.2. Canal discreto equivalente . . . . .  | 10 |
| 2.3. Modelo ilustrativo de un sistema de comunicaciones con un igualador   | 11 |
| 3.1. Modelo de sistema de comunicaciones SISO con un igualador . . . .   | 23 |
| 4.1. Derivada de la función de coste con respecto a $b[j]$ para $a[k] = 1$ y $a[k] = -1$ . . . . .                       | 35 |
| 4.2. Derivada de la función de coste con respecto a $b[j]$ para $a[k] = 3$ y $a[k] = -3$ . . . . .                       | 35 |
| 4.3. Contribución de los parámetros $l$ y $p$ en la función de coste a la salida del igualador para una 4-PAM . . . . .  | 49 |

|   |    |
|---|----|
| 4.4. Contribución de los parámetros $l$ y $p$ en la función de coste a la salida del igualador para una 8-PAM . . . . . | 50 |
| 6.1. Diagrama de Gantt de las tareas del trabajo de fin de grado . . . . .  | 54 |
| A.1. Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 1 y del Canal 2  | 59 |
| A.2. Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 3 . . . . .  | 59 |
| A.3. Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 4 . . . . .  | 60 |
| A.4. Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 5 . . . . .  | 60 |
| A.5. Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 6 (los dos ceros coinciden) . . . . .                        | 61 |
| A.6. Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros (azul) y polos (amarillo) del Canal 7 . . . . .                        | 61 |
| A.7. Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 8 . . . . .  | 62 |
| A.8. Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 9 . . . . .  | 62 |
| A.9. Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 10 . . . . .   | 63 |
| D.1. Función de coste del algoritmo CMA a la salida del igualador para una 4-PAM . . . . .                              | 79 |
| D.2. Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 4-PAM, con $l = 1$ y $p = 2$ . . . . .       | 80 |
| D.3. Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 4-PAM, con $l = 1$ y $p = 3$ . . . . .       | 80 |

|  |    |
|--|----|
| D.4. Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 4-PAM, con $l = 1$ y $p = 5$ . . . . .  | 81 |
| D.5. Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 4-PAM, con $l = 2$ y $p = 3$ . . . . .  | 81 |
| D.6. Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 4-PAM, con $l = 4$ y $p = 5$ . . . . .  | 82 |
| D.7. Función de coste del algoritmo CMA a la salida del igualador para una 8-PAM . . . . .                         | 82 |
| D.8. Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 8-PAM, con $l = 1$ y $p = 2$ . . . . .  | 83 |
| D.9. Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 8-PAM, con $l = 1$ y $p = 3$ . . . . .  | 83 |
| D.10. Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 8-PAM, con $l = 1$ y $p = 5$ . . . . . | 84 |
| D.11. Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 8-PAM, con $l = 2$ y $p = 3$ . . . . . | 84 |
| D.12. Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 8-PAM, con $l = 4$ y $p = 5$ . . . . . | 85 |
| E.1. Block diagram of a digital communication system . . . . .   | 88 |
| E.2. Equivalent discrete channel . . . . .   | 88 |
| E.3. Block diagram of a communication system with an equalizer . . . . .   | 88 |
| E.4. Block diagram of a SISO digital communication system with an equalizer . . . . .                              | 90 |

|   |    |
|---|----|
| E.5. Effect of parameters $l$ and $p$ on cost functions at the equalizer output<br>for a 4-PAM constellation . . . . .  | 95 |
| E.6. Effect of parameters $l$ and $p$ on cost functions at the equalizer output<br>for an 8-PAM constellation . . . . . | 95 |

# Capítulo 1

## Introducción

En este primer capítulo de la memoria se discuten la motivación y objetivos del trabajo, su importancia y relación con el modelo de sociedad actual y el conjunto de regulaciones aplicables al problema.

### 1.1. Motivación del trabajo

Los sistemas digitales de comunicaciones se han ido popularizando desde el último tercio del siglo XX, comprendiendo casi la totalidad de los sistemas de comunicaciones actuales y desbancando a los sistemas analógicos debido a una serie de ventajas como la detección y corrección de errores, la precisión o el menor coste de implementación.

Ejemplos como la televisión o la telefonía hace años que confiaron en tecnología digital para seguir presentes en nuestra sociedad. Además, los sistemas digitales no solo han adquirido importancia relacionada con las prestaciones, sino que gozan de gran relevancia en cuanto a volumen de los mismos e integración en cada vez más ámbitos de la vida cotidiana. Esto se debe a que nuestra sociedad está continuamente evolucionando hacia lo que se definió en [1] como una *sociedad de la información*, en la que todo el mundo tiene en propiedad o tiene acceso a un dispositivo (ya sea ordenador, teléfono, etc.) que hace uso de este tipo de sistemas y que permiten comunicarse con otra persona en cualquier parte del mundo, buscar información acerca de un libro o película de la que poco más que el título se sabe

o incluso pedir al fabricante de tu coche que abra el vehículo telemáticamente si se quedan las llaves dentro.

Al haberse popularizado de tal manera estos dispositivos que nos conectan, es esencial que funcionen cada vez mejor, que sean más rápidos y efectivos. Para aumentar esta efectividad en los sistemas de comunicaciones se han desarrollado a lo largo de los años diversas técnicas. Una de ellas es la igualación de canal, la cual intenta revertir en los receptores de los sistemas de comunicaciones el efecto de la distorsión aparecida en la transmisión para que se pueda recibir fielmente la información transmitida. Dentro de la igualación de canal se encuentra la igualación ciega, la cual es un tipo peculiar de igualación en la que el receptor desconoce tanto el canal de transmisión como la información transmitida y hace uso de la información estadística de los datos recibidos para reducir el efecto de la distorsión previamente mencionada.

La principal motivación de este documento es, por una parte, la de contribuir personalmente en el campo de la igualación ciega, que ayuda a los receptores de los sistemas digitales de comunicaciones a incrementar su efectividad; y por otra, despertar el interés de cualquier posible lector sobre dicha disciplina.

## 1.2. Objetivos del trabajo

El principal objetivo de este trabajo es evaluar de una manera clara y concisa distintos métodos de igualación ciega desde el punto de vista del rendimiento en términos de interferencia intersimbólica o ISI <sup>1</sup>. Asimismo, se propondrán diversas soluciones para mejorar dicho rendimiento y se estudiará el impacto en los métodos a analizar.

La primera de las soluciones propuestas pasa por reescalar los coeficientes del igualador para diversos algoritmos para ver si se produce alguna mejora en el rendimiento; la segunda de las soluciones es un algoritmo nuevo, desarrollado por el tutor de este trabajo de fin de grado; y además, se estudiará el comportamiento de la función de coste para algunos algoritmos a la salida del igualador, haciendo hincapié en el algoritmo nuevo propuesto.

---

<sup>1</sup>Este tipo de interferencia, la cual es una de las más relevantes para un sistema digital de comunicaciones, se definirá formalmente en el capítulo 2.

### 1.3. Entorno socio-económico

Es innegable la importancia de la tecnología en nuestro modelo de sociedad hoy por hoy. Estos últimos años se ha disparado el número de dispositivos que se emplean tanto en la vida cotidiana como en el entorno laboral. Aspiradoras inteligentes, videoconsolas, ordenadores, impresoras 3D. Esta popularización entre los hogares se debe, en gran parte, al auge de internet, y junto con él estos últimos años ha surgido una tendencia a interconectar los dispositivos llamada *internet de las cosas* o IoT (del inglés, *Internet of Things*) [2] que pretende ofrecernos una serie de facilidades en nuestro día a día. Además de la televisión, la radio, las típicas comunicaciones entre teléfonos y ordenadores (que también cuentan cada vez con mayor presencia en los hogares), gracias al IoT existe un nuevo mercado de comunicaciones entre máquinas: relojes, frigoríficos, termostatos, etc.

El saber desenvolverse con la tecnología es una cualidad trascendental que todo ser humano debe tener, tan importante es adaptarse a los nuevos tiempos que muy probablemente en un futuro exista una brecha tecnológica que suponga una frontera tan fuerte como lo fue en su día el saber leer y escribir.

En la Figura 1.1 se puede ver cómo se ha popularizado el uso de internet, mostrando el porcentaje de hogares de la Unión Europea con acceso al mismo.

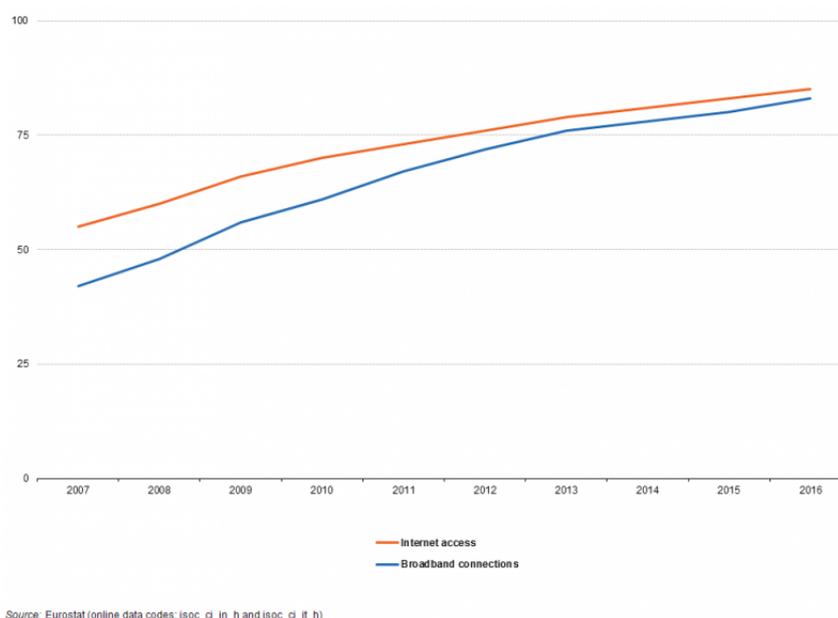


Figura 1.1: Porcentaje de hogares de la Unión Europea con acceso a internet entre 2007 y 2016. Tomada de Eurostat [3]

Por ello, para ser conscientes del impacto económico de los sistemas de comunicaciones se debe mirar el impacto que tiene la tecnología en la economía mundial al ser una pieza fundamental de ella.

Se puede tomar como ejemplo la iniciativa Horizonte 2020 [4], que es el mayor programa de investigación en innovación de la Unión Europea para el periodo que comprende entre 2014 y 2020 con un presupuesto de unos 80.000 millones de euros y donde se abordan temas como tecnologías futuras, nano y biotecnología, tecnologías de información y comunicación, o la formación del Instituto Europeo de Innovación y Tecnología.

Otro ejemplo interesante para ilustrar la importancia y el impacto de la tecnología en nuestra sociedad puede ser el ranking mundial de empresas con mayor capitalización bursátil (en millones de dólares estadounidenses) del último año incluido en la Figura 1.2. En las 20 primeras se encuentran 10 relacionadas con la tecnología, ocupando 3 de ellas las 3 primeras posiciones. Entre ellas se pueden ver operadoras de telecomunicaciones (AT&T, Tencent y China Mobile), fabricantes de equipos electrónicos (Apple o Samsung) y servicios de comercio electrónico (Amazon y Alibaba).

|    |                    |               |         |
|----|--------------------|---------------|---------|
| 1  | Apple              | EEUU          | 693.220 |
| 2  | Alphabet           | EEUU          | 551.945 |
| 3  | Microsoft          | EEUU          | 470.323 |
| 4  | Berkshire Hathaway | EEUU          | 412.352 |
| 5  | Amazon             | EEUU          | 385.162 |
| 6  | Facebook           | EEUU          | 375.805 |
| 7  | Exxon Mobil        | EEUU          | 328.425 |
| 8  | Johnson&Johnson    | EEUU          | 318.961 |
| 9  | JPMorgan           | EEUU          | 312.942 |
| 10 | Wells Fargo        | EEUU          | 280.365 |
| 11 | General Electric   | EEUU          | 250.453 |
| 12 | AT&T               | EEUU          | 245.674 |
| 13 | Alibaba            | China         | 244.830 |
| 14 | Bank of America    | EEUU          | 240.500 |
| 15 | Tencent            | China         | 240.058 |
| 16 | Ind&Comm BK-A      | China         | 227.304 |
| 17 | Samsung            | Corea del Sur | 222.448 |
| 18 | Procter&Gamble     | EEUU          | 220.984 |
| 19 | Nestlé             | Suiza         | 217.986 |
| 20 | China Mobile       | China         | 214.806 |

Figura 1.2: Ranking mundial de empresas por capitalización bursátil. Tomada de [5]

Aunque el desarrollo de mejoras y técnicas nuevas de igualación no sea algo de suma importancia para el ciudadano medio, puesto que es un campo en el que se lleva trabajando muchos años y se ha alcanzado un grado notable de maestría, sí que es interesante ver cómo los procesos y técnicas se van depurando y optimizando

poco a poco. Además, se debe tener en cuenta que la igualación no es la única solución, sino una de ellas, al problema de la interferencia intersimbólica en los receptores de sistemas de comunicaciones.

No obstante, a pesar de la relativa poca relevancia de las mejoras en la igualación de canal, éstas contribuyen a garantizar el buen funcionamiento de los receptores de sistemas de comunicaciones, los cuales sí gozan de gran importancia en nuestra sociedad tal y como se ha dicho antes.

## 1.4. Marco legal

En este apartado se tienen en cuenta las restricciones de índole legal relacionadas con el trabajo de fin de grado.

### 1.4.1. Patentes de algoritmos

Este campo se encuentra en una situación un tanto peculiar y controvertida, puesto que hasta hace poco según la legislación vigente de España no era posible patentar software ni algoritmos (de hecho aún no se pueden patentar como tal, si no está por ejemplo acompañado por ejemplo de hardware específico). No obstante en Estados Unidos siempre se ha podido hacer y es de hecho donde se encuentran patentados casi todos los algoritmos que tienen relación con este trabajo. Aunque existen numerosas patentes de algoritmos de igualación ciega (como por ejemplo [6], [7], [8], y muchas de ellas están basadas en los métodos que se van a exponer), ninguno de los que se van a analizar está sujeto a patentes.

### 1.4.2. Software y licencias

A nivel de licencias de software cabe destacar que exceptuando el programa MATLAB (cuya licencia ha sido proporcionada por la Universidad Carlos III de Madrid) el resto del trabajo de fin de grado ha sido realizado en software libre (el editor de texto LaTeX [9] y el sistema operativo Ubuntu 16.04 LTS).

### 1.4.3. Relación con la situación legal en España

Para poder hacer un uso adecuado y establecer una situación de legalidad para las técnicas igualación ciega debe tenerse en cuenta la legislación vigente aplicada a los receptores de sistemas de comunicaciones digitales, puesto que es donde se encuentran los igualadores y no hay restricciones legales en cuanto a software y algoritmos.

A la hora de implementar un receptor para un sistema de comunicaciones digitales se deben tener en cuenta las limitaciones establecidas y recogidas en el Boletín Oficial del Estado. En el Código de las Telecomunicaciones, especialmente en la Ley General de Telecomunicaciones [10] y en aquellos puntos dedicados a regular el espectro radioeléctrico [11] [12], la compatibilidad electromagnética [13], las infraestructuras para acceder a servicios de telecomunicación [14] [15] y el régimen sancionador y requisitos para la comercialización de equipos de telecomunicación [16] se recogen tanto especificaciones técnicas (frecuencias a emplear durante la transmisión, potencia de transmisión, etc.) como políticas y sanciones referentes al uso y a la comercialización del mismo.

## 1.5. Organización y contenidos

La memoria se divide en 6 capítulos y 5 anexos, descritos a continuación:

El primer capítulo sirve como introducción al trabajo de fin de grado. Se incluyen motivaciones, objetivos, y un análisis social, económico y legal tanto del tema que se trata en el trabajo como del trabajo en sí.

En el segundo capítulo se profundiza en el campo de la igualación para los sistemas digitales, se explican conceptos básicos, su finalidad, se establecen varias clasificaciones y se exponen varios métodos, incluyendo uno de los métodos nuevos propuestos para evaluación.

El tercer capítulo presenta una serie de soluciones que son propuestas para su evaluación, se explican con detalle y se muestra la metodología empleada.

En el cuarto capítulo se analizan los resultados obtenidos con las soluciones

propuestas en el capítulo anterior.

En el quinto capítulo se establecen una serie de conclusiones obtenidas tras el desarrollo e implementación de las soluciones, se analiza el impacto de las mismas y se propone una línea de posibles trabajos futuros.

Y en el sexto capítulo se desglosan tanto las actividades realizadas necesarias para la consecución del presente trabajo como un detallado presupuesto del mismo.

Por otro lado, en el primer anexo se muestran los canales empleados durante el presente trabajo, sus respuestas en frecuencia y sus diagramas de polos y ceros.

En el segundo y tercer anexo se encuentra una selección de tablas que apoyan los resultados de la primera y segunda solución propuesta respectivamente.

El cuarto anexo recoge figuras de las curvas de las funciones de coste analizadas en la tercera de las pruebas efectuadas.

Y por último, en el quinto anexo se incluye un resumen en inglés de 10 páginas del trabajo de fin de grado, de acuerdo con la normativa de la Universidad Carlos III de Madrid para trabajos en castellano de grados pertenecientes al plan de 2011.

# Capítulo 2

## Estado del arte

La igualación está presente en el campo de las comunicaciones desde los sistemas de comunicaciones analógicos, donde se requería para reducir ruidos de alta frecuencia o para compensar respuestas en frecuencia mediante, por ejemplo, redes de Zobel [17].

Aunque actualmente debido a la popularidad de los sistemas digitales de comunicaciones la gran mayoría de sistemas son de este segundo tipo, y en ellos el objetivo de usar igualadores es en esencia igual (compensar el efecto de la distorsión producida durante la transmisión) aunque presenta distintos condicionantes, el principal objetivo de la igualación en los sistemas digitales es el de reducir la interferencia intersimbólica.

Este fenómeno, también conocido como ISI (del inglés, *Intersymbol Interference*) produce una distorsión de la señal en la que los símbolos transmitidos previa y posteriormente interfieren con el símbolo actual, pudiendo producir errores en el decisor del receptor del sistema.

Este suceso, producido entre otras razones por el multitrayecto y sus retardos de propagación o por transmitir por canales con un ancho de banda limitado, es uno de los principales factores a tener en cuenta a la hora de diseñar el receptor de un sistema digital de comunicaciones. Y minimizar su efecto es crucial si se quiere obtener un buen rendimiento en cuanto a términos de probabilidad de error se refiere.

Cabe destacar que aunque a lo largo de este documento se hable sobre el método conocido como igualación o ecualización, concretamente sobre la igualación ciega, se han desarrollado varios métodos para paliar los efectos de la interferencia intersimbólica tales como la detección y estimación de secuencias (véase como ejemplo el algoritmo de Viterbi [18], que permite encontrar la secuencia transmitida más verosímil) o la simple espera de tiempos de guarda entre transmisión de símbolos.

## 2.1. Igualación de canal

En los receptores de sistemas de comunicaciones es donde se encuentran los igualadores, que reducen la distorsión y compensan las pérdidas introducidas por la misma para que no haya, o al menos se reduzcan en gran parte, errores en la recepción de información. Con el paso el tiempo la igualación ha resultado ser de gran efectividad a la hora de reducir los niveles de ISI.

### 2.1.1. Planteamiento del problema

Partiendo de un modelo de sistema de comunicaciones como el de la Figura 2.1, la cual muestra un diagrama de bloques con los elementos básicos funcionales que forman un sistema digital de comunicaciones SISO

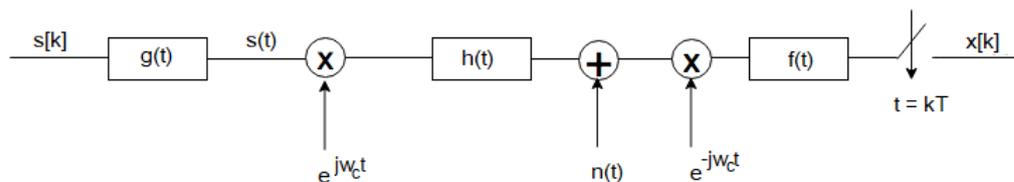


Figura 2.1: Modelo de un sistema digital de comunicaciones

se puede observar que  $s[k]$  es la secuencia de símbolos que se va a transmitir,  $g(t)$  y  $f(t)$  son los filtros del transmisor y receptor (generalmente con forma de raíz de coseno alzado y adaptados de manera que  $f(t) = g(-t)$ ),  $h(t)$  es el canal de transmisión,  $n(t)$  es ruido blanco que sigue una distribución gaussiana y  $x[k]$  la secuencia de observaciones a la salida del receptor.  $T$  denota el tiempo de símbolo, definido como la inversa de la tasa de símbolo.

Para el modelo anterior existe un modelo equivalente en tiempo discreto, que se usará a partir de ahora por comodidad, cuyo desarrollo puede encontrarse en [19], y que se muestra en la Figura 2.2

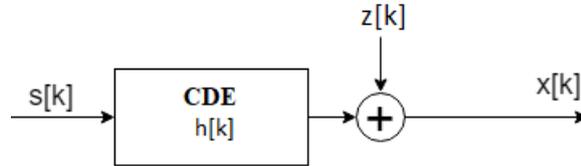


Figura 2.2: Canal discreto equivalente

donde se encuentran  $h[k]$ ,  $z[k]$  y  $x[k]$ .

El primer término,  $h[k]$ , corresponde a la respuesta conjunta del canal complejo en banda base  $h_{eq}(t)$  y los filtros del transmisor y del receptor en tiempo discreto.

$$h_{eq}(t) = h(t) * e^{-j\omega_c t}, \quad (2.1)$$

$$h[k] = g(t) * h_{eq}(t) * f(t) |_{t=kT}. \quad (2.2)$$

Por otro lado,  $z[k]$  se define como el ruido filtrado por el receptor en tiempo discreto.

$$z[k] = n(t)e^{-j\omega_c t} * f(t) |_{t=kT}. \quad (2.3)$$

Y por último,  $x[k]$ , la secuencia de observaciones a la salida del receptor, queda expresada como

$$x[k] = h[k] * s[k] + z[k] = \sum_i h[i]s[k-i] + z[k]. \quad (2.4)$$

Si se emplea un filtro receptor del tipo raíz cuadrada de coseno alzado, lo cual es una estrategia bastante frecuente, o cualquier otro tipo de filtro cuya función de ambigüedad temporal cumpla unas condiciones básicas [19], entonces  $z[k]$  es una secuencia de ruido blanco gaussiano con una densidad espectral de potencia  $S_z(e^{j\omega}) = \sigma_z^2$ .

Se puede reescribir la ecuación (2.4) para un instante  $k$  como

$$x[k] = \sum_i h[i]s[k-i] + z[k] = s[k-d] + \sum_{\substack{i \\ i \neq d}} h[i]s[k-i] + z[k], \quad (2.5)$$

donde  $s[k-d]$  se corresponde con el símbolo transmitido en el instante  $k$ , y el resto del sumatorio se corresponde con símbolos transmitidos (tanto previa como posteriormente) que no se corresponden con el símbolo que se trata de identificar en el instante  $k$ . Este sumatorio denota la interferencia intersimbólica y puede causar verdaderos problemas al receptor y confundirlo en ocasiones, disminuyendo su efectividad.

$$ISI[k] = \sum_{\substack{i \\ i \neq d}} h[i]s[k-i]. \quad (2.6)$$

Para paliar el efecto de esta ISI, una de las alternativas más populares es el uso de igualadores en los receptores. En la Figura 2.3 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones con un igualador en el receptor

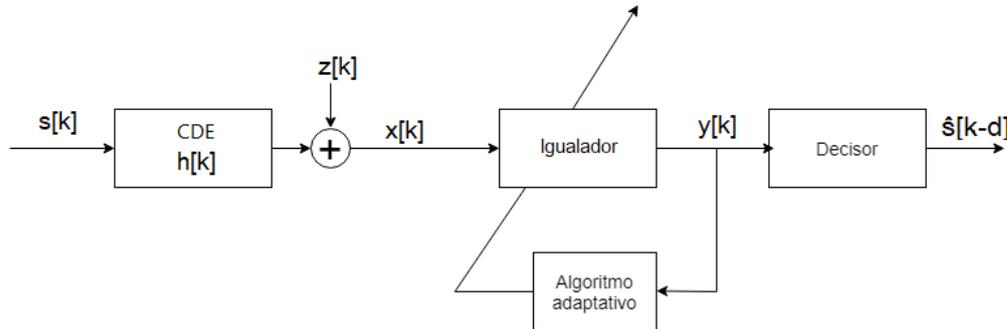


Figura 2.3: Modelo ilustrativo de un sistema de comunicaciones con un igualador

donde, además de las señales definidas anteriormente, encontramos el igualador, la secuencia a la salida del igualador  $y[k]$  y el símbolo estimado  $\hat{s}[k-d]$ .

El objetivo principal del igualador es el de reducir el impacto de la ISI generando una  $y[k]$  tal que, siendo procesada por un decisor, permita identificar un símbolo correspondiente al transmitido que cumpla la siguiente ecuación

$$\hat{s}[k-d] = D(y[k]) = s[k-d], \quad (2.7)$$

donde  $d$  es un retardo arbitrario.

## 2.1.2. Tipos de igualadores de canal

Atendiendo a una clasificación de los diversos métodos, existen varios puntos de vista desde los que agrupar los igualadores. Aunque existen muchos más de los que se van a comentar en las siguientes líneas, estos son los que más relación tienen con el presente trabajo.

### Muestra a muestra y en bloque

Una primera perspectiva, también presente en otras disciplinas, nos permite diferenciar entre métodos de igualación muestra a muestra, u *online*, y métodos en bloque o *batch*.

Los métodos que trabajan muestra a muestra manejan uno a uno los datos recibidos. Según va entrando la información el igualador actúa en el receptor.

Los métodos en bloque, por otro lado, procesan los datos agrupados previamente en bloques o conjuntos. Los primeros requieren menor coste computacional pero a cambio ofrecen una convergencia más lenta; los métodos en bloque por su parte y a pesar de que necesitan mayor tiempo de cómputo proporcionan una convergencia más rápida. A lo largo de este documento se profundizará en este último tipo de igualadores.

### En función de las entradas y salidas de los sistemas

Otro de los puntos de vista para clasificar los igualadores atiende al número de entradas y salidas de los sistemas de comunicaciones en los que actúan. Se pueden encontrar igualadores para sistemas de entrada y salida únicas (SISO, del inglés *Single Input Single Output*), de entrada única y salida múltiple (SIMO, *Single Input Multiple Output*) y por último de entrada y salida múltiples (MIMO, *Multiple Input Multiple Output*).

A partir de este punto, y por una cuestión de simplicidad, los métodos expuestos estarán siempre referidos a sistemas SISO.

## Lineales y no lineales

También, como se explica en [20], existen dos grandes tipos de igualadores clasificados según el enfoque empleado para la recuperación del canal, teniendo lineales y no lineales dependiendo de si usan filtros lineales o no para compensar la distorsión. Los igualadores lineales, aunque son más sencillos de implementar, tienen varias desventajas y limitaciones prácticas que deben tenerse en cuenta.

Por ejemplo, no todos los tipos de distorsión en los canales pueden ser compensados por filtros lineales.

Por otro lado, los igualadores no lineales, aunque tienen un mejor desempeño en líneas generales, tienen otras desventajas, como un coste computacional mayor en los MLSE (estimadores de secuencias por máxima verosimilitud, del inglés *Maximum Likelihood Sequence Estimator*, basados en el ya mencionado algoritmo de Viterbi, el cual aumenta su complejidad a medida que aumenta el número de estados) [21] o la existencia de propagación de errores en los igualadores realimentados por decisión (en inglés *Decision Feedback Equalizer* o DFE), donde los símbolos detectados con anterioridad se utilizan para restar su aportación a la ISI del símbolo actual [22].

## Ciegos y no ciegos

La última perspectiva a comentar y que más relevancia tiene en este trabajo es la que nos permite distinguir entre los igualadores convencionales (o no ciegos) y los igualadores ciegos.

Los igualadores no ciegos disponen directamente desde un principio de información sobre el canal de comunicación y de secuencias de bits conocidas como secuencias de entrenamiento. Estas secuencias son unos conjuntos de valores de referencia que se envían periódicamente y que permiten al igualador reajustar sus parámetros, corrigiéndose cada cierto tiempo o número de transmisiones para evitar errores en la comunicación.

Como ejemplos ilustrativos se tienen los igualadores lineales no ciegos que siguen los criterios de forzado de ceros o ZF (del inglés *Zero Forcing*) y error cuadrático medio o MMSE (en inglés *Minimum Mean Square Error*), ambos ampliamente analizados en [20]. Éstos, al igual que los igualadores realimentados por decisión, suelen emplearse junto con un decisor símbolo a símbolo sin memoria

para la recuperación de la información.

En este caso y como se ha dicho antes, el igualador lineal  $w[k]$  toma la forma de un filtro lineal FIR (de respuesta finita al impulso, *Finite Impulse Response*) con un vector de coeficientes  $\mathbf{w}$  cuya misión será la de reducir la distorsión producida por la interferencia intersimbólica para que se pueda generar una señal de salida  $y[k]$  la cual pueda servir como entrada de un decisor  $D(\Delta)$  que permita estimar con cierta fiabilidad la señal de entrada  $s[k]$  de modo que en una situación ideal se obtenga una señal estimada como la de la ecuación(2.7).

En estos dos ejemplos (con los criterios de ZF y MMSE) que se van a ilustrar el cometido es el mismo, identificar la transformada  $Z$  del canal, definida como

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{-k} \quad (2.8)$$

y contrarrestar el efecto que pueda producir de dos maneras distintas.

Si se emplea el criterio del error cuadrático mínimo medio entre la salida  $y[k]$  y la señal deseada  $s[k-d]$ , el igualador  $W_{mmse}(z)$  tendrá la siguiente forma

$$W_{mmse}(z) = \frac{H^*(z^{-1})z^{-d}}{H(z)H^*(z^{-1}) + \sigma_z^2} \quad (2.9)$$

donde el superíndice  $*$  denota el conjugado complejo, y  $\sigma_z^2$  la densidad espectral de potencia del ruido  $z[k]$ ; que también equivale a su potencia para un proceso aleatorio, discreto, blanco y gaussiano.

Por otro lado, si se emplea el criterio de forzado de ceros, el igualador  $W_{zf}(z)$  tendrá la siguiente forma

$$W_{zf}(z) = \frac{z^{-d}}{H(z)}, \quad (2.10)$$

el cual básicamente pretende multiplicar el canal por su inversa para que se cancelen y que quede un retardo de  $d$  unidades, cancelando la ISI. Este retardo  $d$  debe introducirse para poder tratar con canales que no tienen fase mínima, puesto que estos no tienen una inversa estable causal, al introducir un retardo arbitrario se consigue convertirlos en causales, pudiendo operar con ellos.

Como se puede comprobar, la construcción de varios de los igualadores cuando

se usan técnicas no ciegas se apoya en operar con un  $H(z)$  previamente conocido.

Si en su lugar se emplean técnicas de igualación ciega, en un primer momento se desconocen tanto el canal por el que se transmite la información como la información transmitida en sí, careciendo directamente de secuencias de entrenamiento. Esto constituye uno de sus principales atractivos, puesto que el no tener que estar enviando periódicamente datos para calibrar el igualador permite maximizar la capacidad del canal transmitiendo sólo información relevante. Lo cual supone una gran ventaja a tener en cuenta sobre los algoritmos no ciegos a la hora de transmitir en sistemas con limitaciones en el ancho de banda, que comprenden la mayoría de los sistemas digitales debido a la escasez del mismo.

En [20] se ofrece una clasificación mucho más extensa, así como numerosas referencias que permiten un análisis más exhaustivo de la situación actual del terreno de la igualación, en especial de la igualación ciega, incluyendo tanto métodos que hacen uso directamente de técnicas de igualación ciega como métodos que primero identifican el canal (mediante lo que se conoce como identificación ciega [23]) para posteriormente emplear técnicas convencionales de igualación.

## 2.2. Algoritmos de igualación lineal ciega

Teniendo en mente de nuevo la relación entre la entrada y la salida de un sistema SISO dada por

$$x[k] = \sum_i h[i]s[k-i] + z[k], \quad (2.11)$$

el problema que se debe solucionar se limita a recuperar  $s[k]$  desde  $x[k]$  sin ayuda del transmisor y sin tener información del canal  $h[i]$ , haciendo uso de un igualador lineal  $w[k]$ .

Este igualador es un vector de coeficientes, que en notación vectorial puede expresarse como

$$\mathbf{w} = [w[0], w[1], \dots, w[L_w - 1]]^T, \quad (2.12)$$

donde  $L_w$  es la longitud del vector (o también el número de coeficientes) y el superíndice  $T$  denota el operador traspuesto.

En la siguiente ecuación se define la relación entre la salida del igualador y la entrada del mismo

$$y[k] = x[k] * w[k] = \sum_{i=0}^{L_w-1} w[i]x[k-i]. \quad (2.13)$$

Expresado en notación vectorial para el instante  $k$  quedaría

$$y[k] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_k, \quad (2.14)$$

donde el superíndice  $T$  denota el operador traspuesto.

Siendo  $\mathbf{x}_k$  otro vector de longitud  $L_w$  que contiene los elementos a la entrada del igualador en el instante  $k$

$$\mathbf{x}_k = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-L_w+1]]^T. \quad (2.15)$$

Asumiendo una  $h[k]$  causal y con  $L_h$  coeficientes, se va a definir la respuesta conjunta del canal y del igualador como  $c[k]$

$$c[k] = h[k] * w[k] = \sum_{i=0}^{L_h-1} h[i]w[k-i]. \quad (2.16)$$

Esto nos permite definir de nuevo  $y[k]$  como

$$y[k] = s[k] * c[k] = \sum_{i=0}^{L_k+L_w-2} c[i]s[k-i] + z[k]. \quad (2.17)$$

El símbolo  $y[k]$  en el instante  $k$  (teniendo en cuenta que el proceso lleva un retardo  $d$  asociado) se recoge en la siguiente relación

$$y[k] = c[d]s[k-d] + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq d}}^{L_k+L_w-2} c[i]s[k-i] + z[k]. \quad (2.18)$$

Y en esta ecuación aparece un sumatorio corresponde a la ISI residual o  $ISI[k]$

$$ISI[k] = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq d}}^{L_h+L_w-2} c[i]s[k-i], \quad (2.19)$$

cuyo efecto intentará reducirse y la cual no se debe confundir con la  $ISI'[k]$  definida en (2.6) ya que en esta nueva ecuación se tiene en cuenta el efecto del igualador  $w[k]$ .

Se debe tener en cuenta que como este trabajo se centra en el estudio de métodos para sistemas SISO que transmiten a tasa de símbolo, la información estadística de la que se habla se corresponde con estadísticos de orden mayor a 2. Puesto que los estadísticos de menor orden necesitan múltiples antenas o una tasa de muestreo mayor a la tasa de símbolo, resultando inviable para sistemas que no sean SIMO [24] o MIMO [25].

Existen numerosas maneras de diseñar un igualador ciego. No obstante, casi todos los métodos pueden clasificarse de un modo general en directos e indirectos. Los métodos directos generan los igualadores mediante filtros analizando la información estadística obtenida observando la salida del canal desconocido. Los indirectos, por su parte, primero identifican el canal de transmisión antes de diseñar el igualador. La identificación de canal consiste en generar una representación aproximada de  $h[k]$  y  $H(z)$  extraída de información estadística de la señal transmitida.

En los métodos a presentar se debe recordar la ecuación (2.12), que agrupa los términos del igualador  $w[k]$  en un vector de coeficientes.

La clave para autoajustar los coeficientes de una manera eficaz pasa por minimizar una función de coste. Pero, al tratarse de igualadores ciegos donde no se tiene información de la salida deseada no se puede minimizar cualquier función (como por ejemplo la del error cuadrático medio, empleada por ejemplo en el algoritmo LMS o *Least Mean Square* [26]). Las funciones de coste a minimizar deberán tener en cuenta la información estadística de la señal de salida recibida.

En las siguientes subsecciones se introducirán los algoritmos empleados en la realización del trabajo de fin de grado. No obstante, se debe tener en cuenta que estos no son, ni mucho menos, los únicos algoritmos existentes, pero sí los más

relevantes para el trabajo. Para una enumeración más extensa y detallada se puede consultar, por ejemplo, [20].

### 2.2.1. Algoritmo CMA

El algoritmo de módulo constante o CMA (del inglés *Constant Modulus Algorithm*) [27] [28] forma junto a otros algoritmos una familia conocida como algoritmos de Godard [29].

Estos algoritmos de Godard surgieron como una generalización del algoritmo presentado por Y. Sato en 1975 [30], donde se mencionaba por primera vez el concepto de igualación ciega.

Los algoritmos de Godard tienen la siguiente función de coste

$$J_{Godard} = E [ (|y[k]|^p - R_p)^2 ] \quad (2.20)$$

donde  $E[\Delta]$  denota la esperanza o media,  $y[k]$  la salida de igualador, definida en (2.13) y la constante  $R_p$  se define como

$$R_p = \frac{E [|s[k]|^{2p}]}{E [|s[k]|^p]}, \quad (2.21)$$

siendo  $s[k]$  la secuencia de datos transmitida. Este término  $R_p$  permite controlar la amplificación del igualador [29] de modo que la ganancia total del conjunto canal-igualador sea 1.

El algoritmo CMA es la particularización de los algoritmos de Godard para  $p = 2$ , por lo que la función de coste sería

$$J_{CMA} = E [ (|y[k]|^2 - R_2)^2 ], \quad (2.22)$$

con

$$R_2 = \frac{E [|s[k]|^4]}{E [|s[k]|^2]}. \quad (2.23)$$

Este método asume que la secuencia  $s[k]$  tiene un módulo constante que cumple  $|s[k]|^2 = R_2$ , y el igualador penaliza la salida  $y[k]$  cuando su módulo varía de

acuerdo con el siguiente error

$$e[k] = (|y[k]|^2 - R_2)^2, \quad (2.24)$$

el cual es el argumento a promediar en la función de coste expresada en (2.22).

En este trabajo se analizará su optimización de dos maneras: la primera mediante la técnica de descenso por gradiente estocástico [31], y la segunda mediante la formulación de una máquina de vectores soporte que se resuelve con el algoritmo IRWLS (del inglés *Iterative Re-Weighted Least Squares*) [32].

El hecho de emplear la formulación de máquinas de vectores soporte permite muchas veces reducir el número necesario de iteraciones para alcanzar la convergencia, de ahí el atractivo de emplearla en mecanismos de igualación.

### 2.2.2. Algoritmo MCMA

El desarrollo del algoritmo MCMA (del inglés *Modified Constant Modulus Algorithm*) [33] es una extensión del CMA expuesto previamente, puesto que a grandes rasgos es igual que el algoritmo CMA tratando por separado las partes real e imaginaria de las señales.

La función final de coste es la suma de las funciones de coste de las partes real e imaginaria, expresada en la siguiente ecuación

$$J_{MCMA} = E [ (|Re(y[k])|^2 - R_r)^2 ] + E [ (|Im(y[k])|^2 - R_i)^2 ]. \quad (2.25)$$

donde  $R_r$  y  $R_i$  son las partes real e imaginaria de la constante  $R_p$  de los algoritmos de Godard y quedan definidas como

$$R_r = \frac{E [ |Re(s[k])|^4 ]}{E [ |Re(s[k])|^2 ]} \quad (2.26)$$

y

$$R_i = \frac{E [ |Im(s[k])|^4 ]}{E [ |Im(s[k])|^2 ]}. \quad (2.27)$$

En este trabajo sólo se analizará este algoritmo en su versión de descenso por gradiente. Pero, al igual que el CMA, puede resolverse de varias maneras.

### 2.2.3. Algoritmo MRC

La característica principal de este algoritmo es proporcionar valores de referencia adecuados durante todo el proceso de igualación, no solo al inicio sino también una vez se ha alcanzado la convergencia. Para lograrlo hace uso de dos parámetros,  $p$  y  $l$ , que se emplean para elevar a dos potencias distintas la salida del igualador y compararlas. Éstas se ponderan debidamente teniendo en cuenta las características estadísticas de la constelación elegida para la transmisión de información.

La función de coste para constelaciones con símbolos únicamente reales está definida como

$$J_{MRC} = E \left[ \frac{1}{R_{p,l}} \frac{y[k]^{2p}}{2p} - \frac{y[k]^{2l}}{2l} \right], \quad (2.28)$$

donde el término  $R_{p,l}$  queda expresado como

$$R_{p,l} = \frac{E [s[k]^{2p}]}{E [s[k]^{2l}]}. \quad (2.29)$$

Esta constante  $R_{p,l}$ , al igual que  $R_p$  en el algoritmo CMA, tiene como objetivo controlar la ganancia total del conjunto canal-igualador.

Esta función de coste compara la salida del igualador elevada a dos potencias distintas (en función de los parámetros  $p$  y  $l$ ), que se ponderan a través del parámetro  $R_{p,l}$ , las cuales sirven como referencias. Es por ello que se le ha dado el nombre de función de coste con referencias de múltiples potencias o MRC (del inglés *Multi-power Reference Cost*).

Adicionalmente, para constelaciones con símbolos complejos la función de coste puede extrapolarse y entonces se convierte en

$$J_{MRC} = E \left[ \frac{1}{R_{p,l}} \frac{\text{Re}(y[k])^{2p}}{2p} - \frac{\text{Re}(y[k])^{2l}}{2l} \right] + E \left[ \frac{1}{I_{p,l}} \frac{\text{Im}(y[k])^{2p}}{2p} - \frac{\text{Im}(y[k])^{2l}}{2l} \right], \quad (2.30)$$

existiendo en este caso dos constantes en lugar de solo una, las cuales se definen como

$$R_{p,l} = \frac{E [\text{Re}(s[k])^{2p}]}{E [\text{Re}(s[k])^{2l}]} \quad e \quad I_{p,l} = \frac{E [\text{Im}(s[k])^{2p}]}{E [\text{Im}(s[k])^{2l}]}. \quad (2.31)$$

Este nuevo algoritmo se analizará empleando la técnica de descenso por gra-

diente estocástico como también se hizo en [34] pero en este caso para métodos en bloque y se continuará con una resolución matricial iterativa aprovechando una interesante propiedad algebraica que se detallará en el siguiente capítulo.

# Capítulo 3

## Soluciones propuestas

A lo largo de este capítulo se expondrán y detallarán las diferentes soluciones propuestas al problema de la igualación ciega.

### 3.1. Alternativas de diseño

Puesto que se ha visto en el anterior capítulo que la clave de un buen algoritmo de igualación ciega pasa por minimizar una función de coste, aquí se discutirán una serie de alternativas que incluyen tanto mejoras a algoritmos existentes como una nueva función de coste junto con un algoritmo eficiente para su optimización.

Como breve preámbulo, la primera solución propuesta pasa por inicializar los coeficientes del vector del igualador  $\mathbf{w}$  siguiendo la estrategia conocida como tap-centering <sup>1</sup> y multiplicarlos después por un factor de escala (sólo en esta primera iteración). Por otro lado, la otra solución propuesta comprende el desarrollo y formulación del nuevo algoritmo presentado en la sección 2.2.3.

Se verá que la primera de las soluciones no puede aplicarse a todos los algoritmos, pero funciona especialmente bien para aquellos en los que sí puede aplicarse; y la segunda solución propuesta, el nuevo algoritmo, permite una convergencia más rápida que la de los algoritmos expuestos en el capítulo anterior. No obstante, en

---

<sup>1</sup>Es una estrategia de inicialización bastante empleada, la cual se detalla en la ecuación (3.2).

el siguiente capítulo se comentarán los resultados las soluciones propuestas y se compararán entre ellas con mayor profundidad.

Asimismo, se estudiará el efecto de los parámetros  $l$  y  $p$  en la función de coste del algoritmo MRC para los posibles valores de la salida del igualador.

### 3.1.1. Modificación del factor de escala

Para comprender la primera de las soluciones propuestas es necesario establecer un modelo de canal discreto equivalente como el de la Figura 3.1 y recordar algunas de las relaciones definidas en capítulos anteriores.

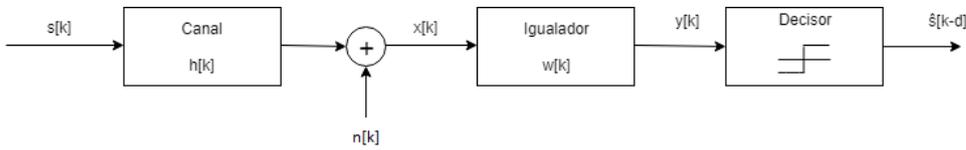


Figura 3.1: Modelo de sistema de comunicaciones SISO con un igualador

En el diagrama anterior  $s[k]$  representa la secuencia de datos que se va a transmitir,  $h[k]$  el canal discreto equivalente,  $x[k]$  la secuencia de observaciones a la salida del receptor,  $w[k]$  el igualador,  $y[k]$  el conjunto de observaciones a la salida del igualador, y  $\hat{s}[k-d]$  la secuencia de datos recuperada por el receptor.

Recordando las ecuaciones definidas en (2.12) y (2.14), la idea principal es inicializar los coeficientes del igualador multiplicando un vector de coeficientes  $\mathbf{w}$  por un factor de escala  $\kappa$  tal que

$$\mathbf{w}' = \kappa \mathbf{w} = \kappa [w[0], w[1], \dots, w[L_w - 1]]^T, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{w}$  es un vector que sigue la estrategia de tap-centering, donde todos los coeficientes tienen valor 0 excepto el coeficiente central, el cual tiene valor 1, expresado como

$$\mathbf{w}[k] = \delta[k - c], \quad (3.2)$$

siendo  $c$  el valor que indica la mitad de la longitud del vector  $\mathbf{w}$

$$c = \left\lceil \frac{L_w + 1}{2} \right\rceil \quad \text{o bien} \quad c = \left\lfloor \frac{L_w + 1}{2} \right\rfloor, \quad (3.3)$$

y observar el rendimiento de varios algoritmos para distintos valores del factor de escala  $\kappa$ .

### 3.1.2. Algoritmo MRC

En la sección 2.2.3 se introdujo el algoritmo MRC. Se presentó la función de coste del mismo y se comentó su particularidad más significativa: la existencia de varios valores de referencia (a diferencia de uno solo en funciones de coste de muchos otros algoritmos), los cuales permiten tener una función de coste efectiva (definida en (2.28)) para diferentes valores a la salida del igualador durante diferentes fases de la igualación, no sólo al inicio sino también una vez alcanzada la convergencia.

El análisis para un tipo de constelación u otro es idéntico, simplemente se han de tener en cuenta las modificaciones oportunas realizadas a la función de coste y los parámetros. Por esto y para simplificar un poco las cosas, se presentará el desarrollo para constelaciones reales.

Como en este documento se habla sobre los algoritmos en bloque, se debe considerar un bloque de muestras de la señal recibida de tamaño  $N$  definido como

$$\chi = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \quad (3.4)$$

que permite actualizar los  $L_w$  coeficientes del igualador  $\mathbf{w}$ . Si se conocen los coeficientes de  $\mathbf{w}$ , teniendo en cuenta las ecuaciones (2.13), (2.14), (2.12) y (2.15) se puede obtener la relación directa entre la entrada desde  $k = L_w$  hasta  $k = N$  y la salida del igualador para los mismos instantes mediante (2.13) o (2.14).

Si los vectores  $\mathbf{x}_k$  se agrupan en la matriz  $\mathbf{X}$  de dimensiones  $L_w \times (N - L_w + 1)$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_{L_w}, \mathbf{x}_{L_w+1}, \dots, \mathbf{x}_N], \quad (3.5)$$

la salida  $\mathbf{y}$  para todos los instantes se puede obtener como

$$\mathbf{y} = [y[L_w], y[L_w + 1], \dots, y[N]]^T = \mathbf{X}^T \mathbf{w}. \quad (3.6)$$

Para este nuevo método se presentan dos alternativas para minimizar la función

de coste: la primera de ellas es la basada en el descenso por gradiente; mientras que la segunda se basa en una interesante propiedad algebraica.

### Descenso por gradiente

La estimación de la función de coste que se puede obtener a partir de los datos disponibles queda definida como

$$\hat{J}_{MRC}(\mathbf{w}) = \sum_{k=L_w}^N \left[ \frac{1}{R_{p,l}} \frac{y[k]^{2p}}{2p} - \frac{y[k]^{2l}}{2l} \right], \quad (3.7)$$

y su gradiente se define como

$$\nabla_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}) = \frac{\partial \hat{J}_{MRC}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \sum_{k=L_w}^N \frac{\partial \hat{J}_{MRC}(\mathbf{w})}{\partial y[k]} \frac{\partial y[k]}{\partial \mathbf{w}} = \sum_{k=L_w}^N \left[ \frac{y[k]^{2p-1}}{R_{p,l}} - y[k]^{2l-1} \right] \mathbf{x}_k. \quad (3.8)$$

Los coeficientes del igualador  $\mathbf{w}$  se van actualizando con cada iteración siguiendo la siguiente ecuación

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}(n)), \quad (3.9)$$

donde  $\mu$  es la tasa de aprendizaje o step size, la cual mide cuánto se desciende en la dirección del gradiente. La primera iteración del igualador ( $\mathbf{w}(0)$ ), como ya se ha comentado antes, se realiza siguiendo la estrategia de tap-centering.

$$\mathbf{w}(0)[k] = \delta[k - c] \quad (3.10)$$

siendo  $c$  el valor que indica la mitad de la longitud del vector  $\mathbf{w}$ , recogido en la ecuación (3.3).

### Acercamiento matricial alternativo

El problema del anterior acercamiento es que el número de iteraciones necesario para alcanzar la convergencia puede ser bastante grande en algunas ocasiones, incluso si se usa una tasa de aprendizaje adaptativa.

Es por ello que se ha propuesto este método alternativo. Los coeficientes  $\mathbf{w} =$

$\mathbf{w}_o$  que minimizan  $J_{MRC}(\mathbf{w})$  satisfacen la siguiente ecuación

$$\nabla_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_o) = \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

siendo  $\mathbf{0}$  un vector de ceros de longitud  $L_w$ . Esta condición puede reescribirse de la siguiente manera si se tiene en cuenta la ecuación (3.8)

$$\sum_{k=L_w}^N \frac{y[k]^{2p-1}}{R_{p,l}} = \sum_{k=L_w}^N y[k]^{2l-1}. \quad (3.12)$$

Se debe recordar la relación entre la salida, la entrada y los coeficientes del igualador definida en (2.14).

El método para actualizar los coeficientes de  $\mathbf{w}$  está basado en una propiedad bastante simple. Si se echa un vistazo a la siguiente ecuación de una sola incógnita  $w$

$$aw^{2p-1} = bw^{2l-1}, \quad (3.13)$$

siendo  $a$  y  $b$  dos coeficientes conocidos, la solución  $w_o$  que satisface la ecuación anterior es sencilla de calcular

$$w_o = \sqrt[p-l]{\frac{b}{a}}. \quad (3.14)$$

Sin embargo, se puede obtener la misma solución escogiendo un valor inicial cualquiera para  $w$  y aplicando un procedimiento iterativo sencillo. Empezando por reescribir la ecuación (3.13) como

$$Aw = B, \quad (3.15)$$

siendo  $A$  y  $B$

$$\begin{aligned} A &= aw^{2p-2}, \\ B &= bw^{2l-1}. \end{aligned}$$

Aunque en este caso  $A$  y  $B$  dependen de  $w$ , si se asume que son constantes la solución es

$$w = \frac{B}{A}. \quad (3.16)$$

Escogiendo un valor inicial de  $w$  se puede obtener la solución a la ecuación mediante el siguiente procedimiento iterativo:

1. Seleccionar el valor inicial  $w(0)$ .
2. Calcular la primera iteración  $w(1)$  como

$$w(1) = \frac{B(0)}{A(0)} = \frac{b}{a} \frac{1}{w(0)^{2(p-l)-1}}.$$

3. Calcular la solución  $w_o$  de la siguiente manera

$$w_o = w(0) \sqrt[2(p-l)]{\frac{w(1)}{w(0)}} = w(0) \sqrt[2(p-l)]{\frac{b}{a} \frac{1}{w(0)^{2(p-l)-1}}} = \sqrt[2(p-l)]{\frac{b}{a}}. \quad (3.17)$$

Generalizando la ecuación (3.17) para una iteración  $n$  cualquiera se obtiene

$$w_o = w(n) \sqrt[2(p-l)]{\frac{w(n+1)}{w(n)}}. \quad (3.18)$$

No obstante, este procedimiento permite actualizar únicamente uno de los coeficientes. Si ahora se recuerdan las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.15), se puede extender el procedimiento anterior para calcular los  $L_w$  coeficientes de  $\mathbf{w}$  de la siguiente manera

$$\mathbf{A}\mathbf{w}=\mathbf{b}, \quad (3.19)$$

con  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{b}$  definidos como

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^T, \quad \mathbf{b} = \mathbf{X}\mathbf{y}^{2l-1}, \quad (3.20)$$

siendo  $\mathbf{D}$  la siguiente matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \frac{1}{R_{p,l}} \text{diag} (y[L_w]^{2p-2}, y[L_w + 1]^{2p-2}, \dots, y[N]^{2p-2}) \quad (3.21)$$

e  $\mathbf{y}^{2l-1}$  un vector que contiene valores de  $y[k]^{2l-1}$  desde  $L_w$  hasta  $N$

$$\mathbf{y}^{2l-1} = [y[L_w]^{2l-1}, y[L_w + 1]^{2l-1}, \dots, y[N]^{2l-1}]^T. \quad (3.22)$$

Sin embargo, no se puede resolver (3.19) en una sola iteración y obtener la solución de (3.12), puesto que los coeficientes para las  $L_w$  ecuaciones contenidas en (3.19) dependen de todas las incógnitas. Aunque mediante los experimentos realizados se ha demostrado que tras unas pocas iteraciones la resolución de forma recursiva permite al vector  $\mathbf{w}$  converger hacia la solución de la ecuación (3.12).

En esencia, el método para actualizar los coeficientes de  $\mathbf{w}$  se resume en los siguientes pasos:

1. Inicializar  $n = 0$  y  $\mathbf{w}(0)$  siguiendo la estrategia de tap-centering (3.2).
2. Calcular los valores de  $\mathbf{y}$  mediante (3.6) y de  $\hat{J}_{MRC}(\mathbf{w}(0))$  mediante (3.7).
3. Calcular  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{y}^{2l-1}$  mediante (3.21) y (3.22).
4. Calcular  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{b}$  mediante (3.20).
5. Calcular  $\mathbf{w}_s$  mediante (3.19):  $\mathbf{w}_s = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .
6. Actualizar los coeficientes:
  - a) Fijar  $\alpha=1$ .
  - b) Calcular  $\mathbf{w}(n+1)=(1 - \alpha)\mathbf{w}(n)+\alpha\mathbf{w}_s$ .
  - c) Normalizar  $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n+1) \times \sqrt{\frac{\|\mathbf{w}(n+1)\|_1}{\|\mathbf{w}(n)\|_1}}$
  - d) Calcular los valores de  $\mathbf{y}$  mediante (3.6) y de  $\hat{J}_{MRC}(\mathbf{w}(n+1))$  mediante (3.7).
  - e) Si  $\hat{J}_{MRC}(\mathbf{w}(n+1)) > \hat{J}_{MRC}(\mathbf{w}(n))$  dividir  $\alpha = \alpha/2$  y volver a b)
7. Actualizar  $n = n + 1$  y volver al paso 3 a menos que  $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n - 1)$  o  $n$  sea mayor que el número máximo de iteraciones permitidas.

En la ecuación del paso 6.c), el operador  $\|\cdot\|_1$  denota la norma vectorial  $\ell_1$ .

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|.$$

Asimismo, el parámetro  $\alpha$  se ha introducido para estabilizar el algoritmo al inicio de la ejecución.

### 3.1.3. Análisis de las funciones de coste a la salida del igualador

Por último, y aunque no es una solución per se (como el desarrollo de un nuevo algoritmo o de técnicas para mejorar el rendimiento de uno ya existente), se ha

considerado de interés observar la contribución los parámetros  $l$  y  $p$  en la función de coste del algoritmo MRC para distintos valores posibles de  $y[k]$ .

## 3.2. Metodología

En esta sección se describen los procedimientos seguidos para realizar las pruebas necesarias.

A grandes rasgos, para las dos primeras soluciones propuestas se ha simulado la recepción de datos tal y como se haría en un receptor de sistemas de comunicaciones. Primeramente se generan y cargan las muestras (o símbolos de una constelación) que se van a procesar para los parámetros escogidos (modulación, relación señal a ruido, etc.). Acto seguido dichas muestras se pasan por uno de los 10 canales de transmisión seleccionados para los experimentos (los cuales están detallados en el anexo B), se le suma ruido, y se inicializa el vector de coeficientes. Después se ejecuta el algoritmo de igualación correspondiente y finalmente se obtienen las muestras procesadas, las cuales son posteriormente analizadas para calcular su probabilidad de convergencia.

Para calcular dicha probabilidad se ha desarrollado un procedimiento que determina el nivel de interferencia intersimbólica para cada iteración del algoritmo, y en función del canal empleado se establece un umbral u otro a partir del cual se determina la convergencia. A través de una serie de condiciones, se puede saber si se ha producido o no convergencia, con qué nivel de ISI se ha alcanzado (si es que ha convergido) y en cuántas iteraciones.

Para saber el número de iteraciones se comprueba el número mínimo de iteraciones necesarias que permiten al algoritmo identificar el símbolo correctamente con un nivel de ISI menor al del umbral establecido; y a lo largo de la ejecución, si en las posteriores iteraciones el nivel de ISI se mantiene entre un rango de valores cercanos a este primer nivel de interferencia que se encuentra bajo el umbral, se elige como número de iteraciones. Asimismo, para obtener información con un valor estadístico de interés y teniendo en cuenta el carácter aleatorio del ruido añadido, cada simulación se ha repetido 100 veces y se ha promediado el total.

### 3.2.1. Modificación del factor de escala

Para esta prueba se ha desarrollado el procedimiento previamente descrito: se han generado las muestras, se ha simulado la transmisión, pero justo antes de resolver el algoritmo correspondiente se ha inicializado el vector  $\mathbf{w}$  y multiplicado por los factores de escala para luego seguir con la sucesión habitual de actividades, que comprenden la ejecución del algoritmo y el análisis de convergencia; todo esto repetido varias veces y promediado los resultados.

Como dato anecdótico y en parte como justificación para la realización de la prueba, cabe destacar que la variación de rendimiento en los algoritmos se descubrió por casualidad y se ha querido ratificar que efectivamente esa variación tuviera una explicación lógica (en este caso debido al cambio de los valores del vector de coeficientes del igualador) para descartar que fuese un hecho fortuito. Por lo que además de resultados numéricos, en la sección 4.1 se ofrece una explicación detallada del porqué de dicho comportamiento.

### 3.2.2. Desempeño del algoritmo MRC

Para evaluar las prestaciones del algoritmo, se ha establecido una comparación directa entre éste y el algoritmo CMA desarrollando también el procedimiento descrito previamente para ambos métodos: desde la generación de muestras, el paso por el canal, la adición de ruido e inicialización del vector de coeficientes del igualador, la ejecución del algoritmo y el análisis de la convergencia, todo simulado varias veces

### 3.2.3. Análisis de las funciones de coste a la salida del igualador

En la última prueba se ha estudiado paralelamente (al igual que en la prueba anterior) el comportamiento de las funciones de coste (2.22) y (2.28) (de los algoritmos CMA y MRC, respectivamente) evaluando sus valores en función de una serie de valores de entrada  $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)$  (los cuales corresponden a los posibles valores de  $y[k]$  para unas constelaciones  $M$ -PAM) y se ha analizado su impacto en dichas funciones de coste.

# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo se exponen y analizan los resultados de las simulaciones explicadas en capítulos anteriores.

Debido al extenso número de tablas elaboradas (más de 600 entre todas las pruebas), es imposible mostrar todas en este documento, por lo que se ha seleccionado un grupo de ellas que representan y apoyan los resultados expuestos a continuación.

### 4.1. Modificación del factor de escala

Antes de mostrar resultados de las simulaciones realizadas, se debe proceder primero a realizar un análisis teórico que aporte una explicación lógica al porqué de esta nueva estrategia de inicialización.

Retomando las igualdades definidas en (2.13), (2.14), (2.18) y (2.19) se puede volver a escribir (2.18) como

$$y[k] = a[k] + b[k], \quad (4.1)$$

donde  $a[k]$  toma un valor entre los  $M$  posibles valores del alfabeto y  $b[k]$  toma un valor de entre  $M^{L_k+L_w-2}$  posibles combinaciones ( $M$  símbolos del alfabeto de la constelación y  $L_k + L_w - 2$  símbolos que intervienen en la interferencia inter-

simbólica residual).

$a[k]$  y  $b[k]$  pueden expresarse como

$$a[k] = h[d]s[k - d], \quad (4.2)$$

$$b[k] = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq d}} h[i]s[k - i]. \quad (4.3)$$

Para constelaciones simétricas, la mitad de los valores posibles son el valor negativo de la otra mitad; por lo que, asumiendo equiprobabilidad de los símbolos, el valor medio de las observaciones a la salida del igualador es

$$E[y[k]] = \frac{1}{MN_b} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_b} (a[k] + b[j]) + (a[k] - b[j]), \quad (4.4)$$

siendo  $N_b$  el número total de valores que puede tomar  $|b[k]|$

$$N_b = 2^{L_h - L_w - 3}. \quad (4.5)$$

Como es lógico, y dejando de lado el ruido, el objetivo de un buen igualador es el de eliminar (o al menos reducir en gran parte) el efecto de  $b[k]$  en la salida  $y[k]$ , puesto que es el término que se corresponde con la interferencia intersimbólica.

Una vez explicados los conceptos anteriores se procede como ejemplo a analizar a función de coste del algoritmo CMA.

Como ya se ha explicado antes, el algoritmo CMA es un miembro de la familia de los conocidos como algoritmos de Godard, y tiene la función de coste definida en (2.22) y (2.23).

Recordando la ecuación (4.4) se procede a buscar el valor de  $b[j]$  que minimice la función de coste (2.22), derivándola con respecto a  $b[j]$  e igualándola a 0.

$$\frac{\partial J_{CMA}(\mathbf{w})}{\partial b[j]} = 0 \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{CMA}(\mathbf{w})}{\partial b[j]} &= \frac{4}{MN_b} \sum_{k=1}^M (|a[k] + b[j]|^2 - R_2)(a[k] + b[j]) \\
&- \frac{4}{MN_b} \sum_{k=1}^M (|a[k] - b[j]|^2 - R_2)(a[k] - b[j]) = 0,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

de donde se obtiene como solución  $b[j] = 0$ . Lo cual era un resultado esperado

Si se calcula la segunda derivada para comprobar la existencia de más puntos singulares y para saber si la solución es un mínimo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{CMA}(\mathbf{w})}{\partial b[j]} &= \frac{4}{MN_b} \sum_{k=1}^M (|a[k] + b[j]|^2 - R_2)(a[k] + b[j]) \\
&- \frac{4}{MN_b} \sum_{k=1}^M (|a[k] - b[j]|^2 - R_2)(a[k] - b[j]) = \\
&= \frac{4}{MN_b} \left[ \sum_{k=1}^M ((a[k] + b[j])^2 - R_2)(a[k] + b[j]) - ((a[k] - b[j])^2 - R_2)(a[k] - b[j]) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 J_{CMA}(\mathbf{w})}{\partial^2 b[j]} &= \frac{4}{MN_b} \sum_{k=1}^M \left( 2(a[k] + b[j])^2 + (a[k] + b[j])^2 - R_2 \right) \\
&- \left( -2(a[k] - b[j])^2 + ((a[k] - b[j])^2 - R_2)(-1) \right);
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 J_{CMA}(\mathbf{w})}{\partial^2 b[j]} = \frac{1}{MN_b} \sum_{k=1}^M 24a[k]^2 + 24b[j]^2 - 8R_2, \tag{4.8}$$

donde si se sustituye  $b[j] = 0$  para comprobar que es un mínimo y se observa individualmente cada iteración del sumatorio se ve que

$$\begin{aligned}
24a[k]^2 - 8R_2 &> 0 \\
|a[k]| &> \sqrt{\frac{R_2}{3}},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$a[k]$  debe satisfacer esta condición para que  $b[j] = 0$  sea una solución que minimice la función de coste del algoritmo.

Poniendo como ejemplo constelaciones PAM (simétricas) y con niveles normalizados

$$s[k] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\},$$

se tienen los siguientes promedios

$$E[|s[k]|^2] = \frac{M^2 - 1}{3} \quad y \quad E[|s[k]|^4] = \frac{3M^4 - 10M^2 + 7}{15}.$$

Y en consecuencia

$$R_2 = \frac{E[|s[k]|^4]}{E[|s[k]|^2]} = \frac{3M^4 - 10M^2 + 7}{5(M^2 - 1)}. \quad (4.10)$$

La siguiente tabla proporciona varios valores de interés para distintos tamaños de constelaciones PAM.

| M  | $R_2$ | $\sqrt{\frac{R_2}{3}}$ | $s[k] \in A$              |
|----|-------|------------------------|---------------------------|
| 4  | 8.2   | 1.6533                 | 1, 3                      |
| 8  | 37    | 3.5119                 | 1, 3, 5, 7                |
| 16 | 152.2 | 7.1227                 | 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 |

Tabla 4.1: Valores de los símbolos, de la constante R de CMA y de la condición para distintos tamaños de constelación

Si se recuerda que  $a[k]$  es la convolución del símbolo de entrada y la señal  $c[k]$  (la respuesta conjunta entre el canal y el igualador) en el momento del retardo que necesita el sistema para funcionar y asumiendo una respuesta ideal ( $c[d] = 1$ ), sólo la mitad de los valores de  $a[k]$  cumplen la condición necesaria que permite minimizar la función de coste.

Las siguientes figuras muestran, para una constelación 4-PAM, qué ocurre con la derivada de la función de coste cuando  $a[k]$  cumple con la condición y cuando no la cumple.

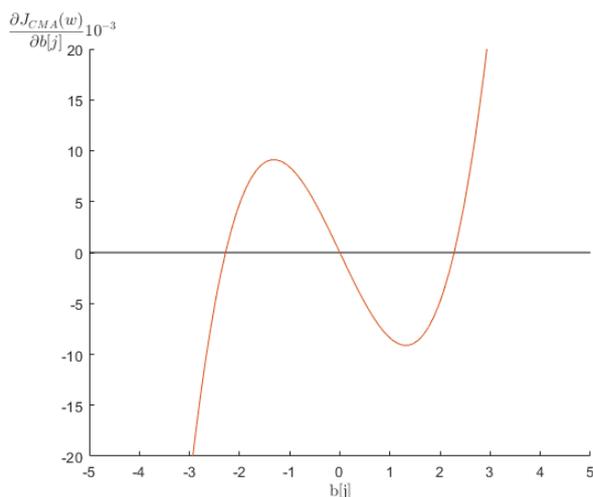


Figura 4.1: Derivada de la función de coste con respecto a  $b[j]$  para  $a[k] = 1$  y  $a[k] = -1$

En la Figura 4.1 se observa la existencia de tres soluciones, aunque sólo una ( $b[j] = 0$ ) es de interés, aparecen también un máximo y un mínimo locales. Estos puntos singulares y las soluciones que no son  $b[j] = 0$  pueden ser perjudiciales para el sistema al intentar llevar los valores a las soluciones erróneas. La situación ideal sería tener una curva que permitiese conducir siempre el gradiente en la dirección de  $b[j] = 0$ , puesto que como se ha demostrado antes es la solución que minimiza la función de coste.

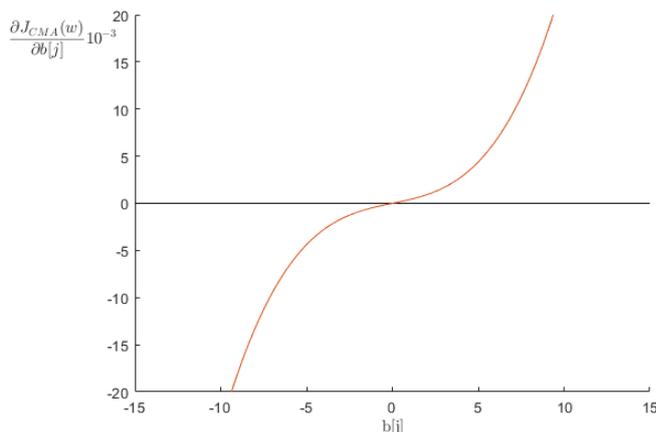


Figura 4.2: Derivada de la función de coste con respecto a  $b[j]$  para  $a[k] = 3$  y  $a[k] = -3$

Como se puede apreciar en la Figura 4.1, al cumplirse la condición desaparecen dos de las soluciones y dos de los puntos singulares de la función, los cuales podrían

llegar a conducir el gradiente en la dirección equivocada (como en la Figura 4.1, quedando únicamente la solución  $b[j] = 0$ ). Además, la gráfica toma una forma más abrupta, lo que permitiría una optimización más rápida de la función de coste.

La principal idea de este apartado es la de incrementar el valor de  $a[k]$  para que más símbolos cumplan con la condición de la ecuación (4.9).

La señal  $a[k]$ , como ya se ha dicho antes, es el resultado de la convolución entre la señal de entrada  $s[k]$  (símbolos de la constelación empleada), el canal  $h[k]$  y el igualador  $w[k]$ .

Puesto que  $s[k]$  sólo puede tomar valores fijos establecidos en la constelación y no dependen del receptor, y al tratarse de igualación ciega  $h[k]$  es desconocido, lo más lógico para el receptor es modificar el igualador  $w[k]$  (el cual se ha definido antes como un vector de coeficientes que sigue la estrategia de tap-centering donde todos valen 0 excepto el central, que vale 1) multiplicándolo por una constante  $\kappa$  al inicio del proceso.

$$\mathbf{w}' = \kappa \mathbf{w} = \kappa [w[0], w[1], \dots, w[L_w - 1]]^T \quad (4.11)$$

Esta técnica en un principio podría aplicarse no sólo al CMA, sino a cualquier algoritmo que se apoyase en el descenso por gradiente estocástico y que satisficiera una condición similar para  $a[k]$  y  $b[k]$  que permitiera optimizar la función de coste correspondiente tal como se ha hecho en las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.9).

El algoritmo CMA que hace uso de la formulación de la máquina de vectores soporte y la versión del algoritmo que propone una resolución iterativa no se ven beneficiados por esta técnica puesto que ambos normalizan los coeficientes de  $\mathbf{w}$  en algún punto de la ejecución (véase por ejemplo, el paso 6 c de los propuestos para resolver mediante el método iterativo del algoritmo MRC en el apartado 3.1.2).

### 4.1.1. Algoritmo CMA mediante descenso por gradiente

Este algoritmo presenta una mejoría notable al escalarse los coeficientes de  $\mathbf{w}$  por un factor  $\kappa$  entre 2 y 6 generalmente, variando ligeramente dependiendo del canal. En la Tabla 4.2 puede verse el aumento de la probabilidad de convergencia hasta en un 51 %, pasando de un 55 % a un 96 % cuando se multiplica por dos el vector de coeficientes al inicializarlo y una reducción a menos de la mitad de las iteraciones necesarias (449 frente a 194).

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.55               | -8.0397           | 449         |
| 2             | 0.96               | -8.0876           | 194         |
| 4             | 0.91               | -8.016            | 232         |
| 5             | 0.88               | -7.9665           | 326         |
| 6             | 0.74               | -8.0538           | 420         |
| 8             | 0.62               | -8.0547           | 520         |
| 10            | 0.48               | -8.0358           | 615         |
| 20            | 0.26               | -7.8677           | 776         |
| 40            | 0.41               | -7.6892           | 1027        |
| 50            | 0.29               | -7.8009           | 824         |
| 60            | 0.4                | -7.6641           | 942         |
| 80            | 0.35               | -7.8628           | 900         |
| 100           | 0.35               | -7.8317           | 920         |

Tabla 4.2: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 5, bloque de 750 muestras

Por otro lado, para canales como el 7 y el 10 (filtros pasa todo) como el empleado en la Tabla 4.3 no se observa ningún aumento significativo de la probabilidad de convergencia. De hecho empeora el rendimiento, partiendo de un 99 % cuando no se reescalan los coeficientes a valores como 62 % y 56 % cuando se multiplican los coeficientes por 2 y 4, respectivamente.

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.99               | -14.3591          | 28          |
| 2             | 0.62               | -14.0261          | 117         |
| 4             | 0.75               | -14.2805          | 117         |
| 5             | 0.56               | -14.0894          | 159         |
| 6             | 0.83               | -14.2322          | 103         |
| 8             | 0.8                | -14.0958          | 164         |
| 10            | 0.66               | -13.999           | 209         |
| 20            | 0.58               | -14.2307          | 232         |
| 40            | 0.63               | -13.9263          | 265         |
| 50            | 0.81               | -13.8156          | 198         |
| 60            | 0.7                | -13.7068          | 278         |
| 80            | 0.64               | -14.1926          | 301         |
| 100           | 0.74               | -13.9093          | 246         |

Tabla 4.3: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 256-QAM, canal 7, bloque de 750 muestras

### 4.1.2. Algoritmo MCMA mediante descenso por gradiente

En el algoritmo MCMA se obtienen resultados similares a los del CMA, puesto que son relativamente parecidos y ambos emplean la técnica de descenso por gradiente.

En la Tabla 4.4 se observa que para los valores 5 y 6 de  $\kappa$  la probabilidad de convergencia aumenta en un 50 % (de un 42 % se incrementa hasta un 91 %) lo cual supone una gran mejora.

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.42               | -15.5386          | 441         |
| 2             | 0.4                | -15.8563          | 401         |
| 4             | 0.87               | -15.9473          | 190         |
| 5             | 0.91               | -15.6196          | 220         |
| 6             | 0.91               | -15.0232          | 230         |
| 8             | 0.8                | -15.9775          | 271         |
| 10            | 0.79               | -15.0124          | 362         |
| 20            | 0.57               | -15.1242          | 411         |
| 40            | 0.43               | -15.4575          | 500         |
| 50            | 0.43               | -15.3558          | 522         |
| 60            | 0.36               | -15.8878          | 667         |
| 80            | 0.23               | -15.5745          | 687         |
| 100           | 0.44               | -15.5394          | 692         |

Tabla 4.4: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 64-QAM, canal 1, bloque de 500 muestras

Por otra parte, en la Tabla 4.5 podemos ver que en el canal 10 existe un comportamiento similar al del CMA, no se aprecia un aumento de la probabilidad de convergencia.

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 1                  | -17.2252          | 84          |
| 2             | 0.88               | -17.6239          | 26          |
| 4             | 0.29               | -17.5328          | 161         |
| 5             | 0.52               | -17.1461          | 91          |
| 6             | 0.43               | -18.138           | 117         |
| 8             | 0.23               | -17.557           | 117         |
| 10            | 0.51               | -17.4022          | 142         |
| 20            | 0.51               | -17.199           | 153         |
| 40            | 0.49               | -17.4863          | 160         |
| 50            | 0.72               | -17.3352          | 139         |
| 60            | 0.38               | -16.882           | 205         |
| 80            | 0.57               | -17.6345          | 189         |
| 100           | 0.72               | -17.4789          | 183         |

Tabla 4.5: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 350 muestras

### 4.1.3. Algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM

La acción de introducir un proceso de normalización para resolver la formulación de la máquina de vectores soporte anula cualquier posibilidad de mejora del rendimiento basada en la multiplicación de los coeficientes de  $\mathbf{w}$  por un factor  $\kappa$ . Debido a esto (en parte esperado), sólo se han realizado pruebas para una constelación 16-QAM.

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.82               | -7.1557           | 27          |
| 2             | 0.79               | -7.8649           | 27          |
| 4             | 0.8                | -7.9972           | 28          |
| 5             | 0.79               | -7.9655           | 27          |
| 6             | 0.78               | -7.0455           | 28          |
| 8             | 0.76               | -7.0748           | 28          |
| 10            | 0.79               | -8.2302           | 27          |
| 20            | 0.77               | -7.2047           | 29          |
| 40            | 0.82               | -7.9407           | 25          |
| 50            | 0.8                | -7.1287           | 27          |
| 60            | 0.75               | -7.1133           | 27          |
| 80            | 0.81               | -7.0156           | 27          |
| 100           | 0.76               | -7.026            | 28          |

Tabla 4.6: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 5, bloque de 750 muestras

Como se puede observar y ya se había adelantado previamente, el número de iteraciones necesario para alcanzar la convergencia es muchísimo menor, por ejemplo si se comparan las Tablas 4.2 y 4.6 se ve que en el mejor de los casos de la primera el número de iteraciones necesario es 194 (para un  $\kappa = 2$ ), frente a 29 ( $\kappa = 20$ ) en el peor de los casos empleando la formulación de la SVM. Parte del atractivo de emplear la formulación de máquinas de vectores soporte reside aquí.

No obstante, aunque el número de iteraciones es menor con formulación de la máquina de vectores soporte, cuando se multiplica  $\mathbf{w}$  en el método CMA con descenso por gradiente se obtiene una mayor probabilidad de convergencia (0.96 frente a 0.79) y un menor nivel de ISI residual (-8.0876 dB frente a -7.8514 dB).

#### 4.1.4. Algoritmo MRC mediante descenso por gradiente

En este caso, al emplear la técnica de descenso por gradiente puede verse un mejor rendimiento, como se muestra en la Tabla 4.7, empleando valores de  $\kappa$  entre 2 y 10 en este caso (frente a un 85 % cuando no se reescalan los coeficientes hasta un 100 % para un  $\kappa = 5$ ). Al igual que los dos primeros algoritmos evaluados comienza a perder eficacia para valores grandes de  $\kappa$ .

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.85               | -25.1879          | 91          |
| 2             | 0.96               | -25.4399          | 134         |
| 4             | 0.98               | -25.7557          | 216         |
| 5             | 1                  | -25.774           | 243         |
| 6             | 0.93               | -25.5843          | 282         |
| 8             | 0.97               | -25.7299          | 305         |
| 10            | 0.99               | -25.682           | 337         |
| 20            | 0.87               | -25.77            | 439         |
| 40            | 0.75               | -25.9845          | 549         |
| 50            | 0.57               | -25.9528          | 602         |
| 60            | 0.64               | -25.7041          | 659         |
| 80            | 0.68               | -25.7319          | 685         |
| 100           | 0.59               | -25.7871          | 729         |

Tabla 4.7: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 8, bloque de 500 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 4$

El hecho de emplear canales como el 7 y el 10 (como en la Tabla 4.8) no muestra ninguna mejora apreciable, al igual que ocurría con los anteriores algoritmos.

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.31               | -33.9854          | 325         |
| 2             | 0.31               | -32.9451          | 473         |
| 4             | 0.33               | -30.9412          | 520         |
| 5             | 0.33               | -34.8113          | 567         |
| 6             | 0.25               | -34.771           | 684         |
| 8             | 0.32               | -33.1102          | 661         |
| 10            | 0.41               | -34.4491          | 684         |
| 20            | 0.36               | -33.1319          | 779         |
| 40            | 0.36               | -31.1235          | 835         |
| 50            | 0.36               | -32.9425          | 939         |
| 60            | 0.36               | -34.09            | 959         |
| 80            | 0.3                | -33.4615          | 955         |
| 100           | 0.25               | -34.6042          | 969         |

Tabla 4.8: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 7, bloque de 750 muestras,  $l = 4$ ,  $p = 5$

#### 4.1.5. Algoritmo MRC mediante método matricial iterativo

En este método no existe ninguna mejoría apreciable porque como ya se ha dicho, los coeficientes del igualador  $\mathbf{w}$  se normalizan en cada iteración del método antes de hallar los valores de  $\mathbf{y}$ . Como puede verse en la Tabla 4.9 las probabilidades de convergencia se mantiene en el mismo nivel.

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 1                  | -27.6913          | 4           |
| 2             | 1                  | -27.7307          | 5           |
| 4             | 1                  | -27.7249          | 6           |
| 5             | 1                  | -27.6703          | 5           |
| 6             | 1                  | -27.6935          | 5           |
| 8             | 1                  | -27.7454          | 6           |
| 10            | 1                  | -27.6959          | 5           |
| 20            | 1                  | -27.2934          | 5           |
| 40            | 1                  | -27.2945          | 5           |
| 50            | 1                  | -27.5002          | 5           |
| 60            | 1                  | -27.4621          | 5           |
| 80            | 1                  | -27.7047          | 5           |
| 100           | 0.99               | -27.6803          | 5           |

Tabla 4.9: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 8, bloque de 500 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 4$

## 4.2. Desempeño del algoritmo MRC

Recordando lo que se ha explicado previamente, para ver la efectividad del algoritmo MRC se propone una comparación directa (mostrada en las siguientes tablas) entre éste y el CMA resuelto con la formulación de una máquina de vectores soporte.

No se ha vuelto a estudiar el efecto del multiplicar los coeficientes de  $\mathbf{w}$  en esta prueba, puesto que ya se ha hecho anteriormente y se ha visto que debido a los procesos de normalización de los algoritmos es completamente inútil.

Se puede ver en las Tablas 4.10 y 4.11 que el algoritmo MRC es especialmente efectivo para tamaños pequeños de bloque (250, 350 o incluso 500 muestras dependiendo del canal, obteniendo mayores probabilidades de convergencia, con niveles inferiores de ISI residual y necesitando el mismo o un menor número de iteraciones.

| Algoritmo              | SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|------------------------|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| CMA                    | 20       | 0.14               | -11.0526          | 46          |
| CMA                    | 30       | 0.22               | -11.2921          | 46          |
| MRC ( $l = 1, p = 2$ ) | 20       | 0.89               | -13.0788          | 25          |
| MRC ( $l = 1, p = 2$ ) | 30       | 0.91               | -13.693           | 29          |
| MRC ( $l = 1, p = 3$ ) | 20       | 0.99               | -17.1347          | 7           |
| MRC ( $l = 1, p = 3$ ) | 30       | 1                  | -18.6033          | 10          |
| MRC ( $l = 2, p = 3$ ) | 20       | 1                  | -23.4225          | 3           |
| MRC ( $l = 2, p = 3$ ) | 30       | 1                  | -31.4403          | 3           |

Tabla 4.10: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM y del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 250 muestras

| Algoritmo              | SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|------------------------|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| CMA                    | 20       | 0.45               | -12.173           | 24          |
| CMA                    | 30       | 0.67               | -12.5173          | 23          |
| MRC ( $l = 1, p = 2$ ) | 20       | 0.89               | -16.2045          | 11          |
| MRC ( $l = 1, p = 2$ ) | 30       | 0.96               | -17.0236          | 10          |
| MRC ( $l = 1, p = 3$ ) | 20       | 0.98               | -20.6752          | 7           |
| MRC ( $l = 1, p = 3$ ) | 30       | 0.96               | -23.1853          | 7           |
| MRC ( $l = 2, p = 3$ ) | 20       | 0.97               | -25.6448          | 7           |
| MRC ( $l = 2, p = 3$ ) | 30       | 0.97               | -33.9738          | 9           |

Tabla 4.11: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM y del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 350 muestras

Sin embargo, para tamaños mayores no se aprecia una mejoría tan notoria en la probabilidad de convergencia. De hecho, en alguna ocasión no se aprecia ninguna mejora significativa en dicha probabilidad con respecto al CMA empleando la formulación de la máquina de vectores soporte, como puede verse en la Tabla 4.12. No obstante, aunque la probabilidad de convergencia no aumente, el nivel de ISI residual con el que se alcanza la convergencia en el algoritmo MRC es muchas ocasiones menor (frente a un valor de -16.1827 dB para el CMA, con el algoritmo MRC se consiguen -29.5953 dB).

| Algoritmo              | SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|------------------------|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| CMA                    | 20       | 0.93               | -16.1827          | 20          |
| CMA                    | 30       | 0.96               | -16.967           | 19          |
| MRC ( $l = 1, p = 2$ ) | 20       | 0.85               | -20.7088          | 17          |
| MRC ( $l = 1, p = 2$ ) | 30       | 0.86               | -22.1074          | 17          |
| MRC ( $l = 1, p = 3$ ) | 20       | 0.88               | -22.9809          | 12          |
| MRC ( $l = 1, p = 3$ ) | 30       | 0.9                | -26.1722          | 12          |
| MRC ( $l = 2, p = 3$ ) | 20       | 0.86               | -25.2225          | 17          |
| MRC ( $l = 2, p = 3$ ) | 30       | 0.88               | -29.5953          | 16          |

Tabla 4.12: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM y del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 9, bloque de 750 muestras

### 4.3. Análisis de las funciones de coste a la salida del igualador

En esta sección se muestran una serie de gráficas que corresponden con los valores que toman las funciones de coste definidas en (2.22) y en (2.28) para distintos valores de la salida  $y[k]$ , primero para una constelación 4-PAM, y posteriormente para una 8-PAM.

Cabe destacar que, mientras que para el CMA la función de coste puede llegar a tomar valores muy grandes (para  $y[k] = 0$  en una 4-PAM llega a valer 100 y en una 8-PAM alcanza los 1500) la función de coste del otro algoritmo se mueve entre valores casi siempre negativos o como máximo 0 o alrededor de 0.

Y además, en la función de coste del algoritmo MRC, para valores grandes de  $l$  y  $p$  (por ejemplo 2 y 3, ó 4 y 5) hay muchos más valores de  $y[k]$  que hacen que la curva tome un comportamiento más plano en su parte central y que en los extremos tenga mínimos más abruptos. El hecho de aumentar el valor de  $l$  tiene como consecuencia que la curva tome un comportamiento más planos en la parte central. Por otra parte, si se va aumentando  $p$ , los valores mínimos de  $J_{MRC}$  toman valores aún menores.

Esto tiene una explicación lógica debido a que, teniendo en cuenta que  $l$  no va a ser mayor que  $p$  (puesto que se producirían máximos locales en vez de mínimos), para valores grandes de  $l$  (cuanto más se acerque a  $p$ )  $R_{p,l}$  aumentará (ya que como se ha explicado antes  $p$  debe ser mayor que  $l$ ) y la diferencia de potencias de  $y[k]$ , y como consecuencia  $J_{MRC}$ , será menor al reducir la contribución del parámetro  $p$  dividiendo el término que depende de él en la resta por  $R_{p,l}$ .

$$J_{MRC} = E \left[ \frac{1}{R_{p,l}} \frac{y[k]^{2p}}{2p} - \frac{y[k]^{2l}}{2l} \right], R_{p,l} = \frac{E[s[k]^{2p}]}{E[s[k]^{2l}]} \quad (4.12)$$

Por otra parte, si se aumenta  $p$  y se reescribe la ecuación anterior como

$$J_{MRC} = E \left[ \frac{E[s[k]^{2l}]}{E[s[k]^{2p}]} \frac{y[k]^{2p}}{2p} - \frac{y[k]^{2l}}{2l} \right], \quad (4.13)$$

se observa que  $E[s[k]^{2p}]2p$  crece más rápido que  $y[k]^{2p}$  consiguiendo cada vez valores más pequeños y haciendo que la función de coste obtenga mínimos más pronunciados.

En el CMA los valores de  $y[k]$  que minimizan la función de coste son  $\pm\sqrt{R_p}$  (se debe recordar que los valores de  $R_p$  del CMA para constelaciones 4-PAM y 8-PAM son 8.2 y 37, respectivamente).

| Constelación | $R_p$ | $\sqrt{R_p}$ |
|--------------|-------|--------------|
| 4-PAM        | 8.2   | 2.864        |
| 8-PAM        | 37    | 6.083        |

Tabla 4.13: Valores que minimizan la función de coste de CMA a la salida del igualador

En el algoritmo MRC, los valores que minimizan  $J_{MRC}$  son  $y[k] = \pm \sqrt[p-l]{R_{p,l}}$ .

| Constelación | $l$ | $p$ | $R_{p,l}$ | $\sqrt[p-l]{R_{p,l}}$ |
|--------------|-----|-----|-----------|-----------------------|
| 4-PAM        | 1   | 2   | 8.2       | 2.864                 |
| 4-PAM        | 1   | 3   | 73        | 2.923                 |
| 4-PAM        | 2   | 3   | 8.9024    | 2.984                 |
| 4-PAM        | 4   | 5   | 8.9988    | 2.998                 |
| 8-PAM        | 1   | 2   | 37        | 6.083                 |
| 8-PAM        | 1   | 3   | 1595.3    | 6.32                  |
| 8-PAM        | 2   | 3   | 43.1158   | 6.5667                |
| 8-PAM        | 4   | 5   | 47.436    | 6.8874                |

Tabla 4.14: Valores que minimizan la función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador

Si bien tener un valor de  $l$  bajo y uno de  $p$  alto se traduce en tener mínimos más pronunciados y menos valores que hagan 0 la función de coste (consiguiendo que el gradiente avance más deprisa); emplear valores cercanos de  $l$  y  $p$  implica tener menos curvas, una respuesta plana que permita que el gradiente avance con menor velocidad. Teniendo en cuenta estas consideraciones y dependiendo de la situación convendrá escoger unos valores u otros de los parámetros  $l$  y  $p$ .

La Figura 4.3 agrupa varias de las curvas normalizadas, para ver el comporta-

miento de las mismas simultáneamente y permitir compararlas más fácilmente en una constelación 4-PAM. En el Apéndice D se adjuntan las Figuras D.1, D.2, D.3, D.4, D.5 y D.6, donde se ven los valores reales que toman las funciones de coste de manera individual.

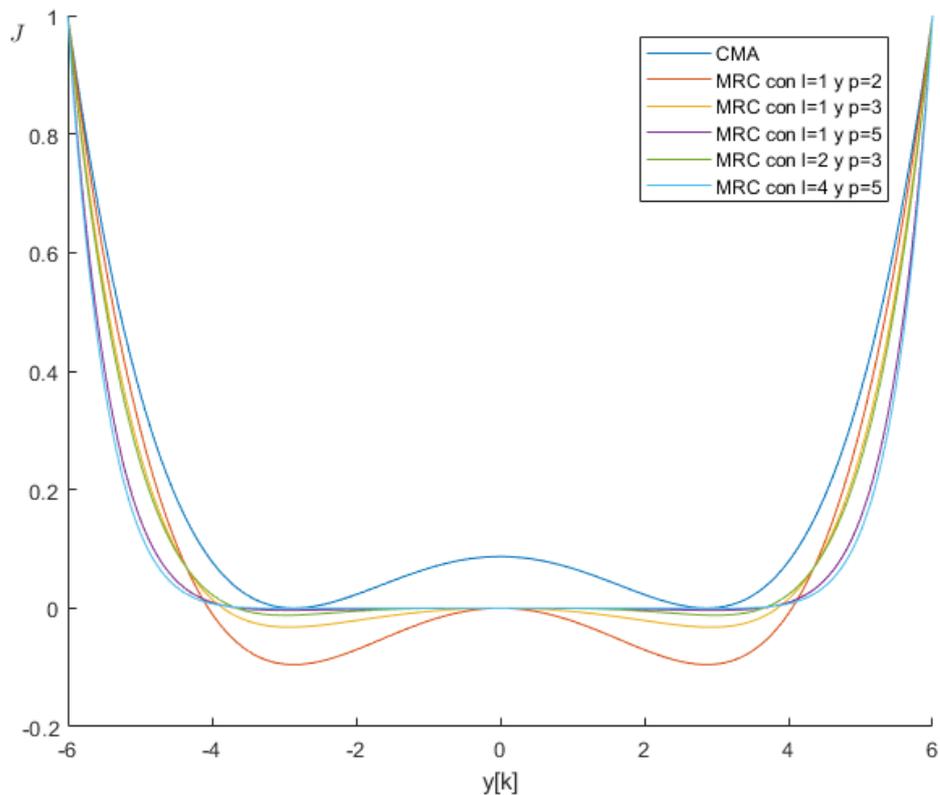


Figura 4.3: Contribución de los parámetros  $l$  y  $p$  en la función de coste a la salida del igualador para una 4-PAM

Al igual que antes, la Figura 4.4 agrupa las curvas normalizadas para una constelación 8-PAM, para ver el comportamiento de las mismas simultáneamente y permitir compararlas más fácilmente. Por otro lado, en el Apéndice D las Figuras D.7, D.8, D.9, D.10, D.11 y D.12 muestran los valores que toma cada función de coste individualmente.

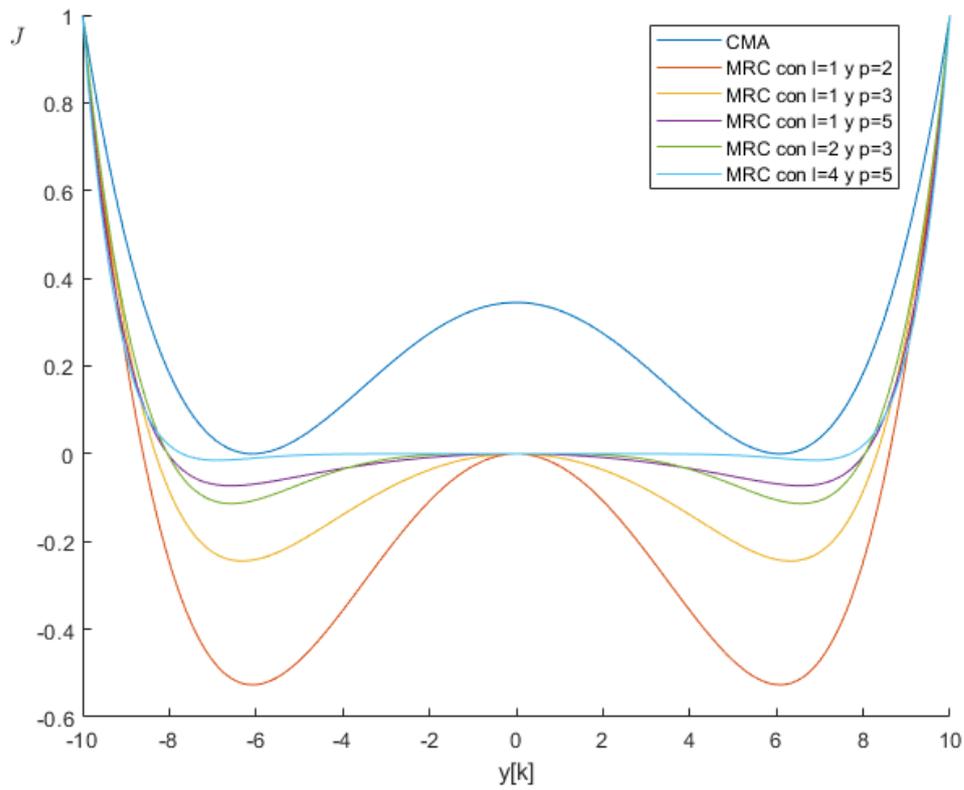


Figura 4.4: Contribución de los parámetros  $l$  y  $p$  en la función de coste a la salida del igualador para una 8-PAM

# Capítulo 5

## Conclusiones y líneas futuras

En este trabajo de fin de grado se han propuesto, explicado y analizado una serie de técnicas que tienen cierta utilidad en la igualación ciega, siendo dos de ellas mejoras sustanciales con resultados de interés.

### 5.1. Modificación del factor de escala

La primera técnica pretende servir como mejora a la estrategia típica de inicialización del vector  $\mathbf{w}$  para algoritmos basados en descenso por gradiente, obteniendo mejoras de hasta un 30 % en las mejores situaciones, con convergencia más rápida y con menor interferencia intersimbólica.

En esencia, se puede ver cómo la probabilidad de convergencia va aumentando a medida que el multiplicador se acerca a valores alrededor de 2 y 6. Y no solo eso, en muchas ocasiones también se observa que además, el número de iteraciones necesario es menor y que el nivel de ISI residual es más bajo que los valores asociados a un  $\mathbf{w}$  sin multiplicador.

No obstante, cuando el factor  $\kappa$  toma valores demasiado grandes el efecto se desvanece y, en ocasiones, dificulta aún más la tarea de estimación del canal ofreciendo un rendimiento menor.

Y, lógicamente, el hecho de aumentar el tamaño de las constelaciones y del bloque de muestras a procesar aumenta los tiempos de cómputo. Aunque es interesante el hecho de que para constelaciones grandes y bloques de muestras de gran tamaño la mejora en la convergencia es menor que para constelaciones y bloques de tamaño más reducido. Es especialmente eficaz para tamaños pequeños de bloque.

También, se ha de destacar que los canales 5 y 6 tienen ceros en el círculo unidad del plano  $Z$  y ofrece valores de ISI residual mayores a los de otros canales generalmente. Aun así, en estos canales en los cuales la igualación puede ser más complicada también se aprecia una mejoría notable.

Como excepción se debe mencionar que para transmisiones en el canal 7 no se observa ninguna mejora. Es más, en muchas ocasiones cuando se multiplican los coeficientes de  $\mathbf{w}$  se requieren más iteraciones para alcanzar la convergencia y se converge con valores mayores de ISI residual.

Algo similar ocurre también con el canal 10. Ambos canales tienen una respuesta en frecuencia y en el plano  $Z$  parecida (el canal 10 es  $H(Z) = 1$  y el canal 7 es un filtro pasa todo de primer orden sacado de [20]), si se comparan las figuras (A.6) y (A.9) se puede observar por ejemplo que las figuras del dominio de la frecuencia son idénticas, por lo que no es extraño que manifiesten comportamientos similares.

## 5.2. Desempeño del algoritmo MRC

La segunda técnica es un algoritmo nuevo, que en comparación con el CMA, para tamaños pequeños de bloque llega a ofrecer el doble de convergencia en las mejores situaciones y necesita entre la mitad y la tercera parte de iteraciones para alcanzar la convergencia. Este algoritmo podría resultar especialmente útil en sistemas limitados en recursos, puesto que ofrece mejores resultados para menores tamaños de bloque y con menos iteraciones.

### 5.3. Análisis de las funciones de coste a la salida del igualador

Por otra parte, analizando las funciones de coste a la salida del igualador se ha visto que dependiendo de los valores de los parámetros  $l$  y  $p$  seleccionados la función se comporta de una manera u otra, desarrollando curvas más o menos abruptas, teniendo utilidad en situaciones diversas del proceso de igualación.

### 5.4. Líneas futuras

Como líneas futuras podría estudiarse el efecto de escalar los coeficientes del vector  $\mathbf{w}$  para casos SIMO y MIMO, y estudiar el comportamiento del algoritmo nuevo en sus dos formulaciones (descenso por gradiente y procedimiento iterativo algebraico) también para igualadores de entrada simple y salida múltiple o entradas y salidas múltiples. Además, teniendo en cuenta el efecto de emplear unos valores u otros de los términos  $l$  y  $p$  en la función de coste sería interesante el desarrollo de algún mecanismo adaptativo que permita ir cambiándolos.

# Capítulo 6

## Planificación y presupuesto

En este capítulo se detallan las tareas realizadas que comprenden la totalidad del trabajo de fin grado así como el presupuesto del mismo.

### 6.1. Planificación y lista de tareas

A lo largo de la realización del trabajo de fin de grado, se han realizado las siguientes actividades, las cuales han seguido la disposición temporal del diagrama de Gantt de la Figura 6.1.

#### Lista de tareas del TFG

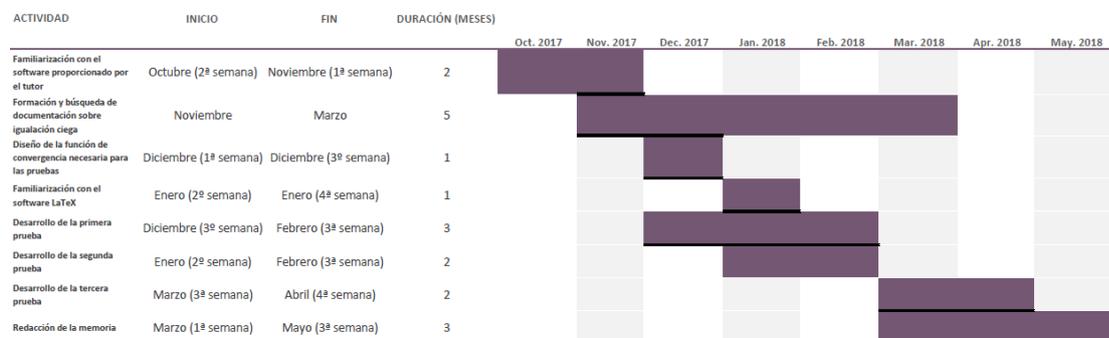


Figura 6.1: Diagrama de Gantt de las tareas del trabajo de fin de grado

## 6.2. Presupuesto

En la siguientes tablas se desglosa el presupuesto de este trabajo de fin de grado, las cuales corresponden a una simulación del precio aproximado a pagar si se encargase dicho trabajo a una empresa profesional en una duración estimada de 300 horas. El presupuesto presentado se divide en costes de personal, de equipamiento e indirectos de la universidad.

### 6.2.1. Costes de personal

La Tabla 6.1 muestra la parte del presupuesto total del trabajo facturable como mano de obra.

| Concepto                | Cantidad (horas) | Coste Unitario (€/hora) | Coste Total (€) |
|-------------------------|------------------|-------------------------|-----------------|
| Desarrollo del software | 180              | 11                      | 1980            |
| Redacción de la memoria | 120              | 8                       | 960             |
| Supervisión del trabajo | 6                | 13                      | 78              |
| Subtotal                |                  |                         | 3018            |

Tabla 6.1: Costes de personal

### 6.2.2. Costes de equipamiento

En la Tabla 6.2 se muestran las cantidades a facturar referidas el equipamiento teniendo en cuenta tanto su vida útil como la duración del trabajo de fin de grado, que es aproximadamente unos 9 meses.

Cabe destacar que la licencia de MATLAB tiene un periodo de validez de 1 año, mientras que el ordenador tiene un periodo de vida útil aproximado de unos 4 años, así como el sistema operativo y el editor de texto.

| Material               | Concepto               | Cantidad | Coste Unitario(€) | Vida Útil (años) | Tiempo de uso (meses) | Coste Total(€) |
|------------------------|------------------------|----------|-------------------|------------------|-----------------------|----------------|
| Medion Akoya BL77      | Ordenador de sobremesa | 1        | 574.99            | 4                | 9                     | 107.81         |
| Ubuntu 16.04 LTS       | Sistema Operativo      | 1        | 0                 | 4                | 9                     | 0              |
| LaTeX                  | Editor de texto        | 1        | 0                 | 4                | 9                     | 0              |
| Licencia MATLAB R2017b | Software matemático    | 1        | 69                | 1                | 9                     | 51.75          |
| Subtotal               |                        |          |                   |                  |                       | 159.56         |

Tabla 6.2: Costes de equipamiento

### 6.2.3. Costes indirectos de la universidad

En la Tabla 6.3 se recoge el 15% de los costes directos, puesto que es el porcentaje que se factura por este concepto para proyectos de investigación en convocatorias competitivas en los contratos establecidos de acuerdo al Art. 83 de la Ley Orgánica de Universidades.

| Concepto               | Cantidad | Coste Unitario(€) | Coste Total(€) |
|------------------------|----------|-------------------|----------------|
| Costes de personal     | 0.15     | 3018              | 452.7          |
| Costes de equipamiento | 0.15     | 159.56            | 23.94          |
| Subtotal               |          |                   | 476.64         |

Tabla 6.3: Costes indirectos de la universidad

### 6.2.4. Coste total

El coste total de este trabajo de fin de grado, desglosado en la Tabla 6.4, se corresponde con la suma de todos los costes anteriormente mostrados.

| Concepto                 | Cantidad | Coste Unitario(€) | Coste Total(€) |
|--------------------------|----------|-------------------|----------------|
| Costes de personal       | 1        | 3018              | 3018           |
| Costes de equipamiento   | 1        | 159.56            | 159.56         |
| Costes de la universidad | 1        | 476.64            | 476.64         |
| Subtotal                 |          |                   | 3654.2         |

Tabla 6.4: Coste total del trabajo de fin de grado

# Anexos

# Apéndice A

## Canales empleados

Para las pruebas realizadas de la modificación del factor de escala y del desempeño del nuevo algoritmo MRC se han empleado 10 canales distintos. A continuación se muestran las transformadas  $Z$  de los canales empleados:

- Canal 1:

$$H_1(z) = \frac{e^{j\pi/4}}{1,41} [0,4 - 0,6z^{-1} + 1,1z^{-2} - 0,5z^{-3} + 0,1z^{-4}] \quad (\text{A.1})$$

- Canal 2:

$$H_2(z) = \frac{1}{1,41} [0,4 - 0,6z^{-1} + 1,1z^{-2} - 0,5z^{-3} + 0,1z^{-4}] \quad (\text{A.2})$$

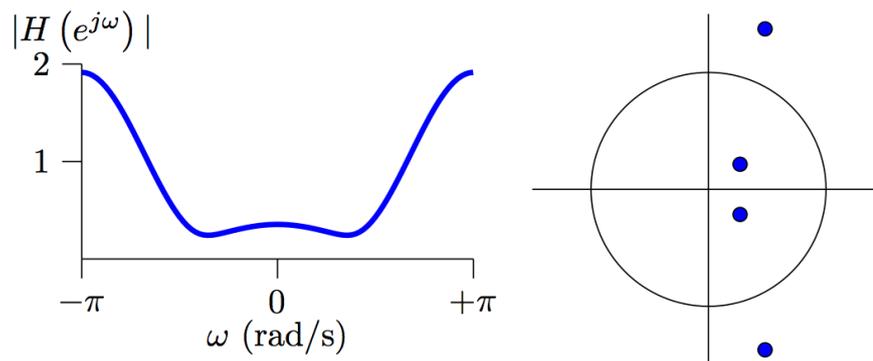


Figura A.1: Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 1 y del Canal 2

■ Canal 3:

$$H_3(z) = [0,2258 + 0,5161z^{-1} + 0,6452z^{-2} + 0,5161z^{-3}] \quad (\text{A.3})$$

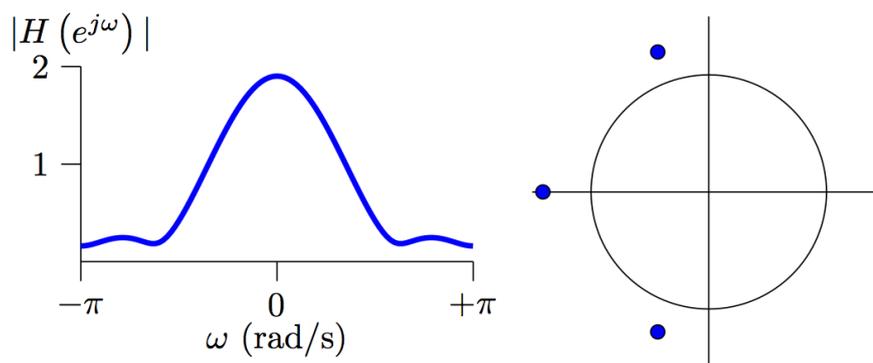


Figura A.2: Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 3

■ Canal 4:

$$H_4(z) = [0,2258 + 0,5161z^{-1} + 0,6452z^{-2} - 0,5161z^{-3}] \quad (\text{A.4})$$

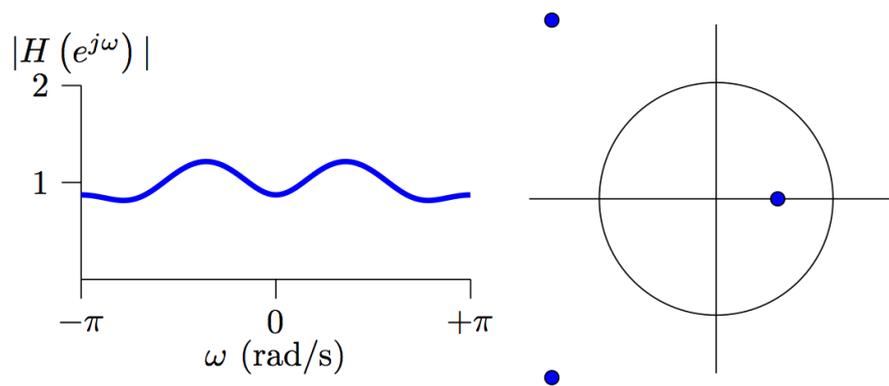


Figura A.3: Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 4

■ Canal 5:

$$H_5(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 + z^{-1} + z^{-2}] \quad (\text{A.5})$$

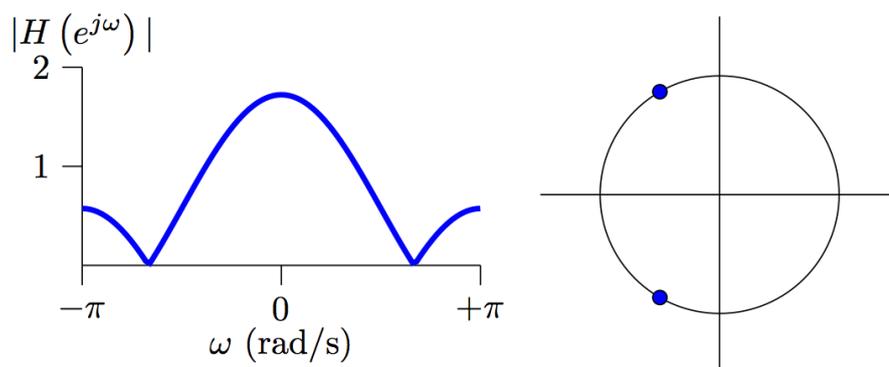


Figura A.4: Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 5

■ Canal 6:

$$H_6(z) = \sqrt{\frac{2}{3}} [0,5 + z^{-1} + 0,5z^{-2}] \quad (\text{A.6})$$

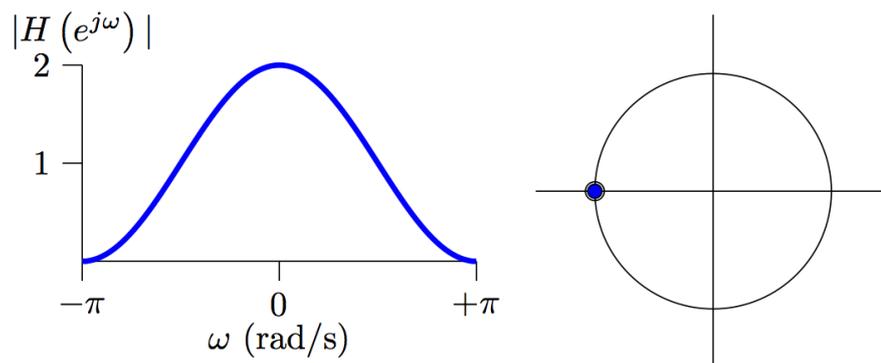


Figura A.5: Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 6 (los dos ceros coinciden)

- Canal 7:

$$H_7(z) = \frac{0,7 - z^{-1}}{1 - 0,7z^{-1}} e^{j\pi/4} \quad (\text{A.7})$$

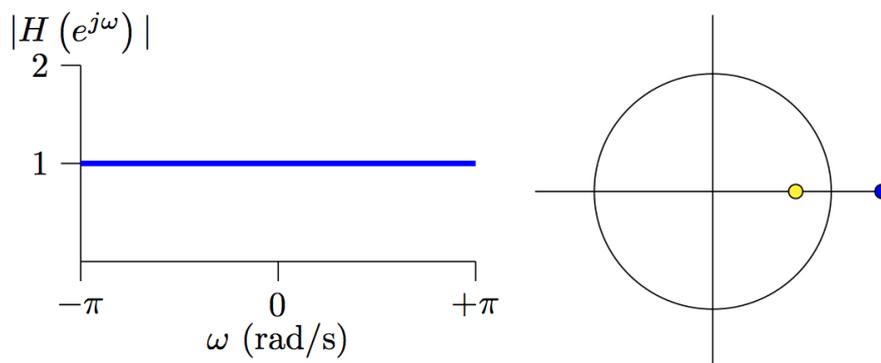


Figura A.6: Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros (azul) y polos (amarillo) del Canal 7

- Canal 8:

$$H_8(z) = [0,2 - 0,4z^{-1} + z^{-2} + 0,6z^{-3} - 0,3z^{-4} + 0,1z^{-5}] \quad (\text{A.8})$$

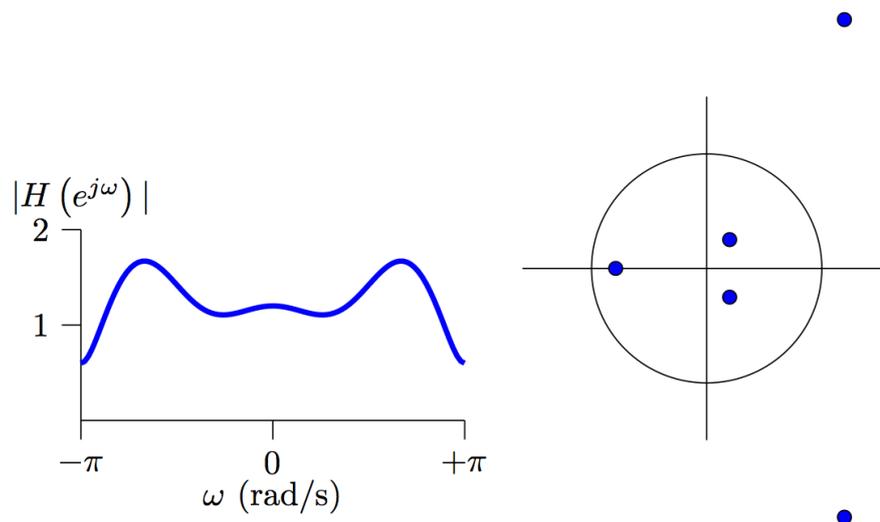


Figura A.7: Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 8

■ Canal 9:

$$H_9(z) = \frac{1}{\sqrt{4,75}} [(0,2+0,3j) + (0,9+0,9j)z^{-1} + (0,9-0,8j)z^{-2} + (0,8+0,9j)z^{-3} + (0,3-0,1j)z^{-4}] \quad (\text{A.9})$$

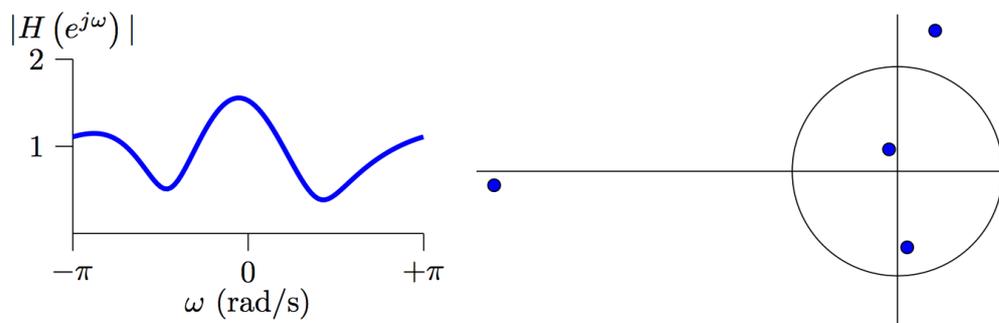


Figura A.8: Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 9

■ Canal 10:

$$H_{10}(z) = 1 \quad (\text{A.10})$$

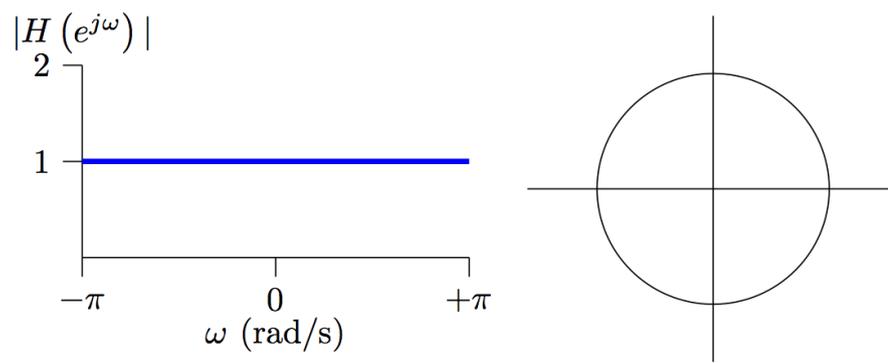


Figura A.9: Respuesta en frecuencia y diagrama de ceros del Canal 10

## Apéndice B

### Tablas de resultados de la modificación del factor de escala

#### B.1. Tablas de resultados del algoritmo CMA mediante descenso por gradiente

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.4                | -12.2629          | 355         |
| 2             | 0.43               | -12.3549          | 237         |
| 4             | 0.72               | -12.098           | 128         |
| 5             | 0.74               | -12.3012          | 163         |
| 6             | 0.77               | -12.2022          | 190         |
| 8             | 0.65               | -12.205           | 213         |
| 10            | 0.78               | -12.289           | 245         |
| 20            | 0.57               | -12.4003          | 308         |
| 40            | 0.35               | -12.1694          | 440         |
| 50            | 0.42               | -12.5093          | 506         |
| 60            | 0.35               | -12.3296          | 473         |
| 80            | 0.28               | -12.9395          | 487         |
| 100           | 0.19               | -12.634           | 610         |

Tabla B.1: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 1, bloque de 350 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.05               | -12.0097          | 649         |
| 2             | 0.09               | -11.5605          | 218         |
| 4             | 0.18               | -11.1901          | 208         |
| 5             | 0.22               | -11.5188          | 211         |
| 6             | 0.17               | -11.0985          | 238         |
| 8             | 0.14               | -11.1771          | 184         |
| 10            | 0.15               | -11.8935          | 233         |
| 20            | 0.11               | -11.2814          | 504         |
| 40            | 0.02               | -10.6465          | 361         |
| 50            | 0.04               | -11.1329          | 460         |
| 60            | 0.03               | -11.9267          | 576         |
| 80            | 0.03               | -10.9244          | 1075        |
| 100           | 0.02               | -10.3944          | 630         |

Tabla B.2: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 2, bloque de 250 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.55               | -8.0397           | 449         |
| 2             | 0.96               | -8.0876           | 194         |
| 4             | 0.91               | -8.016            | 232         |
| 5             | 0.88               | -7.9665           | 326         |
| 6             | 0.74               | -8.0538           | 420         |
| 8             | 0.62               | -8.0547           | 520         |
| 10            | 0.48               | -8.0358           | 615         |
| 20            | 0.26               | -7.8677           | 776         |
| 40            | 0.41               | -7.6892           | 1027        |
| 50            | 0.29               | -7.8009           | 824         |
| 60            | 0.4                | -7.6641           | 942         |
| 80            | 0.35               | -7.8628           | 900         |
| 100           | 0.35               | -7.8317           | 920         |

Tabla B.3: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 5, bloque de 750 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.99               | -14.3591          | 28          |
| 2             | 0.62               | -14.0261          | 117         |
| 4             | 0.75               | -14.2805          | 117         |
| 5             | 0.56               | -14.0894          | 159         |
| 6             | 0.83               | -14.2322          | 103         |
| 8             | 0.8                | -14.0958          | 164         |
| 10            | 0.66               | -13.999           | 209         |
| 20            | 0.58               | -14.2307          | 232         |
| 40            | 0.63               | -13.9263          | 265         |
| 50            | 0.81               | -13.8156          | 198         |
| 60            | 0.7                | -13.7068          | 278         |
| 80            | 0.64               | -14.1926          | 301         |
| 100           | 0.74               | -13.9093          | 246         |

Tabla B.4: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 256-QAM, canal 7, bloque de 750 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.32               | -11.7009          | 208         |
| 2             | 0.48               | -11.8229          | 117         |
| 4             | 0.54               | -11.8339          | 115         |
| 5             | 0.48               | -11.7275          | 207         |
| 6             | 0.36               | -11.8371          | 169         |
| 8             | 0.45               | -11.9229          | 160         |
| 10            | 0.41               | -11.9726          | 175         |
| 20            | 0.27               | -11.8             | 232         |
| 40            | 0.26               | -12.036           | 363         |
| 50            | 0.21               | -11.9487          | 357         |
| 60            | 0.13               | -11.8241          | 377         |
| 80            | 0.12               | -11.8964          | 368         |
| 100           | 0.17               | -11.2885          | 370         |

Tabla B.5: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 256-QAM, canal 8, bloque de 500 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 1                  | -33.526           | 82          |
| 2             | 0.54               | -33.7236          | 86          |
| 4             | 0.37               | -33.7569          | 98          |
| 5             | 0.31               | -33.6981          | 128         |
| 6             | 0.1                | -33.4574          | 129         |
| 8             | 0.34               | -33.6796          | 95          |
| 10            | 0.31               | -33.6835          | 183         |
| 20            | 0.17               | -33.8173          | 250         |
| 40            | 0.11               | -33.6642          | 250         |
| 50            | 0.09               | -33.9221          | 291         |
| 60            | 0.22               | -33.4117          | 318         |
| 80            | 0.1                | -34.2534          | 281         |
| 100           | 0.04               | -32.6684          | 368         |

Tabla B.6: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando descenso por gradiente, modulación 4-QAM, canal 10, bloque de 150 muestras

## B.2. Tablas de resultados del algoritmo MCMA mediante descenso por gradiente

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.42               | -15.5386          | 441         |
| 2             | 0.4                | -15.8563          | 401         |
| 4             | 0.87               | -15.9473          | 190         |
| 5             | 0.91               | -15.6196          | 220         |
| 6             | 0.91               | -15.0232          | 230         |
| 8             | 0.8                | -15.9775          | 271         |
| 10            | 0.79               | -15.0124          | 362         |
| 20            | 0.57               | -15.1242          | 411         |
| 40            | 0.43               | -15.4575          | 500         |
| 50            | 0.43               | -15.3558          | 522         |
| 60            | 0.36               | -15.8878          | 667         |
| 80            | 0.23               | -15.5745          | 687         |
| 100           | 0.44               | -15.5394          | 692         |

Tabla B.7: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 64-QAM, canal 1, bloque de 500 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.15               | -12.0108          | 442         |
| 2             | 0.1                | -12.3521          | 359         |
| 4             | 0.38               | -11.6073          | 155         |
| 5             | 0.35               | -11.471           | 180         |
| 6             | 0.34               | -11.8937          | 302         |
| 8             | 0.36               | -11.9314          | 327         |
| 10            | 0.28               | -11.176           | 291         |
| 20            | 0.14               | -11.4463          | 269         |
| 40            | 0.15               | -11.8546          | 449         |
| 50            | 0.11               | -11.6237          | 583         |
| 60            | 0.1                | -11.5787          | 484         |
| 80            | 0.1                | -11.1736          | 522         |
| 100           | 0.06               | -11.5656          | 436         |

Tabla B.8: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 64-QAM, canal 2, bloque de 250 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.6                | -9.002            | 498         |
| 2             | 0.42               | -9.0208           | 437         |
| 4             | 0.9                | -9.0588           | 286         |
| 5             | 0.9                | -9.0543           | 207         |
| 6             | 0.95               | -9.197            | 156         |
| 8             | 0.96               | -9.3221           | 121         |
| 10            | 0.97               | -9.4819           | 120         |
| 20            | 0.6                | -10.2237          | 195         |
| 40            | 0.06               | -11.0106          | 635         |
| 50            | 0.02               | -8.2044           | 1111        |
| 60            | 0.01               | -10.6381          | 537         |
| 80            | 0                  | -                 | -           |
| 100           | 0                  | -                 | -           |

Tabla B.9: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 4-QAM, canal 6, bloque de 150 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.74               | -16.0248          | 57          |
| 2             | 0.53               | -15.6663          | 142         |
| 4             | 0.45               | -15.4728          | 147         |
| 5             | 0.4                | -16.0424          | 175         |
| 6             | 0.48               | -15.9324          | 1746        |
| 8             | 0.35               | -15.4543          | 194         |
| 10            | 0.44               | -16.1609          | 172         |
| 20            | 0.44               | -16.4383          | 190         |
| 40            | 0.36               | -15.735           | 256         |
| 50            | 0.36               | -16.1784          | 241         |
| 60            | 0.41               | -15.05612         | 274         |
| 80            | 0.36               | -15.5501          | 268         |
| 100           | 0.31               | -15.8519          | 255         |

Tabla B.10: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 64-QAM, canal 7, bloque de 500 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.49               | -15.4361          | 175         |
| 2             | 0.54               | -14.7887          | 225         |
| 4             | 0.54               | -15.2687          | 146         |
| 5             | 0.6                | -15.3186          | 130         |
| 6             | 0.54               | -15.4024          | 1696        |
| 8             | 0.44               | -15.0307          | 156         |
| 10            | 0.57               | -15.0204          | 218         |
| 20            | 0.4                | -15.0825          | 282         |
| 40            | 0.33               | -15.1744          | 302         |
| 50            | 0.37               | -14.4686          | 392         |
| 60            | 0.28               | -14.8389          | 430         |
| 80            | 0.21               | -14.5322          | 386         |
| 100           | 0.21               | -14.4839          | 430         |

Tabla B.11: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 256-QAM, canal 9, bloque de 500 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 1                  | -17.2252          | 84          |
| 2             | 0.88               | -17.6239          | 26          |
| 4             | 0.29               | -17.5328          | 161         |
| 5             | 0.52               | -17.1461          | 91          |
| 6             | 0.43               | -18.138           | 117         |
| 8             | 0.23               | -17.557           | 117         |
| 10            | 0.51               | -17.4022          | 142         |
| 20            | 0.51               | -17.199           | 153         |
| 40            | 0.49               | -17.4863          | 160         |
| 50            | 0.72               | -17.3352          | 139         |
| 60            | 0.38               | -16.882           | 205         |
| 80            | 0.57               | -17.6345          | 189         |
| 100           | 0.72               | -17.4789          | 183         |

Tabla B.12: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MCMA empleando descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 350 muestras

### B.3. Tablas de resultados del algoritmo CMA mediante la formulación de una SVM

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 1                  | -16.1557          | 12          |
| 2             | 1                  | -15.8649          | 12          |
| 4             | 1                  | -15.9972          | 12          |
| 5             | 1                  | -15.9655          | 12          |
| 6             | 1                  | -16.0455          | 12          |
| 8             | 0.99               | -16.0748          | 13          |
| 10            | 1                  | -16.2302          | 12          |
| 20            | 1                  | -16.2047          | 12          |
| 40            | 1                  | -15.9407          | 12          |
| 50            | 1                  | -16.1287          | 12          |
| 60            | 1                  | -16.1133          | 12          |
| 80            | 1                  | -16.0156          | 13          |
| 100           | 1                  | -16.026           | 13          |

Tabla B.13: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 3, bloque de 750 muestras

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.82               | -7.1557           | 27          |
| 2             | 0.79               | -7.8649           | 27          |
| 4             | 0.8                | -7.9972           | 28          |
| 5             | 0.79               | -7.9655           | 27          |
| 6             | 0.78               | -7.0455           | 28          |
| 8             | 0.76               | -7.0748           | 28          |
| 10            | 0.79               | -8.2302           | 27          |
| 20            | 0.77               | -7.2047           | 29          |
| 40            | 0.82               | -7.9407           | 25          |
| 50            | 0.8                | -7.1287           | 27          |
| 60            | 0.75               | -7.1133           | 27          |
| 80            | 0.81               | -7.0156           | 27          |
| 100           | 0.76               | -7.026            | 28          |

Tabla B.14: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 5, bloque de 750 muestras

## B.4. Tablas de resultados del algoritmo MRC mediante descenso por gradiente

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.1                | -15.7533          | 953         |
| 2             | 0.73               | -15.7708          | 239         |
| 4             | 0.98               | -16.0067          | 135         |
| 5             | 1                  | -15.8847          | 137         |
| 6             | 1                  | -15.8248          | 205         |
| 8             | 1                  | -15.7071          | 195         |
| 10            | 1                  | -16.1397          | 227         |
| 20            | 0.99               | -16.1455          | 295         |
| 40            | 0.95               | -15.876           | 434         |
| 50            | 0.83               | -15.8698          | 447         |
| 60            | 0.8                | -16.0542          | 493         |
| 80            | 0.7                | -15.591           | 563         |
| 100           | 0.68               | -15.6714          | 578         |

Tabla B.15: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 3, bloque de 350 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 2$

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.83               | -37.8759          | 83          |
| 2             | 0.88               | -37.3141          | 120         |
| 4             | 0.92               | -37.3946          | 168         |
| 5             | 0.94               | -38.5249          | 194         |
| 6             | 0.94               | -38.1583          | 210         |
| 8             | 0.96               | -38.2843          | 212         |
| 10            | 0.97               | -38.4123          | 238         |
| 20            | 0.88               | -38.2666          | 298         |
| 40            | 0.9                | -38.2732          | 357         |
| 50            | 0.87               | -37.6716          | 364         |
| 60            | 0.8                | -37.1598          | 395         |
| 80            | 0.88               | -38.462           | 418         |
| 100           | 0.77               | -38.4467          | 432         |

Tabla B.16: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 750 muestras,  $l = 2$ ,  $p = 3$

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.15               | -7.6111           | 846         |
| 2             | 0.4                | -7.5274           | 633         |
| 4             | 0.3                | -7.2278           | 760         |
| 5             | 0.24               | -7.8806           | 842         |
| 6             | 0.17               | -7.2844           | 1030        |
| 8             | 0.05               | -7.4452           | 1202        |
| 10            | 0                  | -                 | -           |
| 20            | 0.01               | -5.305            | 1305        |
| 40            | 0                  | -                 | -           |
| 50            | 0                  | -                 | -           |
| 60            | 0                  | -                 | -           |
| 80            | 0                  | -                 | -           |
| 100           | 0                  | -                 | -           |

Tabla B.17: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 5, bloque de 350 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 5$

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.31               | -33.9854          | 325         |
| 2             | 0.31               | -32.9451          | 47          |
| 4             | 0.33               | -30.9412          | 520         |
| 5             | 0.33               | -34.8113          | 567         |
| 6             | 0.25               | -34.771           | 684         |
| 8             | 0.32               | -33.1102          | 661         |
| 10            | 0.41               | -34.4491          | 684         |
| 20            | 0.36               | -33.1319          | 779         |
| 40            | 0.36               | -31.1235          | 835         |
| 50            | 0.36               | -32.9425          | 939         |
| 60            | 0.36               | -34.09            | 959         |
| 80            | 0.3                | -33.4615          | 955         |
| 100           | 0.25               | -34.6042          | 969         |

Tabla B.18: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 7, bloque de 750 muestras,  $l = 4$ ,  $p = 5$

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 0.85               | -25.1879          | 91          |
| 2             | 0.96               | -25.4399          | 134         |
| 4             | 0.98               | -25.7557          | 216         |
| 5             | 1                  | -25.774           | 243         |
| 6             | 0.93               | -25.5843          | 282         |
| 8             | 0.97               | -25.7299          | 305         |
| 10            | 0.99               | -25.682           | 337         |
| 20            | 0.87               | -25.77            | 439         |
| 40            | 0.75               | -25.9845          | 549         |
| 50            | 0.57               | -25.9528          | 602         |
| 60            | 0.64               | -25.7041          | 659         |
| 80            | 0.68               | -25.7319          | 685         |
| 100           | 0.59               | -25.7871          | 729         |

Tabla B.19: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método de descenso por gradiente, modulación 16-QAM, canal 8, bloque de 500 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 4$

## B.5. Tablas de resultados del algoritmo MRC mediante el método matricial iterativo

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 1                  | -30.4019          | 4           |
| 2             | 0.99               | -13.8998          | 2           |
| 4             | 1                  | -14.0942          | 2           |
| 5             | 1                  | -13.9486          | 2           |
| 6             | 1                  | -13.9409          | 2           |
| 8             | 0.99               | -14.166           | 2           |
| 10            | 1                  | -14.0907          | 2           |
| 20            | 1                  | -14.0442          | 2           |
| 40            | 1                  | -13.9781          | 2           |
| 50            | 0.99               | -13.8918          | 2           |
| 60            | 1                  | -13.9541          | 2           |
| 80            | 1                  | -14.0603          | 2           |
| 100           | 1                  | -14.0038          | 2           |

Tabla B.20: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 350 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 5$

| Multiplicador | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|---------------|--------------------|-------------------|-------------|
| 1             | 1                  | -20.1363          | 7           |
| 2             | 1                  | -20.399           | 7           |
| 4             | 0.99               | -20.139           | 8           |
| 5             | 1                  | -20.4258          | 8           |
| 6             | 1                  | -20.3912          | 7           |
| 8             | 1                  | -20.4915          | 8           |
| 10            | 1                  | -20.0492          | 7           |
| 20            | 1                  | -20.2979          | 8           |
| 40            | 1                  | -20.2442          | 8           |
| 50            | 1                  | -20.5028          | 7           |
| 60            | 0.99               | -20.2914          | 7           |
| 80            | 1                  | -20.0243          | 8           |
| 100           | 0.99               | -20.2033          | 8           |

Tabla B.21: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 500 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 2$

## Apéndice C

### Tablas de resultados del algoritmo MRC

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.45               | -12.173           | 24          |
| 30       | 0.67               | -12.5173          | 23          |

Tabla C.1: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 350 muestras

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.89               | -16.2045          | 11          |
| 30       | 0.96               | -17.0236          | 10          |

Tabla C.2: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 350 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 2$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.98               | -20.6752          | 7           |
| 30       | 0.96               | -23.1853          | 7           |

Tabla C.3: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 350 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 3$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.97               | -25.6448          | 7           |
| 30       | 0.97               | -33.9738          | 9           |

Tabla C.4: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 4, bloque de 350 muestras,  $l = 2$ ,  $p = 3$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.12               | -5.89             | 12          |
| 30       | 0.77               | -6.7495           | 17          |

Tabla C.5: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 6, bloque de 500 muestras

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.43               | -5.77             | 13          |
| 30       | 0.99               | -8.23             | 9           |

Tabla C.6: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 6, bloque de 500 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 2$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.37               | -5.863            | 15          |
| 30       | 0.98               | -8.39             | 9           |

Tabla C.7: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 6, bloque de 500 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 3$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.25               | -5.7442           | 14          |
| 30       | 0.97               | -8.2543           | 9           |

Tabla C.8: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 6, bloque de 500 muestras,  $l = 2$ ,  $p = 3$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.93               | -16.1827          | 20          |
| 30       | 0.96               | -16.967           | 19          |

Tabla C.9: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 9, bloque de 750 muestras

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.85               | -20.7088          | 17          |
| 30       | 0.86               | -22.1074          | 17          |

Tabla C.10: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 9, bloque de 750 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 2$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.88               | -22.9809          | 12          |
| 30       | 0.9                | -26.1722          | 12          |

Tabla C.11: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 9, bloque de 750 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 3$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.86               | -25.2225          | 17          |
| 30       | 0.88               | -29.5953          | 16          |

Tabla C.12: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 9, bloque de 750 muestras,  $l = 2$ ,  $p = 3$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.14               | -11.0526          | 46          |
| 30       | 0.22               | -11.2921          | 46          |

Tabla C.13: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo CMA empleando la formulación de una SVM, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 250 muestras

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.89               | -13.0788          | 25          |
| 30       | 0.91               | -13.693           | 29          |

Tabla C.14: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 250 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 2$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 0.99               | -17.1347          | 7           |
| 30       | 1                  | -18.6033          | 10          |

Tabla C.15: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 250 muestras,  $l = 1$ ,  $p = 3$

| SNR (dB) | Prob. convergencia | ISI residual (dB) | Iteraciones |
|----------|--------------------|-------------------|-------------|
| 20       | 1                  | -23.4225          | 3           |
| 30       | 1                  | -31.4403          | 3           |

Tabla C.16: Probabilidades de convergencia y niveles de ISI residual del algoritmo MRC siguiendo el método matricial iterativo, modulación 16-QAM, canal 10, bloque de 250 muestras,  $l = 2$ ,  $p = 3$

# Apéndice D

## Figuras de las funciones de coste a la salida del igualador

### D.1. Constelación 4-PAM

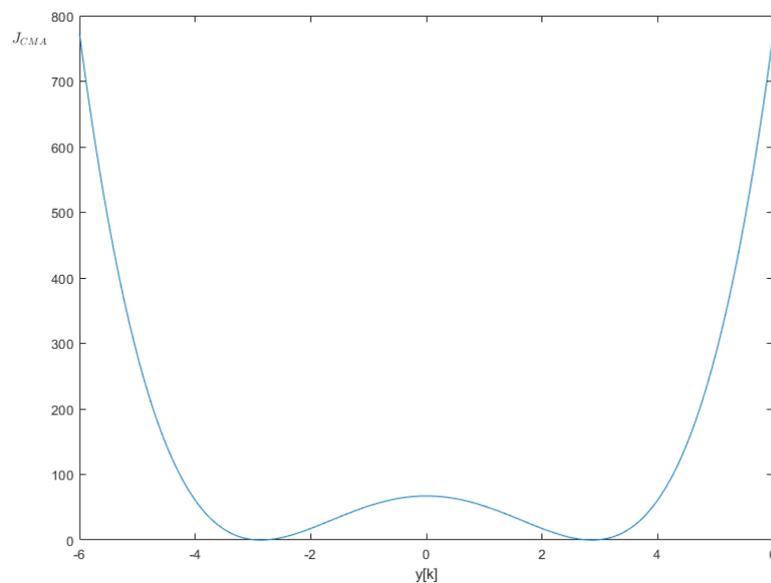


Figura D.1: Función de coste del algoritmo CMA a la salida del igualador para una 4-PAM

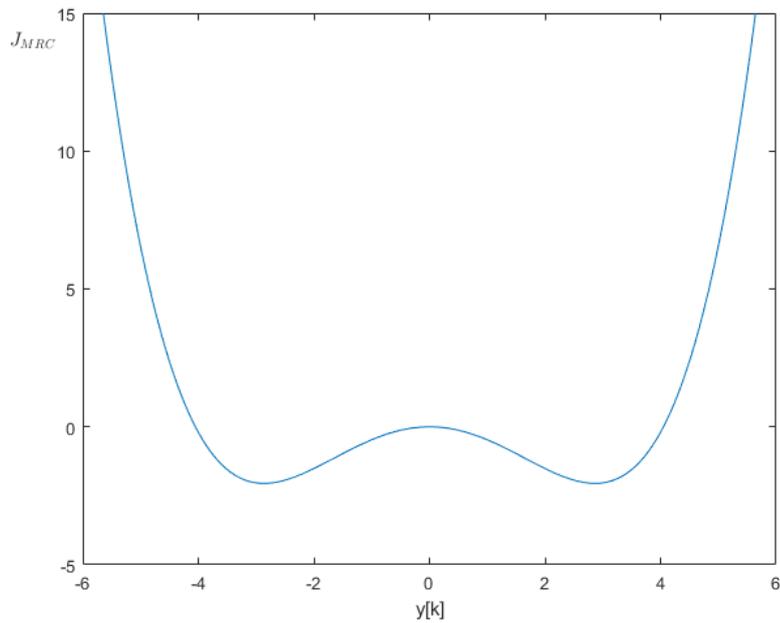


Figura D.2: Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 4-PAM, con  $l = 1$  y  $p = 2$

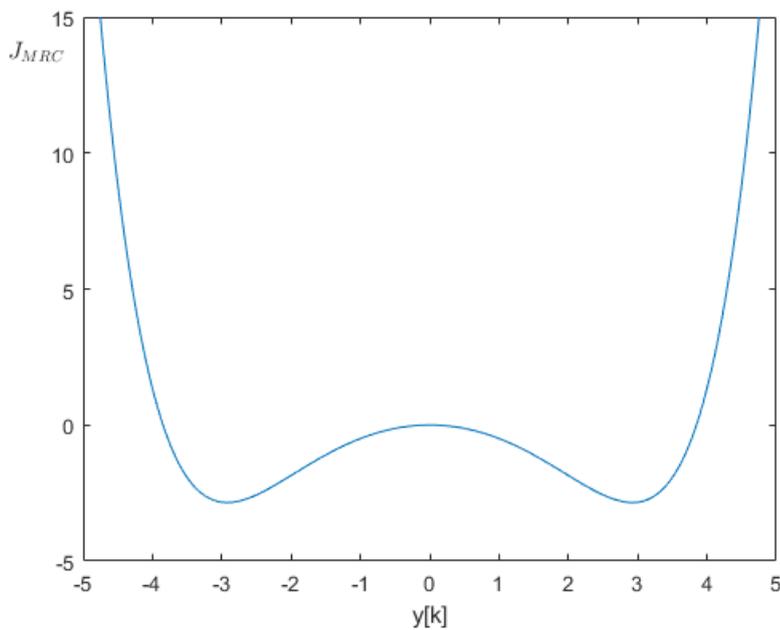


Figura D.3: Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 4-PAM, con  $l = 1$  y  $p = 3$

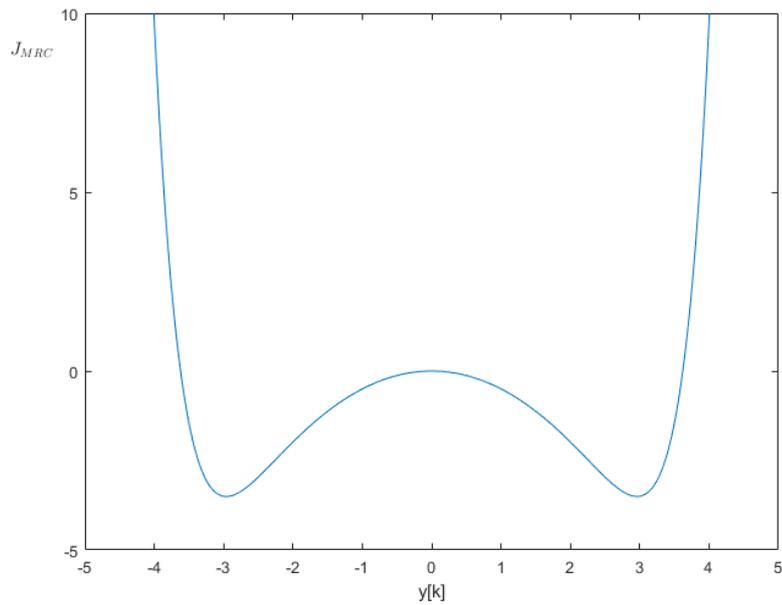


Figura D.4: Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 4-PAM, con  $l = 1$  y  $p = 5$

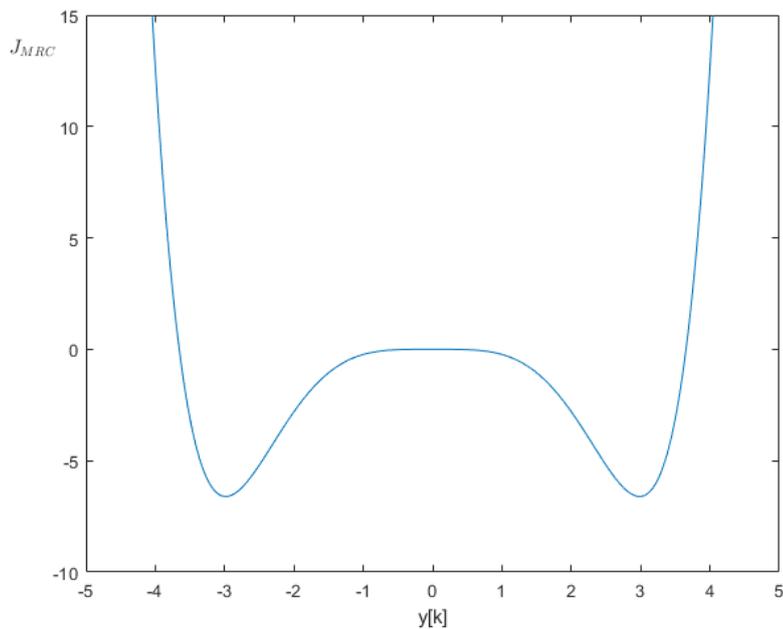


Figura D.5: Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 4-PAM, con  $l = 2$  y  $p = 3$

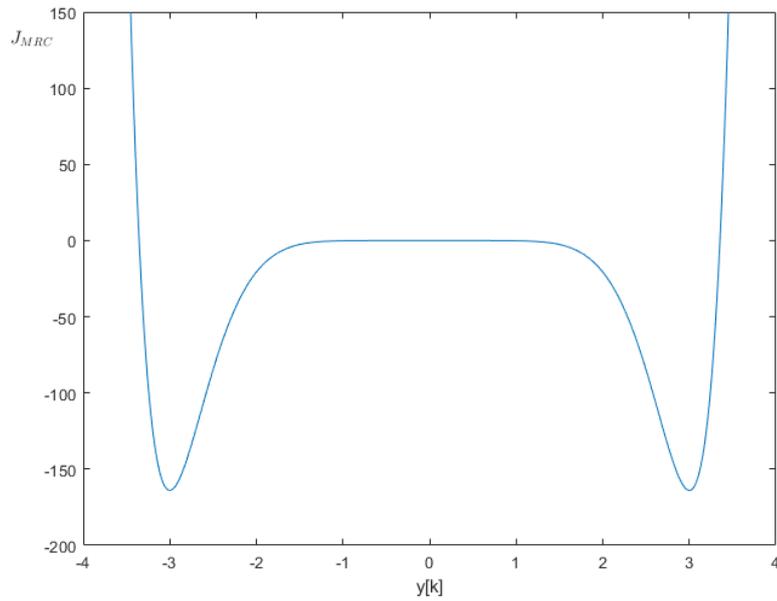


Figura D.6: Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 4-PAM, con  $l = 4$  y  $p = 5$

## D.2. Constelación 8-PAM

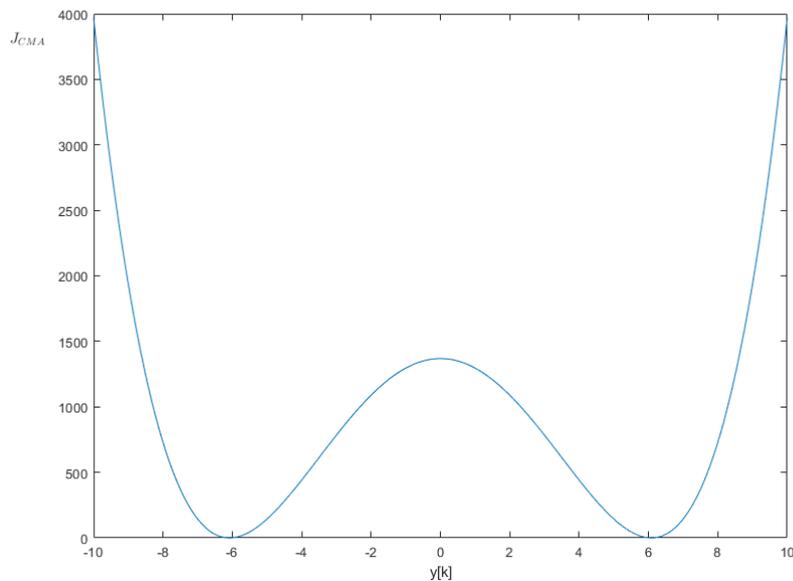


Figura D.7: Función de coste del algoritmo CMA a la salida del igualador para una 8-PAM

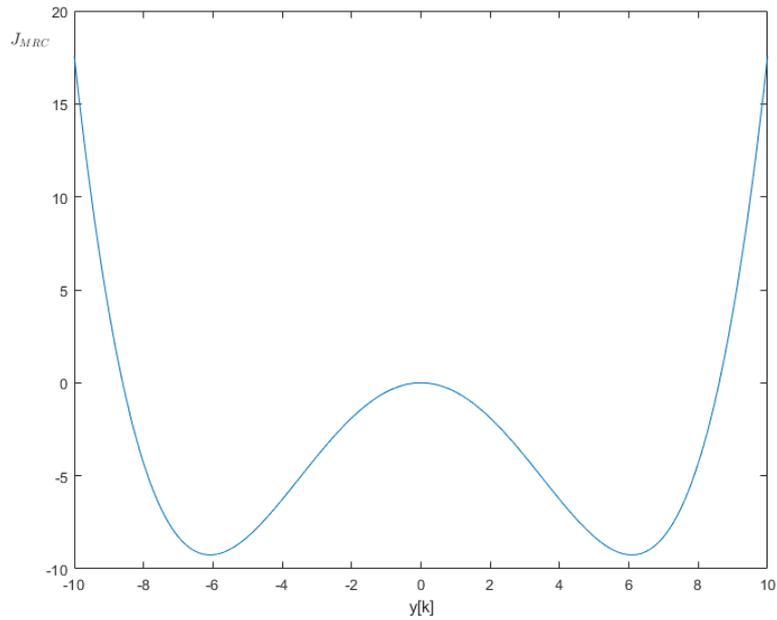


Figura D.8: Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 8-PAM, con  $l = 1$  y  $p = 2$

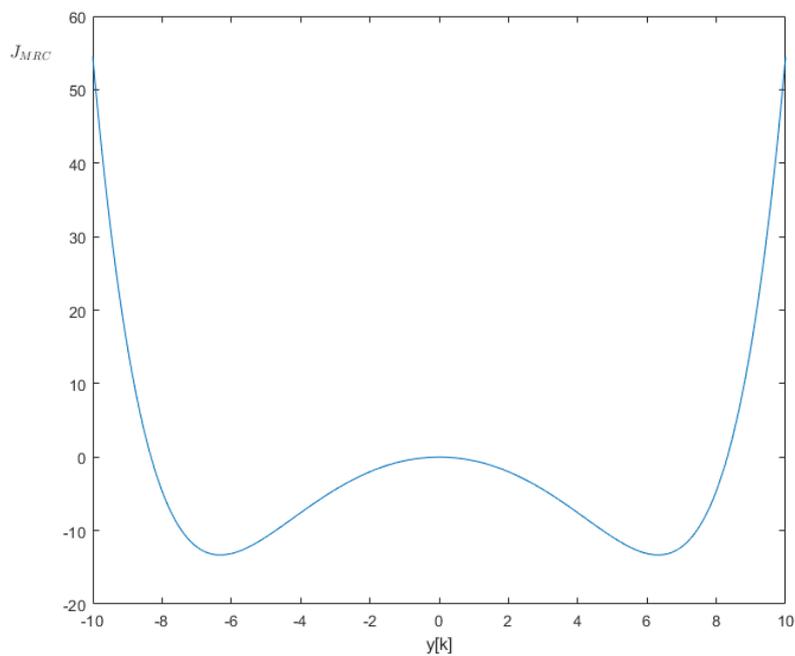


Figura D.9: Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 8-PAM, con  $l = 1$  y  $p = 3$

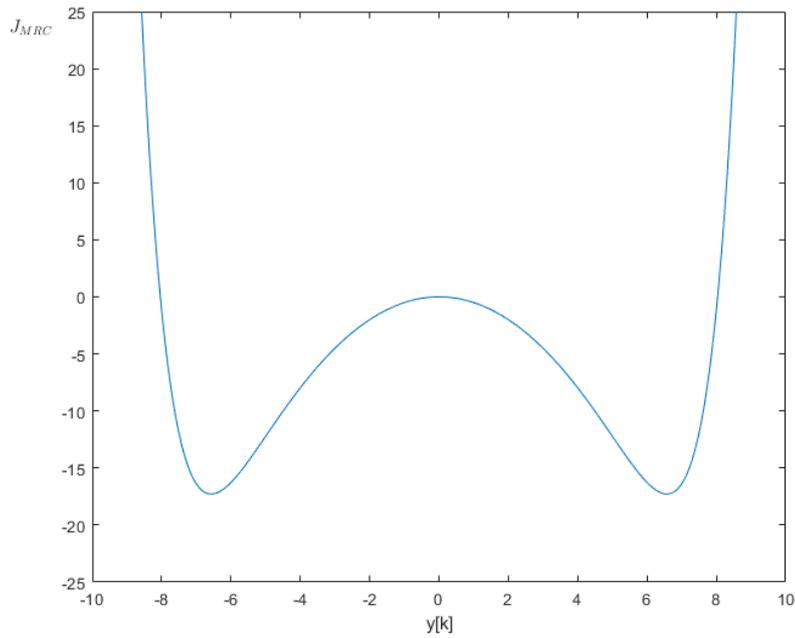


Figura D.10: Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 8-PAM, con  $l = 1$  y  $p = 5$

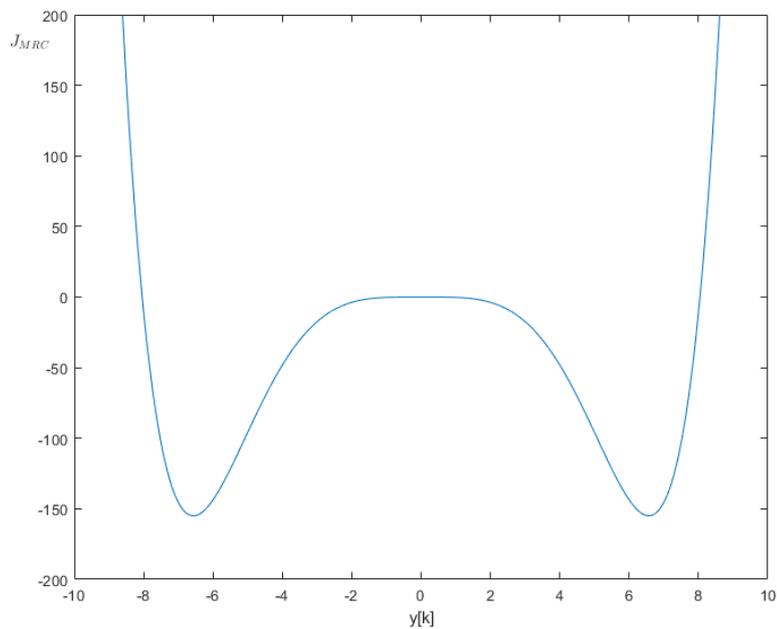


Figura D.11: Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 8-PAM, con  $l = 2$  y  $p = 3$

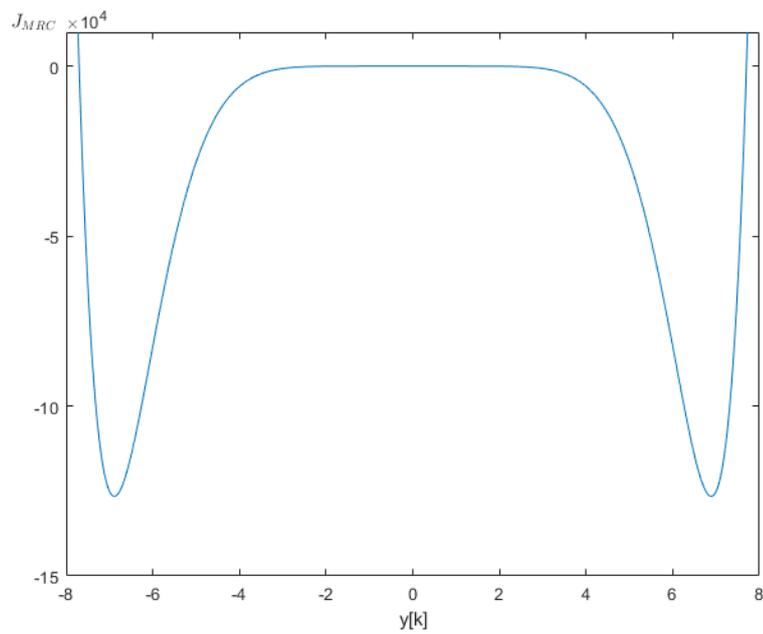


Figura D.12: Función de coste del algoritmo MRC a la salida del igualador para una 8-PAM, con  $l = 4$  y  $p = 5$

# Apéndice E

## Summary

### E.1. Introduction

Digital communication systems have become more and more popular throughout the last part of the 20th century, substituting almost all analog systems due to some advantages such as detection and error correction, a higher precision and less production costs.

#### E.1.1. Motivation

Examples like television, telephony, and even elements in which you would not expect a communication system like cars, fridges or vacuum cleaners (thanks to the emergent trend called *Internet of Things* [2]) entrust their performance to digital communication systems.

As the turnover of devices of daily use capable of establishing communications increases, so does the importance of developing end enhancing mechanisms to prevent communication failures. In this context, equalization techniques try to reduce errors in the reception of data by compensating a type of distortion called *intersymbol interference* or ISI which will be explained later. And more specifically, blind equalization techniques try to reduce ISI knowing only the received signal and its statistic information, not knowing any information about the channel of the transmitted data.

## E.1.2. Objectives

The main objective of this end-of-degree project is to evaluate some blind equalization batch techniques for SISO systems from an ISI perspective, these techniques comprise on one hand improvements over already known algorithms and on the hand the development of a new algorithm.

## E.2. State of the art

Equalization methods are bound to communications since the beginning of the 20th century, when analog systems were equalized to reduce high frequency noise or to have their frequency response compensated [17]. Although nowadays, as stated before, digital systems are equalized to reduce ISI, the main goal of equalization has been the same since those analog days, reduce the effect of distortion in communication systems.

Back to digital systems, ISI is an interference phenomenon caused among other reasons by multipath and its associated delays or by transmitting in really band limited channels. It is a type of distortion in which previous and subsequent symbols interfere with the current one when the receiver is trying to identify it, worsening the performance of the system.

Nevertheless, and despite the fact that this document is focused on blind equalization, there are many other techniques to reduce the effect of ISI and enhance the performance of digital communication systems, such as sequence detection and estimation [18] or the establishment of guard times.

### E.2.1. Problem statement

Let us begin with a system block diagram as the one shown in Figure E.1,

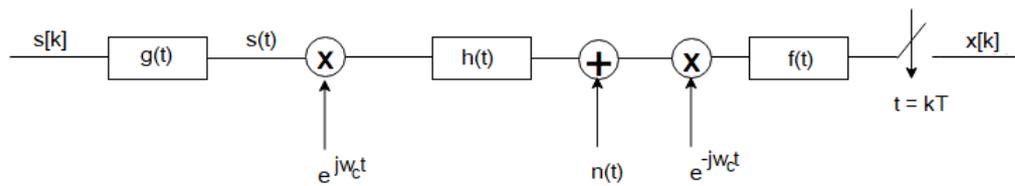


Figura E.1: Block diagram of a digital communication system

its discrete time equivalent (whose explanation is exhibited in [19]) shown in Figure E.2,

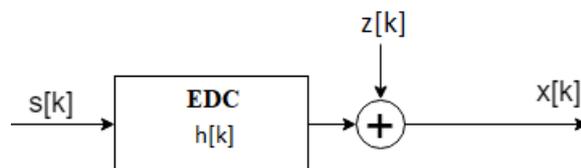


Figura E.2: Equivalent discrete channel

the discrete time model with an equalizer attached of the Figure E.3

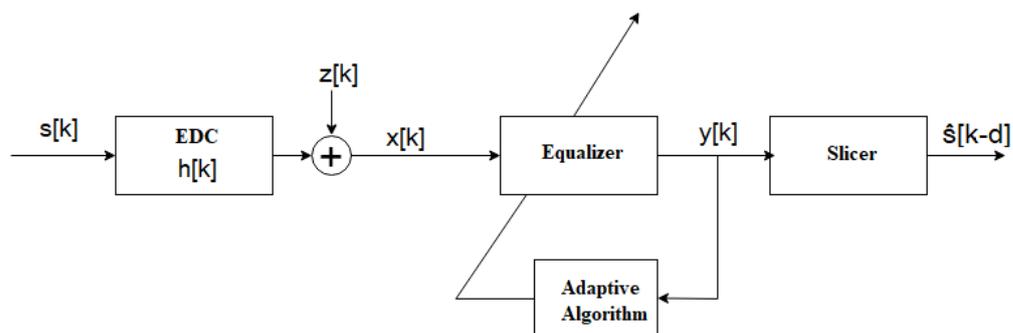


Figura E.3: Block diagram of a communication system with an equalizer

and state that:

- $s[k]$  is the sequence of transmitted data.

- $h[k]$  stands for the joint time discrete response of the complex baseband channel and the transmitter and receiver filters.
- $z[k]$  is the receiver filtered noise.
- $x[k]$  is the sequence of observations at the receiver's output.
- $y[k]$  stands for the sequence of observations at the equalizer's output.

Having in mind equations (2.5) and (2.6), the main goal of an equalizer is reduce the ISI contribution by generating a sequence  $y[k]$  such that, after being processed by a slicer, will allow the identification of a transmitted symbol fulfilling the equation (2.7).

### E.2.2. Blind linear equalization algorithms

The algorithms used in this end-of-degree project are linear and blind. Linear in the sense of having an equalizer  $w[k]$  with the form of a finite impulse response filter (a vector of coefficients) such as the one defined in (2.12), that allows  $y[k]$  to adopt the form of (2.14).

Although in this document only three algorithms will be shown, there are many more. For further documentation please see [20]. The three algorithms that will be discussed are the CMA [27] [28], the MCMA [33] and a new algorithm to which we will refer as the MRC algorithm (that stands for *Multi-power Reference Cost*).

The CMA algorithm, which is a particularization of Godard's algorithms [29], has a cost function of the form (2.22) with gain-controlling parameter  $R_2$  defined in (2.23); and it will be optimized by two different ways: by the very well known stochastic gradient descent, and by the formulation of a support vector machine (or SVMs from now on) based on the iterative reweighted least squares (also known as IRWLS) [32] having its main appeal in the small number of iterations needed to achieve convergence.

The MCMA [33], which is an extension of the CMA, treats real and complex parts of  $y[k]$  separately, having a cost function defined as (2.25) with parameters  $R_r$  and  $R_i$  expressed in (2.26) and (2.27) respectively. In this end-of-degree project

only the stochastic gradient descent approach will be covered. Nevertheless, there are many other ways to optimize the cost function, just as with the CMA.

The last algorithm to be covered, the MRC, has as principal feature a cost function that provides several reference values all over the equalization process. This is achieved by using two parameters  $p$  and  $l$ , that are used to compute two powers of  $y[k]$ , and by comparing both powers properly pondered following the equation (2.28), where the parameter  $R_{p,l}$  defined in (2.29) for real constellations, and its extension defined in equations (2.30) and (2.31) when used with complex constellations. This algorithm will be optimized following two different approaches too: the first one is also the stochastic gradient descent, and the second one is an alternative iterative procedure that takes advantages of an interesting property that will be explained in the following section.

## E.3. Proposed solutions

### E.3.1. Scaling factor

For the first proposal, a block diagram such as the one in Figure E.4 must be taken as reference.

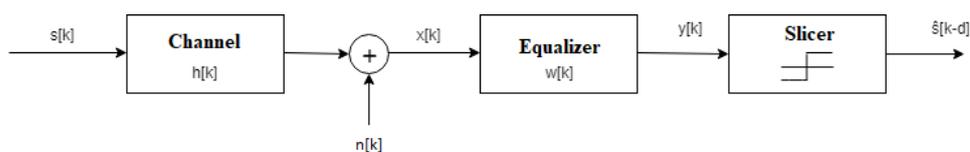


Figura E.4: Block diagram of a SISO digital communication system with an equalizer

Now, recalling equations (2.12) and (2.14) the main idea is to initialize the equalizer by multiplying the coefficients vector by a scaling factor  $\kappa$  such that fulfills equation (3.1) (where vector  $\mathbf{w}$  follows a tap-centering strategy defined in equation (3.2), being  $c$  expressed as (3.3)) and to evaluate the performance of some algorithms for several values of  $\kappa$ .

### E.3.2. MRC algorithm

As stated before, two approaches have been followed to optimize this algorithm: the stochastic gradient descent based one, and the iterative procedure one.

#### Stochastic Gradient Descent

This method takes the cost function of (3.7) and its gradient defined in (3.8), and then updates the coefficients of  $\mathbf{w}$  by means of the equation (3.9), having firstly initialized it following the tap-centering strategy.

#### Alternative Iterative Approach

The principal drawback of using the SGD is that, despite using an adaptive step size, it can take a huge number of iterations to achieve convergence. So this method has been developed.

Considering equations from (3.11) to (3.22), the method itself is formerly formed by these steps:

1. Initialize  $n = 0$  y  $\mathbf{w}(0)$  following the tap-centering strategy (3.2).
2. Compute  $\mathbf{y}$  with (3.6) and compute  $\hat{J}_{MRC}(\mathbf{w}(0))$  by (3.7).
3. Compute  $\mathbf{D}$  and  $\mathbf{y}^{2l-1}$  by (3.21) and (3.22).
4. Compute  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{b}$  by (3.20).
5. Compute  $\mathbf{w}_s$  by (3.19):  $\mathbf{w}_s = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .
6. Update the coefficients:
  - a) Fix  $\alpha=1$ .
  - b) Compute  $\mathbf{w}(n+1)=(1-\alpha)\mathbf{w}(n)+\alpha\mathbf{w}_s$ .
  - c) Normalize  $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n+1) \times \sqrt{\frac{\|\mathbf{w}(n+1)\|_1}{\|\mathbf{w}(n)\|_1}}$
  - d) Compute  $\mathbf{y}$  by means of (3.6) and  $\hat{J}_{MRC}(\mathbf{w}(n+1))$  by (3.7).

- e) If  $\hat{J}_{MRC}(\mathbf{w}(n+1)) > \hat{J}_{MRC}(\mathbf{w}(n))$  then divide  $\alpha = \alpha/2$  and come back to b)

7. Update  $n = n + 1$  and come back to step 3 unless  $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n - 1)$  or  $n$  are bigger than the maximum allowed number of iterations.

Where  $\alpha$  has been introduced to stabilize the algorithm at the beginning of the execution.

### E.3.3. Cost function analysis

At last, and although this is not a solution *per se*, it has been considered of interest to observe the contribution of parameters  $l$  and  $p$  to MRC's cost function for several values of  $y[k]$ .

## E.4. Results and conclusions

### E.4.1. Scaling factor

This technique is intended to be an enhancement of the typical tap-centering strategy for algorithms following a SGD based optimization, reaching improvements in convergence probability, ISI levels and iterations needed.

Generally, like in Table E.1, a  $\kappa$  factor between 2 and 6 will improve the performance. Nevertheless, higher values have resulted in not only having a non significant effect with respect to the algorithms' efficiency, but also worsening it occasionally.

| Scaling factor | Convergence prob. | ISI (dB) | Iterations |
|----------------|-------------------|----------|------------|
| 1              | 0.55              | -8.0397  | 449        |
| 2              | 0.96              | -8.0876  | 194        |
| 4              | 0.91              | -8.016   | 232        |
| 5              | 0.88              | -7.9665  | 326        |
| 6              | 0.74              | -8.0538  | 420        |
| 8              | 0.62              | -8.0547  | 520        |
| 10             | 0.48              | -8.0358  | 615        |
| 20             | 0.26              | -7.8677  | 776        |
| 40             | 0.41              | -7.6892  | 1027       |
| 50             | 0.29              | -7.8009  | 824        |
| 60             | 0.4               | -7.6641  | 942        |
| 80             | 0.35              | -7.8628  | 900        |
| 100            | 0.35              | -7.8317  | 920        |

Tabla E.1: Convergence probability and ISI level of the CMA algorithm using stochastic gradient descent, 16-QAM modulation, channel 5, blocks of 750 samples

Also, although it has demonstrated to work with big constellations like a 256-QAM and block sizes of 1000 samples it is noticeable the fact that this technique works better for small block sizes and constellations with a small number of symbols.

And as a final consideration, there is one type of channels with which this mechanism does not seem to work, the all pass filters (such as channels 7 and 10), as seen in Table E.2.

| Scaling factor | Convergence prob. | ISI (dB) | Iterations |
|----------------|-------------------|----------|------------|
| 1              | 1                 | -17.2252 | 84         |
| 2              | 0.88              | -17.6239 | 26         |
| 4              | 0.29              | -17.5328 | 161        |
| 5              | 0.52              | -17.1461 | 91         |
| 6              | 0.43              | -18.138  | 117        |
| 8              | 0.23              | -17.557  | 117        |
| 10             | 0.51              | -17.4022 | 142        |
| 20             | 0.51              | -17.199  | 153        |
| 40             | 0.49              | -17.4863 | 160        |
| 50             | 0.72              | -17.3352 | 139        |
| 60             | 0.38              | -16.882  | 205        |
| 80             | 0.57              | -17.6345 | 189        |
| 100            | 0.72              | -17.4789 | 183        |

Tabla E.2: Convergence probability and ISI level of the MCMA algorithm using stochastic gradient descent, 16-QAM modulation, channel 10, blocks of 350 samples

### E.4.2. MRC Algorithm

By establishing a direct comparison between this algorithm and the CMA this new algorithm has turned to be a great alternative to it, offering better convergence probabilities, number of iterations needed and residual ISI level. For example, if Table E.3 is looked closely, the MRC algorithm provides up to a 100 % of convergence probability needing 3 iterations and with an ISI level of -31.44 dB; whereas the CMA only offers a 14 % by needing 46 iterations with an ISI level of -11.05 dB.

| Algorithm              | SNR (dB) | Convergence prob. | ISI (dB) | Iterations |
|------------------------|----------|-------------------|----------|------------|
| CMA                    | 20       | 0.14              | -11.0526 | 46         |
| CMA                    | 30       | 0.22              | -11.2921 | 46         |
| MRC ( $l = 1, p = 2$ ) | 20       | 0.89              | -13.0788 | 25         |
| MRC ( $l = 1, p = 2$ ) | 30       | 0.91              | -13.693  | 29         |
| MRC ( $l = 1, p = 3$ ) | 20       | 0.99              | -17.1347 | 7          |
| MRC ( $l = 1, p = 3$ ) | 30       | 1                 | -18.6033 | 10         |
| MRC ( $l = 2, p = 3$ ) | 20       | 1                 | -23.4225 | 3          |
| MRC ( $l = 2, p = 3$ ) | 30       | 1                 | -31.4403 | 3          |

Tabla E.3: Convergence probability and ISI level of the CMA algorithm using the SVM formulation and convergence probability and ISI level of the MRC algorithm using the iterative approach, 16-QAM modulation, channel 10, blocks of 250 samples

Personally, I think that this algorithm would be extremely useful for very limited devices taking into account the small number of iterations needed in general to achieve convergence.

### E.4.3. Cost function analysis

By looking at Figures E.5 and E.6, and considering the contribution of parameters  $l$  and  $p$  in equation (4.13), it is noticeable that the higher the value of  $p$  the deeper are the minima in the graphs and the higher the value of  $l$  the flatter is the curve of the cost function.

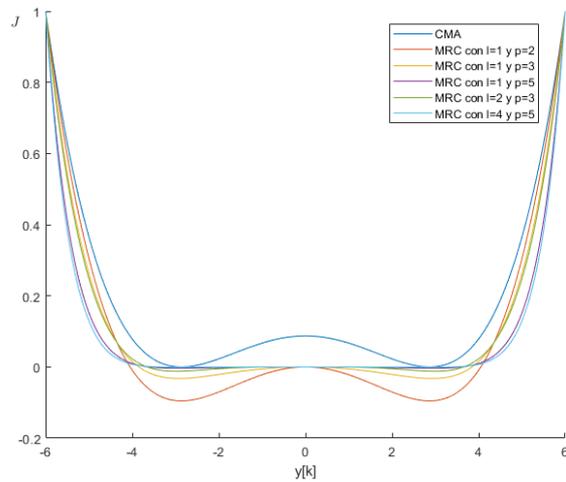


Figura E.5: Effect of parameters  $l$  and  $p$  on cost functions at the equalizer output for a 4-PAM constellation

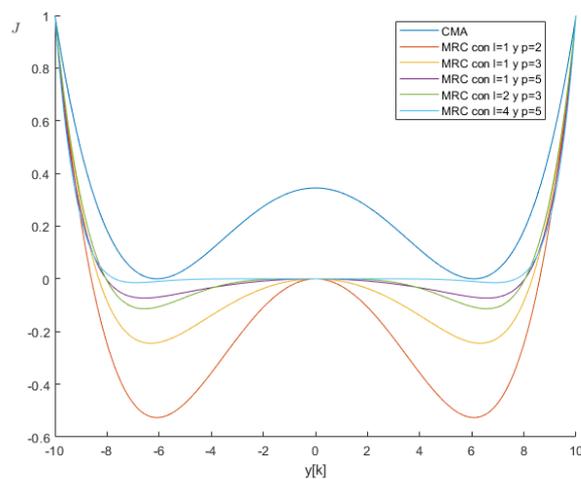


Figura E.6: Effect of parameters  $l$  and  $p$  on cost functions at the equalizer output for an 8-PAM constellation

It would be interesting, as a continuation to this project, a further study of the effect of this parameters and the development of an adaptive method of varying them while the equalization process is running.

# Bibliografía

- [1] Y. Masuda, *La Sociedad Informatizada Como Sociedad Post-Industrial*, Fundesco-Tecnos, 1984.
- [2] K. Ashton, “That ‘Internet of Things’ Thing”, *RFID Journal*, 22 de Junio de 2009. [En línea]. Disponible en: <http://www.rfidjournal.com/articles/view?4986>.
- [3] Eurostat, “Estadísticas sobre sociedad y economía digital - Hogares y particulares”. [En línea]. Disponible en: [http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Digital\\_economy\\_and\\_society\\_statistics\\_-\\_households\\_and\\_individuals/es](http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Digital_economy_and_society_statistics_-_households_and_individuals/es).
- [4] Comisión Europea, *What is Horizon 2020?*. [En línea]. Disponible en: <http://ec.europa.eu/programmes/horizon2020/en/what-horizon-2020>.
- [5] E. S. Mazo y C. Galera, “Así son las 100 empresas más valiosas del mundo”, *Expansión*, 4 de Marzo de 2017. [En línea]. Disponible en: <http://www.expansion.com/economia/2017/03/04/58b9c02be2704e7a568b45d7.html>.
- [6] S. C. Li, “Adaptive multi-modulus algorithm method for blind equalization”, U.S. Patente 20040052309A1, Septiembre 2002.
- [7] D.N. Godard y P.E. Thirion, “Method and device for training an adaptive equalizer by means of an unknown data signal in a QAM transmission system”, U.S. Patente 4227152A, Octubre 1980.
- [8] P. Larsson, J.J. Werner y J. Yang, “Phase-compensating constant modulus algorithm”, U.S. Patente 6490318B1, Diciembre 2002.
- [9] L. Lamport, *LaTeX: A Document Preparation System (2nd Edition)*, Addison-Wesley Professional, 1994.

- [10] Ley 9/2014 General de Telecomunicaciones, BOE núm. 114 de 10 de mayo de 2014, ref. BOE-A-2014-4950.
- [11] Real Decreto 138/1989 por el que se aprueba el Reglamento sobre Perturbaciones Radioeléctricas e Interferencias, BOE núm. 34 de 9 de febrero de 1989, ref. BOE-A-1989-3196.
- [12] Orden ETU/1033/2017, por la que se aprueba el cuadro nacional de atribución de frecuencias, BOE núm. 259 de 27 de octubre de 2017, ref. BOE-A-2017-12318.
- [13] Real Decreto 186/2016 por el que se regula la compatibilidad electromagnética de los equipos eléctricos y electrónicos, BOE núm. 113 de 10 de mayo de 2016, ref. BOE-A-2016-4442.
- [14] Real Decreto-ley 1/1998 sobre infraestructuras comunes en los edificios para el acceso a los servicios de telecomunicación, BOE núm. 51 de 28 de febrero de 1998, ref. BOE-A-1998-4769.
- [15] Real Decreto 346/2011 por el que se aprueba el Reglamento regulador de las infraestructuras comunes de telecomunicaciones para el acceso a los servicios de telecomunicación en el interior de las edificaciones, BOE núm. 78 de 1 de abril de 2011, ref. BOE-A-2011-5834.
- [16] Real Decreto 188/2016 por el que se aprueba el Reglamento por el que se establecen los requisitos para la comercialización, puesta en servicio y uso de equipos radioeléctricos, y se regula el procedimiento para la evaluación de la conformidad, la vigilancia del mercado y el régimen sancionador de los equipos de telecomunicación, BOE núm. 113 de 10 de mayo de 2016, ref. BOE-A-2016-4444.
- [17] O.J. Zobel, "Theory and Design of Uniform and Composite Electric Wave Filters", *Bell Systems Technical Journal*, Vol. 2, pp. 1–46, 1923.
- [18] A. Ushirokawa, "Method and arrangement for estimating data sequences transmitted using Viterbi algorithm", U.S. Patente 5325402A, Junio 1994.
- [19] F. Pérez y A. Artés, *Comunicaciones Digitales*, Prentice-Hall, 2007.
- [20] Z. Ding y Y. Li, *Blind Equalization and Identification*, New York: Marcel Dekker, 2001.
- [21] J. T. Chen, A. Paulraj y U. Reddy, "Multichannel maximum-likelihood sequence estimation (MLSE) equalizer for GSM using a parametric channel model", *IEEE Trans. on Communications*, vol 47, n° 1, pp. 53-63, Enero 1999.

- [22] D. George, R. Bowen y J. Storey, “An Adaptive Decision Feedback Equalizer”, *IEEE Trans. on Communications*, vol 19, n° 3, pp. 281-293, Junio 1971.
- [23] O. Grellier, P. Comon, B. Mourrain y P. Trébuchet, “Analytical Blind Channel Identification”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol 50, n° 9, pp. 2196 - 2207, Septiembre 2002.
- [24] C.B. Papadias y D.T.M. Slock, “Fractionally spaced equalization of linear polyphase channels and related blind techniques based on multichannel linear prediction”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol 47, n° 3, pp. 641-654, Marzo 1999.
- [25] J.K. Tugnait, “Blind spatio-temporal equalization and impulse response estimation for MIMO channels using a Godard cost function”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol 45, n° 1, pp 268-271, Enero 1997.
- [26] F. Tong, B. Benson, Y. Li y R. Kastner, “Channel Equalization Based on Data Reuse LMS Algorithm for Shallow Water Acoustic Communication”, presentada en IEEE International Conference on Sensor Networks, Ubiquitous, and Trustworthy Computing, Newport Beach, EEUU, 7-9 de Junio de 2010. [En línea]. Disponible en: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5504624/>.
- [27] J.R. Treichler y B.G. Agee, “A New Approach to Multipath Correction of Constant Modulus Signals”, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol 31, n° 2, pp. 459-472, Abril 1983.
- [28] J.R. Treichler y M.G. Larimore, “New Processing Techniques Based on the Constant Modulus Adaptive Algorithm”, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol 3, n° 2, pp. 420-431, Abril 1985.
- [29] D.N. Godard, “Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems”, *IEEE Trans. on Communications*, vol 28, n° 11, pp. 1867-1875, Noviembre 1980.
- [30] Y. Sato, “A Method of Self-Recovering Equalization for Multi-level Amplitude Modulation”, *IEEE Trans. on Communications*, vol 23, n° 6, pp. 679-682, Junio 1975.
- [31] L. Bottou, Stochastic Gradient Descent Tricks. In: Montavon G., Orr G.B., Müller KR. (eds) *Neural Networks: Tricks of the Trade*, Lecture Notes in Computer Science, vol 7700. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [32] M. Lázaro y J. González-Olasola, “Blind equalization using the IRWLS formulation of the support vector machine”, *Signal Processing*, vol 89, n° 7, pp. 1436-1445, Abril 2009.

- [33] K. N. Oh y Y. O. Chin, “Modified constant modulus algorithm: blind equalization and carrier phase recovery algorithm, Gateway to Globalization”, presentada en IEEE International Conference on Communications, Seattle, EEUU, 18-22 de Junio de 1995. [En línea]. Disponible en: <https://ieeexplore.ieee.org/document/525219/>.
- [34] Isabel López Estrada, Igualación ciega de canal para receptores de comunicaciones digitales, Trabajo de Fin de Grado de la Universidad Carlos III de Madrid, 2016.