

# TRABAJO DE FIN DE GRADO



## ANÁLISIS SIMPLIFICADO DEL COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DE UNA PALA DE HELICÓPTERO

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y TEORÍA DE  
ESTRUCTURAS

INGENIERÍA MECÁNICA

AUTOR:

FRANCISCO RUEDA MONJE

TUTOR:

JOSÉ FERNÁNDEZ SÁEZ

ANÁLISIS SIMPLIFICADO DEL COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DE UNA PALA DE  
HELICÓPTERO

---

“A quién siempre estuvo  
tanto en los buenos momentos como en los malos  
a quién me ayudó a seguir adelante, con paciencia, con corazón.  
Gracias papá y mamá, gracias abuelos, gracias familia, gracias chavales  
nada me puede parar, nunca me rendiré”

## Contenido

1	INTRODUCCIÓN.....	6
1.1	Motivación.....	7
1.2	Objetivos .....	20
1.3	Contenido.....	21
2	VIBRACIONES POR FLEXIÓN DE VIGAS SIN ROTACIÓN .....	22
2.1	Formulación del problema .....	23
2.2	Cálculo de frecuencias propias .....	28
3	VIBRACIONES POR FLEXIÓN DE VIGAS CON ROTACIÓN .....	38
3.1	Formulación del problema .....	39
3.2	Cálculo de frecuencias propias .....	41
4	EJEMPLO DE APLICACIÓN .....	48
5	CONCLUSIONES.....	56
6	Bibliografía.....	59
7	ANEXO 1.....	61
8	ANEXO 2.....	64

## Índice de figuras

Figura 1.1.1: Compensación del par motor por rotor de cola.....	8
Figura 1.1.2: Rotor articulado de helicóptero modelo Koala AW119.....	9
Figura 1.1.3: Rotor rígido de helicóptero modelo BO-105.....	10
Figura 1.1.4: Rotor semirrígido.....	10
Figura 1.1.5: Rotor de cola encapsulado del modelo EC155.....	11
Figura 1.1.6: Esquema sistema NOTAR.....	12
Figura 1.1.7: Turbina en pala de helicóptero tipo 'Tip jet'.....	12
Figura 1.1.8: Rotores tipo tándem en helicóptero modelo CH-47 CHINOOK.....	13
Figura 1.1.9: Rotores transversales del Mil Mi-12.....	14
Figura 1.1.10: Rotores entrecruzados de helicóptero Flettner Fl 282.....	14
Figura 1.1.11: Rotores coaxiales del Kamov KA-52 Alligator.....	15
Figura 1.1.12: Movimientos de la pala.....	16
Figura 1.1.13: Efecto del arrastre sobre pala.....	17
Figura 1.1.14: Batimiento de pala.....	17
Figura 1.1.15: Sistema transmisor variador de paso.....	18
Figura 2.1.1: Representación simplificada de la viga.....	27
Figura 2.2.1: Gráfica de la superposición de $\tan \lambda$ y $\tanh \lambda$ .....	34
Figura 2.2.2: Gráfica de la función 2.1.2.13.....	35

## Índice de tablas

Tabla 2.1.1: Relaciones deformada modal-variables físicas.....	26
Tabla 2.2.1: Dimensiones y características de la pala.....	28
Tabla 4.1: Coeficientes de Southwell y frecuencias.....	51
Tabla 4.2: Comprobación de resonancia.....	52
Tabla 4.3: Frecuencias para $e_{60\%}$ .....	53
Tabla 4.4: Frecuencias para $e_{150\%}$ y comprobación de resonancia.....	54

# INTRODUCCIÓN

---

En el presente documento técnico se realiza un estudio del comportamiento vibratorio de una pala de helicóptero.

## 1.1 Motivación

Este estudio vibratorio está impulsado por la necesidad de realizar un diseño óptimo del helicóptero y hacer de este un medio seguro para el transporte de personas y/o mercancías.

El campo de las vibraciones es estudiado en toda la industria mecánica, no sólo en vehículos, si no que también es necesario para el diseño de estructuras, máquinas, generadores eólicos y una gran lista. Como podremos observar, todos los ejemplos citados guardan una relación, todos poseen unas frecuencias naturales de oscilación.

En este documento obtendremos las frecuencias propias o naturales de las palas del helicóptero, es necesario conocerlas para evitar que se produzca un fenómeno conocido como resonancia, el cual se produce cuando un objeto se le hace vibrar mediante un agente externo a una frecuencia que coincide o es múltiplo de sus frecuencias propias.

El principal problema que supone el fenómeno de resonancia en las palas de un helicóptero es la integridad de la estructura y la estabilidad de vuelo, por lo que es un tema primordial en helicópteros dado que no solo puede suponer su autodestrucción, si no que pone en riesgo la integridad de sus ocupantes. Como más adelante se puede observar, este documento se centra en la relación entre la frecuencia de una pala del rotor y la velocidad de giro a la que se encuentra sometida.

Se tiene también otro fenómeno de resonancia en helicópteros que se da en el despegue y aterrizaje, es la conocida ``Ground resonance`` o resonancia en tierra, esta ocurre cuando el helicóptero se encuentra en



tierra y las palas del rotor giran a una frecuencia que entra en fase con el balanceo del helicóptero, lo que acaba provocando su desestabilización y su posterior destrucción en caso de no llegar a ser corregido a tiempo. Para poder entender por completo este fenómeno de resonancia se recomienda visitar el anexo 2.

El elemento a estudio, como bien se ha dicho, se corresponde exclusivamente a la pala del helicóptero, localizada en la parte superior de la aeronave formando parte del rotor. Los helicópteros en general tienen dos rotores, el rotor principal y el rotor de cola. El primero de ellos se encarga de la sustentación y propulsión de la aeronave, mientras que el segundo tiene la función de estabilizar y compensar el par motor generado por el rotor principal. Si los helicópteros no dispusieran del rotor de cola, o de otros sistemas alternativos antipar que se verán más adelante, la aeronave giraría sobre sí misma.

En la siguiente imagen se puede observar el efecto compensatorio de una aeronave con rotor de cola:

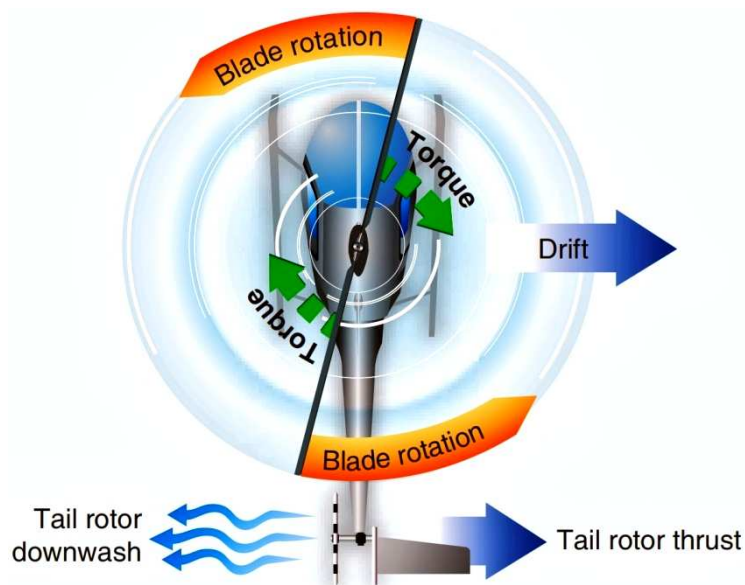


Imagen 1.1.1: Compensación del par motor por rotor de cola.

Los rotores se clasifican según el tipo de unión del eje vertical con las palas:

- **Articulado.** El tipo de unión rotor-pala es una articulación, esto ayuda a disminuir los esfuerzos que sufren las palas y que por continuidad se transmiten a la cabeza del rotor y su eje vertical. Estos sistemas se componen por tres o más palas y utilizan articulaciones para el arrastre, el paso y el batimiento de la pala.



*Imagen 1.1.2: Rotor articulado de helicóptero modelo Koala AW119.*

- **Rígido (hingeless).** La unión es totalmente rígida y los movimientos de arrastre y batimiento se consiguen gracias a la flexibilidad del material que une la pala con la cabeza del rotor. Estos rotores se encuentran en helicópteros como el BO-105, utilizados en cuerpos de seguridad y defensa debido a que dota a la aeronave de una gran agilidad y una rápida respuesta.



*Imagen 1.1.3: Rotor rígido de helicóptero modelo BO-105.*

- **Semirrígido/basculante (bearingless).** Los movimientos de las palas se producen por la flexibilidad de los materiales de la unión de esta al buje, esta unión se encuentra sometida a esfuerzos de flexión considerablemente altos. Solo se encuentran en rotores de dos palas.



*Imagen 1.1.4: Rotor semirrígido.*

Los rotores pueden encontrarse en diferentes disposiciones, según tengan un rotor principal o varios rotores gemelos (contrarrotatorios), las posibles configuraciones son las siguientes:

- **Rotor principal.** Las diferencias entre los modelos de aeronaves dentro de este tipo de configuración reside exclusivamente en su rotor de cola. Se tienen varios tipos:
  1. **Rotor de cola.** Es la configuración más común en helicópteros, consta de un rotor de cola para compensar el par motor del rotor principal.
  2. **Rotor encapsulado.** Es un diseño de rotor de cola en el que se encuentra incorporado a la cola de la aeronave, evitando que sobresalga como en el caso de los rotores de cola normales. (Ver imagen 1.1.5)



*Imagen 1.1.5: Rotor de cola encapsulado del modelo EC155.*

3. **Sistema NOTAR (acrónimo en inglés de no tail rotor).** Esta configuración aprovecha el flujo de aire desplazado por el rotor principal haciéndose pasar por una tobera provocando un impulso de sentido opuesto al inducido por el par del rotor principal. (Ver imagen 1.1.6)

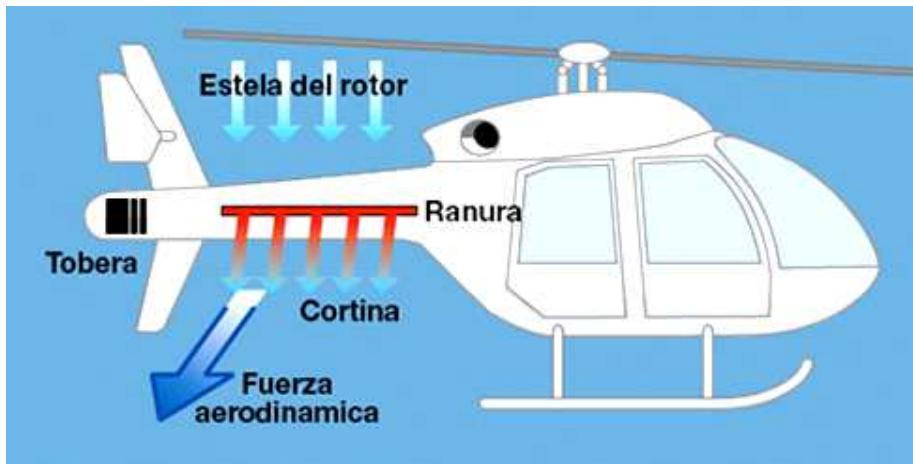


Imagen 1.1.6: Esquema sistema NOTAR.

4. **Tip jets.** Esta configuración permite prescindir del rotor de cola debido a que tiene un sistema de propulsión en las mismas palas del rotor principal. Estas palas no giran debido a un eje transmisor de par situado en el cuerpo del helicóptero, por lo que no se produce ningún esfuerzo sobre este que se tenga que contrarrestar. Esta propulsión de las palas se consigue gracias a una turbina colocada en el extremo de cada una de estas. (Ver imagen 1.1.7)



Imagen 1.1.7: Turbina en pala de helicóptero tipo 'Tip jet'.

- **Rotores gemelos.** Estos modelos constan de un par de rotores y la diferencia entre ellos reside en la disposición en la que se coloquen en la aeronave. Se pueden clasificar en dos grupos, con mismo eje de giro o con ejes independientes, las configuraciones posibles son las siguientes:

1. **Tándem.** Los rotores se encuentran en ejes de giro independientes, uno situado en la parte posterior de la aeronave y otro en la anterior. (Ver imagen 1.1.8)



*Imagen 1.1.8: Rotores tipo tándem en helicóptero modelo CH-47 CHINOOK.*

2. **Transversales.** Pertenecen al grupo de rotores gemelos con ejes independientes y en este caso la disposición de los rotores es en cada lateral de la aeronave. (Ver imagen 1.1.9)



*Imagen 1.1.9: Rotores transversales del Mil Mi-12*

3. **Entrecruzados.** Tienen una disposición parecida a los rotores transversales con la diferencia de que en este caso las aspas de los rotores giran en planos que se cortan, es decir, las palas giran entrecruzadas. (Ver imagen 1.1.10)



*Imagen 1.1.10: Rotores entrecruzados de helicóptero Flettner Fl 282.*

4. **Coaxiales.** Ambos rotores comparten el eje de giro. Están colocados de forma que tengan una separación en la altura a la que se encuentra cada uno girando en sentidos opuestos. (Ver imagen 1.1.11)



*Imagen 1.1.11: Rotores coaxiales del Kamov KA-52 Alligator.*

Las palas son el elemento del rotor encargado de la sustentación de la aeronave, esto se consigue gracias a que, al igual que las alas de los aviones, aerodinámicamente tienen un perfil curvado en su parte superior y liso o cóncavo en su parte inferior. Este perfil obliga al aire a aumentar su velocidad al pasar por la parte superior del perfil debido a que la trayectoria es mayor, esta diferencia de velocidades del aire entre el recorrido superior e inferior provoca una variación de presiones que provoca un empuje en sentido vertical hacia arriba.



Las palas del helicóptero están sometidas a diferentes esfuerzos provocados por agentes como la fuerza aerodinámica, el propio peso de la pala y la fuerza centrífuga debida al movimiento de rotación. Estos esfuerzos provocan unos movimientos en la pala, estos son el arrastre, el batimiento y el paso. Cada uno de estos movimientos se encuentra en un plano distinto (ver imagen 1.1.12):

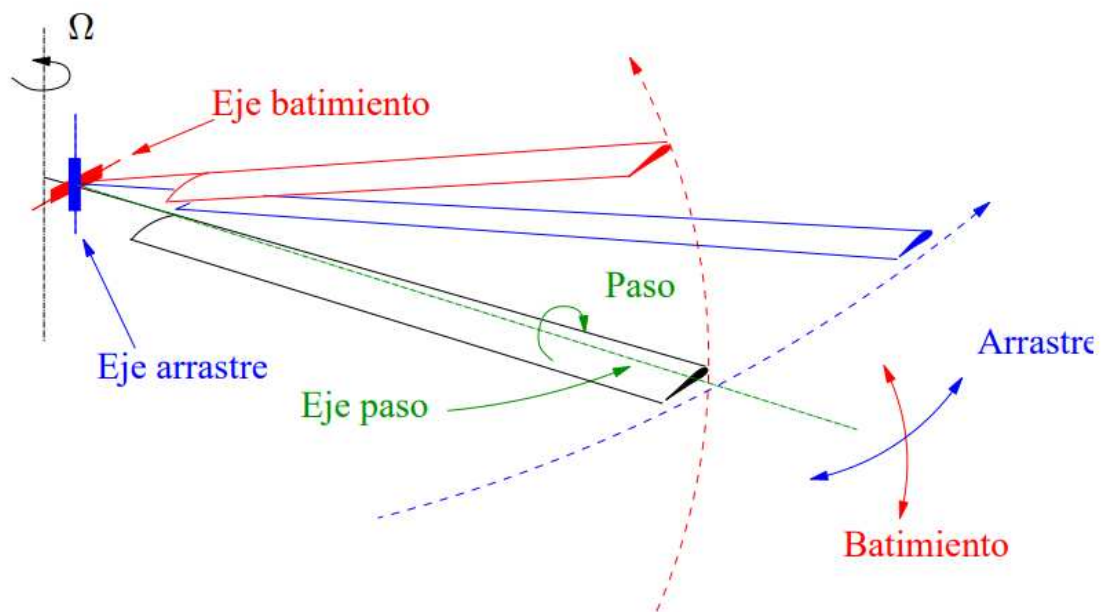


Imagen 1.1.12: Movimientos de la pala.

- **Arrastre.** Es la deformación de la pala en el eje de giro del rotor y puede darse tanto adelantándose la pala a su posición original como retrasándose respecto a esta. Hay rotores que constan con una articulación que permite este movimiento (ver imagen 1.1.13).

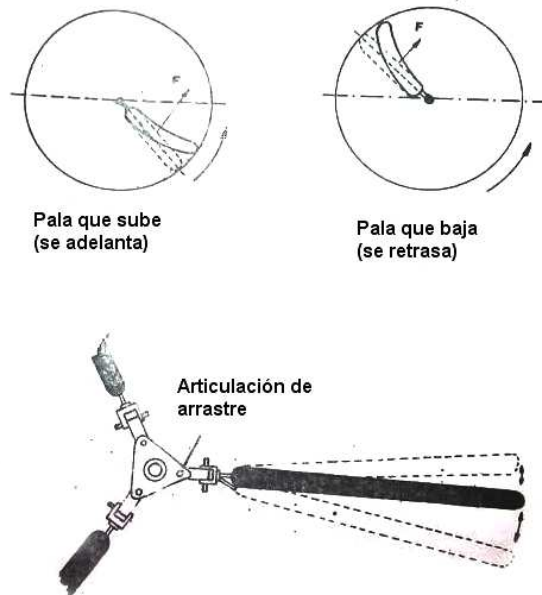


Imagen 1.1.13: Efecto del arrastre sobre pala.

- **Batimiento.** Es el movimiento que sufre la pala en el eje vertical. Debido al esfuerzo provocado por la sustentación, las palas tienen una posición de equilibrio de sustentación por encima de su posición original, esta posición original viene dada cuando la pala está en reposo y tiene la posición más baja que la articulación de batimiento le permite (ver imagen 1.1.14).

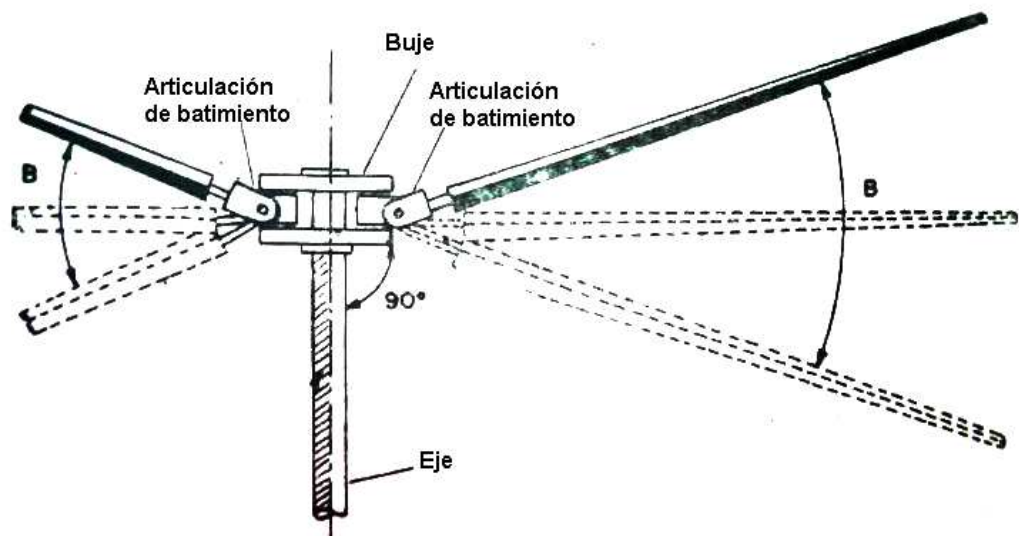
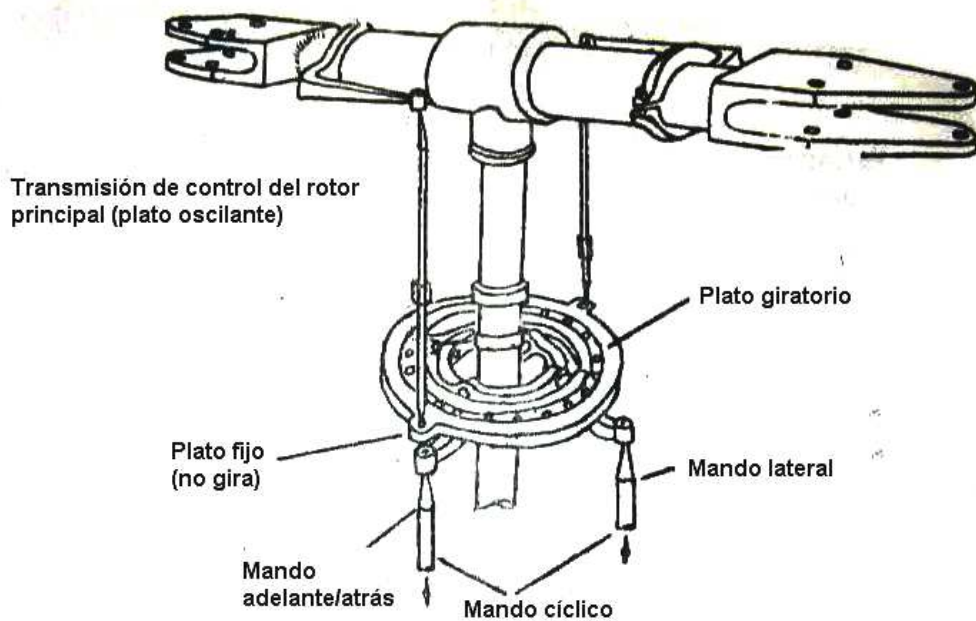


Imagen 1.1.14: Batimiento de pala.

- **Paso.** Es el cambio de ángulo de las palas respecto a su transversal. Provocado por la resistencia del aire que estas atraviesan al girar. Existe un sistema que permite este cambio de paso para así variar el ascenso o descenso de la aeronave (ver imagen 1.1.15).



*Imagen 1.1.15: Sistema transmisor variador de paso.*

El estudio vibratorio de este documento se centra en las vibraciones que provocan una oscilación en el eje vertical de las palas, es decir, un batimiento.

Las palas deben tener unas propiedades que permitan soportar toda esta clase de esfuerzos y sus consecuentes deformaciones. Principalmente son de materiales que les permite tener flexibilidad suficiente para soportar todo esto. Estas características se las

proporcionan los materiales compuestos, formados por fibras rectas y largas que se encuentran en una matriz, manteniendo así las fibras unidas y repartiendo por todas ellas los esfuerzos. La matriz se encarga de hacer frente a los efectos de la fatiga y soportar los golpes, mientras que las cargas se localizan en las fibras. Estas fibras se colocan formando laminas que, según su orientación de deposición, se obtienen diferentes propiedades como la flexibilidad, la tolerancia a daños, estabilidad, delaminación o resistencia. También se pueden encontrar algunos modelos fabricados con materiales metálicos.

Todas las palas están compuestas por un larguero, un recubrimiento, el relleno del interior y la punta. Pero estas pueden presentarse con diferentes tipos de perfil.

## 1.2 Objetivos

En este trabajo se plantea como objetivo fundamental el análisis simplificado de las vibraciones por flexión de una pala de helicóptero. Para ello se modeliza la pala como una viga de Euler-Bernouilli que gira alrededor de uno de sus extremos que se considera articulado y considerando el otro como extremo libre. Para obtener la solución de este objetivo principal hace falta pasar por múltiple de pasos, por lo que el desarrollo del documento se divide en varios objetivos parciales. Son los siguientes:

- a) Establecer un modelo simplificado de la dinámica de la viga en rotación.
- b) Plantear una solución aproximada para la obtención de las frecuencias propias de vibración de la viga, ya que por la naturaleza del problema, no se puede tener una solución exacta.
- c) Obtener las frecuencias propias y deformadas modales de la viga sin rotación para ser utilizadas en el modelo numérico aproximado
- d) Obtener las frecuencias naturales de la viga en rotación.
- e) Analizar las soluciones que suponen riesgo de resonancia y proponer algunas soluciones para eliminar que aparezca este fenómeno no deseado.

## 1.3 Contenido

El presente documento técnico se compone de 6 capítulos, el primero de los cuáles es esta breve introducción en la que se introduce el problema indicando el objetivo y la motivación de resolverlo. En el capítulo 2 se analiza el problema vibratorio de vigas sin rotación, cuyos resultados se usan más adelante. El capítulo 3 se dedica al estudio de vibraciones por flexión de vigas en rotación, núcleo fundamental de este trabajo, donde se lleva a cabo el planteamiento del problema y su formulación con su respectivo desarrollo dónde se explica cómo solucionarlo y mediante qué métodos se realiza. En el capítulo 4 se resuelve un ejemplo práctico y se analizan las posibles apariciones de resonancia. Finalmente, en el capítulo 5, se recogen las principales conclusiones de este análisis. Al final del documento se aporta la bibliografía utilizada y dos anexos, donde se listan los programas de cálculo en Matlab utilizados para el desarrollo de este TFG.

# VIBRACIONES POR FLEXIÓN DE VIGAS SIN ROTACIÓN

---

A continuación se analiza el caso de una viga articulada en uno de sus apoyos sin estar sometida a rotación. Esto es necesario para así obtener las frecuencias propias de un sistema con esta disposición.

## 2.1 Formulación del problema

Para poder empezar a desarrollar el estudio se debe hacer uso de las ecuaciones de vibraciones en medios continuos. Con estas ecuaciones se obtienen los valores de las frecuencias naturales de nuestro modelo.

Nuestro caso se modeliza como una viga con un solo apoyo y de tipo articulado, siendo así el modelo más similar a la pala del helicóptero. Es un problema de vibraciones unidimensional, por lo que las variables son la posición en el eje  $x$  que recorre la viga y el tiempo.

Para el planteamiento del problema se debe tener como datos la geometría de la pala, las propiedades del material del que está hecha, las condiciones de contorno de los apoyos y las cargas que varían en el tiempo.

Se empieza el desarrollo a partir de la ecuación del movimiento:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.1.1)$$

Donde:

- $\rho$  es la densidad del material.
- $A$  es el área de sección.
- $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  es la aceleración.
- $F(x, t)$  es la fuerza en función de la posición y tiempo.
- $\frac{\partial V}{\partial x}$  es el diferencial de fuerza en un diferencial de sección.



Sabiendo que:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad y \quad M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Se obtiene:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = F(x, t) \quad (2.1.2)$$

En este caso se considera una pala de sección uniforme, es decir, los valores de EI y  $\rho A$  son constantes por lo que se pueden sacar de la doble derivada quedando la ecuación del movimiento de la siguiente forma:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (2.1.3)$$

Para el cálculo de frecuencias propias o naturales, el valor de F(x,t) es cero, dado que con esta condición sin interacciones con fuerzas exteriores es como se obtienen las frecuencias naturales. Quedando la ecuación (2.1.3) de la siguiente forma:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (2.1.4)$$

En la ecuación 2.1.4 la función y depende de dos variables, una en función del espacio y otra en función del tiempo, por lo que para resolverlo es conveniente separar en dos funciones que dependan sólo de una de las variables respectivamente.

Siendo:

$$y = \phi(x)q(t) \quad (2.1.5)$$

Queda:

$$\rho A \Phi \ddot{q} + EI \Phi^{IV} q = 0 \quad (2.1.6)$$

Si se despejan los términos y se agrupan los que dependen de la variable  $x$  y los que dependen de la variable  $t$  queda de la siguiente forma:

$$\underbrace{\frac{EI \Phi^{IV}}{\rho A \Phi}}_x = - \underbrace{\frac{\ddot{q}}{q}}_t \quad (2.1.7)$$

Como se observa los términos a cada lado del igual dependen de variables distintas, por lo que para que esta igualdad sea compatible se deduce que ambos términos debe dar como resultado una constante.

Por lo que:

$$\frac{EI \Phi^{IV}}{\rho A \Phi} = - \frac{\ddot{q}}{q} = -\omega^2 = cte \quad (2.1.8)$$

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad q(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$\eta^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2$$

$$\Phi^{IV}(x) + \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \Phi(x) = 0$$

$$\Phi(x) = C_1 \sin \eta x + C_2 \cos \eta x + C_3 \sinh \eta x + C_4 \cosh \eta x \quad (2.1.9)$$

Para poder introducir las condiciones de contorno de la viga se debe conocer la relación entre la deformada modal y las variables físicas para poder acondicionar el problema a nuestro caso. Las relaciones son las siguientes:

*Tabla 2.1.1: Relaciones deformada modal-variables físicas*

<b>DEFORMADA MODAL</b>	<b>VARIABLE FÍSICA</b>
$\phi$	Desplazamiento
$\frac{d\phi}{dx}$	Giro de la sección
$\frac{d^2\phi}{dx^2}$	Momento flector
$\frac{d^3\phi}{dx^3}$	Esfuerzo cortante

Al tratarse de una viga de un solo apoyo y de tipo articulado se tienen las condiciones siguientes en los extremos:

- En el extremo apoyado. Como primera condición se sabe que, al ser un apoyo fijo, su desplazamiento es nulo. Como segunda condición se tiene que, al ser un apoyo articulado, el momento flector es cero. Por lo que se obtienen de la tabla 2.1 las condiciones siguientes:

$$\phi = 0$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

- En el extremo libre. Como es un extremo libre se sabe que el esfuerzo cortante y el momento flector son nulos. De estas condiciones se obtienen de la tabla 2.1 las relaciones siguientes:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} = 0$$



Figura 2.1.1: Representación simplificada de la viga.

$$\begin{aligned} \theta_1 = \phi = 0 \\ M_1 = \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 = \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \\ Q_2 = \frac{d^3\phi}{dx^3} = 0 \end{aligned}$$

## 2.2 Cálculo de frecuencias propias

En el anterior apartado se desarrollaron las ecuaciones mediante las que se obtienen las frecuencias propias. Para obtenerlas se deben introducir cada una de las condiciones de contorno en la ecuación 2.1.1.9 y resolver el determinante de este sistema de cuatro ecuaciones de forma matricial. El resultado de este determinante es la función de vibración de nuestra viga, de donde se extraen los valores de las frecuencias propias, valores que se encuentran al hacerse cero la función.

Para el desarrollo del problema será necesario tener en cuenta las características de nuestro rotor, los parámetros de diseño son los siguientes:

*Tabla 2.2.1: Dimensiones y características de la pala.*

<b>Velocidad de giro</b>	280 [r.p.m]
<b>Radio del rotor</b>	6 [m]
<b>Excentricidad</b>	0.35 [m]
<b>Cuerda</b>	0.44 [m]
<b>Masa por unidad de longitud</b>	1.2 [kg/m]
<b>Módulo de elasticidad por momento de inercia</b>	44236 [kg/m <sup>3</sup> · s <sup>2</sup> ]

Nuestra función depende de las variables  $\eta$  y  $x$ , para poder facilitar el cálculo se hace un cambio de variable, así se permite obtener los valores de las frecuencias propias de cualquier viga de esta disposición sin importar sus dimensiones hasta el último cálculo.

Se tiene que:

$$\eta = \frac{\lambda}{L} \quad (2.2.1)$$

Dónde:

- $\lambda$  es el modo.
- $L$  es la longitud total de la viga.

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (2.2.2)$$

Dónde:

- $x$  es la posición en la viga

Este cambio de variables facilita el cálculo de soluciones debido a que  $\xi$  solo podrá tomar como valores 0 (para el apoyo inicial) ó 1 (para el apoyo final):

- Para el primer apoyo el valor de la posición es cero:

$$\xi_1 = \frac{0}{L} = 0$$

- Para el segundo apoyo el valor de la posición es igual a la longitud de la viga:

$$\xi_2 = \frac{L}{L} = 1$$

Sustituyendo las variables citadas anteriormente en la ecuación 2.1.9 se obtiene una nueva ecuación de la siguiente forma:

$$\phi(\lambda) = C_1 \sin \lambda \xi + C_2 \cos \lambda \xi + C_3 \sinh \lambda \xi + C_4 \cosh \lambda \xi \quad (2.2.3)$$

Como se observa al final del apartado 2.1, hace falta calcular la segunda y tercera derivada de la función 2.1.9 respecto de la variable  $x$ . Tras el cambio de variable, la función depende únicamente de  $\lambda$ , por lo que se deriva respecto a esta:

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} = \phi^{II} = -\lambda^2 C_1 \sin \lambda \xi - \lambda^2 C_2 \cos \lambda \xi + \lambda^2 C_3 \sinh \lambda \xi + \lambda^2 C_4 \cosh \lambda \xi \quad (2.2.4)$$

$$\frac{d^3 \phi}{d\lambda^3} = \phi^{III} = -\lambda^3 C_1 \cos \lambda \xi + \lambda^3 C_2 \sin \lambda \xi + \lambda^3 C_3 \cosh \lambda \xi + \lambda^3 C_4 \sinh \lambda \xi \quad (2.2.5)$$

Sustituyendo los valores de  $\xi$  en las ecuaciones de cada apoyo:

- **Extremo inicial.** Se tiene que  $\xi_1 = 0$ :

Por lo que al sustituir en  $\phi(0)$  se obtiene:

$$\phi(0) = C_1 \sin \lambda * 0 + C_2 \cos \lambda * 0 + C_3 \sinh \lambda * 0 + C_4 \cosh \lambda * 0$$

Sabiendo que:  $\sin 0$  es 0,  $\cos 0$  es 1,  $\sinh 0$  es 0 y  $\cosh 0$  es 1, se obtiene:

$$\phi(0) = C_2 + C_4 \quad (2.2.6)$$

Al sustituir en  $\phi''(0)$ :

$$\phi''(0) = -\lambda^2 C_1 \sin \lambda * 0 - \lambda^2 C_2 \cos \lambda * 0 + \lambda^2 C_3 \sinh \lambda * 0 + \lambda^2 C_4 \cosh \lambda * 0$$

Obteniendo:

$$\phi''(0) = -\lambda^2 C_2 + \lambda^2 C_4 \quad (2.2.7)$$

- **Extremo final.** Se tiene que  $\xi_2 = 1$ :

Por lo que al sustituir en  $\phi''(1)$  se obtiene:

$$\phi''(1) = -\lambda^2 C_1 \sin \lambda * 1 - \lambda^2 C_2 \cos \lambda * 1 + \lambda^2 C_3 \sinh \lambda * 1 + \lambda^2 C_4 \cosh \lambda * 1$$

Resolviendo se obtiene:

$$\phi''(1) = -\lambda^2 C_1 \sin \lambda - \lambda^2 C_2 \cos \lambda + \lambda^2 C_3 \sinh \lambda + \lambda^2 C_4 \cosh \lambda \quad (2.2.8)$$



Al sustituir en  $\phi'''(1)$ :

$$\phi'''(1) = -\lambda^3 C_1 \cos \lambda * 1 + \lambda^3 C_2 \sin \lambda * 1 + \lambda^3 C_3 \cosh \lambda * 1 + \lambda^3 C_4 \sinh \lambda * 1$$

Simplificando se obtiene:

$$\phi'''(1) = -\lambda^3 C_1 \cos \lambda + \lambda^3 C_2 \sin \lambda + \lambda^3 C_3 \cosh \lambda + \lambda^3 C_4 \sinh \lambda$$

(2.2.9)

Como resultado final se tienen las siguientes ecuaciones acordes a las condiciones de contorno:

$$x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(0) = 0 \rightarrow C_2 = -C_4 \\ \phi''(0) = 0 \rightarrow C_2 = C_4 \end{array} \right.$$

$$x = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi''(1) = 0 \rightarrow C_1 \sin \lambda + C_2 \cos \lambda = C_3 \sinh \lambda + C_4 \cosh \lambda \\ \phi'''(1) = 0 \rightarrow C_1 \cos \lambda - C_2 \sin \lambda = C_3 \cosh \lambda + C_4 \sinh \lambda \end{array} \right.$$

Con estas ecuaciones se observa que las constantes  $C_2$  y  $C_4$  solo pueden tomar el valor cero para cumplir la igualdad en  $x = 0$ . Introduciendo los valores de  $C_2$  y  $C_4$  en  $x = 1$  se obtienen las siguientes igualdades:

$$C_1 \sin \lambda = C_3 \sinh \lambda$$

$$C_1 \cos \lambda = C_3 \cosh \lambda$$

Dividiendo ambas ecuaciones se obtiene la ecuación a partir de la cuál obtendremos los valores de  $\lambda$ :

$$\tan \lambda = \tanh \lambda \quad (2.2.10)$$

La forma propia queda de la siguiente manera:

$$\phi = \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\lambda)} + \frac{\sinh(\lambda x)}{\sinh(\lambda)} = \sin(\lambda x) + \frac{\sin(\lambda)}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda x) \quad (2.2.11)$$

Para modos suficientemente grandes, el valor de la fracción del segundo sumando es muy pequeño, por lo que puede hacerse la aproximación siguiente:

$$\phi \approx \sin(\lambda x) \quad (2.2.12)$$

Para poder obtener los valores de  $\lambda$  que resuelven la igualdad 2.2.10 tenemos dos opciones:

- Obtener los puntos de corte entre las gráficas de las funciones  $\tan \lambda$  y  $\tanh \lambda$ , estos puntos donde ambas coinciden son los valores que verifican la igualdad.

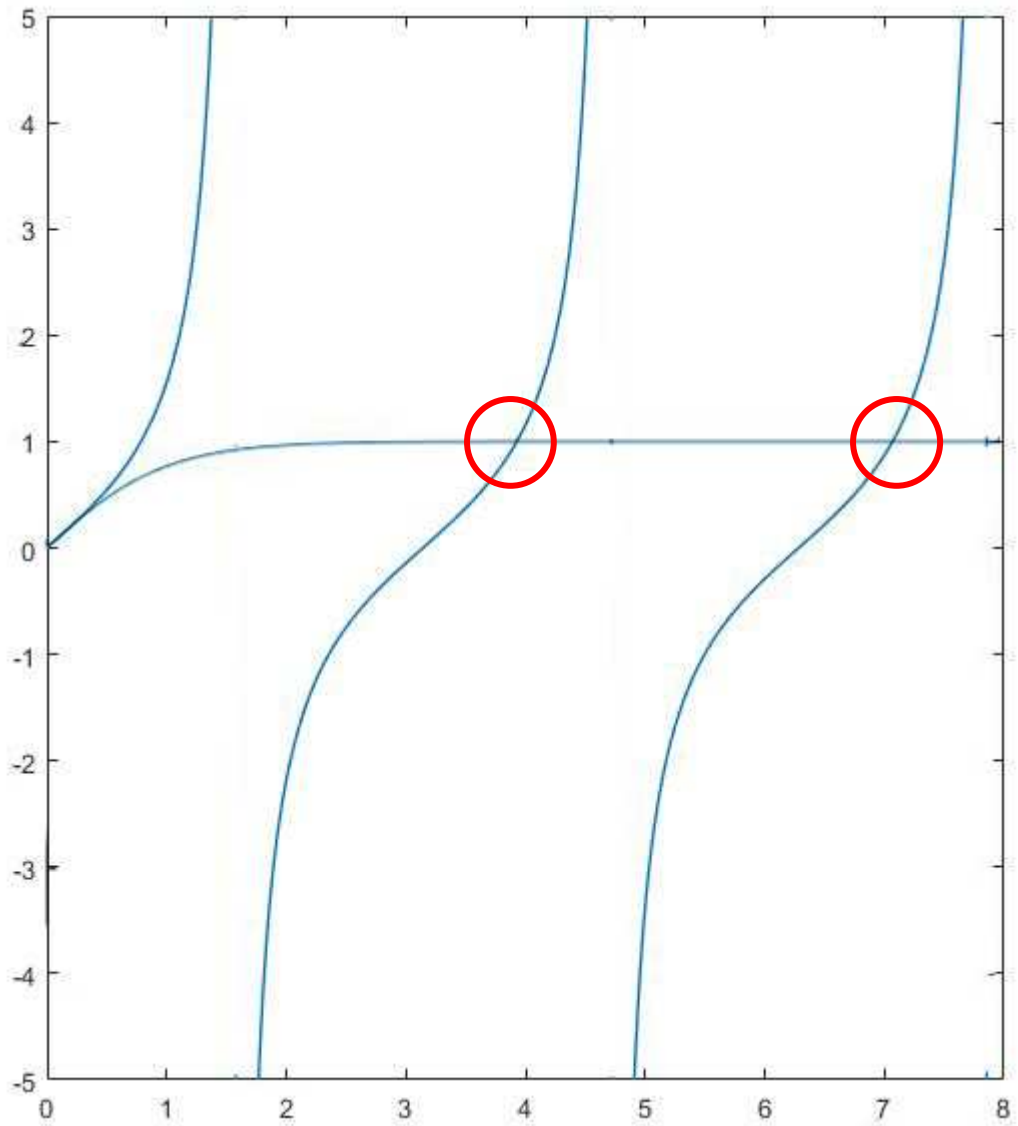


Imagen 2.2.1: Gráfica de la superposición de  $\tan \lambda$  y  $\tanh \lambda$ .

- Despejar los términos de la igualdad al mismo lado e igualar a cero, los puntos donde la gráfica de la ecuación obtenida corta al eje x serán las soluciones.

$$F(\lambda) = \tan \lambda - \tanh \lambda \quad (2.2.13)$$

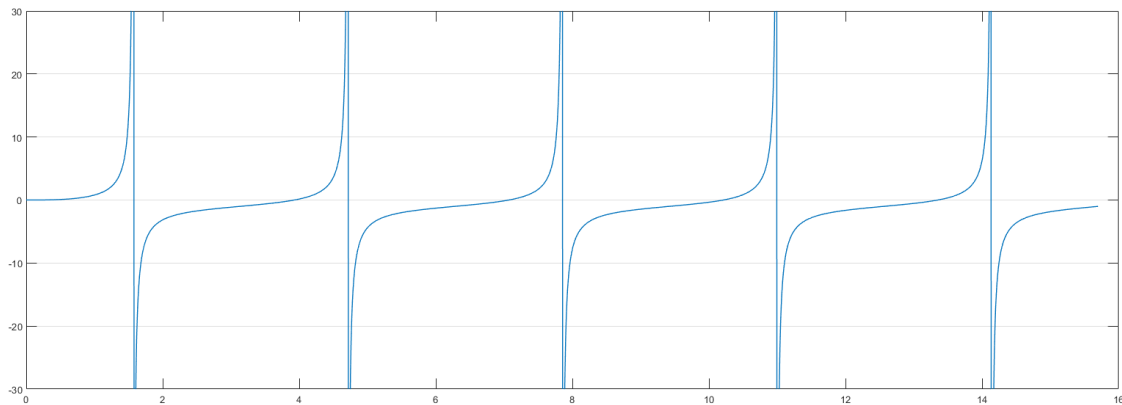


Imagen 2.2.2: Gráfica de la función 2.2.13

Se opta por elegir la segunda opción y resolverla haciendo uso de la herramienta de cálculo Matlab, donde ahora se encuentra el problema de hallar las raíces de esta función. Para obtener estos valores que hacen que la función 2.2.13 valga cero se debe crear un programa para obtener los cortes con el eje x. Para ello se recurre a seguir el método de la bisección, método que consiste en lo siguiente:

- Debe existir seguridad sobre la continuidad de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[a,b]$
- A continuación se verifica que el producto de la función evaluada en  $a$  y  $b$  es menor que cero.

$$f(a) * f(b) < 0$$

- Se evalúa la función en el punto medio del intervalo  $[a,b]$  y si el valor es cero ya se tiene la raíz buscada.
- En caso de que no lo sea, se compara el signo de  $f(m)$  con  $f(a)$  y  $f(b)$ .
- Se determina si en  $[a,m]$  o  $[m,b]$  ocurre el cambio de signo y se redefine el intervalo.

- Con el nuevo intervalo se repite el proceso anterior reiteradamente obteniéndose un intervalo cada vez más pequeño donde se encuentra encerrada la solución. El tamaño del intervalo final nos dará la solución con el margen de error deseado.

El código desarrollado en Matlab para la obtención de raíces y basado en el método de la bisección puede encontrarse en el anexo 1.

Como se puede observar, las columnas 1 y 3 de las soluciones dadas por el programa desarrollado en Matlab (anexo 1), corresponden a los límites inferior y superior respectivamente, mientras que la columna central es el valor del punto medio entre ambos límites. A medida que se realizan iteraciones, el intervalo se va acotando hasta dar la solución que queremos.

Gracias a la gráfica sabemos dónde se encuentran las soluciones, por lo que se obtienen a través del programa:

$$\lambda_1 = 3.9266023$$

$$\lambda_2 = 7.0685827$$

$$\lambda_3 = 10.2101762$$

$$\lambda_4 = 13.3517688$$

$$\lambda_5 = 16.4933614$$

$$\lambda_6 = 19.6349541$$

$$\lambda_7 = 22.7765467$$

$$\lambda_8 = 25.9181381$$

Se introducen los valores obtenidos de  $\lambda$  y las características de la pala, calculando así las frecuencias naturales:

$$\lambda^4 = \frac{\rho AL^4}{EI} \omega^2$$

$$\omega = \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

$$\omega_1 = \frac{3.9266^2}{6^2} \sqrt{\frac{44236.85}{1.2}} = 82.2304 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 266.4792 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 555.9880 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = 950.7724 \text{ rad/s}$$

$$\omega_5 = 1.4508e + 03 \text{ rad/s}$$

$$\omega_6 = 2.0562e + 03 \text{ rad/s}$$

$$\omega_7 = 2.7668e + 03 \text{ rad/s}$$

$$\omega_8 = 3.5827e + 03 \text{ rad/s}$$

# VIBRACIONES POR FLEXIÓN DE VIGAS CON ROTACIÓN

---

El movimiento giratorio al que se encuentra sometida una viga en rotación provoca que esta se encuentre sometida a unas fuerzas excitadoras que la induce unas vibraciones.

### 3.1 Formulación del problema

Para la resolución del problema se considera una viga en rotación sobre la que no actúa la fuerza aerodinámica. Esta viga se encuentra sometida a la fuerza centrífuga y a la fuerza provocada por la inercia de los elementos por los que está formada deformándose y, debido a las características de la pala, se desprecian los efectos del peso debido a que son insignificantes en comparación. Como la elástica de la viga es función  $y(r,t)$ , se tiene que las fuerzas inerciales son:

$$F_{inerciales} = -m \cdot a = -m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.1.1)$$

Y como  $w(r)=0$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( N \frac{\partial y}{\partial r} \right) = -m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.1.2)$$

De la ecuación 3.1.2 se observa que:

- Es lineal, de cuarto orden según la variable espacial  $r$  y de segundo orden según el tiempo  $t$ .
- Se puede obtener la solución separando variables gracias a la linealidad de la ecuación, por lo que la ecuación de la elástica  $y(r,t)$  se puede desarrollar en función de sus modos y frecuencias propias  $(\omega_i, y_i)$ .

$$y(r, t) = \sum_1^{\infty} y_i(r) \cdot \text{sen}(\omega_i t) \quad (3.1.3)$$



El análisis de vigas giratorias requiere de una gran cantidad de cálculos para obtener las formas propias y sus respectivas frecuencias de vibración. Esto se debe a que, aunque las propiedades de la viga sean constantes a lo largo de esta y que la ecuación diferencial sea lineal, no existe una solución general por lo que es necesario el uso de métodos numéricos para resolverla. En este caso son métodos de elementos finitos.

Igualando los coeficientes de  $\text{sen}(\omega_i t)$  y sustituyendo en la ecuación 3.1.2 se tiene la siguiente sucesión de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( EI \sum_1^{\infty} y_i(r) \cdot \text{sen}(\omega_i t) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( N \sum_1^{\infty} y_i(r) \cdot \text{sen}(\omega_i t) \right) \\ = -m \cdot \sum_1^{\infty} y_i(r) \cdot \omega_i^2 \cdot \text{sen}(\omega_i t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( EI \frac{\partial^2 y_i}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( N \frac{\partial y_i}{\partial r} \right) = -m \cdot \omega_i^2 \cdot y_i(r) \quad (3.1.4)$$

Introduciendo las condiciones de contorno que en el capítulo 2 se explicaron se definen las formas propias  $y_i(r)$  de la viga:

- Momento flector en la punta:  $y_i''(R - e) = 0$
- Esfuerzo cortante en la punta:  $y_i'''(R - e) = 0$
- Momento flector en la articulación:  $y_i''(0) = 0$
- Desplazamiento en la articulación:  $y_i(0) = 0$

## 3.2 Cálculo de frecuencias propias

Para el cálculo de las frecuencias propias se transforma el problema con las condiciones de contorno en una ecuación integrodiferencial, por lo que se multiplica  $y_i(r)$  por la ecuación 3.4 y se integra de 0 a  $(R - e)$ :

$$\int_0^{R-e} y_i(r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( EI \frac{\partial^2 y_i}{\partial r^2} \right) dr - \int_0^{R-e} y_i(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( N \frac{\partial y_i}{\partial r} \right) dr = \int_0^{R-e} m \cdot \omega_i^2 \cdot y_i^2(r) dr \quad (3.2.1)$$

Se integra por partes y se introducen las condiciones de contorno:

- Primer miembro:

$$\begin{aligned} \int_0^{R-e} y_i(r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( EI \frac{\partial^2 y_i}{\partial r^2} \right) dr &= \left[ y_i(r) \frac{d}{dr} (EI y_i^{II}) \right]_0^{R-e} - \int_0^{R-e} y_i^I(r) \frac{d}{dr} \left( EI \frac{dy_i}{dr^2} \right) dr = \\ &= -[y_i^I(r)(EI y_i^{II})]_0^{R-e} + \int_0^{R-e} (EI y_i^{II}) y_i^{II}(r) dr = \int_0^{R-e} EI \left( \frac{d^2 y_i(r)}{dr^2} \right)^2 dr \end{aligned}$$

- Segundo miembro:

$$\int_0^{R-e} y_i(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( N \frac{\partial y_i}{\partial r} \right) dr = \left[ y_i(r) (N \cdot y_i^I(r)) \right]_0^{R-e} - \int_0^{R-e} (N y_i^I) y_i^I dr =$$

$$= - \int_0^{R-e} (Ny_i^1)y_i^1 dr$$

Finalmente se obtiene:

$$\int_0^{R-e} EI \left( \frac{d^2 y_i(r)}{dr^2} \right)^2 dr + \int_0^{R-e} N \left( \frac{dy_i}{dr} \right)^2 dr = \omega_i^2 \int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr \quad (3.2.2)$$

Esto último expresa que, durante la vibración de la viga, la energía de flexión más la energía de alargamiento en la posición de máxima deformación es igual a la energía cinética en la posición de deformación nula. La viga alcanza la posición de máxima deformación cuando alcanza la posición donde la velocidad es nula. Es la misma situación que cuando se somete un muelle a una fuerza de compresión y después se libera de ella, cuando esta comprimido toda su energía se concentra en la deformación que está sufriendo y no tiene velocidad, por lo que su energía cinética es cero, pero al soltarlo esa energía de deformación (energía elástica) se va transformando en energía cinética hasta llegado el punto donde este no tiene ninguna variación de longitud (deformación cero) y toda su energía es cinética. Este fenómeno se debe al principio de conservación de la energía mecánica.

Continuando con el problema se despeja de la ecuación  $\omega_i$ , pero antes es necesario calcular las integrales intermedias. En caso de que exista una masa  $M_t$  en punta, cualquier sección estará sometida a una fuerza normal:

$$N = \int_0^{R-e} m\Omega^2(r_1 + e)dr_1 + M_t\Omega^2R$$

Por lo que:

$$\int_0^{R-e} N \left(\frac{dy_i}{dr}\right)^2 dr = \Omega^2 \int_0^{R-e} \left(\frac{dy_i}{dr}\right) \left[ \int_0^{R-e} mr_1 dr_1 + e \int_0^{R-e} mdr_1 \right] dr + M_t\Omega^2R \int_0^{R-e} \left(\frac{dy_i}{dr}\right)^2 dr$$

El segundo miembro está formado por integrales que pueden transformarse integrando por partes teniendo presentes las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} & \int_0^{R-e} \left(\frac{dy_i}{dr}\right)^2 \left[ \int_0^{R-e} mr_1 dr_1 \right] dr = \\ & = \int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1}\right)^2 dr_1 \int_r^{R-e} mr_1 dr_1 \Big|_0^{R-e} + \int_0^{R-e} mr \left( \int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1}\right)^2 dr_1 \right) dr = \\ & = \int_0^{R-e} mr \left( \int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1}\right)^2 dr_1 \right) dr \\ & \int_0^{R-e} \left(\frac{dy_i}{dr}\right)^2 \left[ \int_0^{R-e} mdr_1 \right] dr = \\ & = \int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1}\right)^2 dr_1 \int_r^{R-e} mdr_1 \Big|_0^{R-e} + \int_0^{R-e} m \left( \int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1}\right)^2 dr_1 \right) dr = \\ & = \int_0^{R-e} m \left( \int_0^r \left(\frac{dy_i}{dr_1}\right)^2 dr_1 \right) dr \end{aligned}$$

Por lo que despejando en  $\omega_i$  se tiene:

$$\int_0^{R-e} EI \left( \frac{d^2 y_i(r)}{dr^2} \right)^2 dr + \int_0^{R-e} N \left( \frac{dy_i}{dr} \right)^2 dr = \omega_i^2 \int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr$$

$$\omega_i^2 = \frac{\int_0^{R-e} EI \left( \frac{d^2 y_i(r)}{dr^2} \right)^2 dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} + \Omega^2 \left[ \frac{\int_0^{R-e} m r \left( \int_0^r \left( \frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \right) dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} + \right.$$

$$\left. + e \frac{\int_0^{R-e} m \left( \int_0^r \left( \frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \right) dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} + M_t R \frac{\int_0^{R-e} \left( \frac{dy_i}{dr} \right)^2 dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} \right]$$

De la anterior ecuación se puede observar que las frecuencias propias de vibración  $\omega_i$  son función de la rigidez específica EI, de la distribución de la masa  $m$ , del régimen de giro  $\Omega$ , de la excentricidad de la articulación de batimiento o del empotramiento  $e$  y de la masa colocada en la punta  $M_t$ .

En este caso la punta está libre de cualquier masa adicional, por lo que la ecuación resulta de la siguiente forma:

$$\omega_i^2 = \frac{\int_0^{R-e} EI \left( \frac{d^2 y_i(r)}{dr^2} \right)^2 dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} + \Omega^2 \left[ \frac{\int_0^{R-e} m r \left( \int_0^r \left( \frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \right) dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} + \right.$$

$$\left. + e \frac{\int_0^{R-e} m \left( \int_0^r \left( \frac{dy_i}{dr_1} \right)^2 dr_1 \right) dr}{\int_0^{R-e} m y_i^2(r) dr} \right]$$

Si se adimensionaliza la expresión anterior resulta:

$$\omega_i^2 = \underbrace{\frac{(EI)_0}{m_0(R-e)^4}}_{\omega_0^2} \underbrace{\frac{\int_0^1 \frac{EI}{(EI)_0} \left(\frac{d^2 \bar{y}_i}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0}\right) \bar{y}_i^2 dx}}_{a_i^2} + \Omega^2 \left[ \underbrace{\frac{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0}\right) x \left(\int_0^x \left(\frac{d\bar{y}_i}{dx_1}\right)^2 dx_1\right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0}\right) \bar{y}_i^2 dx}}_{k_{0,i}} + \underbrace{\bar{e} \frac{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0}\right) \left(\int_0^x \left(\frac{d\bar{y}_i}{dx_1}\right)^2 dx_1\right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{m}{m_0}\right) \bar{y}_i^2 dx}}_{k_{1,i}} \right]$$

Donde:

$$\bar{e} = \frac{e}{R-e}$$

Por lo que finalmente se obtiene la siguiente ecuación:

$$\omega_i^2 = a_i^2 \omega_0^2 + \Omega^2 [k_{0,i} + \bar{e} k_{1,i}] = \omega_{i0}^2 + \Omega^2 k_i \quad (3.2.3)$$

Donde:

- $\omega_{i0}$  es la frecuencia natural i-ésima de la viga sin rotación y  $k_i$  es un coeficiente que multiplica teniendo en cuenta la fuerza centrífuga denominado como coeficiente de Southwell para el i-ésimo modo.

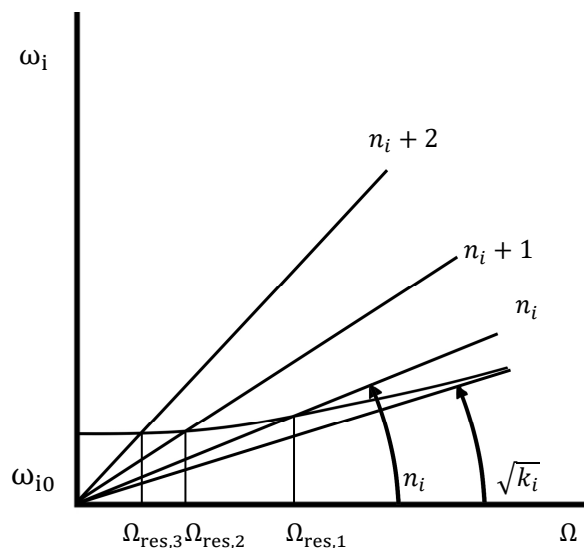
- Los coeficientes  $a_i$ ,  $k_{0,i}$  y  $k_{1,i}$  dependen de la forma propia  $y_i$  así como de la distribución de masas y rigideces, según los casos.

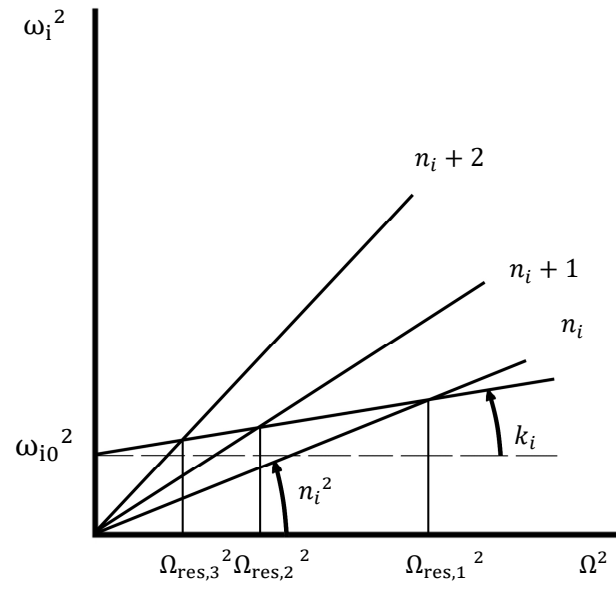
El fenómeno de resonancia se dará en el caso de que la frecuencia propia  $\omega_i$  sea múltiplo del giro de la viga:

$$\omega_i = n \Omega_{\text{res}} \rightarrow n^2 \Omega^2 = \omega_{i0}^2 + \Omega^2_{\text{res}} k_i$$

$$\Omega_{\text{res}} = \frac{\omega_{i0}}{\sqrt{n^2 - k_i}} \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } n^2 > k_i \quad (3.2.4)$$

Esta relación se puede representar gráficamente en el denominado diagrama de resonancia, que puede adoptar la forma de intersección de una hipérbola con rectas, o bien de intersección entre rectas, para cada uno de los modos propios  $y_i$ , y que indica los regímenes del rotor a evitar.







## EJEMPLO DE APLICACIÓN

---

Haciendo uso de las ecuaciones obtenidas para el caso de la viga rotatoria, se aplicarán a la pala del helicóptero para conocer si existe riesgo de resonancia y posteriormente resolver este fenómeno.

Tras calcular los valores de  $\lambda_i$  en el apartado 2.2 se procede a calcular los llamados coeficientes de Southwell que constituyen la ecuación 3.2.3.

Se muestra el cálculo de los coeficientes para el modo 1, los siete restantes siguen el mismo procedimiento pero utilizando el valor de  $\lambda_i$  correspondiente a cada modo:

$$\omega_1^2 = a_1^2 \omega_0^2 + \Omega^2 [k_{0,1} + \bar{e}k_{1,1}]$$

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda_1^4 \frac{\int_0^1 \frac{EI}{(EI)_0} \left( \frac{d^2 \bar{y}_1}{\lambda_1^2 dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^1 \left( \frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_1^2 dx} = 3.9266^4 \frac{\int_0^1 \left( \frac{d^2 (\sin(\lambda x) + \frac{\sin(\lambda)}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda x))}{\lambda_1^2 dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^1 (\sin(\lambda x) + \frac{\sin(\lambda)}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda x))^2 dx} = \\ &= 3.9266^4 \frac{\int_0^1 \left( \frac{\lambda_1^2 (-\sin(\lambda_1 x) - 0.0279 \sinh(\lambda_1 x))}{\lambda_1^2} \right)^2 dx}{\int_0^1 (\sin(\lambda x) + \frac{\sin(\lambda)}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda x))^2 dx} = 3.9266^4 \frac{0.4997}{0.4997} = \end{aligned}$$

$$a_1^2 = 237.7205$$

Como se puede observar dentro de la integral, la fracción  $\frac{EI}{(EI)_0}$  desaparece debido a que las características de la pala permanecen constantes a lo largo de esta.

$$k_{0,i} = \frac{\int_0^1 \left( \frac{m}{m_0} \right) x \left( \int_0^x \left( \frac{d\bar{y}_i}{dx_1} \right)^2 dx_1 \right) dx}{\int_0^1 \left( \frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_1^2 dx} =$$

$$= \lambda_1^2 \frac{\int_0^1 x \left( \int_0^x \left( \frac{d(\sin(\lambda x) + \frac{\sin(\lambda)}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda x))}{\lambda_1 dx_1} \right)^2 dx_1 \right) dx}{\int_0^1 (\sin(\lambda x) + \frac{\sin(\lambda)}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda x))^2 dx} = 3.9266^2 \frac{0.2073}{0.4997} =$$

$$k_{0,1} = 6.3962$$

En el cálculo de  $k_{0,1}$ , ocurre de la misma manera que en el anterior, al ser constantes las características de la pala, la fracción  $\frac{m}{m_0}$  desaparece.

$$k_{1,1} = \frac{\int_0^1 \left( \frac{m}{m_0} \right) \left( \int_0^x \left( \frac{d\bar{y}_i}{dx_1} \right)^2 dx_1 \right) dx}{\int_0^1 \left( \frac{m}{m_0} \right) \bar{y}_1^2 dx} =$$

$$= \lambda_1^2 \frac{\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \frac{d^2(\sin(\lambda x) + \frac{\sin(\lambda)}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda x))}{\lambda_1^2 dx_1} \right)^2 dx_1 \right) dx}{\int_0^1 (\sin(\lambda x) + \frac{\sin(\lambda)}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda x))^2 dx} = \frac{0.2841}{0.4997} =$$

$$k_{1,1} = 8.7659$$

$$\bar{e} = \frac{e}{R - e} = \frac{0.35}{6 - 0.35} = 0.0619$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(EI)_0}{m_0(R - e)^4}} = \sqrt{\frac{44236}{1.2(6 - 0.35)^4}} = 6.015 \text{ [rad/s]}$$

$$\omega_1^2 = 237.7205 \cdot 6.015^2 + 29.322^2 [6.3962 + 0.0619 \cdot 8.7659]$$

$$\omega_1 = 120.6938 \text{ [rad/s]} \rightarrow 1152.54 \text{ [cpm]}$$

Una vez obtenida la frecuencia correspondiente al modo, se divide entre la velocidad de giro para comprobar si existe peligro de resonancia en dicho modo. Esto ocurriría cuando el resultado de dividir la frecuencia y la velocidad de giro fuese un número entero, es decir, que la frecuencia fuese múltiplo de la velocidad de giro. Debido a los cálculos con decimales y aproximaciones se aceptan como números enteros aquellos con una diferencia de pocas centésimas.

Se comprueba para el modo 1:

$$\frac{\omega_1}{\Omega} = 4.116$$

Se observa que el resultado no es un número entero, por lo que no existe resonancia en el primer modo.

Este proceso se repite con el resto de modos, tal y como se exponen a continuación los valores obtenidos de los coeficientes de Southwell y frecuencias en la siguiente tabla:

*Tabla 4.1: Coeficientes de Southwell y frecuencias.*

<b>Modo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
$a_i^2$	237.72	2.4e03	1.08e04	3.178e04	7.4e04	1.4864e05	2.6912e05	4.5125e05
$k_{0,i}$	6.3962	16.625	36.007	61.7447	93.5391	131.8867	176.8482	228.345
$k_{1,i}$	8.7659	24.032	53.1249	92.3392	140	197.3949	264.6889	341.764
$\omega_i$	120.69	325.44	653.501	1.099e+03	1.662e+03	2.345e+03	3.146e+03	4.067e+03

Por último se procede a obtener en qué modos hay riesgo de resonancia según la ecuación  $\omega_i/\Omega$ :

*Tabla 4.2: Comprobación de resonancia.*

<b>Modo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b><math>\omega_i/\Omega</math></b>	4.116	11.09	22.287	37.481	56.71	79.996	107.324	138.7

Como se puede observar, existe posibilidad de resonancia en los modos 2 y 6 para los armónicos 11 y 80 respectivamente. Se despreciará la resonancia del modo 6 debido a que el riesgo disminuye conforme los armónicos son mayores, por lo que el mayor peligro lo guarda el modo 2.

Mediante la ecuación 3.2.4, se comprueba que en el undécimo armónico del modo 2 existe riesgo de resonancia al coincidir la frecuencia con el giro de nuestro rotor:

$$\Omega_{\text{res}} = \frac{\omega_{i0}}{\sqrt{n^2 - k_i}} = \frac{9.0342e + 04}{\sqrt{11^2 - 18.1126}} = 29.6 \text{ [rad/s]} \approx 29.32 \text{ [rad/s]}$$

Como se observa, existe riesgo de resonancia, por lo que se debe encontrar una solución a este problema. Existen varias opciones para evitar que esto ocurra, una de ellas es variar la excentricidad de la pala y volver a calcular las frecuencias para comprobar si continúa el riesgo. Otra opción sería colocar una masa en la punta de la pala, pero ese es un problema que no se va a contemplar en este documento.

Se calcula de nuevo los parámetros y las soluciones con una excentricidad del 60% respecto a la original. Los únicos parámetros que se ven afectados por el cambio de excentricidad son  $\bar{e}$  y  $\omega_0$ . Se procede al cálculo de sus nuevos valores:

$$e_{60\%} = e \cdot 0.6 = 0.35 \cdot 0.6 = 0.21$$

$$\bar{e}_{60\%} = \frac{e_{60\%}}{R - e_{60\%}} = \frac{0.21}{6 - 0.21} = 0.036$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(EI)_0}{m_0(R - e_{60\%})^4}} = \sqrt{\frac{44236}{1.2(6 - 0.21)^4}} = 5.727 \text{ [rad/s]}$$

Con estos nuevos valores se obtienen las nuevas frecuencias.

*Tabla 4.3: Frecuencias para  $e_{60\%}$ .*

<b>Modo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b><math>\omega_i</math></b>	116.4	310.9	623.79	1.04e+03	1.58e+03	2.23e+03	2.99e+03	3.87e+03

Al comprobar si se ha conseguido solucionar el problema de resonancia se obtiene que en el modo 1 resulta lo siguiente:

$$\omega_1/\Omega = 3.972$$

Esto nos indica que la situación ha empeorado debido a que tenemos resonancia en el primer modo en el cuarto armónico y, como bien se dijo anteriormente, la resonancia entraña mayor riesgo si se da en armónicos bajos.

Como se ha podido ver, disminuir el valor de la excentricidad de la pala no ha resultado para evitar la resonancia, haciendo que se pase de tener resonancia en el modo 2 al modo 1. Para comprobar cómo afecta la excentricidad de la pala en la resonancia de esta, se procede a variarla aumentando su valor.

Para hacer la comprobación se prueba con un valor 50% superior al original. Al igual que antes, los únicos parámetros que se ven afectados por la variación del valor de la excentricidad son  $\bar{e}$  y  $\omega_0$ . Se procede al cálculo de sus nuevos valores:

$$e_{150\%} = e \cdot 1.5 = 0.35 \cdot 1.5 = 0.525$$

$$\bar{e}_{150\%} = \frac{e_{150\%}}{R - e_{150\%}} = \frac{0.525}{6 - 0.525} = 0.096$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(EI)_0}{m_0(R - e_{150\%})^4}} = \sqrt{\frac{44236}{1.2(6 - 0.525)^4}} = 6.4 \text{ [rad/s]}$$

Se procede a calcular el valor de las nuevas frecuencias acordes a esta nueva variación.

*Tabla 4.4: Frecuencias para  $e_{150\%}$  y comprobación de resonancia.*

<b>Modo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
$\omega_i$	126.33	344.5	694.11	1.16e+03	1.77e+03	2.5e+03	3.3 e+03	4.32e+03
$\omega_i/\Omega$	4.3	11.7	23.67	39.8	60.36	85.265	114.255	147.34

Como se observa, con esta nueva variación de la excentricidad se ha conseguido eliminar el riesgo de resonancia. En el modo 4 parece quedar cerca de una posible resonancia para el armónico 40, pero la tolerancia aceptada es de centésimas, por lo que no existe riesgo para los primeros ocho modos que, como antes se explicó, son los que realmente suponen un peligro.



## CONCLUSIONES

---

La resolución del problema se compuso de dos fases.

Primero se modelizó la pala como una viga tipo articulada y libre en su otro extremo. Mediante el desarrollo de la ecuación del movimiento se obtuvo la ecuación de la forma en la que, al introducir las condiciones de contorno y las propiedades de la pala del helicóptero, se calcularon las frecuencias propias para el caso de la viga sin rotación. Solamente se llevó a cabo el cálculo de las ocho primeras frecuencias debido a que los armónicos dónde se da resonancia son más peligrosos cuanto más bajos sean. Una vez calculadas las frecuencias naturales en el caso de la viga sin rotación, se procede a desarrollar la ecuación de la elástica debido a los esfuerzos inerciales a los que se encuentra sometida la viga giratoria, obteniéndose una sucesión de ecuaciones diferenciales en las que se introducen las condiciones de contorno y para las que será necesario una integración por partes para su desarrollo. Siguiendo este proceso se obtiene la ecuación para calcular  $\omega_i$ , en la que se realiza un adimensionamiento para que tenga una forma final en la que aparecen unos coeficientes que son independientes de las características de la viga. Esto nos permite realizar un cálculo mucho más general en el que si es necesario realizar un cambio debido a que se quieren utilizar una viga con otras propiedades no haga falta repetir todo el proceso, como bien se demuestra en el final del estudio al recalculer las resonancias variando la excentricidad.

En la segunda fase del análisis se procede a aplicar los desarrollos obtenidos anteriormente a la pala de la aeronave. Al introducir los datos de la pala en primer lugar se calculan los coeficientes, mediante los que se calculan los valores de  $\omega_i$  para cada modo. Dividiendo estos valores entre la velocidad de giro de la pala se obtiene que para uno de los modos hay riesgo de resonancia, por lo que se procede a variar el valor de la excentricidad para solventar este fenómeno. Primero se decide

variar el valor de la excentricidad disminuyéndolo, con este nuevo valor se procede a recalcular las frecuencias y se obtiene que hay posibilidad de resonancia en un modo y armónico inferiores al estado original, lo que supone un empeoramiento de la situación inicial debido a que, como ya se ha explicado, los armónicos que mayor riesgo guardan son aquellos que se dan en los modos más bajos. Debido a este nuevo resultado, se decide volver a recalcular las frecuencias aumentando el valor de la excentricidad. En este caso se observa que el riesgo de resonancia ha desaparecido para los modos que se calculan, por lo que se consigue solucionar el problema.

## Bibliografía

---

- [1] RICHARD L. BIELAWA. Rotary wing structural dynamics and aeroelasticity. 2nd chapter (Rotating Beams). AIAA Education Series. 1992.
- [2] JOSÉ RAMÓN VALLE DE LA FUENTE. Cálculo estático y vibratorio de vigas giratorias. Proyecto fin de carrera. E.P.S Universidad Carlos III de Madrid. 2005
- [3] JOSE-FÉLIX FUNES RUIZ. Análisis simplificado de la respuesta estructural de una pala de aerogenerador. Proyecto fin de carrera ingeniería industrial. E.P.S Universidad Carlos III de Madrid. 2009
- [4] DAVID MARTÍNEZ SANTÍN. Diseño preliminar de un helicóptero para aplicaciones civiles. Proyecto fin de carrera. E.T.S Universitat Politècnica de Catalunya. 2009
- [5] RICHARD L BURDEN, J. DOUGLAS FAIRES. Numerical Analysis (7th Ed). Brooks/Cole. 2000

[6] <https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33748-bisection-method?focused=5203297&tab=function>

[7] DONALD H. MIDDLETON. Composite materials in aircraft structures. Longman Haelow. 1990.

# ANEXO 1

## PROGRAMA DE MATLAB

---

Este anexo contiene el programa desarrollado en Matlab para el cálculo de raíces.

## ANÁLISIS SIMPLIFICADO DEL COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DE UNA PALA DE HELICÓPTERO

```
Editor - C:\Users\Fran\Documents\MATLAB\Pala de helicóptero.m
Pala de helicóptero.m x Integral.m x IntegralDefinida.m x +
1
2     % PALA DE HELICÓPTERO
3     % FRECUENCIAS PROPIAS
4 -   clc, clear
5 -   x = 0:0.01:10*pi
6 -   y = tan(x)-tanh(x)
7 -   plot(x,y)
8
9 -   disp('OBTENCIÓN DE RAÍCES MEDIANTE METODO DE BISECCION');
10 -  disp('-----');
11 -  f=input('INTRODUZCA LA FUNCIÓN: ','s');
12 -  xai=input('INTRODUZCA EL LÍMITE INFERIOR DEL INTERVALO:');
13 -  xbi=input('INTRODUZCA EL LÍMITE SUPERIOR DEL INTERVALO:');
14 -  tol=input('INTRODUZCA LA TOLERANCIA DE ERROR:');
15 -  f=inline(f);
16 -  i=1;
17 -  ea(1)=100;
18 -  if f(xai)*f(xbi)<0
19 -    xa(1)=xai;
20 -    xb(1)=xbi;
21 -    xr(1)=(xa(1)+xb(1))/2;
22 -    fprintf('It. Xa Xr Xb Error aprox \n');
23 -    fprintf('%2d \t %11.7f \t %11.7f \t %11.7f \n',i,xa(i),xr(i),xb(i));
24 -    while abs(ea(i)) >= tol,
25 -      if f(xa(i))*f(xr(i))<0
26 -        xa(i+1)=xa(i);
27 -        xb(i+1)=xr(i);
28 -        end
29 -      if f(xa(i))*f(xr(i))>0
30 -        xa(i+1)=xr(i);
31 -        xb(i+1)=xb(i);
32 -        end
33 -      xr(i+1)=(xa(i+1)+xb(i+1))/2;
34 -      ea(i+1)=abs((xr(i+1)-xr(i))/(xr(i+1))*100);
35 -      fprintf('%2d \t %11.7f \t %11.7f \t %11.7f \t %7.3f \n',...
36 -        i+1,xa(i+1),xr(i+1),xb(i+1),ea(i+1));
37 -      i=i+1;
38 -    end
39 -  else
40 -    fprintf('INTERVALO INCORRECTO, NO EXISTE RAÍZ');
41 -  end
```

Para obtener las raíces el programa nos pide que se introduzca la función que se quiere, el intervalo en el que se encuentra la solución y la tolerancia. Aquí se puede observar cómo se obtiene la primera solución:

ANÁLISIS SIMPLIFICADO DEL COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DE UNA PALA DE  
HELICÓPTERO

---

OBTENCIÓN DE RAÍCES MEDIANTE METODO DE BISECCION

-----  
INTRODUZCA LA FUNCIÓN:  $\tan(x) - \tanh(x)$

INTRODUZCA EL LÍMITE INFERIOR DEL INTERVALO:3.5

INTRODUZCA EL LÍMITE SUPERIOR DEL INTERVALO:4

INTRODUZCA LA TOLERANCIA DE ERROR:0.0000001

It. Xa Xr Xb Error aprox

1	3.5000000	3.7500000	4.0000000
2	3.7500000	3.8750000	4.0000000
3	3.8750000	3.9375000	4.0000000
4	3.8750000	3.9062500	3.9375000
5	3.9062500	3.9218750	3.9375000
6	3.9218750	3.9296875	3.9375000
7	3.9218750	3.9257813	3.9296875
8	3.9257813	3.9277344	3.9296875
9	3.9257813	3.9267578	3.9277344
10	3.9257813	3.9262695	3.9267578
11	3.9262695	3.9265137	3.9267578
12	3.9265137	3.9266357	3.9267578
13	3.9265137	3.9265747	3.9266357
14	3.9265747	3.9266052	3.9266357
15	3.9265747	3.9265900	3.9266052
16	3.9265900	3.9265976	3.9266052
17	3.9265976	3.9266014	3.9266052
18	3.9266014	3.9266033	3.9266052
19	3.9266014	3.9266024	3.9266033
20	3.9266014	3.9266019	3.9266024
21	3.9266019	3.9266021	3.9266024
22	3.9266021	3.9266022	3.9266024
23	3.9266022	3.9266023	3.9266024
24	3.9266023	3.9266023	3.9266024
25	3.9266023	3.9266023	3.9266023
26	3.9266023	3.9266023	3.9266023
27	3.9266023	3.9266023	3.9266023



## ANEXO 2

### VIDEOS DE FENÓMENOS DE RESONANCIA

---

Con el objetivo de esclarecer el fenómeno de la resonancia, aquí se incluyen unos enlaces a diferentes videos:

- [Experimento en el que se muestra el concepto del fenómeno de resonancia.](#)
- [Resonancia debida a la excitación de las alas de aviones, también conocido como aleteo o flutter.](#)
- [Efecto Ground Resonance en un helicóptero Chinook CH-47 y su posterior destrucción.](#)

