



Universidad  
Carlos III de Madrid

# ¿Podemos escuchar la forma de un tambor?

*Trabajo Fin de Grado*

Carlos Blasco Navarro

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales  
Universidad Carlos III de Madrid  
Septiembre 2017



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Un poco de historia . . . . .	5
1.2. Estructura . . . . .	5
1.3. Importancia del problema inverso . . . . .	6
<b>2. Ecuación de onda en una dimensión</b>	<b>7</b>
2.1. Deducción de la ecuación de ondas . . . . .	7
2.2. Problemas del tipo Sturm-Liouville . . . . .	9
2.3. Solución del problema homogéneo . . . . .	10
2.3.1. Condiciones de Dirichlet . . . . .	11
2.3.2. Ejemplos en condiciones de Dirichlet . . . . .	15
2.3.3. Condiciones de Neumann . . . . .	16
2.3.4. Ejemplos con condiciones de Neumann . . . . .	20
2.3.5. Condiciones Mixtas . . . . .	21
2.3.6. Ejemplo en condiciones mixtas . . . . .	23
2.4. Problema inverso . . . . .	24
2.5. De la teoría a la práctica . . . . .	25
<b>3. Dimensión dos</b>	<b>31</b>
3.1. Formulación Lagrangiana de la cuerda en dos dimensiones . . . . .	31
3.2. Vibración de una membrana rectangular . . . . .	32
3.2.1. Membrana rectangular . . . . .	34
3.3. Vibración de una membrana circular . . . . .	35
3.3.1. Membrana circular . . . . .	39
3.4. Vibración de una membrana triangular . . . . .	40
3.4.1. Membrana triangular . . . . .	40
3.5. Problema inverso en 2D . . . . .	40
3.5.1. Membrana rectangular . . . . .	40
3.5.2. Membrana circular . . . . .	41
3.5.3. De la teoría a la práctica . . . . .	41
3.6. Contraejemplo . . . . .	43
<b>4. Conclusiones</b>	<b>51</b>
4.1. Dimensión uno . . . . .	51
4.1.1. ¿Es posible escuchar la longitud de una cuerda? . . . . .	51
4.2. Dimensión dos . . . . .	52
4.2.1. ¿Podemos escuchar la forma de un tambor? . . . . .	52
<b>A. Ortogonalidad de la función seno</b>	<b>55</b>
<b>B. Laplaciano en coordenadas polares</b>	<b>57</b>

<b>C. Transformada de Fourier</b>	<b>59</b>
C.1. Transformada de Fourier de la función delta de Dirac $\delta(t)$ . . . . .	59

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Un poco de historia

“¿Podemos escuchar la forma de un tambor?”, era el año 1966 cuando el famoso matemático polaco Mark Kac realizó esta pregunta. A primera vista, puede parecer una pregunta simple y de poco interés matemático. Sin embargo, como Kac demuestra en su artículo [11], la ecuación que define el movimiento ondulatorio (la ecuación de ondas) es de fundamental importancia, no sólo en el campo de las matemáticas, sino también en el de la física. Cualquier movimiento ondulatorio, como puede ser el de jugar con un muelle o tocar una guitarra, requiere para su estudio de la ecuación de ondas.

Volviendo al punto de vista matemático, la verdadera pregunta que presenta Kac es, “¿hasta qué punto entendemos la ecuación de ondas?”. Dado que la respuesta a la primera pregunta tardó alrededor de 30 años en obtener respuesta, parece que todavía no se entiende perfectamente esta, a priori simple, ecuación.

La primera respuesta al artículo de Kac a penas tardó en obtener respuesta. John Milnor, uno de los más reconocidos matemáticos de la segunda mitad del siglo XX, confirmó que no era posible escuchar la forma de un tambor. Un par de años atrás Milnor ya había encontrado dos tambores que eran capaces de producir el mismo sonido, el único problema que planteaban sus tambores, era que estaban construidos en 16 dimensiones. Por lo tanto, se seguía buscando respuesta a la pregunta, para tambores bidimensionales. Esta respuesta llegó casi 30 años después, cuando los matemáticos Carolyn Gordon, David Webb y Scott Wolpert, construyeron dos tambores bidimensionales de forma diferente pero capaces de producir el mismo sonido.

### 1.2. Estructura

En este trabajo, el estudio de la ecuación de ondas comenzará con el caso más simple, la ecuación de ondas en una dimensión. Trataremos en particular de responder a la pregunta de si es posible escuchar la “forma” de una cuerda, lo que se traduce en este caso a si es posible escuchar la longitud de una cuerda.

Este mismo estudio se llevará a cabo más adelante para la ecuación de ondas en dos dimensiones. Tras comentar la solución de la ecuación de ondas en diferentes membranas, trataremos de reconstruir las dimensiones de un tambor circular a partir de sus frecuencias de vibración. Se buscará la solución a la pregunta inicial, “¿es posible escuchar la forma de un tambor?”, estudiando si dos tambores con forma diferente, son capaces producir el mismo sonido.

El sonido que produce un tambor al ser golpeado se corresponde con una superposición de todos los tonos que es capaz de producir el tambor, desde su frecuencia fundamental hasta sus sobretonos. Cada uno de los tonos que produce un tambor, tiene asociado una frecuencia de vibración. Existen diversos modos

de descomponer este sonido en sus frecuencias. Si las frecuencias de vibración de dos tambores fuesen exactamente iguales, el sonido que producen ambas sería, por lo tanto, igual. Trataremos de ordenar estas frecuencias en orden ascendente ( $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ), para obtener tanta información como sea posible de esta secuencia de números creciente.

### 1.3. Importancia del problema inverso

A pesar de la gran importancia práctica que tiene la teoría de los problemas inversos, es un campo que todavía no ha alcanzado su potencial. La física se basa mayormente en resolver problemas directos de un modelo dado para obtener sus correspondientes resultados. El caso contrario, el problema inverso, consiste en construir un modelo a partir de los resultados. Este problema no es tan sencillo.

Escuchar la forma de un tambor forma parte de estos problemas. A partir del sonido que se recoge, se trata de reconstruir la región que lo ha producido. A pesar de que este problema pueda parecer de poca utilidad, su resolución podría arrojar luz sobre otros problemas similares en diversos campos.

Se trata de ser capaces de crear modelos a partir de los resultados, pero que sean realistas y compatibles con la realidad. Uno de los más famosos problemas inversos es el de las máquinas de TAC que a través de imágenes obtenidas por resonancia magnética, y su resolución numérica ofrecen imágenes del interior del paciente, permitiendo así la reconstrucción y representación no invasiva del paciente.

Durante el año 2017 se popularizaron los problemas inversos relacionados con la astronomía, cuando el 24 de febrero la NASA anunció el descubrimiento de un nuevo sistema solar con siete planetas capaces de albergar vida. En un primer momento parecía imposible reconocer las condiciones de un planeta situado a 40 años luz, a través un telescopio. Pero este problema requería de teoría inversa para resolverse. Por una parte, los científicos debían conocer la composición de la atmósfera, para observar si es parecida a la de la Tierra. El telescopio recopiló las frecuencias de luz que emitía la atmósfera cuando la órbita del planeta pasaba por delante de su sol. Al igual que en el estudio de la forma del tambor, se trató de recomponer el cuerpo, a partir de las frecuencias que emite.

## Capítulo 2

# Ecuación de onda en una dimensión

La ecuación de ondas es una importante ecuación en derivadas parciales de carácter hiperbólico que se usa para estudiar el comportamiento de ondas, como las ondas de sonido, de luz o de agua. Son de especial interés en los campos de la acústica, electromagnetismo y fluidomeánica.

La ecuación de ondas describe como se propagan las ondas. Se aplica a todo tipo de ondas, desde ondas en el agua hasta el sonido y vibraciones, e incluso ondas de luz y de radio.

El primer estudio lo realizó Jean le Rond d'Alembert sobre una cuerda de violín para obtener la ecuación de ondas en una dimensión. Este estudio lo continuó Euler, hasta que diez años más tarde obtuvo la ecuación de ondas en tres dimensiones. Esta ecuación se ha seguido investigando hasta ser una teoría capaz de explicar diferentes fenómenos como terremotos o tsunamis. Su vínculo con la música permite explicar cómo nuestros oídos perciben el sonido y por qué ciertas combinaciones suenan de forma armónica y otras no.

### 2.1. Deducción de la ecuación de ondas

Consideremos una cuerda de longitud  $L$ , tensada entre los puntos  $x = 0$  y  $x = L$ .

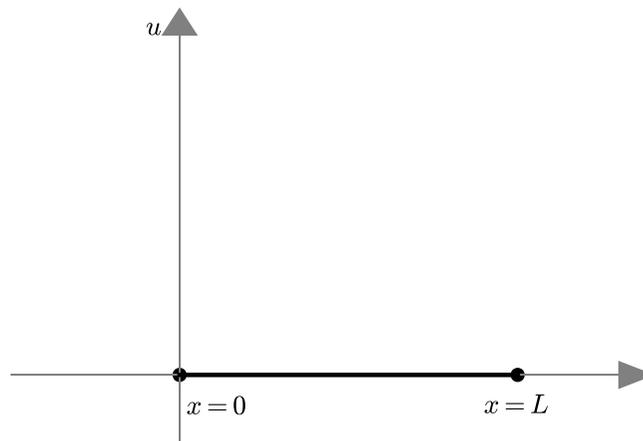


Figura 2.1: Cuerda tensa entre dos puntos.

Para deducir la ecuación de ondas, consideramos las siguientes suposiciones:

- La cuerda es perfectamente flexible.

- La cuerda es homogénea, es decir, la masa por unidad de longitud es constante.
- La tensión  $T$  actúa tangente a la cuerda y su magnitud es igual en todos los puntos.

Consideremos que la cuerda está vibrando en un instante dato  $t$  y que toma la siguiente forma

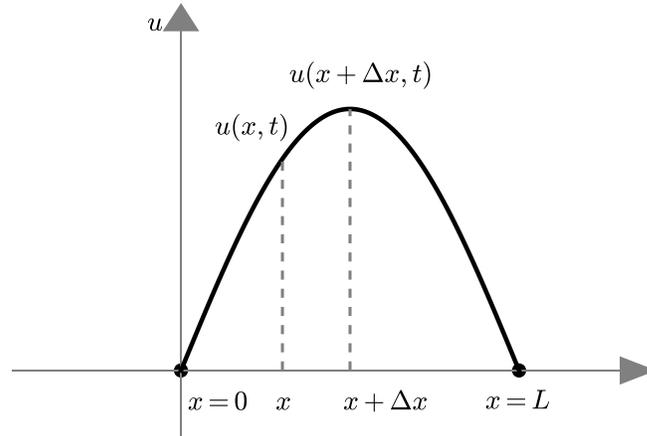


Figura 2.2: Cuerda vibrando entre los puntos próximos  $x$  y  $x + \Delta x$ .

Llamamos  $u(x, t)$  al desplazamiento vertical del punto  $x$  de la cuerda respecto a su punto de equilibrio en el instante  $t$ . Por lo tanto, el desplazamiento del punto  $x + \Delta x$ , será definido como  $u(x + \Delta x, t)$ . Describiremos a continuación el movimiento resultante considerando las fuerzas que actúan sobre el trozo de cuerda  $\Delta s$ .

Existen dos fuerzas actuando sobre el elemento de cuerda  $\Delta s$ , la tensión que actúa sobre el trozo derecho de la cuerda y la que actúa sobre el trozo izquierdo.

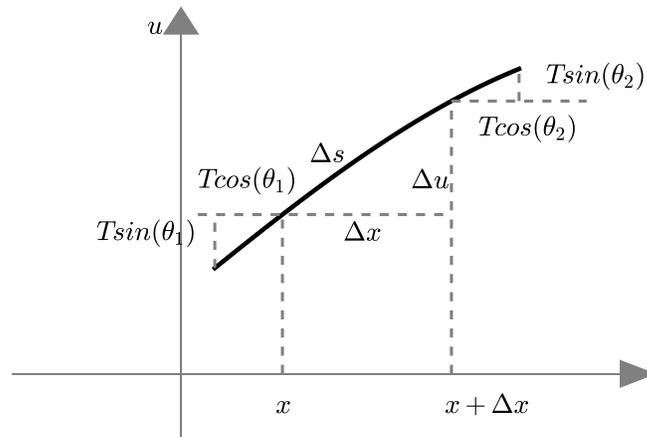


Figura 2.3: Fragmento de la cuerda vibrante

Planteando el equilibrio de fuerzas para el tramo de cuerda y descomponiendo en sus componentes, obtenemos

$$F_{vertical} = T \sin(\theta_2) - T \sin(\theta_1) \quad (2.1)$$

$$F_{horizontal} = T \cos(\theta_2) - T \cos(\theta_1) \quad (2.2)$$

Asumimos ahora que la cuerda no tiene desplazamientos en el eje horizontal, esto es, que la fuerza neta horizontal es cero. Esto significa que la fuerza neta vertical produce una aceleración en el elemento que viene dada por  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . Teniendo en cuenta que la cuerda tiene una densidad constante  $\rho$ , la masa del elemento infinitesimal considerado es  $\Delta m = \rho \Delta s$ .

Por lo tanto, según la ley de Newton, tenemos

$$T \sin(\theta_2) - T \sin(\theta_1) = F_{vertical} = \rho \Delta s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

Escribimos ahora el ángulo  $\theta$  que forma la cuerda con el eje horizontal en función de la posición

$$\theta_1 = \theta(x) \quad (2.4)$$

$$\theta_2 = \theta(x + \Delta x) \quad (2.5)$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación (2.3) y dividimos entre  $\Delta x$

$$\frac{T \sin(\theta(x + \Delta x)) - T \sin(\theta(x))}{\Delta x} = \rho \frac{\Delta s}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x) \quad (2.6)$$

Si expresamos la pendiente en cada punto como  $\tan(\theta(x)) = \frac{\partial u}{\partial x}$ , podemos escribir

$$\sin(\theta(x)) = \frac{\tan(\theta(x))}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta(x))}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

Donde la última expresión viene de asumir que la pendiente va a ser siempre muy inferior a uno y, por tanto, podemos despreciar el término  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ .

Sustituyendo este resultado en (2.6) y tomando límites cuando  $\Delta x$  tiende a cero, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} T \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho \frac{\Delta s}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

El primer término de la ecuación corresponde a la definición de la derivada, por lo que podemos reescribir este término a partir de su derivada. En el término de la derecha,  $\frac{\Delta s}{\Delta x}$  tiende a uno, ya que estamos considerando un trozo de cuerda infinitamente pequeño, cuya pendiente es prácticamente nula.

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x) \quad (2.9)$$

siendo  $c^2 = \frac{T}{\rho}$  y que representa la velocidad de propagación al cuadrado de la cuerda. Nótese que cuanto mayor sea la tensión de la cuerda, mayor será su velocidad de propagación, y cuanto mayor sea la densidad de la cuerda, la velocidad de propagación de la misma decrecerá.

La ecuación (2.9) se conoce como la ecuación de la cuerda vibrante.

## 2.2. Problemas del tipo Sturm-Liouville

El problema que plantea la ecuación de ondas es un problema de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno que requerirá que apliquemos el método de Sturm Liouville asociado, para obtener sus autovalores y autofunciones. Una ecuación diferencial definida en el intervalo  $a \leq x \leq b$  de la forma

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + \left( q(x) + \lambda r(x) \right) y = 0 \quad (2.10)$$

con las condiciones de contorno

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \quad (2.11)$$

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \quad (2.12)$$

es conocida como problema de Sturm Liouville con condiciones de contorno.  $p(x) > 0, q(x), r(x) > 0$  son funciones continuas dadas (siendo  $r$  la función peso), mientras que  $a_1, a_2, b_1, b_2, \in \mathbb{R}$  son constantes conocidas.  $\lambda$  es un parámetro sin especificar a priori que se corresponde con un autovalor del operador diferencial asociado a la ecuación (2.10).

Se puede demostrar que las soluciones no triviales del problema de Sturm Liouville existen para ciertos valores reales de  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Tenemos así un conjunto de autovalores  $\lambda_n$  teniendo cada uno asociada una única autofunción  $\Phi_n(x)$ .

Los autovalores de un problema de Sturm Liouville son, de hecho, números reales no negativos. Además, las autofunciones  $\Phi_n(x)$  asociadas son ortogonales entre sí con respecto al producto escalar de  $L^2[a, b]_r$ . Es decir, se cumple que

$$\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle = \int_a^b r(x) \Phi_m(x) \Phi_n(x) dx = 0, \quad m \neq n; \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

Por último, se puede demostrar que el conjunto de soluciones  $\{\Phi_n\}_n$  forma un conjunto ortogonal completo definido en el intervalo  $a \leq x \leq b$ . Esto quiere decir que cualquier función continua  $f$  se puede expresar en términos de  $\{\Phi_n\}_n$  de forma que

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \Phi_m(x) \quad (2.14)$$

con

$$c_n = \frac{\langle f, \Phi_n \rangle}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle} = \frac{\int_a^b r(x) f(x) \Phi_n(x) dx}{\int_a^b r(x) \Phi_n(x) \Phi_n(x) dx} \quad (2.15)$$

siendo estos coeficientes únicos gracias a la ortogonalidad del conjunto  $\{\Phi_n\}_n$ .

## 2.3. Solución del problema homogéneo

Empezamos resolviendo la ecuación de ondas en una dimensión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

con las siguientes condiciones iniciales

$$u(x, 0) = y_0(x) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = y_1(x) \quad (2.18)$$

Estas condiciones iniciales definen la posición y la velocidad inicial de la cuerda y deben ser compatibles con las condiciones de frontera. Para que la solución del problema sea única necesitamos, además, imponer ciertas condiciones en la frontera.

### 2.3.1. Condiciones de Dirichlet

Las más conocidas sean seguramente las condiciones de frontera de Dirichlet. Esto quiere decir que ambos extremos de la cuerda están fijos

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (2.19)$$

Vamos a aplicar el método de separación de variables que asume que las soluciones de la ecuación de ondas son del tipo

$$u(x, t) = T(t)X(x) \quad (2.20)$$

Sustituyendo esto en la ecuación de onda nos queda

$$T''(t)X(x) = c^2T(t)X''(x) \quad (2.21)$$

Dividiendo a ambos lados por  $u$ , obtenemos

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (2.22)$$

donde vemos que el primer miembro depende únicamente de  $t$  y el segundo de  $x$ . Por lo tanto, para que se produzca la igualdad, ambos miembros deben tomar el mismo valor constante, que llamaremos la constante de separación,  $-\lambda$ .

Podemos obtener de aquí las siguientes ecuaciones

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \quad (2.23)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (2.24)$$

Mientras que las condiciones de frontera quedan

$$X(0)T(t) = 0 \quad (2.25)$$

$$X(L)T(t) = 0 \quad (2.26)$$

Como buscamos soluciones no triviales,  $T(t)$  no puede ser cero, por lo que deducimos que la función  $X(x)$  debe satisfacer

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (2.27)$$

Nos queda así el siguiente problema de autovalores para la  $X$

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (2.28)$$

$$X(0) = 0 \quad (2.29)$$

$$X(L) = 0 \quad (2.30)$$

Vemos que se corresponde a un problema de Sturm Liouville con los parámetros,  $p = 1, q = 0, r = 1, a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1$ . Para resolver este tipo de problemas, separaremos en los siguientes tres casos

#### Caso 1: $\lambda < 0$

Tomamos  $\lambda = -\omega^2 < 0$ , la solución obtenida toma la forma

$$X(x) = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x} \quad (2.31)$$

Imponiendo ahora las ecuaciones de frontera:

$$0 = X(0) = C_1 e^{-\omega \cdot 0} + C_2 e^{\omega \cdot 0} \quad (2.32)$$

$$0 = X(L) = C_1 e^{-\omega L} + C_2 e^{\omega L} \quad (2.33)$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para  $C_1, C_2$

$$C_1 + C_2 = 0 \quad (2.34)$$

$$C_1 e^{-\omega L} + C_2 e^{\omega L} = 0 \quad (2.35)$$

que tendrá soluciones no triviales si  $e^{\omega L} - e^{-\omega L} = 0$ . Vemos, por tanto, que no existe ninguna  $\omega > 0$  que satisfaga este sistema, por lo que no existen soluciones no triviales del problema para  $\lambda < 0$ .

### Caso 2: $\lambda = 0$

Cuando  $\lambda = \omega = 0$ , la solución de la ecuación toma la forma

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad (2.36)$$

Imponiendo ahora las ecuaciones de frontera

$$0 = X(0) = C_2 \quad (2.37)$$

$$0 = X(L) = C_1 L + C_2 \quad (2.38)$$

La única solución al problema es  $X(x) = 0$ , por lo que tampoco existen soluciones no triviales. Este modo, correspondería al modo cero de la cuerda, el cual resultaría en una traslación de la cuerda completa. En condiciones de Dirichlet tiene sentido que no se encuentre ninguna solución para este modo, ya que hemos definido que los extremos de la cuerda están fijos, imposibilitando la traslación de la cuerda.

### Caso 3: $\lambda > 0$

Cuando  $\lambda = \omega^2 > 0$ , la solución de la ecuación queda

$$X(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \quad (2.39)$$

Imponiendo ahora las ecuaciones de frontera

$$0 = X(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$$

$$0 = X(L) = C_1 \cos(\omega L) + C_2 \sin(\omega L)$$

De aquí obtenemos que  $C_1 = 0$  y que  $\sin(\omega L) = 0$ . Esto último es equivalente a

$$\omega_k = \frac{\pi}{L} k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.40)$$

Vemos, tal y como se deduce del teorema de Sturm-Liouville, que hay un conjunto numerable de autovalores reales y crecientes. Las autofunciones asociadas a cada autovalor vienen dadas por

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.41)$$

En la imagen 2.4 podemos ver las soluciones del problema para diferentes valores del parámetro  $k$ . Se aprecia como únicamente los valores enteros de  $k$  proporcionan soluciones que satisfacen las condiciones de frontera, ya que el resto de funciones no satisfacen las condiciones de frontera impuestas, que el valor de los extremos sea cero para cualquier instante. Cada valor de  $k$  equivale a un modo de vibración. Los modos de vibración muestran todas las soluciones para la vibración de la cuerda, esto significa, que la cuerda no podrá vibrar de ninguna forma diferente a la impuesta por estos modos.

Vemos en la siguiente figura los primeros modos normales de vibración de la cuerda vibrante donde se aprecia cómo el modo de vibración de la cuerda define la cantidad de nodos menos uno. Según aumentamos el número del modo, el número de nodos crece al mismo ritmo.

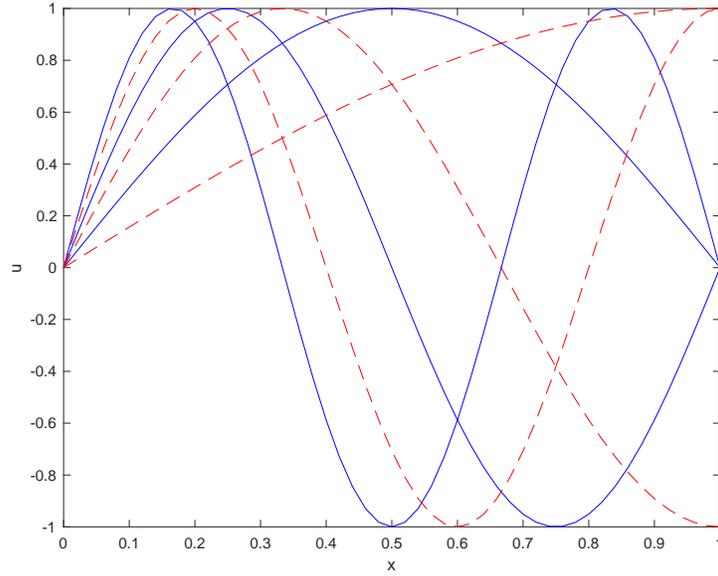


Figura 2.4: Soluciones en condiciones de Dirichlet. Los valores enteros de  $k$ , se han dibujado con líneas continuas, mientras que los valores no enteros de  $k$  aparecen con líneas discontinuas. Únicamente los valores enteros de  $k$  son soluciones al problema, ya que para el resto de valores, no cumplen las condiciones de frontera impuestas, ser cero en ambos extremos.

Una vez resuelto completamente el problema para la  $X$ , hemos acabado con un conjunto de autovalores  $\{\lambda_n\}_n$  con sus correspondientes autofunciones  $\{X_n\}_n$ . Quedaría ahora resolver el problema para la  $T$ . Recordemos que tenemos  $T'' + c^2\lambda T = 0$ . Sin embargo ahora sabemos que para tener una solución no trivial de las  $X$ ,  $\lambda$  tiene que tomar uno de los valores dado por  $\lambda_k = \omega_k^2$ . Así la solución que obtenemos es de la forma

$$T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) \quad (2.42)$$

siendo  $A_k$  y  $B_k$  constantes a determinar.

Así obtenemos un conjunto de soluciones al problema original de la ecuación de ondas con condiciones de Dirichlet que viene dado por

$$u_k(x, t) = \left[ A_k \cos\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.43)$$

Dada la linealidad y la homogeneidad de la ecuación de ondas, cualquier combinación lineal de soluciones será también solución del problema, pudiendo escribir una solución más general como

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \cos\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.44)$$

Para terminar, hallaremos los valores de  $A_k$  y  $B_k$  usando las condiciones iniciales. Vemos que

$$y_0(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.45)$$

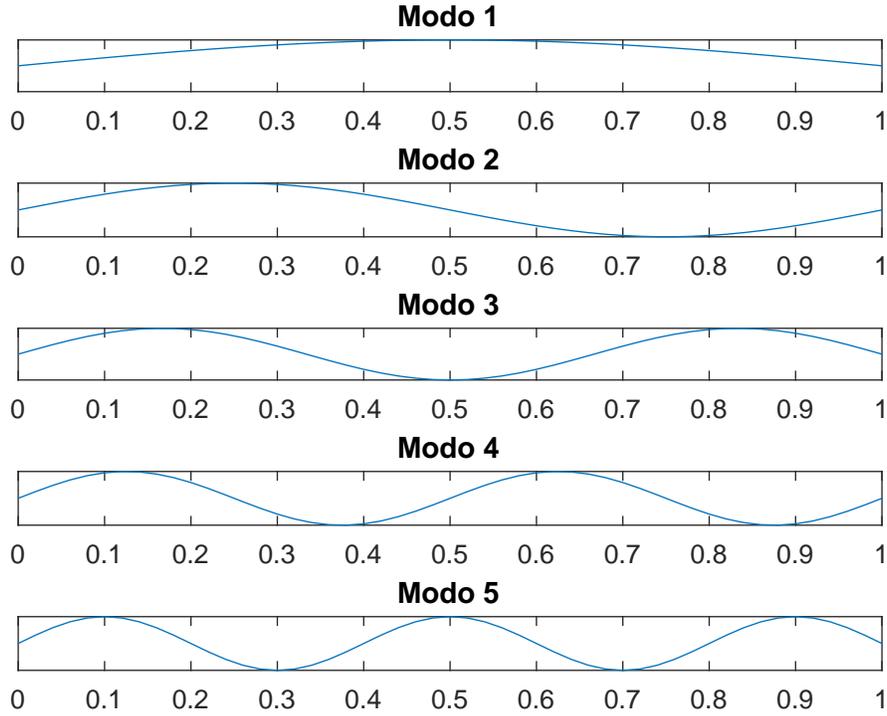


Figura 2.5: Primeros modos normales de vibración en condiciones de Dirichlet

Para la velocidad inicial calculamos primero la derivada respecto al tiempo de la solución obtenida anteriormente

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi c}{L} \left[ -A_k \sin\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) + B_k \cos\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.46)$$

y sustituyendo en  $t = 0$

$$y_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi c}{L} B_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.47)$$

Conociendo las propiedades de ortogonalidad de las funciones de seno/coseno obtenemos las siguientes expresiones

$$A_n = \frac{\langle y_0, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.48)$$

$$B_n = \frac{L}{n\pi c} \frac{\langle y_1, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L y_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.49)$$

Hemos resuelto, por tanto, el problema completo de la ecuación de ondas con condiciones de Dirichlet. Sabemos que no puede haber más soluciones que estas gracias a la completitud de las autofunciones  $\{X_k\}$ .

### 2.3.2. Ejemplos en condiciones de Dirichlet

Vamos a representar la solución obtenida a partir de diferentes ejemplos. Estableceremos diferentes condiciones iniciales para la cuerda y estudiaremos su comportamiento. Asumiremos que la longitud de la cuerda es de una unidad de longitud y que  $c = 1$ .

#### Ejemplo I

$$\text{Posición inicial: } y_0(x) = x^2 - x$$

$$\text{Velocidad inicial: } y_1(x) = 0$$

Como se ha visto previamente, la solución al problema se escribe como la suma de los modos normales de vibración de la cuerda. Por lo tanto, el primer paso será comprobar cuántos modos normales son necesarios para estimar correctamente la solución.

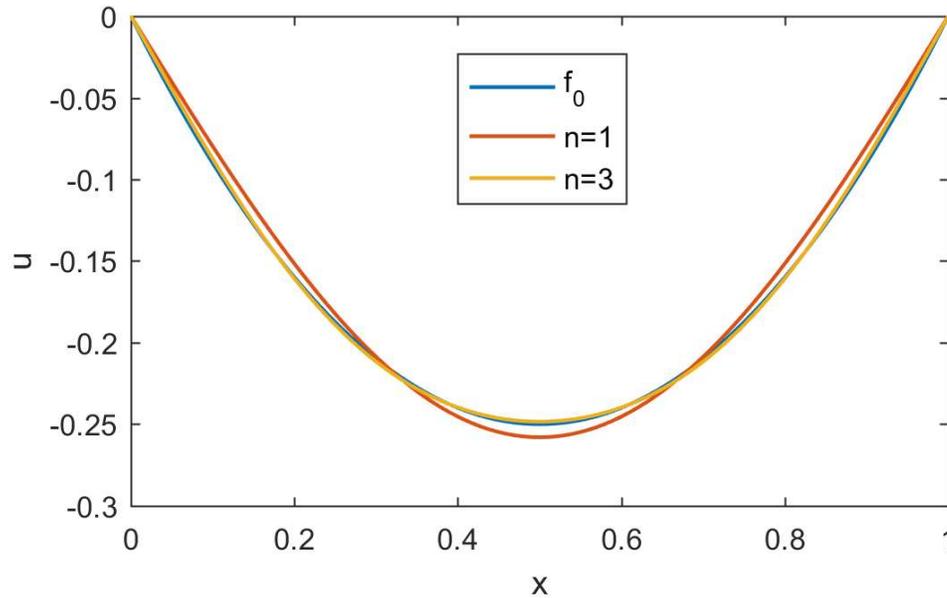


Figura 2.6: Ejemplo I: Posición inicial de la cuerda

Al tratarse de una función parabólica  $y_0(x) = x^2 - x$ , su forma se asemeja al primer modo de vibración de la cuerda. No obstante, tomaremos la suma de los primeros modos, que como se puede observar hacen que la curva casi se solape con la forma inicial. Una vez estimados los modos, representamos esta solución en función del tiempo.

#### Ejemplo II

Para este segundo caso, cambiaremos las condiciones iniciales. En este ejemplo la cuerda se alza por el centro y se deja libre.

$$\text{Posición inicial: } y_0(x) = -|x - 0,5| + 0,5$$

$$\text{Velocidad inicial: } y_1(x) = 0$$

Al tratarse de una geometría más compleja, será necesaria la suma de muchos más modos para aproximar la función de posición inicial. Observamos cómo, a medida que se suman más modos de

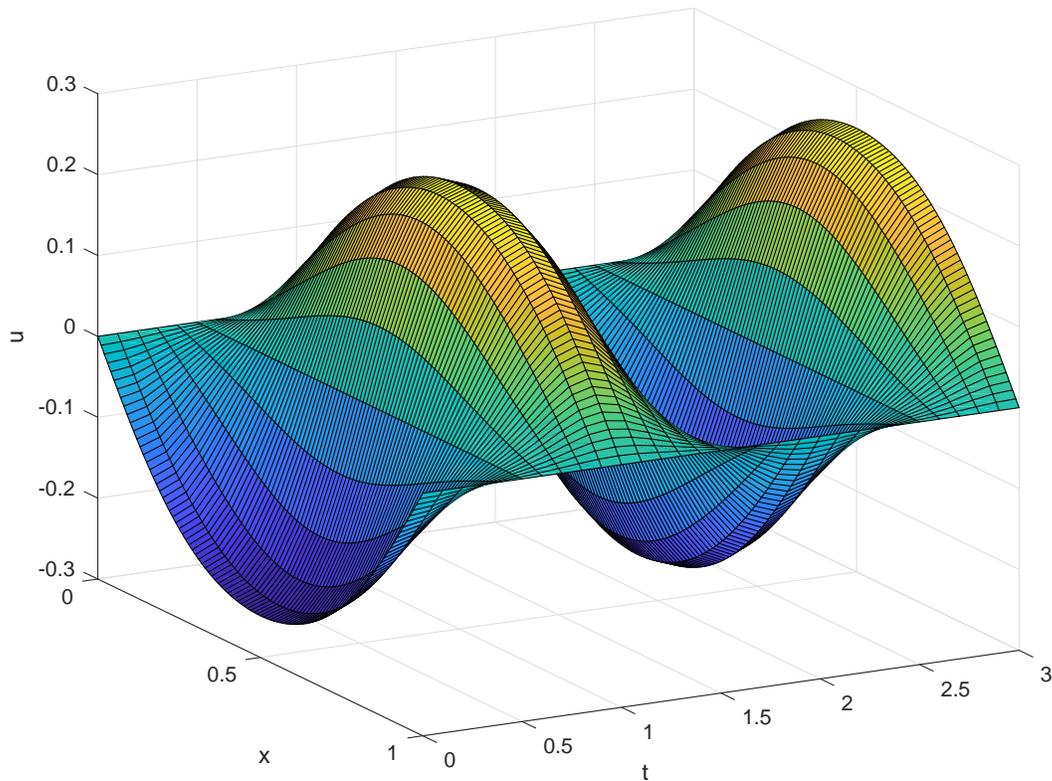


Figura 2.7: Ejemplo I: Cuerda vibrante en condiciones de Dirichlet

vibración, la forma se asemeja cada vez más a la original. Tomamos la suma de los 10 primeros modos.

Estrictamente hablando, no es posible recrear mediante una suma finita de modos normales la posición inicial de la cuerda, ya que estamos tratando de aproximar una función que no es derivable mediante una suma finita de funciones suaves.

### Ejemplo III

Para terminar, consideramos

$$\text{Posición inicial: } y_0(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$$

$$\text{Velocidad inicial: } y_1(x) = 0$$

Vemos que esta posición inicial cumple las condiciones de ser cero en los extremos y, además, que su pendiente es horizontal. Esta posición inicial se aplicará más adelante a diferentes condiciones de vibración para comparar los resultados.

### 2.3.3. Condiciones de Neumann

Resolvemos ahora el problema de la cuerda vibrante en condiciones de Neumann. Imponer a una cuerda condiciones de Neumann quiere decir que los extremos de la cuerda están sueltos, por lo que mantendrán

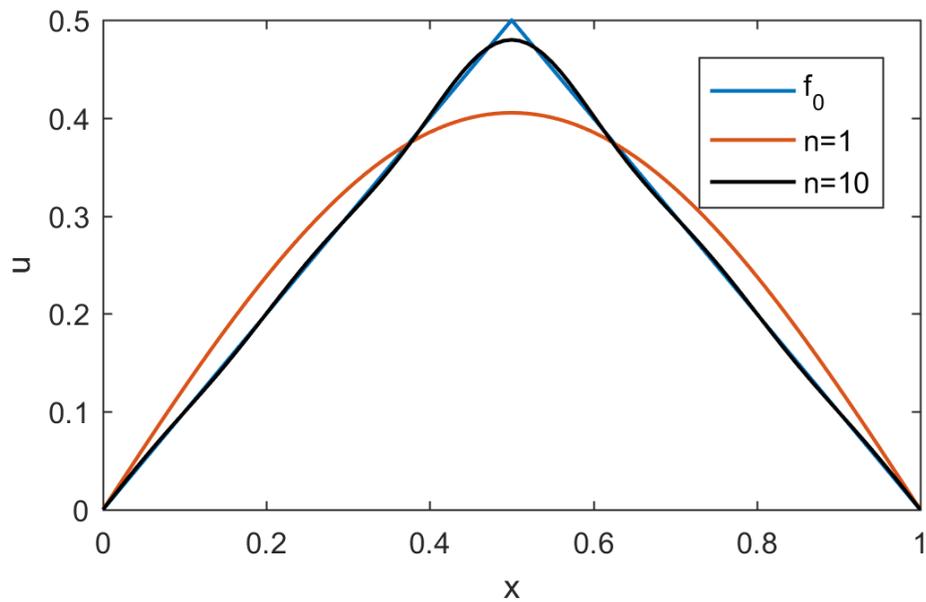


Figura 2.8: Aproximación de la cuerda alzada por el centro en el instante inicial

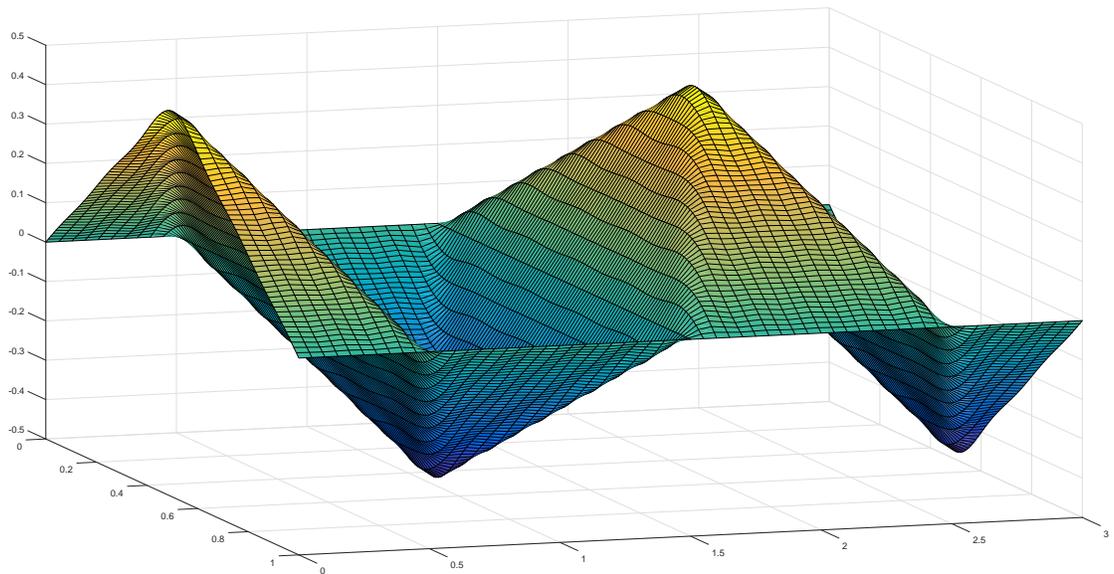


Figura 2.9: Ejemplo II: Vibración de la cuerda alzada por el centro en condiciones de Dirichlet. Dado que la forma inicial se asemeja mucho al primer modo de vibración de la cuerda, excepto por el pico, la solución se parecerá al primer modo de vibración normal de la cuerda, pero manteniendo la vibración con el pico.

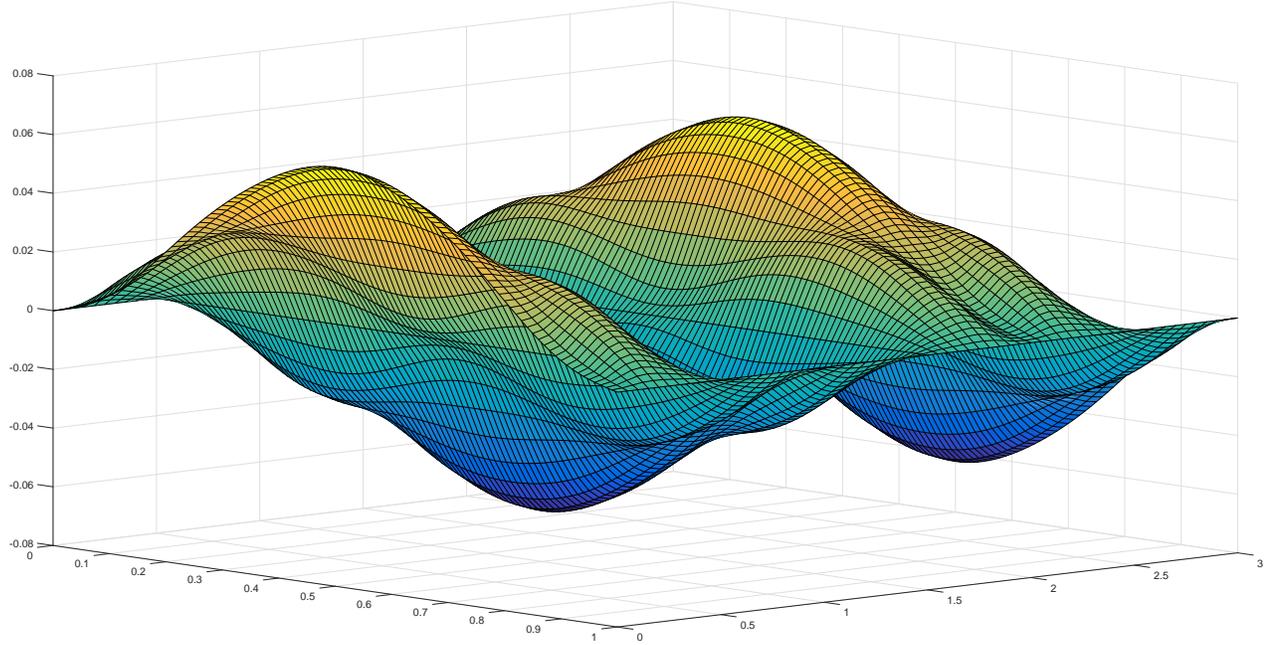


Figura 2.10: Ejemplo III: Cuerda vibrando en condiciones de Dirichlet

en todo momento una pendiente horizontal (no puede haber fuerzas verticales en los extremos). Nótese que al no tener fijados los extremos podremos encontrarnos con el caso de que la cuerda completa se encuentre en traslación.

Matemáticamente, las condiciones de Neumann se expresan de la siguiente manera

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (2.51)$$

El problema de Sturm-Liouville es muy similar al de la sección 2.3.1, salvo que ahora, al hacer separación de variables, obtendremos las condiciones de frontera para  $X$  dadas por

$$X'(0) = 0 \quad (2.52)$$

$$X'(L) = 0 \quad (2.53)$$

Volvemos a considerar los 3 casos para los posibles autovalores.

### Caso 1: $\lambda = -\omega^2 < 0$

Para este caso, la solución toma la forma  $X(x) = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x}$ . Dado que su derivada viene dada por  $X'(x) = -C_1 \omega e^{-\omega x} + C_2 \omega e^{\omega x}$  las condiciones de frontera implican

$$0 = X'(0) = -C_1 \omega e^{-\omega \cdot 0} + C_2 \omega e^{\omega \cdot 0}$$

$$0 = X'(L) = -C_1 \omega e^{-\omega L} + C_2 \omega e^{\omega L}$$

De nuevo vemos que en este caso no se pueden encontrar soluciones no triviales al problema de Sturm-Liouville para  $\lambda < 0$  con condiciones de frontera de Neumann.

**Caso 2:  $\lambda = \omega^2 = 0$**

Ahora la solución de la ecuación adquiere la forma  $X(x) = C_1x + C_2$ . Ahora la derivada es simplemente  $X'(x) = C_1$  que, al imponer las condiciones de frontera, queda simplemente  $C_1 = 0$ .

Vemos que ahora, a diferencia del resultado obtenido con condiciones de Dirichlet, se puede encontrar una solución para  $\lambda = 0$ . La solución para este modo cero es  $X(x) = C_2$ , siendo  $C_2$  una constante a determinar.

**Caso 3:  $\lambda = \omega^2 > 0$**

Finalmente, tenemos que la solución general de la ecuación y su derivada vienen dadas por

$$X(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \quad (2.54)$$

$$X'(x) = -\omega C_1 \sin(\omega x) + \omega C_2 \cos(\omega x) \quad (2.55)$$

Imponiendo ahora las condiciones de frontera:

$$0 = X'(0) = -\omega C_1 \sin(\omega \cdot 0) + \omega C_2 \cos(\omega \cdot 0) \quad (2.56)$$

$$0 = X'(L) = -\omega C_1 \sin(\omega L) + \omega C_2 \cos(\omega L) \quad (2.57)$$

El siguiente sistema de ecuaciones para  $C_1$  y  $C_2$  tiene soluciones no triviales si  $\sin(\omega L) = 0$ , por tanto llegamos a

$$\omega_k = \frac{\pi}{L}k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.58)$$

Las autofunciones asociadas son, en este caso,

$$X_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.59)$$

De nuevo hemos finalizado la resolución del problema para la  $X$  obteniendo un conjunto de autovalores reales  $\{\lambda_k\}_k$  junto con sus autofunciones  $\{X_k\}_k$  con la única diferencia que ahora tenemos una solución no trivial para  $k = 0$ . Resolvemos para la  $T$  considerando los dos casos anteriores.

**Caso II':  $\lambda = 0$**

Tenemos que resolver el problema  $T'' = 0$  que tiene como solución de

$$T(t) = C_3t + C_4 \quad (2.60)$$

Por lo tanto la solución de la ecuación de ondas queda

$$u_0(x, t) = X(x)T(t) = C_2(C_3t + C_4) = C'_3t + C'_4$$

La constante  $C'_3$  define la velocidad de traslación de la cuerda, mientras que la constante  $C'_4$  define la altura inicial de la cuerda.

**Caso III':  $\lambda = \omega^2 > 0$**

La solución aquí es idéntica al caso de Dirichlet ya que los autovalores son iguales. De hecho, tenemos que de nuevo los valores naturales de  $k \in \mathbb{N}$  ofrecen una solución al problema, que satisfacen las condiciones de Neumann. Se visualizan en la figura 2.11 las soluciones del problema para diferentes valores del parámetro  $k$ .

Se aprecia que la solución en condiciones de Neumann, se asemeja a la solución en condiciones de Dirichlet, salvo que la solución se escribirá en series de cosenos, en lugar de senos.

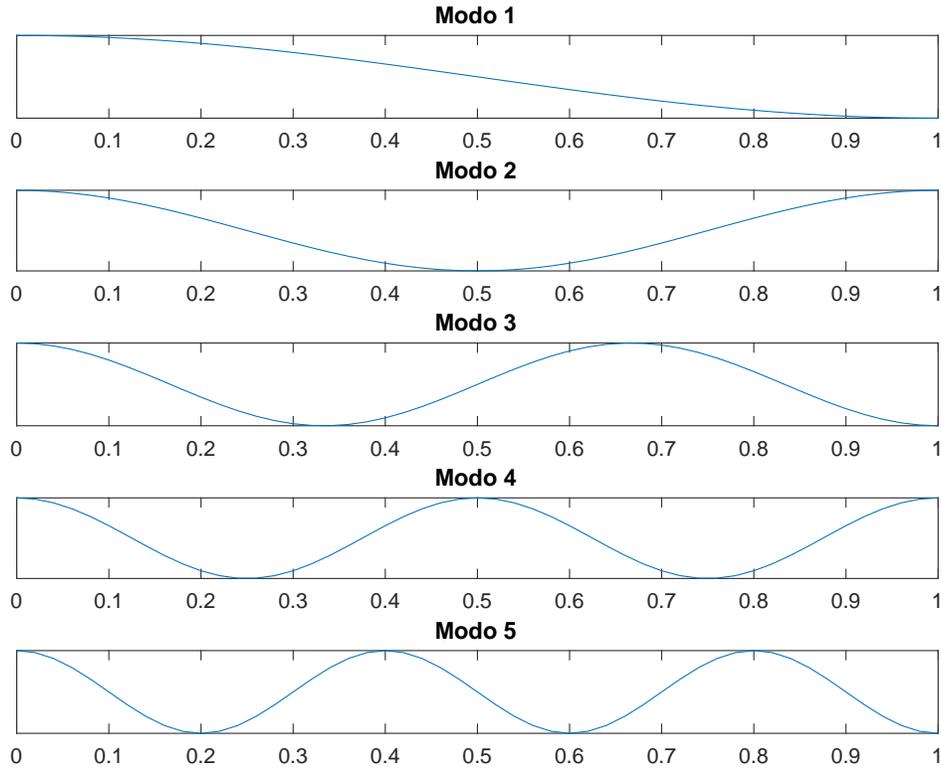


Figura 2.11: Primeros modos de vibración en condiciones de Neumann

De nuevo, la linealidad y homogeneidad de la ecuación de ondas nos permite escribir la solución general como

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ A_k \cos\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) \right] \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.61)$$

Igual que se hizo en Dirichlet, obtenemos los valores de  $A_k$  y  $B_k$ , conociendo las propiedades de ortogonalidad de los senos y cosenos.

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \quad (2.62)$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^L y_1(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \quad (2.63)$$

### 2.3.4. Ejemplos con condiciones de Neumann

Consideramos

$$\text{Posición inicial: } y_0(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$$

$$\text{Velocidad inicial: } y_1(x) = 0$$

Tenemos una cuerda con una forma inicial  $y$ , al soltarla, comienza a oscilar de acuerdo a la ecuación de ondas y respetando las condiciones de Neumann impuestas.

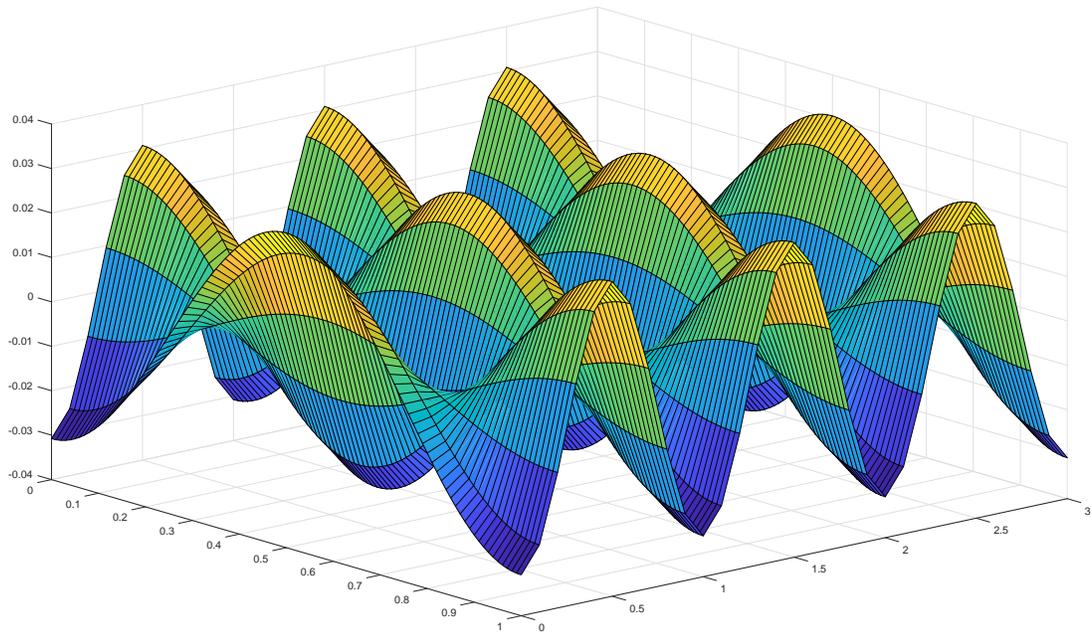


Figura 2.12: Ejemplo: Cuerda vibrante en condiciones de Neumann. Se aprecia como la cuerda en el instante inicial tiene la forma de la posición inicial impuesta y a medida que avanza en el tiempo se va propagando la onda de forma repetitiva. En todo momento se puede observar que la pendiente en ambos extremos se mantiene horizontal. Nota: Para la representación no se ha sumado el modo cero, se asume que la velocidad de traslación coincide con la del observador.

### 2.3.5. Condiciones Mixtas

Resolvemos ahora el problema de la cuerda vibrante en condiciones mixtas. Imponer a una cuerda condiciones mixtas significa que uno de los extremos cumple las condición de frontera de Dirichlet, mientras que la otra cumple las condiciones de frontera de Neumann. Tendremos, por lo tanto, un extremo fijo, mientras que el otro extremo de la cuerda mantendrá en todo momento una pendiente nula.

$$u(0, t) = 0 \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.65)$$

El problema de Sturm-Liouville, al hacer separación de variables, quedará

$$X(0) = 0 \quad (2.66)$$

$$X'(L) = 0 \quad (2.67)$$

Como en los casos anteriores, consideramos tres casos.

**Caso 1:  $\lambda < 0$** 

En este caso tenemos

$$X(x) = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x} \quad (2.68)$$

$$X'(x) = -C_1 \omega e^{-\omega x} + C_2 \omega e^{\omega x} \quad (2.69)$$

Imponiendo las condiciones de frontera vemos que

$$0 = C_1 e^{-\omega \cdot 0} + C_2 e^{\omega \cdot 0} \quad (2.70)$$

$$0 = -C_1 \omega e^{-\omega L} + C_2 \omega e^{\omega L} \quad (2.71)$$

y, de nuevo, vemos que no se pueden encontrar soluciones no triviales al problema anterior para  $\lambda < 0$  que satisfagan las condiciones mixtas.

**Caso 2:  $\lambda = 0$**  Cuando  $\lambda = 0$  obtenemos

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad (2.72)$$

$$X'(x) = C_1 \quad (2.73)$$

Imponiendo ahora las ecuaciones de frontera

$$C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad (2.74)$$

$$C_1 L = 0 \quad (2.75)$$

vemos que no hay soluciones no triviales. Esto tiene sentido ya que teniendo un extremo fijo, no es posible que la cuerda se encuentre en traslación.

**Caso 3:  $\lambda > 0$** 

Tenemos ahora

$$X(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \quad (2.76)$$

$$X'(x) = -\omega C_1 \sin(\omega x) + \omega C_2 \cos(\omega x) \quad (2.77)$$

Imponiendo ahora las condiciones de frontera:

$$0 = C_1 \cos(\omega \cdot 0) + C_2 \sin(\omega \cdot 0) \quad (2.78)$$

$$0 = -\omega C_1 \sin(\omega L) + \omega C_2 \cos(\omega L) \quad (2.79)$$

De aquí obtenemos la siguiente solución:

$$\cos(\omega L) = 0 \quad (2.80)$$

$$\omega L = \arccos(0) \quad (2.81)$$

Las soluciones no triviales del problema, tendrán el valor:

$$\omega = \frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{L} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.82)$$

Obtenemos entonces la siguiente autofunciones

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.83)$$

Visualizamos a continuación la solución para los primeros valores del parámetro  $k$ , esto es, los primeros modos de vibración.

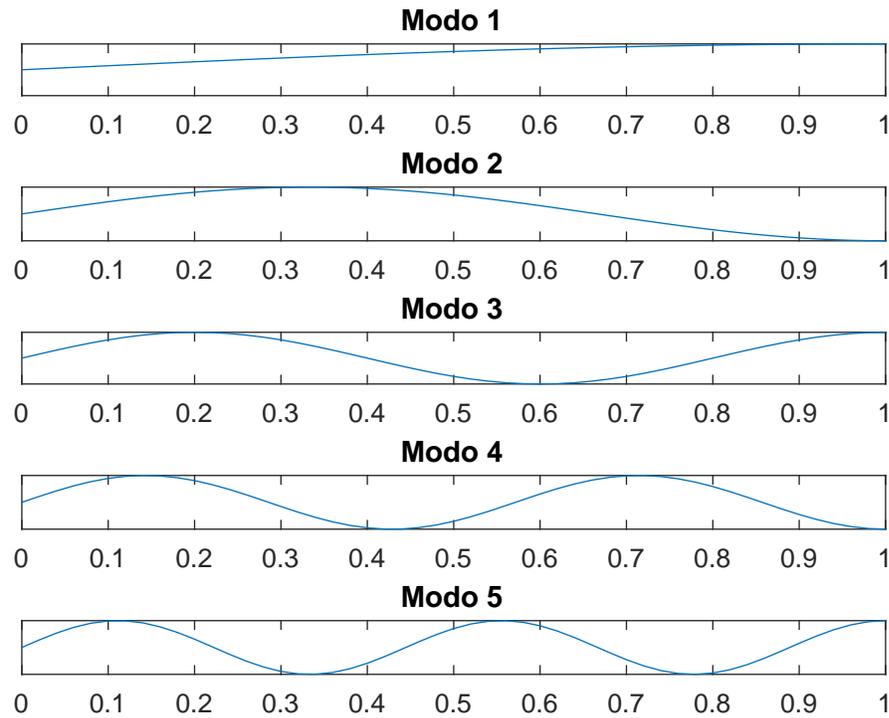


Figura 2.13: Primeros modos de vibración en condiciones mixtas

Una vez más, escribimos la solución como suma de todos los modos fundamentales

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \cos\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.84)$$

Nuevamente, conociendo las propiedades de ortogonalidad de los senos y cosenos, obtenemos los valores de  $A_k$  y  $B_k$ .

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (2.85)$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^L y_1(x) \sin\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (2.86)$$

### 2.3.6. Ejemplo en condiciones mixtas

Consideramos

$$\text{Posición inicial: } y_0(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$$

$$\text{Velocidad inicial: } y_1(x) = 0$$

que son las mismas que se impusieron en el ejemplo previo en condiciones de Neumann. Se aprecia cómo varía la vibración de la cuerda con las diferentes condiciones de frontera.

El extremo izquierdo cumple la condición de frontera de Dirichlet, manteniendo en todo momento un valor de cero. El otro extremo sin embargo varía de posición, pero con una pendiente constante de cero. En el instante inicial cumple la posición inicial impuesta, que resulta ser la misma que en el ejemplo anterior (en condiciones de Neumann y Dirichlet), y a medida que avanza el tiempo, el movimiento de la cuerda recuerda al movimiento de un látigo.

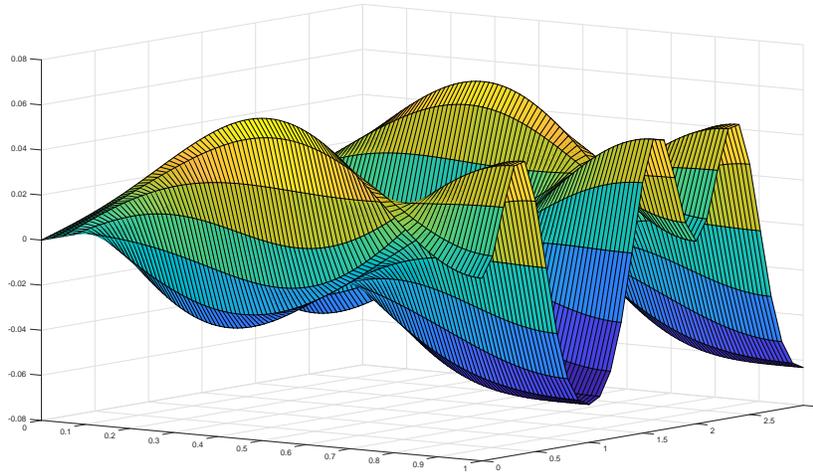


Figura 2.14: Ejemplo: Vibración de una cuerda en condiciones mixtas. Este movimiento se ha estudiado una vez en condiciones de Dirichlet, otra vez en condiciones de Neumann y ahora en condiciones mixtas. Comprobamos que para cualquier instante  $t$ , el valor de la cuerda en el extremo izquierdo se mantiene cero, y el extremo opuesto se mueve libremente, manteniendo siempre la pendiente horizontal

## 2.4. Problema inverso

Vamos a adaptar la pregunta ¿podemos escuchar la forma de un tambor? a nuestro caso unidimensional. La pregunta equivalente sería ¿podemos escuchar la longitud de una cuerda?

Cada modo de vibración de una cuerda emite un sonido a cierta frecuencia. Por lo que el sonido que emite una cuerda es la superposición de todas las frecuencias que emite la cuerda o, visto desde otro punto de vista, la suma de todos los modos de la cuerda que están vibrando. A partir del sonido es posible obtener lo que se conoce como el espectro de frecuencias. Esto es la descomposición del sonido en cada una de sus frecuencias. Resulta interesante comprobar cómo es posible calcular la longitud de una cuerda a partir de su espectro de frecuencias.

La velocidad de propagación de la cuerda se puede escribir como la longitud de onda multiplicada por la frecuencia.

$$c = f\lambda \quad (2.87)$$

siendo  $\lambda$  la distancia entre dos picos (o dos valles) consecutivos (no confundir con el autovalor considerado en las secciones anteriores). Para el caso del primer armónico, sabemos que su longitud de onda es  $\lambda = 2L$  ya que los nodos son justo los dos extremos de la cuerda. La frecuencia fundamental se escribe de la

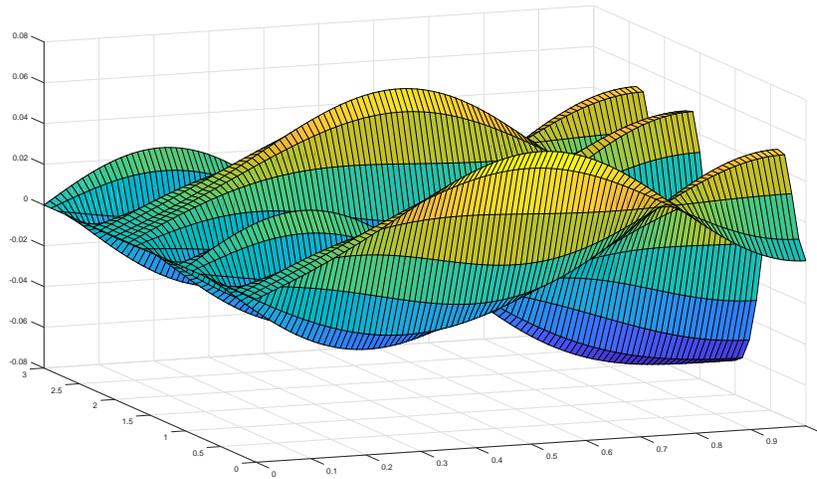


Figura 2.15: Ejemplo: Vibración de una cuerda en condiciones mixtas - cambio de perspectiva

siguiente forma

$$f_1 = \frac{c}{2L} \quad (2.88)$$

Para el caso del segundo armónico la ecuación sería exactamente igual, salvo que la longitud de onda sería la mitad del primero,  $L$

$$f_2 = 2\frac{c}{2L} \quad (2.89)$$

En general, la longitud de onda para cada armónico se puede escribir como  $\lambda = \frac{2L}{n}$ , pudiéndose escribir la frecuencia de cada armónico como

$$f_n = n\frac{c}{2L} = nf_1 \quad (2.90)$$

Por lo tanto, si conocemos la velocidad de propagación en la cuerda y escuchamos su frecuencia fundamental, somos capaces de calcular su longitud.

$$L = \frac{c}{2f_1} \quad (2.91)$$

La frecuencia más baja corresponde al primer armónico, la segunda más baja al segundo, y así sucesivamente. Concluimos que, conociendo la composición de la cuerda, **sí** que es posible escuchar la longitud de una cuerda.

## 2.5. De la teoría a la práctica

Vamos a aplicar la teoría desarrollada hasta ahora a un caso práctico que consistirá en determinar la longitud de una cuerda de una guitarra (o, en nuestro caso, la longitud hasta el traste que se está pulsando en el mástil) a partir de su espectro de frecuencias que obtendremos con un analizador de frecuencias. Nótese que, en principio, no conocemos la velocidad de propagación de la cuerda. Sin embargo la podemos obtener a partir de su longitud total y su frecuencia fundamental.

En la imagen 2.5 se pueden observar los valores de los primeros armónicos. Con el primero calcularemos el valor de la velocidad de propagación en la cuerda. Tenemos que la longitud de la cuerda de nuestra

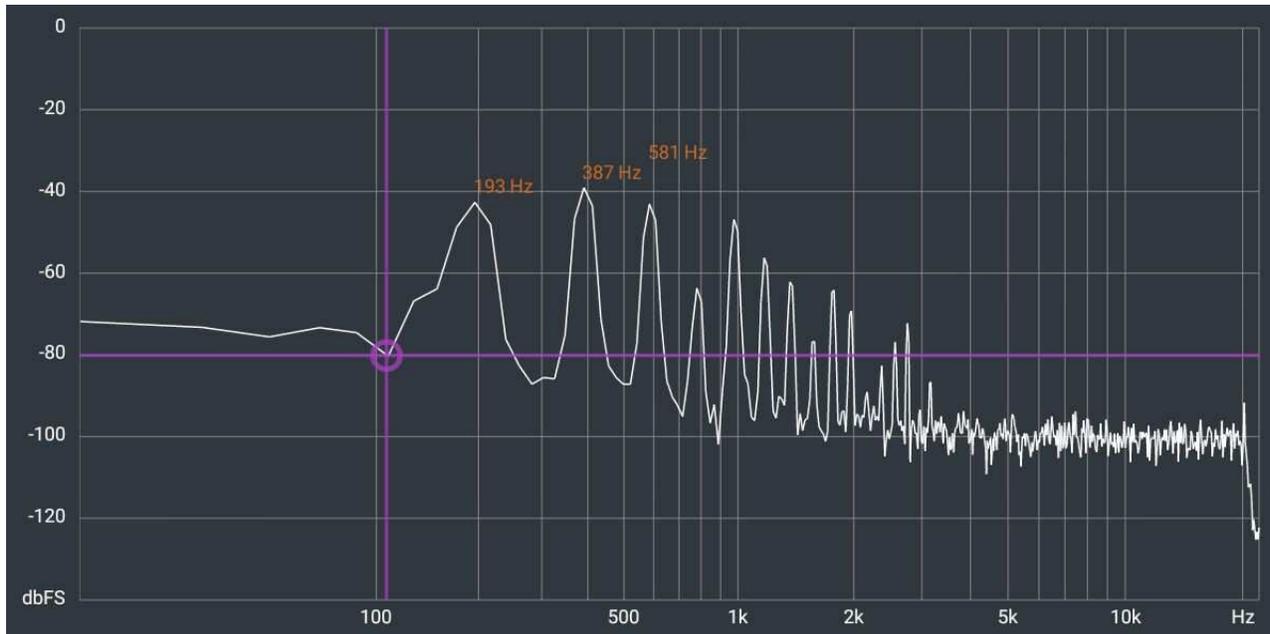


Figura 2.16: Espectro de frecuencias de una cuerda de guitarra

guitarra es  $L = (65 \pm 1) \text{cm}$  y la frecuencia fundamental es  $f_1 = (193 \pm 5) \text{Hz}$ . Así, aplicando la siguiente relación

$$c = 2Lf_1 \quad (2.92)$$

obtenemos que  $c = 250,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Es muy importante recordar que estamos realizando un experimento, por lo que las medidas que tomemos presentarán cierta incertidumbre. Los datos medidos tendrán un error propio, que ya conocemos. Sin embargo las medidas indirectas, que son función de otras medidas, tendrán un error asociado que se calcula por propagación de errores de acuerdo a las siguientes relaciones

$$z = f(x, y) \quad (2.93)$$

$$(\Delta z)^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 (\Delta x)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 (\Delta y)^2 \quad (2.94)$$

Vamos a calcular el valor de la velocidad de propagación a partir de la frecuencia fundamental y la longitud de la cuerda. A continuación, comprobaremos a partir de la velocidad de propagación calculado y el dato de la longitud de la cuerda medida, que el valor de las frecuencias de los siguientes armónicos coincide con los que se obtienen a través del espectro de frecuencias.

Para calcular el error de  $c$ , calculamos primero los errores relativos de  $L$  y  $f_1$ :

$$\delta L = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.95)$$

$$\delta L = \frac{1 \text{cm}}{65 \text{cm}} = 1,54 \% \quad (2.96)$$

$$\delta f_1 = \frac{5 \text{Hz}}{193 \text{Hz}} = 2,59 \% \quad (2.97)$$

$$(2.98)$$

Conociendo los errores relativos de  $f_1$  y  $L$ , calculamos el error de  $c(L, f_1)$ , a partir de la siguiente expresión

$$\delta c^2 = \delta L^2 + \delta f_1^2 \quad (2.99)$$

$$\delta c = 3,01 \% \quad (2.100)$$

$$\Delta c = \delta c \times c = 250,9 \times 3,01 \% = 7,55 \frac{m}{s} \quad (2.101)$$

$$c = (250,9 \pm 7,55) \frac{m}{s} \quad (2.102)$$

Por lo tanto, el error de  $c$  es de  $\pm 7,55 \frac{m}{s}$ .

Ahora que conocemos los errores de  $c$  y de  $L$ , calculamos el error de  $f_2(c, L)$  y  $f_3(c, L)$ , por propagación de errores

$$\delta f_2 = \delta c^2 + \delta L^2 \quad (2.103)$$

$$\Delta f_2 = f_{2teor} \sqrt{\delta c^2 + \delta L^2} = 386 \times 3,38 \% = 13,05 Hz \quad (2.104)$$

$$\delta f_3 = \delta c^2 + \delta L^2 \quad (2.105)$$

$$\Delta f_3 = f_{3teor} \sqrt{\delta c^2 + \delta L^2} = 579 \times 3,38 \% = 19,57 Hz \quad (2.106)$$

$$(2.107)$$

Comparamos los valores reales y los teóricos:

$$f_{2real} = (387 \pm 5) Hz \quad (2.108)$$

$$f_{2teor} = \frac{2c}{2L} = (386 \pm 13,05) Hz \quad (2.109)$$

$$f_{3real} = (581 \pm 5) Hz \quad (2.110)$$

$$f_{3teor} = \frac{3c}{2L} = (579 \pm 19,57) Hz \quad (2.111)$$

Podemos observar cómo el resultado teórico apenas difiere en un par de hercios del resultado real, lo cual entra dentro del rango de error obtenido. Los resultados son, por lo tanto, compatibles con la teoría.

Ahora que conocemos todos los datos de la cuerda, trataremos de escuchar la longitud de la misma. Para ello apretaremos uno de los trastes de la guitarra, acortando la longitud de la cuerda vibrante y calculando de manera teórica la longitud de la cuerda acortada a partir del espectro de frecuencias y el dato de la velocidad de propagación en la cuerda obtenido antes. Afinamos la cuerda en LA, lo cual significa que la cuerda debería vibrar a una frecuencia de 440 Hz, o uno de sus submúltiplos.

Leemos la frecuencia fundamental  $f_1 = 215 Hz$  y calculamos

$$L_{teor} = \frac{c}{2f_1} = \frac{250,9}{2 \times 215} = 0,5835 m = 58,35 cm \quad (2.112)$$

$$\delta L = \sqrt{\delta f^2 + \delta c^2} \quad (2.113)$$

$$\delta L = \sqrt{\left(\frac{5}{215}\right)^2 + 3,01^2} = 3,01 \% \quad (2.114)$$

$$\Delta L = L_{teor} \delta L = 1,75 cm \quad (2.115)$$

Comparamos los resultados obtenidos:

$$L_{real} = (59 \pm 1) cm \quad (2.116)$$

$$L_{teor} = (58,35 \pm 1,75) cm \quad (2.117)$$

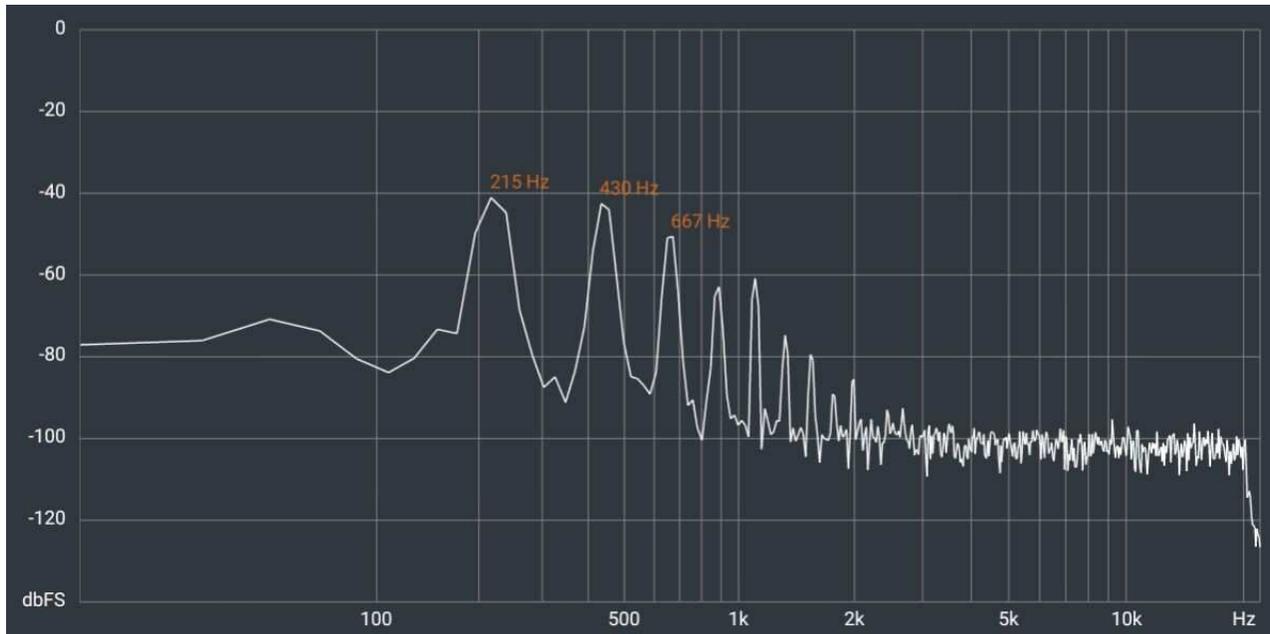


Figura 2.17: Espectro de frecuencias de la cuerda acortada

La longitud real medida con la regla es de  $59 \pm 1\text{cm}$ , mientras que la longitud obtenida a partir del espectro de frecuencias es de  $(58,35 \pm 1,75)\text{cm}$  que, como podemos comprobar, entra dentro del rango de error de la medida. Comprobamos que el aparato teórico desarrollado hasta ahora sirve para medir experimentalmente la longitud de una cuerda.

Para finalizar, simularemos el problema de la cuerda vibrante bajo las mismas condiciones que la cuerda de guitarra. Obtendremos el espectro de frecuencias a partir de la simulación con el programa Matlab, para poder compararlo con el espectro de frecuencias real y comentaremos los resultados.

Resolvemos el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.118)$$

Con los datos expuestos a continuación:

- $L = 0.65\text{ m}$
- $c = 250.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Posición inicial =  $x^4 - 2x^3 + x^2$
- Velocidad inicial = 0

Calculamos el siguiente resultado con Matlab.

Obtenemos los siguientes valores para las tres primeras frecuencias:

$$f_{1sim} = 193,4\text{Hz} \quad (2.119)$$

$$f_{2sim} = 386,7\text{Hz} \quad (2.120)$$

$$f_{3sim} = 578,6\text{Hz} \quad (2.121)$$

Estos valores obtenidos entran dentro del rango de medida obtenido para las frecuencias. Ha sido posible, por lo tanto, reconstruir una solución al problema de la cuerda de la guitarra, únicamente a partir de las medidas.

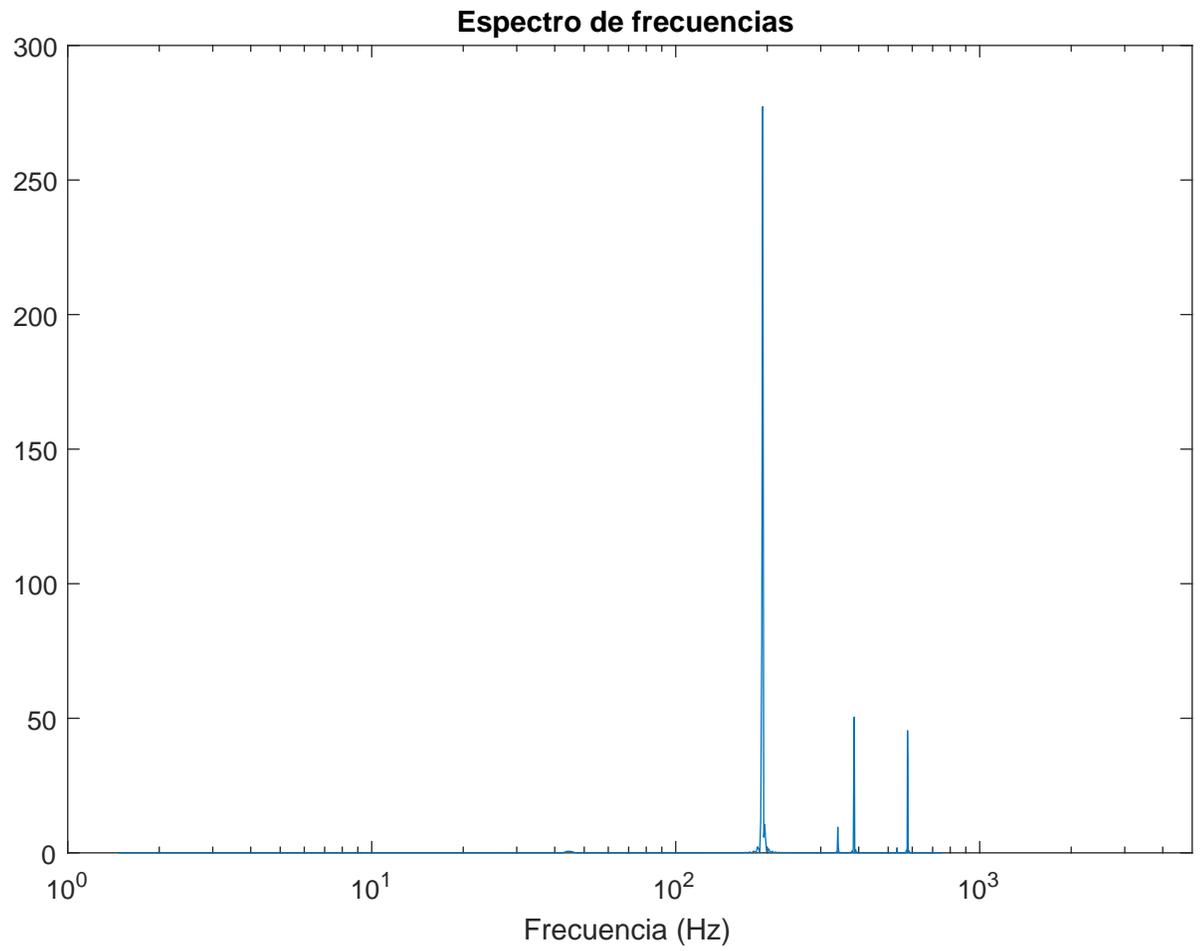


Figura 2.18: Espectro de frecuencias simulado



## Capítulo 3

# Dimensión dos

### 3.1. Formulación Lagrangiana de la cuerda en dos dimensiones

Se puede deducir la ecuación de la membrana vibrante a partir de la formulación Lagrangiana. Consideramos el movimiento transversal de una membrana  $\Omega$  que permanece fija a lo largo de su borde  $\partial\Omega$ , donde  $\rho$  es la densidad y  $u(x, y, t)$  el desplazamiento vertical del punto  $(x, y)$  en el instante  $t$ .

La energía cinética del sistema se expresa como

$$E_c = \frac{1}{2}\rho \int_{\Omega} u_t^2(x, y, t) dx dy. \quad (3.1)$$

La energía potencial se escribe como el trabajo necesario para llevar la membrana de la posición de reposo  $u = 0$  hasta la posición  $u(x, y, t)$ , suponiendo que el borde no se desplaza. Conociendo la tensión  $T$ , consideramos una pequeña región dada por  $x_0 < x < x_0 + \Delta x$  e  $y_0 < y < y_0 + \Delta y$ . Así, el trabajo necesario para deformar esa región es igual al producto de la tensión por el incremento de área:

$$\begin{aligned} T\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2}\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta u)^2} &= \\ &= T\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2}\Delta x\Delta y + \dots \\ &= T\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2\right]\Delta x\Delta y + \dots \\ &= \frac{1}{2}T\left(u_x^2(x_0, y_0, t) + u_y^2(x_0, y_0, t)\right)\Delta x\Delta y + \dots \end{aligned}$$

Los puntos indican términos de orden superior y, en la última igualdad, hemos tomado el límite  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ .

Integrando sobre la región  $\Omega$  obtenemos que

$$E_p = \frac{1}{2}T \int_{\Omega} [u_x^2(x, y, t) + u_y^2(x, y, t)] dx dy \quad (3.2)$$

Podemos ahora formular el funcional acción para la membrana:

$$S[u] = \int_{t_0}^{t_1} (E_c - E_p) dt \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left( \rho u_t^2(x, y, t) - T u_x^2(x, y, t) - T u_y^2(x, y, t) \right) dx dy dt \quad (3.4)$$

Escribimos entonces la variación de  $S$  como,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (-\rho u_{tt} + T(u_{xx} + u_{yy})) \delta u dx dy dt \\ &\quad - T \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} (u_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y \delta u) \right) dx dy dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (u_t \delta u) dx dy dt \end{aligned}$$

Suponiendo que  $\delta u(t_0) = \delta u(t_1) = 0$  a lo largo de toda la membrana, podemos anular el último término de la expresión. Por otro lado, el segundo término se puede reescribir como una integral a lo largo del borde  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , aplicando el teorema de Green

$$T \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y \delta u) \right] dx dy dt = T \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \delta u ds \quad (3.5)$$

siendo  $n$  el vector normal exterior a la curva  $\partial\Omega$ . Podemos entonces cancelar este término también, dado que asumimos que el borde está fijo, haciendo que  $\delta u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  en todo momento.

La variación de  $S$  se simplifica de la siguiente forma:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left( -\rho u_{tt} + T(u_{xx} + u_{yy}) \right) \delta u dx dy dt \quad (3.6)$$

Imponiendo la condición  $\delta S = 0$  para toda variación  $\delta u$ , obtenemos lo que se conoce como la ecuación de la membrana vibrante:

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) \quad (3.7)$$

siendo  $c^2 = \frac{T}{\rho}$ .

### 3.2. Vibración de una membrana rectangular

Resolvemos el caso de una membrana vibrante rectangular de dimensiones  $L_x$  y  $L_y$ , bajo condiciones de Dirichlet, es decir, todos los extremos están fijos.

Tenemos la ecuación de la membrana vibrante:

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) \quad (3.8)$$

Tomamos como condiciones de frontera las condiciones de Dirichlet:

$$u(0, y, t) = u(L_x, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0 \quad (3.9)$$

Conociendo las condiciones iniciales:

$$u(x, y, 0) = y_0(x, y) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = y_1(x, y), \quad (3.11)$$

Suponemos ahora que la ecuación de la membrana vibrante se puede reescribir por separación de variables

$$u(x, y, t) = \Phi(x, y)T(t) \quad (3.12)$$

Introduciendo  $u(x,y,t)$  en la ecuación diferencial de la membrana vibrante obtenemos

$$\Phi(x, y) \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \left( T(t) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + T(t) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{c^2}{\Phi(x, y)} \left( \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} \right) = -\omega^2 \quad (3.14)$$

Como el primer miembro de la ecuación depende únicamente de  $t$  mientras que el segundo solo depende de  $x, y$  igualamos ambas partes a una constante que llamaremos  $-\omega^2$ .

Aplicamos ahora el método de separación de variables a la segunda ecuación diferencial:

$$\Phi(x, y) = H(x)W(y) \quad (3.15)$$

$$W \frac{d^2 H}{dx^2} + H \frac{d^2 W}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} HW = 0 \quad (3.16)$$

Dividiendo esta última ecuación entre el producto  $HW$  obtenemos:

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = -\frac{1}{W} \left( \frac{d^2 W}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} W \right) = -q^2 \quad (3.17)$$

Una vez más, tenemos dos términos, uno dependiente de la variable  $x$  y otro dependiente de la variable  $y$ , por lo que podemos igualar ambos términos a una constante:  $-q^2$

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + q^2 H = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{d^2 W}{dy^2} + r^2 W = 0 \quad (3.19)$$

con  $r^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - q^2$ .

La solución a ambas ecuaciones diferenciales son conocidas:

$$H(x) = C_x \cos(qx) + D_x \sin(qx) \quad (3.20)$$

$$W(y) = C_y \cos(ry) + D_y \sin(ry) \quad (3.21)$$

Partimos de las siguientes ecuaciones de contorno:

$$H(0) = H(L_x) = W(0) = W(L_y) = 0 \quad (3.22)$$

A partir de las cuales obtenemos los siguientes resultados:

$$C_x = 0 \quad \sin(qL_x) = 0 \quad q = \frac{m\pi}{L_x} \quad (3.23)$$

$$C_y = 0 \quad \sin(rL_y) = 0 \quad r = \frac{n\pi}{L_y} \quad (3.24)$$

$$\Phi_{mn}(x, y) = H_m(x)W_n(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) \quad (3.25)$$

con  $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Cada una de las combinaciones de  $m$  y  $n$  ofrecen un modo de vibración diferente y, por tanto, una frecuencia  $\omega_{mn}$ :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = q^2 + r^2 \quad (3.26)$$

$$\omega_{mn}^2 = c^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L_y^2} \right) \quad (3.27)$$

Por otra parte, también conocemos la solución a la ecuación diferencial dependiente del tiempo:

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos(\omega_{mn}t) + B_{mn} \sin(\omega_{mn}t) \quad (3.28)$$

Hemos llegado por lo tanto a la solución correspondiente a cada modo de la ecuación diferencial:

$$u_{mn}(x, y, t) = \Phi_{mn}(x, y)T_{mn}(t) = \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) \left(A_{mn} \cos(\omega_{mn}t) + B_{mn} \sin(\omega_{mn}t)\right) \quad (3.29)$$

Esta ecuación es una solución de la ecuación de ondas y satisface las ecuaciones de frontera, para cualquier valor de  $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Dada la linealidad y la homogeneidad de la ecuación de ondas, una suma de soluciones será también solución al problema, pudiendo escribir la solución como:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) \left(A_{mn} \cos(\omega_{mn}t) + B_{mn} \sin(\omega_{mn}t)\right) \quad (3.30)$$

Las constantes  $A_{mn}$  y  $B_{mn}$  se obtienen a partir de las condiciones iniciales que se le impongan a la membrana.

$$y_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) A_{mn} \quad (3.31)$$

$$y_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) B_{mn} \quad (3.32)$$

A partir de las cuales obtenemos los siguientes resultados, conociendo las propiedades de ortogonalidad de la función seno/coseno:

$$A_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} y_0(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) dx dy \quad (3.33)$$

$$B_{mn} = \frac{4}{L_x L_y \omega_{mn}} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} y_1(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) dx dy \quad (3.34)$$

Podemos explicar el modo de vibración  $[m, n]$  de una membrana rectangular a partir de la figura 3.2.

El primer valor  $m$ , define la cantidad de líneas de estancamiento (análogo a los nodos en dimensión 1) que podemos encontrar en la dirección perpendicular al eje  $y$ . El segundo valor define la cantidad de líneas de estancamiento que podemos encontrar en dirección perpendicular al eje  $x$ . En particular tenemos que el número de líneas de estancamiento es igual al número modal en esa dirección menos uno.

A medida que aumentamos el número del modo, aumenta el número de estas líneas de estancamiento. Resulta interesante observar cómo los valores de  $m$  y  $n$ , únicamente suman líneas de estancamiento en su dirección, independientemente del otro valor modal.

### 3.2.1. Membrana rectangular

Visualizamos a continuación la propagación de una onda sobre una placa rectangular. Se ha impuesto como condiciones iniciales una posición inicial correspondiente a levantar la membrana en un punto concreto y ninguna velocidad inicial. Se estudia el caso, por lo tanto, de una membrana que se alza por el centro y que se suelta en el instante  $t = 0$ . Se observa como la onda se propaga en todas las direcciones de la misma forma. Al chocar contra los bordes, la onda rebota ya que se han impuesto condiciones de frontera de Dirichlet.

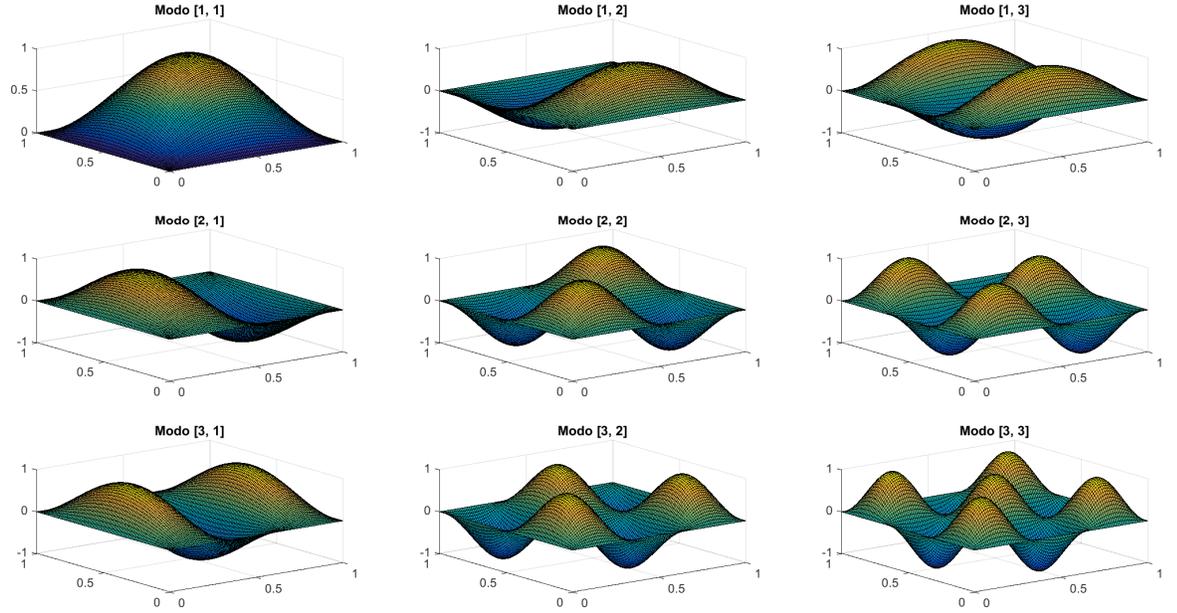


Figura 3.1: Modos de vibración de una membrana rectangular

### 3.3. Vibración de una membrana circular

Partimos de una membrana circular de radio  $R$  que cumple la condición de Dirichlet en su contorno. Escribimos la ecuación de la membrana vibrante en coordenadas polares de la siguiente forma:

$$u(r, \theta, t) = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.35)$$

De la misma forma que en el caso anterior resolveremos por separación de variables:

$$u(r, \theta, t) = \Phi(r, \theta)T(t) \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{c^2}{\Phi(r, \theta)} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = -\omega^2 \quad (3.37)$$

Podemos igualar ambos términos a una constante, que llamaremos  $-\omega^2$  dado que el primer término depende únicamente de  $t$  y el segundo de  $(r, \theta)$ .

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.39)$$

Resolvemos la primera ecuación por separación de variables:

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (3.40)$$

$$\Theta(\theta) \left( r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) + R(r) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} r^2 R(r) \Theta(\theta) = 0 \quad (3.41)$$

$$-\frac{1}{R(r)} \left( r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} r^2 R(r) \right) = \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -m^2 \quad (3.42)$$

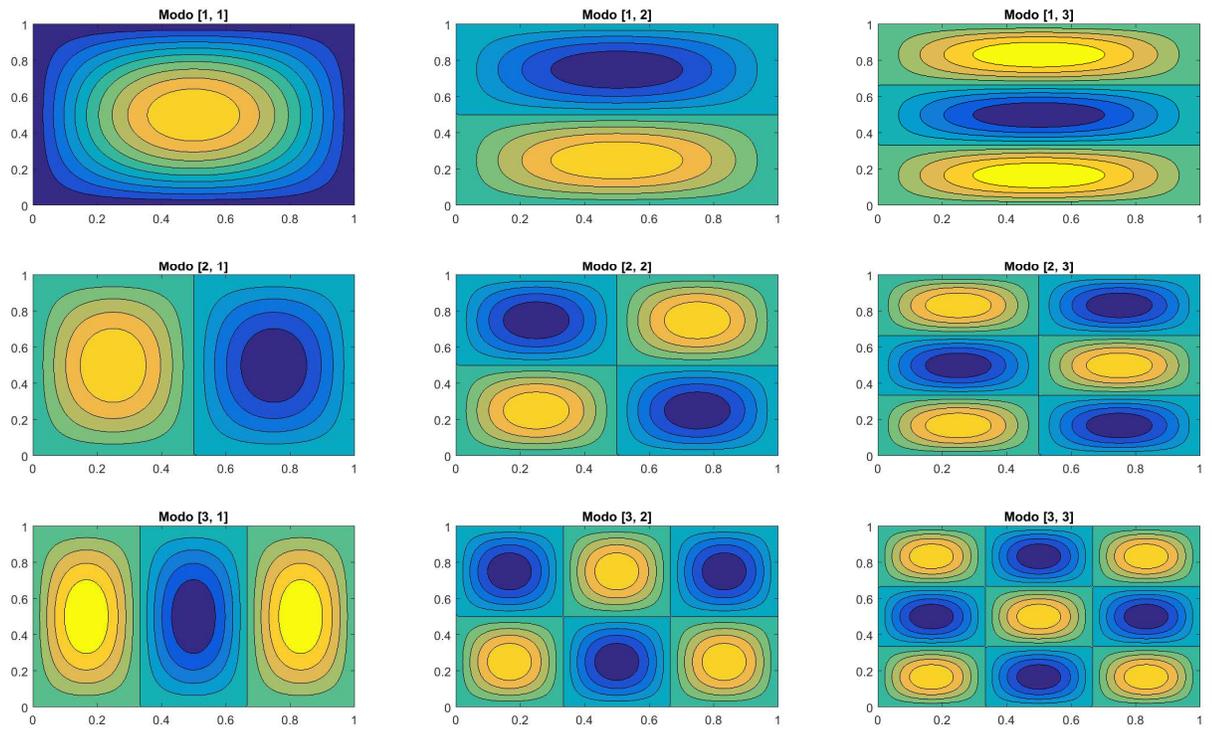


Figura 3.2: Modos de vibración de una membrana rectangular

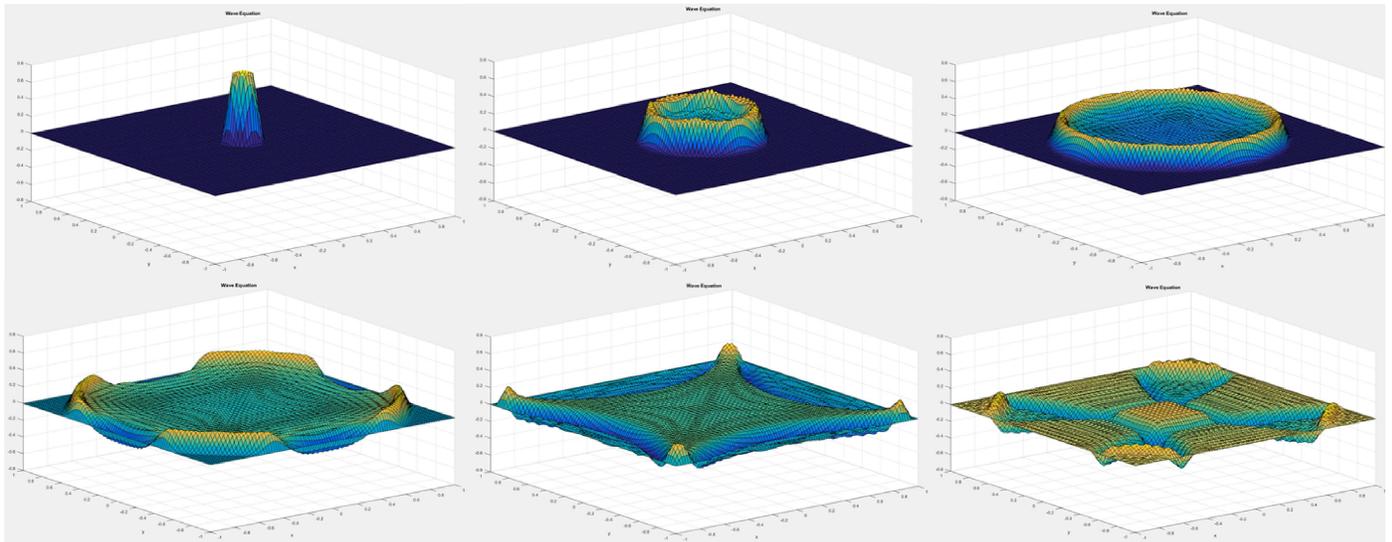


Figura 3.3: Propagación de una onda sobre una membrana rectangular

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0 \quad (3.44)$$

Las soluciones de ambas ecuaciones diferenciales son conocidas:

$$R(r) = C_r J_m \left( \frac{\omega}{c} r \right) + D_r Y_m \left( \frac{\omega}{c} r \right) \quad (3.45)$$

$$\Theta(\theta) = C_\theta \cos(m\theta) + D_\theta \sin(m\theta) \quad (3.46)$$

con  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Las funciones obtenidas se conocen como funciones de Bessel.  $J_m$  es la ecuación de Bessel de primer orden y  $Y_m$  la ecuación de Bessel de segundo orden. Como la función  $Y_r$  es una función que tiende a infinito a medida que  $r$  tiende a cero, tenemos que tomar  $D_r = 0$  para que el resultado sea físicamente razonable.

Visualizamos a continuación las soluciones a la función de Bessel para los primeros valores del parámetro  $m$ . Buscamos aquellos valores que hagan que la función de Bessel sea cero (raíces de Bessel). Gracias a

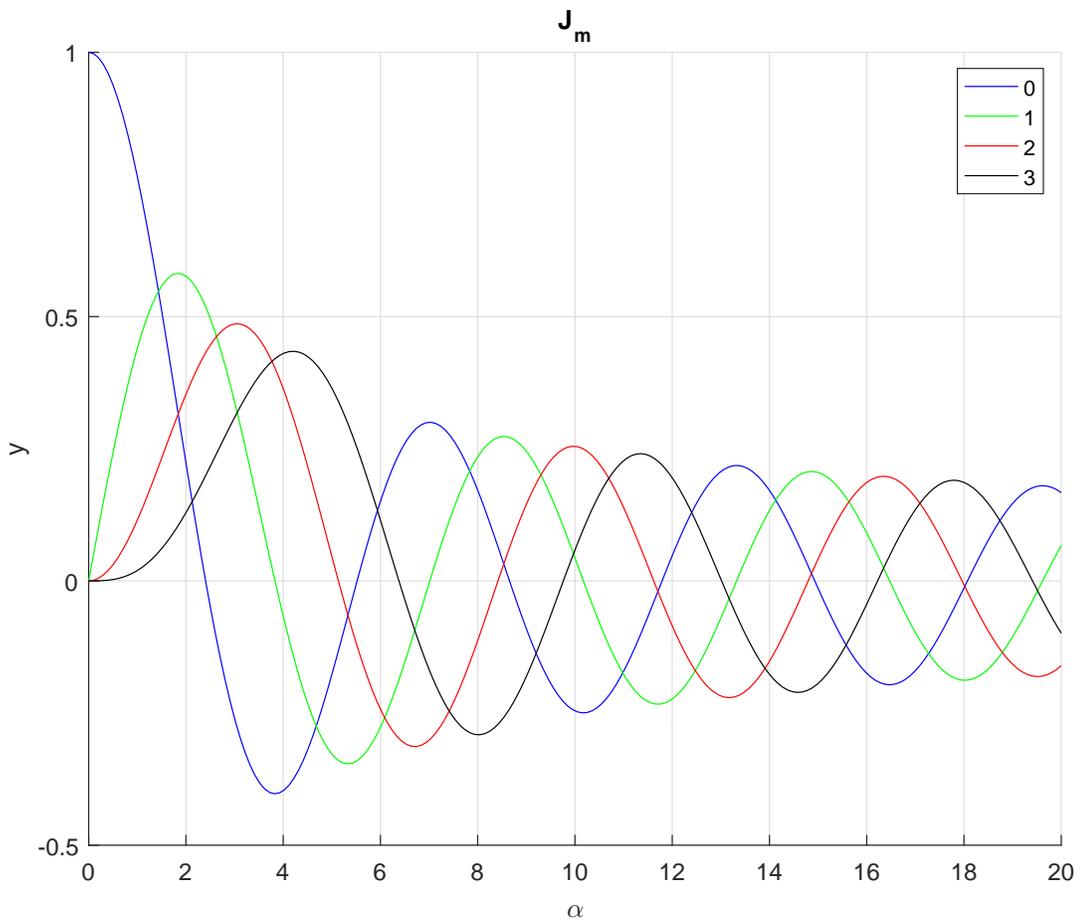


Figura 3.4: Funciones de Bessel

ellos, podremos asegurar que la solución cumpla la condición de Dirichlet, es decir, que el valor en  $r = R$  sea cero.

Visualizamos los valores de las raíces que de la función  $J_m(a)$ , donde  $a_{mn}$  es el valor de la raíz de Bessel. Los diferentes valores de  $a = \omega \frac{R}{c}$ , determinan las diferentes frecuencias  $\omega_{mn}$  de cada modo de vibración.

Cuadro 3.1: Tabla de las primeras raíces de Bessel

Raíces de Bessel	$J_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$
Primera Raíz	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802
Segunda Raíz	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610
Tercera Raíz	8.6357	10.1735	13.3237	14.7960
Cuarta Raíz	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235

Por lo tanto, podemos escribir cada modo de vibración:

$$u_{mn}(r, \theta, t) = J_m \left( a_{mn} \frac{r}{R} \right) \left( C_n \cos(m\theta) + D_n \sin(m\theta) \right) \left( A_n \cos(\omega_{mn}t) + B_n \sin(\omega_{mn}t) \right) \quad (3.47)$$

con  $m = 0, 1, 2, \dots$  y  $n = 1, 2, 3, \dots$

Dada la linealidad y la homogeneidad de la ecuación de ondas, una suma de soluciones será también solución al problema, pudiendo escribir la solución como

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left( a_{mn} \frac{r}{R} \right) \left( C_n \cos(m\theta) + D_n \sin(m\theta) \right) \left( A_n \cos(\omega_{mn}t) + B_n \sin(\omega_{mn}t) \right) \quad (3.48)$$

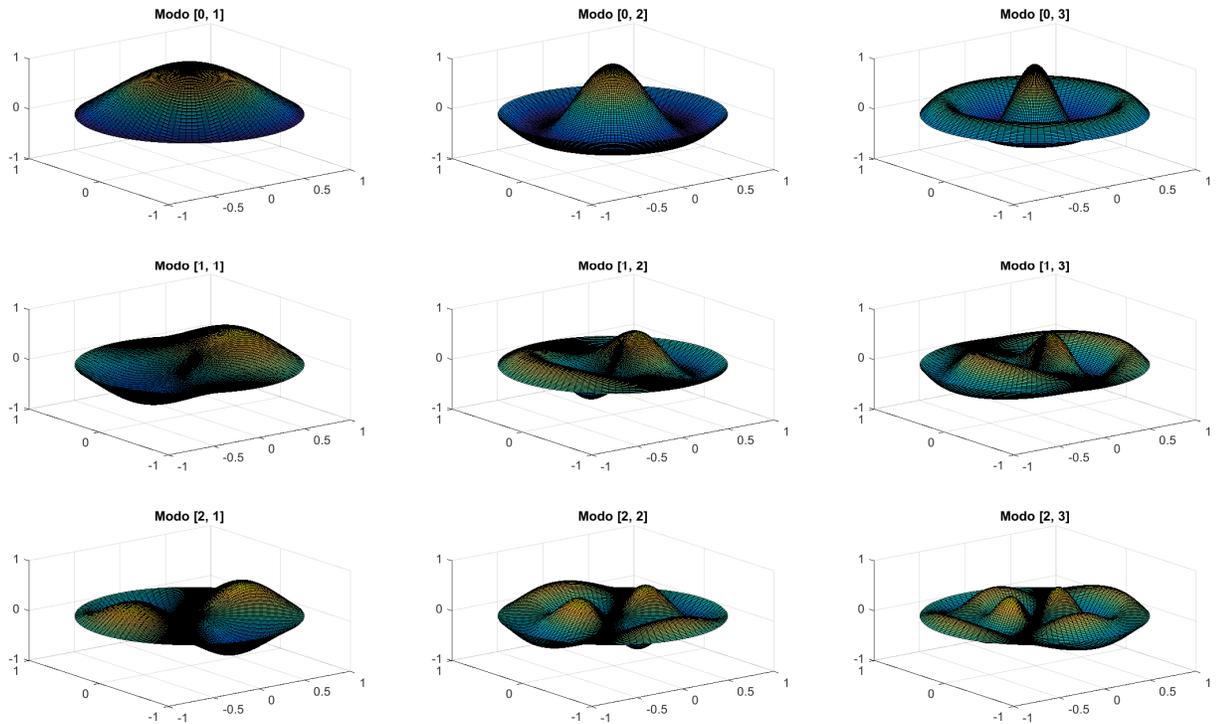


Figura 3.5: Modos de vibración de una membrana circular

Podemos explicar los modos de vibración  $[m, n]$  de una membrana circular a partir de la siguiente figura. El valor de  $m$  define el número de líneas de estancamiento que hay en la placa en dirección radial. El valor  $n$  define el número de líneas de estancamiento en la placa en dirección angular menos uno.

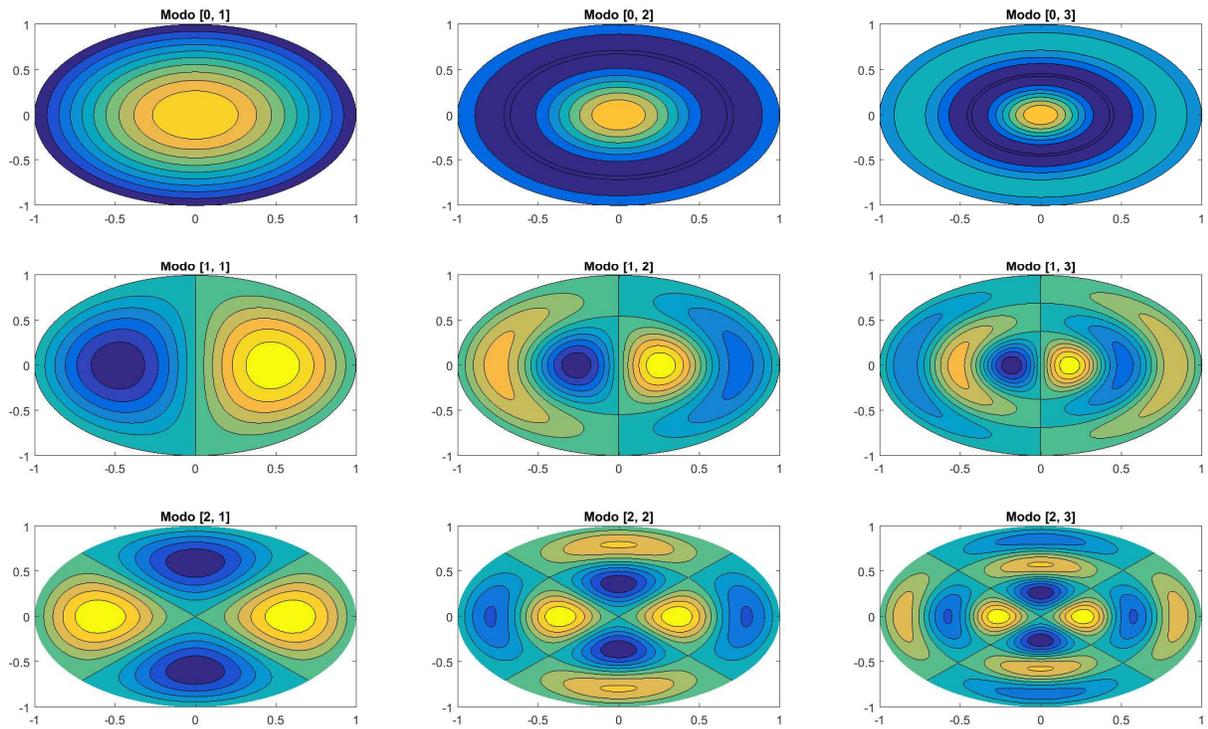


Figura 3.6: Modos de vibración de una membrana circular

### 3.3.1. Membrana circular

Visualizamos a continuación la propagación de una onda sobre una placa circular. Se ha impuesto como

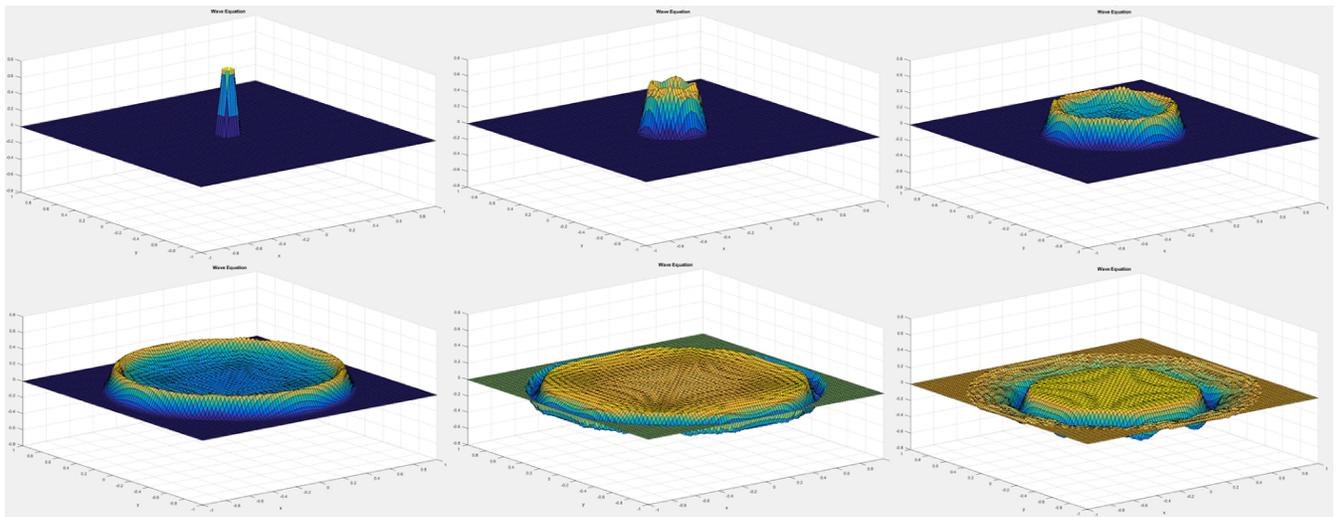


Figura 3.7: Propagación de una onda sobre una membrana circular

condiciones iniciales una posición inicial correspondiente a levantar la membrana en un punto concreto y ninguna velocidad inicial. Se estudia el caso, por lo tanto, de una membrana que se alza por el centro y que se suelta en el instante  $t = 0$ . Se observa como la onda se propaga en todas las direcciones de la misma forma. Al chocar contra los bordes, en  $r = R$ , la onda rebota ya que se han impuesto condiciones de frontera de Dirichlet.

### 3.4. Vibración de una membrana triangular

Es posible resolver una ecuación en derivadas parciales, como es la ecuación de ondas, a partir del método de diferencias finitas. Las diferencias es el análogo discreto de la derivada. Se ha implementado este método como código en Matlab para resolver la ecuación de ondas en una placa triangular.

#### 3.4.1. Membrana triangular

Visualizamos a continuación la propagación de una onda sobre una placa triangular. Para estudiar la

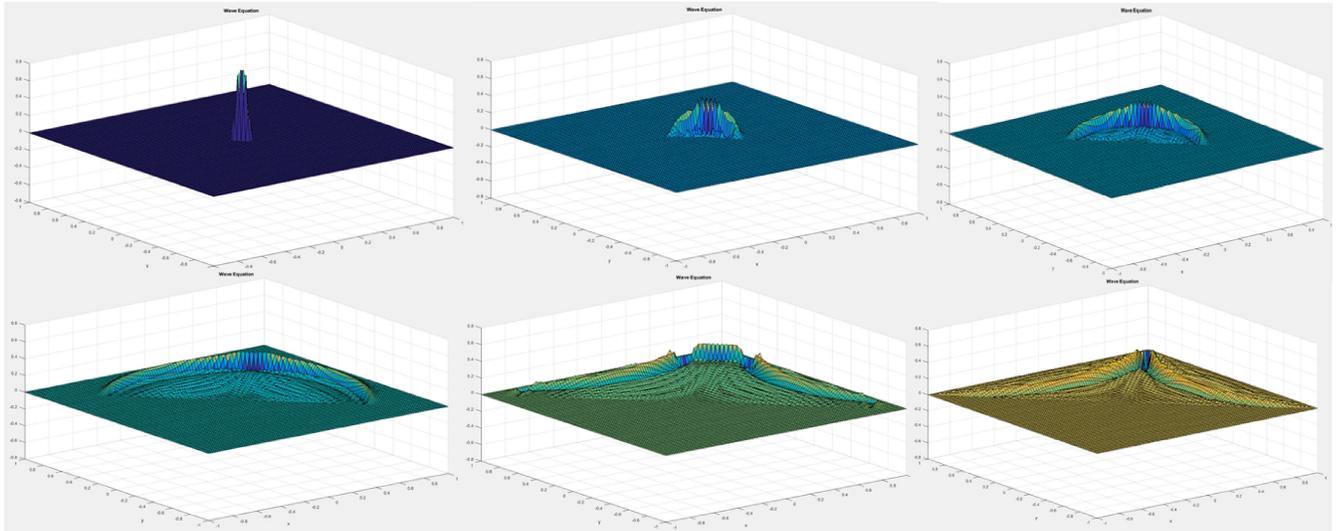


Figura 3.8: Propagación de una onda sobre una membrana triangular

propagación de la cuerda, partimos de las condiciones iniciales. La posición inicial, corresponde a levantar la membrana triangular en un punto muy cercano al centro de la hipotenusa y soltar en el instante  $t = 0$ . La velocidad de la membrana en el momento inicial es de cero en toda la placa. Se visualiza la propagación de la onda y cómo la onda rebota tras alcanzar los bordes.

### 3.5. Problema inverso en 2D

#### 3.5.1. Membrana rectangular

De la misma forma que tratamos de escuchar la logitud de una cuerda vibrando, trateremos de obtener las dimensiones  $(L_x, L_y)$  de una membrana rectangular.separ

Como ya se dedujo anteriormente, podemos escribir la frecuencia a la que vibra cada uno de los modos a partir de la ecuación

$$\omega_{mn}^2 = c^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L_y^2} \right) \quad (3.49)$$

Sabemos que el primer armónico que encontraremos corresponde al modo de vibración (1, 1). La frecuencia  $\omega_{mn}$  de este modo se define como

$$\omega_{11}^2 = c^2 \left( \frac{1^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{1^2 \pi^2}{L_y^2} \right) \quad (3.50)$$

Tenemos, por tanto, dos incógnitas que resolver,  $L_x, L_y$ . Asumiendo que se conoce la velocidad de propagación en la membrana  $c$ , necesitaremos conocerla frecuencia de los primeros modos de vibración. Los frecuencias más bajas de vibración, después del modo [1, 1] serán los modos [2, 1] y [1, 2]. Si somos capaces de resolver el sistema de ecuaciones que plantea el problema, seremos capaces de escuchar las dimensiones de un tambor rectangular.

$$\omega_{11}^2 = c^2 \left( \frac{1^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{1^2 \pi^2}{L_y^2} \right) \quad (3.51)$$

$$\omega_{12}^2 = c^2 \left( \frac{1^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{2^2 \pi^2}{L_y^2} \right) \quad (3.52)$$

$$\omega_{21}^2 = c^2 \left( \frac{2^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{1^2 \pi^2}{L_y^2} \right) \quad (3.53)$$

Una vez obtenidos los valores de  $c, L_x, L_y$ , será importante comprobar que somos capaces de reconocer también los siguientes modos de vibración dentro del espectro de frecuencias .

### 3.5.2. Membrana circular

Trataremos ahora de obtener el radio de una membrana circular a partir de su sonido. Partimos de las frecuencias que produce el tambor circular cuando vibra. Ya calculamos anteriormente el valor de la frecuencia  $\omega_{mn}$ , dependiente de cada modo de vibración, obteniendo la siguiente expresión

$$a_{mn} = \omega_{mn} \frac{R}{c} \quad (3.54)$$

$$\omega_{mn} = a_{mn} \frac{c}{R} \quad (3.55)$$

Tenemos dos incógnitas,  $c, R$ , por lo que necesitaremos dos ecuaciones. Sabemos que el modo fundamental de vibración corresponderá al modo [0, 1] con un valor de  $a = 2,40483$ , y que la segunda frecuencia más baja será la correspondiente al modo [1, 1] con un valor de  $a = 3,83171$ . Obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\omega_{01} = 2,40483 \frac{c}{R} \quad (3.56)$$

$$\omega_{11} = 3,83171 \frac{c}{R} \quad (3.57)$$

### 3.5.3. De la teoría a la práctica

Vamos a tratar de obtener toda la información que podamos del espectro de frecuencias producido por un tambor circular. Hemos podido medir que el tambor en cuestión tiene un radio de  $(6,5 \pm 1)cm$ . Dado que todos los datos se han obtenido de forma experimental, calcularemos todos los resultados con su correspondiente error. Para calcular el error de  $c$ , calculamos primero los errores relativos de  $R$  y  $\omega_{01}$ :

$$\delta R = \frac{\Delta R}{R} \quad (3.58)$$

$$\delta R = \frac{1cm}{6,5cm} = 15,38\% \quad (3.59)$$

$$\delta \omega_{01} = \frac{5Hz}{387Hz} = 1,29\% \quad (3.60)$$

$$(3.61)$$

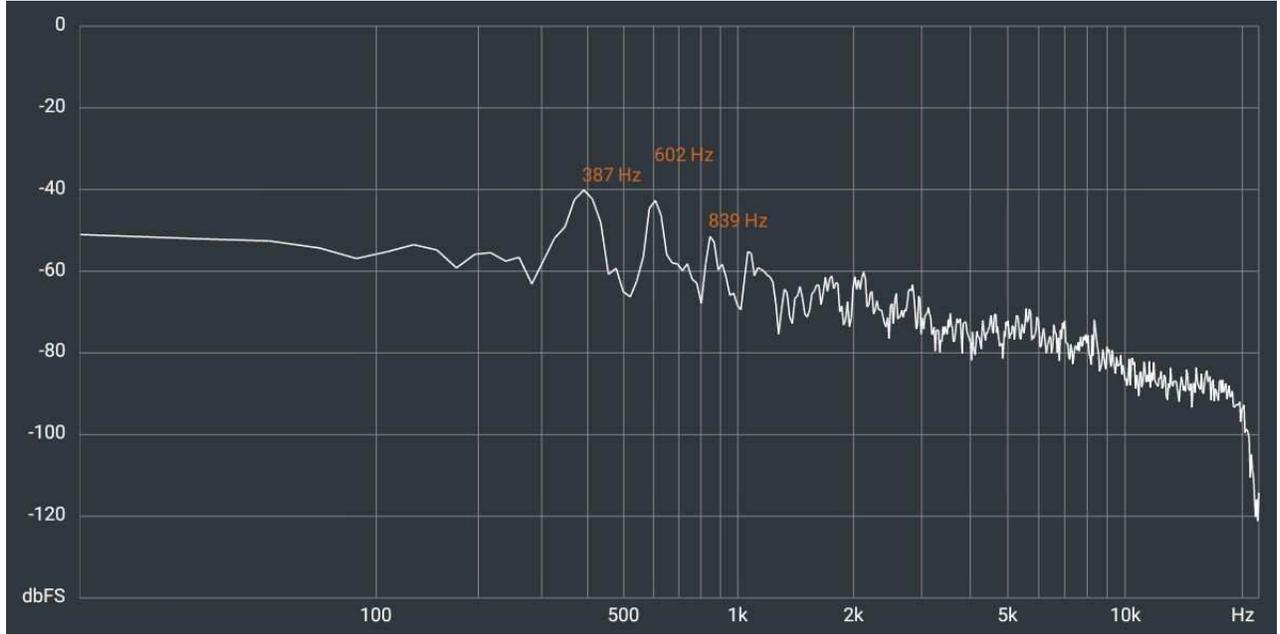


Figura 3.9: Espectro de frecuencias obtenido de la vibración de un tambor circular

A partir de este dato somos capaces de calcular la velocidad de propagación  $c(R, \omega_{01})$  del mismo

$$\delta c^2 = \delta R^2 + \delta \omega_{01}^2 \quad (3.62)$$

$$\delta c = 15,43\% \quad (3.63)$$

$$c = \omega_{01} \frac{R}{2,40483} \quad (3.64)$$

$$\Delta c = \delta c \times c = 10,46 \times 15,43\% = 1,61 \frac{m}{s} \quad (3.65)$$

$$c = (10,46 \pm 1,61) \frac{m}{s} \quad (3.66)$$

Ahora que conocemos el valor de  $c$  verificaremos que, a partir de las siguientes frecuencias, somos capaces de obtener el radio original del tambor. Obtendremos el valor de  $R(c, \omega_{11})$  con la frecuencia  $\omega_{11} = 602 Hz$ , y el valor de  $R(c, \omega_{02})$  con la frecuencia  $\omega_{02} = 5,52008$ .

$$\delta R_{11} = \sqrt{\delta c^2 + \delta \omega_{11}^2} = \sqrt{(15,43\%)^2 + \left(\frac{5}{602}\right)^2} = 15,45\% \quad (3.67)$$

$$\delta R_{02} = \sqrt{\delta c^2 + \delta \omega_{02}^2} = \sqrt{(15,43\%)^2 + \left(\frac{5}{839}\right)^2} = 15,44\% \quad (3.68)$$

$$R_{11} = 3,83171 \frac{c}{\omega_{11}} \quad (3.69)$$

$$R_{02} = 5,52008 \frac{c}{\omega_{02}} \quad (3.70)$$

Obtenemos los siguientes valores para el radio:

$$R_{11} = (6,66 \pm 1,03) cm \quad (3.71)$$

$$R_{02} = (6,88 \pm 1,06) cm \quad (3.72)$$

los resultados obtenidos son compatibles con la teoría, pues entran dentro de los rangos de error de las medidas. Hemos obtenido el radio de la membrana vibrante a partir de su espectro de frecuencias y su velocidad de propagación.

### 3.6. Contraejemplo

Hasta ahora hemos observado que es posible obtener las dimensiones de un tambor una vez conocida la forma. Hemos obtenido el radio de un tambor circular a partir de su espectro de frecuencias y de la misma forma la longitud de los lados de un tambor rectangular. También es posible diferenciar un tambor rectangular de uno circular. ¿Significa esto que es posible calcular la forma de un tambor a partir de su espectro de frecuencias?

Estudemos el caso del siguiente tambor.

La membrana anterior satisface la ecuación de ondas dentro de su región  $D_1$ . También cumple las con-

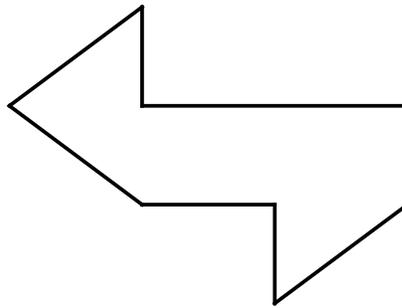


Figura 3.10: Tambor 1

diciones de frontera de Dirichlet, todos los bordes están sujetos. En lugar de definir la ecuación de ondas del tambor en su conjunto se dividirá la membrana en siete triángulos isósceles, de la siguiente forma:

Cada una de estas subdivisiones cumple la ecuación de ondas dentro del triángulo, pudiéndose escribir la ecuación de ondas para este tambor como el conjunto de las siete ecuaciones de ondas. Esto es posible, ya que un conjunto de soluciones de la ecuación de ondas sigue siendo solución.

$$\psi_A(x, y, t) = \begin{cases} \psi(x, y, t) & \text{si } (x, y) \in A \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin A \end{cases}$$

$$\psi_B(x, y, t) = \begin{cases} \psi(x, y, t) & \text{si } (x, y) \in B \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin B \end{cases}$$

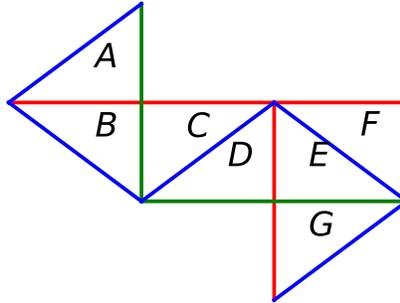


Figura 3.11: Tambor 1 dividido

$$\psi_C(x, y, t) = \begin{cases} \psi(x, y, t) & \text{si } (x, y) \in C \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin C \end{cases}$$

$$\psi_D(x, y, t) = \begin{cases} \psi(x, y, t) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \end{cases}$$

$$\psi_E(x, y, t) = \begin{cases} \psi(x, y, t) & \text{si } (x, y) \in E \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin E \end{cases}$$

$$\psi_F(x, y, t) = \begin{cases} \psi(x, y, t) & \text{si } (x, y) \in F \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin F \end{cases}$$

$$\psi_G(x, y, t) = \begin{cases} \psi(x, y, t) & \text{si } (x, y) \in G \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin G \end{cases}$$

Podemos imaginarnos el tambor cómo el conjunto de pequeños tambores triangulares pegados en los extremos.

No podemos olvidar que a pesar de que podemos tratar cada triángulo por separado, se han de cumplir las condiciones de que en el borde de la región  $D_1$  la ecuación ha de valer cero, y que en el borde entre

dos triángulos su valor ha de ser igual:

$$\psi_A^\beta = \psi_A^\gamma = \psi_B^\gamma = \psi_C^\alpha = \psi_D^\beta = \psi_F^\alpha = \psi_F^\beta = \psi_G^\alpha = \psi_G^\gamma = 0 \tag{3.73}$$

$$\psi_A^\alpha = \psi_B^\alpha \tag{3.74}$$

$$\psi_B^\beta = \psi_C^\beta \tag{3.75}$$

$$\psi_C^\gamma = \psi_D^\gamma \tag{3.76}$$

$$\psi_D^\alpha = \psi_E^\alpha \tag{3.77}$$

$$\psi_E^\gamma = \psi_F^\gamma \tag{3.78}$$

$$\psi_E^\beta = \psi_G^\beta \tag{3.79}$$

$$\tag{3.80}$$

Hemos definido por lo tanto la ecuación de ondas de la membrana anterior a partir de la suma de cada una de las ecuaciones de onda:

$$\psi(x, y, t) = \sum \psi_i(x, y, t) \tag{3.81}$$

Vamos ahora a estudiar el caso de un segundo tambor que se muestra a continuación.

A simple vista se aprecia que el segundo tambor es una reordenación de los triángulos del primer tambor,

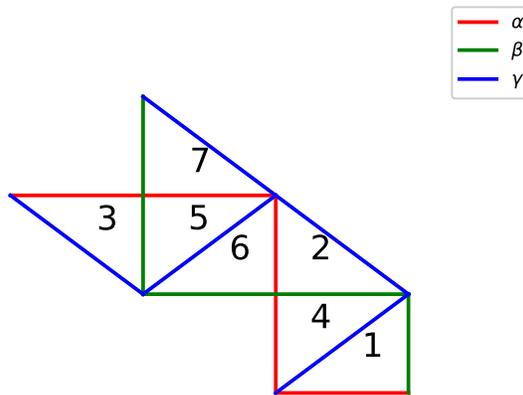


Figura 3.12: Tambor 2

pero sin tener la misma forma. Se ve que el segundo tambor no es ni un giro ni un . Esta nueva región la llamaremos  $D_2$ . La pregunta que trataremos de responder a continuación es, ¿podemos encontrar las soluciones a la ecuación de ondas en  $D_1$  también en la región  $D_2$ ?

Para que esta afirmación sea verdadera, la solución de la región  $D_2$  deberá cumplir las siguientes condiciones:

- La solución cumple la ecuación de ondas
- La solución cumple las condiciones de Dirichlet en el contorno.

- La solución ha de ser continua

Condición 1:

Tomamos como solución a la ecuación de ondas la siguiente:

Cada uno de los triángulos en  $D_2$  tiene su solución escrita como suma de las soluciones de los triángulos de

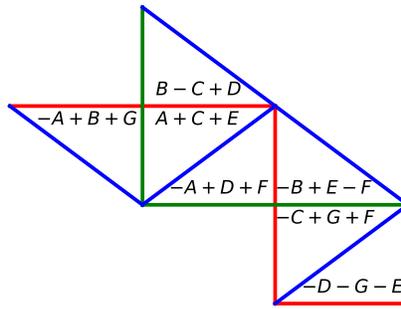


Figura 3.13: Vibraciones en el Tambor 2 a partir de las sumas

la región  $D_1$  Cómo ya sabemos que la solución en  $D_1$  cumple la ecuación de ondas, la suma de soluciones, seguirá siendo una solución válida a la ecuación de ondas.

Condiciones 2 y 3:

A partir de la solución vista previamente y utilizando la nomenclatura de las figuras 3.11 y 3.12, vamos a definir la vibración de cada uno de los triángulos a partir de la suma de las ecuaciones de ondas de los triángulos de la región  $D_1$ .

$$\Phi_1 = -\psi_D - \psi_G + \psi_E \quad (3.82)$$

$$\Phi_2 = -\psi_C + \psi_G + \psi_F \quad (3.83)$$

$$\Phi_3 = -\psi_A + \psi_B + \psi_G \quad (3.84)$$

$$\Phi_4 = -\psi_B + \psi_E - \psi_F \quad (3.85)$$

$$\Phi_5 = \psi_A + \psi_C + \psi_E \quad (3.86)$$

$$\Phi_6 = -\psi_A + \psi_D + \psi_F \quad (3.87)$$

$$\Phi_7 = \psi_B - \psi_C + \psi_D \quad (3.88)$$

$$(3.89)$$

Escrito de forma matricial obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A continuación comprobamos los bordes de cada uno de los siete triángulos:

Bordes de  $\Phi_1$ :

$$\Phi_1^\alpha = -\psi_D^\alpha - \psi_G^\alpha + \psi_E^\alpha = 0 \quad (3.90)$$

$$\Phi_1^\beta = -\psi_D^\beta - \psi_G^\beta + \psi_E^\beta = 0 \quad (3.91)$$

$$\Phi_1^\gamma = -\psi_D^\gamma - \psi_G^\gamma + \psi_E^\gamma = -\psi_D^\gamma + \psi_E^\gamma \quad (3.92)$$

Bordes de  $\Phi_2$ :

$$\Phi_2^\alpha = -\psi_C^\alpha + \psi_G^\alpha + \psi_F^\alpha = 0 \quad (3.93)$$

$$\Phi_2^\beta = -\psi_C^\beta + \psi_G^\beta + \psi_F^\beta = -\psi_C^\beta + \psi_G^\beta \quad (3.94)$$

$$\Phi_2^\gamma = -\psi_C^\gamma + \psi_G^\gamma + \psi_F^\gamma = -\psi_C^\gamma + \psi_F^\gamma \quad (3.95)$$

$$(3.96)$$

Bordes de  $\Phi_3$ :

$$\Phi_3^\alpha = -\psi_A^\alpha + \psi_B^\alpha + \psi_G^\alpha = 0 \quad (3.97)$$

$$\Phi_3^\beta = -\psi_A^\beta + \psi_B^\beta + \psi_G^\beta = \psi_B^\beta + \psi_G^\beta \quad (3.98)$$

$$\Phi_3^\gamma = -\psi_A^\gamma + \psi_B^\gamma + \psi_G^\gamma = 0 \quad (3.99)$$

$$(3.100)$$

Bordes de  $\Phi_4$ :

$$\Phi_4^\alpha = -\psi_B^\alpha + \psi_E^\alpha - \psi_F^\alpha = -\psi_B^\alpha + \psi_E^\alpha \quad (3.101)$$

$$\Phi_4^\beta = -\psi_B^\beta + \psi_E^\beta - \psi_F^\beta = -\psi_B^\beta + \psi_E^\beta \quad (3.102)$$

$$\Phi_4^\gamma = -\psi_B^\gamma + \psi_E^\gamma - \psi_F^\gamma = 0 \quad (3.103)$$

$$(3.104)$$

Bordes de  $\Phi_5$ :

$$\Phi_5^\alpha = \psi_A^\alpha + \psi_C^\alpha + \psi_E^\alpha = \psi_A^\alpha + \psi_E^\alpha \quad (3.105)$$

$$\Phi_5^\beta = \psi_A^\beta + \psi_C^\beta + \psi_E^\beta = \psi_C^\beta + \psi_E^\beta \quad (3.106)$$

$$\Phi_5^\gamma = \psi_A^\gamma + \psi_C^\gamma + \psi_E^\gamma = \psi_C^\gamma + \psi_E^\gamma \quad (3.107)$$

$$(3.108)$$

Bordes de  $\Phi_6$ :

$$\Phi_6^\alpha = -\psi_A^\alpha + \psi_D^\alpha + \psi_F^\alpha = -\psi_A^\alpha + \psi_D^\alpha \quad (3.109)$$

$$\Phi_6^\beta = -\psi_A^\beta + \psi_D^\beta + \psi_F^\beta = 0 \quad (3.110)$$

$$\Phi_6^\gamma = -\psi_A^\gamma + \psi_D^\gamma + \psi_F^\gamma = \psi_D^\gamma + \psi_F^\gamma \quad (3.111)$$

$$(3.112)$$

Bordes de  $\Phi_7$ :

$$\Phi_7^\alpha = \psi_B^\alpha - \psi_C^\alpha + \psi_D^\alpha = \psi_B^\alpha + \psi_D^\alpha \quad (3.113)$$

$$\Phi_7^\beta = \psi_B^\beta - \psi_C^\beta + \psi_D^\beta = 0 \quad (3.114)$$

$$\Phi_7^\gamma = \psi_B^\gamma - \psi_C^\gamma + \psi_D^\gamma = 0 \quad (3.115)$$

$$(3.116)$$

Comprobamos que todos los extremos situados en el borde de la región  $D_2$  sean cero:

$$\Phi_1^\alpha = \Phi_1^\beta = \Phi_2^\alpha = \Phi_3^\alpha = \Phi_3^\gamma = \Phi_4^\gamma = \Phi_6^\beta = \Phi_7^\beta = \Phi_7^\gamma = 0 \quad (3.117)$$

Queda así comprobada la segunda condición, la solución obtenida cumple la condición de Dirichlet en sus extremos.

Solo queda por comprobar que la solución sea continua, esto quiere decir que el valor de la solución en los bordes de los triángulos coincide en ambos lados:

$$\Phi_1^\gamma - \Phi_2^\gamma = (-\psi_D^\gamma + \psi_E^\gamma) - (-\psi_C^\gamma + \psi_F^\gamma) = 0 \quad (3.118)$$

$$\Phi_2^\beta - \Phi_4^\beta = (-\psi_C^\beta + \psi_G^\beta) - (-\psi_B^\beta + \psi_E^\beta) = 0 \quad (3.119)$$

$$\Phi_4^\alpha - \Phi_6^\alpha = (-\psi_B^\alpha + \psi_E^\alpha) - (-\psi_A^\alpha + \psi_D^\alpha) = 0 \quad (3.120)$$

$$\Phi_5^\gamma - \Phi_6^\gamma = (\psi_C^\gamma + \psi_E^\gamma) - (\psi_D^\gamma + \psi_F^\gamma) = 0 \quad (3.121)$$

$$\Phi_3^\beta - \Phi_5^\beta = (\psi_B^\beta + \psi_G^\beta) - (\psi_C^\beta + \psi_E^\beta) = 0 \quad (3.122)$$

$$\Phi_5^\alpha - \Phi_7^\alpha = (\psi_A^\alpha + \psi_E^\alpha) - (\psi_B^\alpha + \psi_D^\alpha) = 0 \quad (3.123)$$

$$(3.124)$$

El resultado de la tercera condición es positivo también. Hemos podido comprobar que la solución obtenida cumple con las tres condiciones necesarias, cumple la ecuación de ondas, es cero en su contorno y es continua. Por lo tanto, podemos concluir que toda solución en la región  $D_1$  es también solución en la región  $D_2$ .

Vamos a comprobar, para finalizar, que la afirmación se cumple también a la inversa, esto quiere decir que toda solución en la región  $D_2$  es también solución en la región  $D_1$ . Si esta afirmación es cierta, deberíamos ser capaces de calcular la matriz inversa de la obtenida en el apartado anterior. Si es posible calcular la matriz inversa significará que es posible calcular la vibración de la membrana en  $D_1$  a partir de las ecuaciones de ondas de los triángulos de la región  $D_2$ .

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Hemos obtenido la matriz inversa a partir del método de eliminación gaussiana. Con este resultado podemos concluir que ambas membranas son isoespectrales, esto quiere decir que son capaces de vibrar a la misma frecuencia, siendo así imposible distinguir su forma partiendo únicamente de sus espectros de frecuencias, esto es, el sonido que emiten.



# Capítulo 4

## Conclusiones

### 4.1. Dimensión uno

Dedicamos este último capítulo a recopilar el trabajo realizado durante este Trabajo de Fin de Grado.

En primer lugar hemos estudiamos el caso de una cuerda sujeta por ambos extremos, buscando las soluciones de

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{4.1}$$

y forzando a que la cuerda cumpliera las condiciones de contorno de Dirichlet. Cada una de los modos normales obtenidos  $X_k$  define uno de los autoestados para el problema de autovalores considerado, asociado al autovalor  $\lambda_k$ .

Lo más destacable del análisis, era darse cuenta de que cada uno de estos autovalores definía la velocidad de vibración de la cuerda. El tono que se escucha cuando se toca un instrumento está relacionado con la velocidad a la que se hace vibrar el aire y, por lo tanto, la velocidad de vibración de la cuerda. La vibración que produce la cuerda es una combinación de cada uno de los modos normales de vibración.

La cuerda viene caracterizada por una serie de tonos puros (o modos fundamentales) que son los que le permiten obtener los diferentes sonidos. Esto es así porque los autovalores de  $X'' = -\lambda X$  define los tonos fundamentales que puede producir la cuerda y, viceversa, los tonos que produce la cuerda te permite conocer los autovalores. El conjunto de estos autovalores se conoce como el espectro de frecuencias.

#### 4.1.1. ¿Es posible escuchar la longitud de una cuerda?

Hicimos vibrar la cuerda de una guitarra y obtuvimos el espectro de la cuerda gracias a un analizador de frecuencias. Observamos que el sonido que producía era una combinación de los tonos puros que la cuerda era capaz de producir. Una vez conseguidos estos resultados, replanteamos la pregunta, ¿conociendo el espectro de la cuerda, es posible obtener su longitud?

Asumamos que uno es capaz de saber cómo varían los autovalores, gracias a un analizador de frecuencias, cuando cambia la longitud de la cuerda. Las autofunciones  $X_k$  tenían que cumplir que en ambos extremos de la cuerda su valor fuese cero, y esto únicamente sucedía cuando su frecuencia venía dada por  $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$ . Esto significa que sí que es posible obtener la longitud de la cuerda. Sabiendo que el autovalor más bajo corresponde al primer modo de vibración, la única incógnita de la ecuación sería su longitud.

En el caso unidimensional, la respuesta al problema es afirmativa: somos capaces de escuchar la longitud de una cuerda.

## 4.2. Dimensión dos

Al igual que en el caso de una cuerda, la vibración de la membrana también se rige por una ecuación diferencial. La función  $f(x, y, t)$  que define la posición de cada punto de la membrana en cada instante se complica por el hecho de que ahora la solución depende de dos parámetros de posición  $(x, y)$ . La ecuación diferencial se escribe de la forma,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f \quad (4.2)$$

donde el primer término expresa la aceleración vertical de la membrana y el segundo término es el Laplaciano de  $f$ . Para el caso bidimensional, podemos expresar el Laplaciano como

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (4.3)$$

Vemos que el Laplaciano es similar al que teníamos en una dimensión. La cantidad  $\Delta f$  define cuánto se dobla la membrana en las direcciones  $x$  e  $y$ .

Al igual que ocurría para la cuerda vibrante, las soluciones de la membrana vibrante es una combinación de muchas posibles soluciones. Para hallar estas soluciones, buscamos, una vez más, las soluciones al problema

$$f''(t) = \lambda f \quad (4.4)$$

La solución de esta ecuación, ya la vimos en el caso unidimensional.

La frecuencia de la vibración, o lo que es lo mismo, el tono producido por la membrana, se rige por el valor de  $\lambda$ , y verifica que cuanto mayor sea el valor de  $\lambda$ , mayor será su frecuencia y mayor su tono.

Buscamos las soluciones de

$$\Delta \Phi = \lambda \Phi \quad (4.5)$$

para encontrar las posiciones iniciales que puede satisfacer la membrana y buscamos de nuevo los valores de los autovalores. El Laplaciano transforma nuestra función  $\Phi$  en otra función nueva. Normalmente, esta nueva función  $\Delta \Phi$ , poco tiene que ver con la función original  $\Phi$ , pero buscamos las funciones, para las cuales esta transformación escale la función original por una constante  $\lambda$ . Para una membrana rectangular el problema resulta no ser muy complicado. Las autofunciones que son solución, son productos de funciones sinusoidales, unas en dirección  $x$  y las otras en dirección  $y$ .

Por ejemplo, una placa cuadrada de longitud  $\pi$ , tenemos que la forma inicial  $f(x, y, 0) = \sin(2x) \sin(3y)$ , es una autofunción, cuyo autovalor de es  $\lambda = -2^2 - 3^2 = -13$ .

Para el caso de membranas circulares, y ciertas geometrías triangulares, también somos capaces de obtener sus soluciones explícitas. El problema es que para geometrías más complejas no se tiene el conocimiento suficiente como para calcular sus autovalores y autofunciones. Afortunadamente, el problema que tratamos de resolver no es el de obtener los autovalores y autofunciones.

### 4.2.1. ¿Podemos escuchar la forma de un tambor?

Esta pregunta es equivalente a: ¿somos capaces de reconstruir la forma de una membrana, conociendo su espectro? Desde hace un tiempo se sabe que a partir del espectro podemos obtener mucha información. La más evidente, es la de darse cuenta de que un tambor produce tonos más bajos cuanto mayor sea su área. Sin embargo, en el caso de una membrana, el modo fundamental de vibración no es suficiente para obtener su área.

Para obtener más información deberemos mirar los autovalores en conjunto. Observemos el caso de la cuerda vibrante. Una cuerda vibrante de longitud  $L = \pi$ , produce un espectro de  $\{1, 4, 9, \dots\}$ . Para una

cuerda de longitud  $L = 2\pi$  obtenemos un espectro de  $\{\frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, \dots\}$ . Vemos que para el caso de la cuerda de longitud  $2\pi$ , los autovalores están más agrupados. Esto quiere decir que para cierto valor  $R$ , la cuerda de longitud  $2\pi$  tiene más autovalores entre 0 y  $R$  que la cuerda de longitud  $\pi$ .

Este concepto también se puede aplicar a una membrana vibrante. Supongamos que conocemos el espectro completo de una membrana. Sería posible contar la cantidad de autovalores que tiene ese espectro entre 0 y  $R$  para cualquier valor de  $R$ . Definimos el número de autovalores menores que  $R$ , como  $N(R)$ . A medida que aumentamos el valor de  $R$ , aumenta el valor de  $N(R)$ . Lo interesante es comprobar el ritmo al que crece el número de autovalores. Hermann Weyl comprobó en el año 1911 que, para una membrana, el valor  $N(R)$  crecerá de forma (aproximadamente) lineal. Y no sólo eso, también comprobó que la pendiente de esa línea, estaba unívocamente determinada por el área de la membrana.

En efecto, esta pendiente puede obtenerse como  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R}$ . Una vez calculada esta pendiente, se puede obtener el área de la membrana a partir de la expresión

$$A = 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R} \quad (4.6)$$

De esta forma Weyl pudo calcular el área de una membrana a partir de su espectro. Sin embargo, el área de una membrana no define el perímetro de la misma. Aún así, sí que es posible obtener más información a partir del espectro.

Weyl demostró que  $N(R) \approx \frac{A}{4\pi}R$ . Pero podemos ser todavía más precisos que eso. Observamos que  $N(R) - \frac{A}{4\pi}R$ , es un múltiplo de la función  $\sqrt{R}$ , y una vez más podemos obtener información sobre la forma de la membrana. Weyl se atrevió a conjeturar, de forma correcta como se vio en el año 1980, que

$$N(R) - \frac{A}{4\pi}R \approx \frac{P}{4\pi}\sqrt{R}, \quad (4.7)$$

donde  $P$  corresponde al perímetro de la membrana. Así podemos obtener que

$$P = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi N(R) - AR}{\sqrt{R}} \quad (4.8)$$

Concluimos, por tanto, que es posible obtener el área y el perímetro de la membrana a través del análisis del espectro.

Esto significa que sí que sería posible en teoría diferenciar entre un tambor cuadrado y un tambor circular, comprobando su relación entre radio y perímetro.

A pesar de que hasta el momento todo parece indicar que será posible escuchar la forma un tambor, hemos de recordar el contraejemplo estudiado anteriormente. Estudiamos el caso de dos tambores que, sin tener la misma, forma producían el mismo espectro. Podemos comprobar que estos resultados son compatibles con los que acabamos de ver. Ambos tambores tienen el mismo espectro, ya que también tienen en común su área y perímetro.

Podemos así afirmar que **no** es posible escuchar la forma de un tambor. No obstante, el trabajo de Steve Zelditch, famoso matemático americano, ha demostrado que si asumimos que la membrana vibrante es convexa, no tiene agujeros, los bordes no tienen esquinas y que la membrana tiene al menos un eje de simetría, sí que es posible escuchar la forma de la membrana, o lo que es lo mismo, podemos reconstruir la forma de la membrana a partir de su espectro.



## Apéndice A

# Ortogonalidad de la función seno

Partimos de las siguientes funciones:

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{C}\right) \quad (\text{A.1})$$

$$f_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{C}\right) \quad (\text{A.2})$$

vamos a verificar que para  $k, n \in \mathbb{Z}$ , el resultado de la integral

$$\int_{-C}^C \sin\left(\frac{n\pi x}{C}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{C}\right) dx \quad (\text{A.3})$$

es cero cuando  $n \neq k$  y diferente de cero para  $n = k$ .

En tal caso, podremos decir que el conjunto de funciones  $f(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{C}\right)$  es ortogonal. Conociendo las siguientes identidades trigonométricas

$$\cos(X + Y) = \cos X \cos Y - \sin X \sin Y \quad (\text{A.4})$$

$$\cos(X - Y) = \cos X \cos Y + \sin X \sin Y \quad (\text{A.5})$$

Restamos la primera ecuación a la segunda para obtener:

$$\cos(X - Y) - \cos(X + Y) = 2 \sin(X) \sin(Y) \quad (\text{A.6})$$

Tomamos el siguiente cambio de variables

$$A = X + Y \quad (\text{A.7})$$

$$B = X - Y \quad (\text{A.8})$$

e introducimos en la ecuación anterior

$$\cos(B) - \cos(A) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (\text{A.9})$$

Reemplazando este resultado en

$$\frac{1}{2} \int_{-C}^C 2 \sin\left(\frac{n\pi x}{C}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{C}\right) dx \quad (\text{A.10})$$

Obtenemos que

$$\frac{A+B}{2} = \frac{n\pi x}{C} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{A-B}{2} = \frac{k\pi x}{C} \quad (\text{A.12})$$

Resolvemos este sistema de dos ecuaciones, obteniendo

$$A = (k + n) \frac{\pi x}{C} \quad (\text{A.13})$$

$$B = (n - k) \frac{\pi x}{C} \quad (\text{A.14})$$

Reemplazando esto en la ecuación podemos reescribir la integral de la forma

$$\frac{1}{2} \left( \int_{-C}^C \cos \left( (n - k) \frac{\pi x}{C} \right) dx - \int_{-C}^C \cos \left( (k + n) \frac{\pi x}{C} \right) dx \right) \quad (\text{A.15})$$

Con el resultado anterior podemos resolver cada una de las integrales por separado. El valor de cada una de las integrales será de cero, puesto que se evalúan entre  $-C$  y  $C$ . Por lo tanto el valor de la integral será igual a cero.

Sin embargo para el caso de que  $k = n$ , la integral que estamos resolviendo es

$$\int_{-C}^C \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{C} \right) dx \quad (\text{A.16})$$

La cual tiene como resultado

$$\int_{-C}^C \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{C} \right) dx = C \quad (\text{A.17})$$

## Apéndice B

# Laplaciano en coordenadas polares

Es necesario el cálculo del operador laplaciano en coordenadas para el caso de la membrana circular. Conocemos el operador laplaciano en coordenadas cartesianas:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{B.1})$$

Al cambiar de variables tenemos que

$$x = r \cos(\theta) \quad (\text{B.2})$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (\text{B.3})$$

$$\theta = \frac{y}{x} \quad (\text{B.4})$$

A partir de la regla de la cadena podemos calcular

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{B.6})$$

$$(\text{B.7})$$

$$(\text{B.8})$$

Continuando con estos resultados obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{r} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \frac{\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{B.10})$$

$$(\text{B.11})$$

Sumando estas últimas dos ecuaciones llegamos al resultado del laplaciano de  $u$  en coordenadas polares:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (\text{B.12})$$



## Apéndice C

# Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es la transformación matemática que se emplea para transformar señales entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia. Esta transformación es reversible, lo cual significa que es posible pasar de uno de cualquiera de los dominios al otro. Para nuestro caso, se emplea para transformar el sonido de una cuerda/membrana al dominio de la frecuencia.

La transformada de una función se define como

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (\text{C.1})$$

Podemos calcular la transformada de la función  $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{C.2})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \right) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{C.3})$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i(\omega-\omega_0)t} - e^{-i(\omega+\omega_0)t}) dt \quad (\text{C.4})$$

$$F(\omega) = i\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)) \quad (\text{C.5})$$

Calculamos ahora la transformada de la función  $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{C.6})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{C.7})$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}) dt \quad (\text{C.8})$$

$$F(\omega) = \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)) \quad (\text{C.9})$$

Dentro de las propiedades básicas de la transformada de Fourier, cabe destacar la aplicación lineal de la transformada

$$F(af + bg) = aF(f) + bF(g) \quad (\text{C.10})$$

### C.1. Transformada de Fourier de la función delta de Dirac $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{C.12})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a) \quad (\text{C.13})$$

Vamos a considerar la función  $\delta(t)$  como una función de Gauss con un parámetro  $\sigma$  tiende a cero

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{C.14})$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f(t, \sigma) = \delta(t) \quad (\text{C.15})$$

Calculamos ahora la transformada inversa de la función  $\delta(t)$

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (\text{C.16})$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) dt = \exp(-i\omega_0 t) \int_{-\omega_0^+}^{\omega_0^-} \delta(\omega - \omega_0) dt = \exp(-i\omega_0 t) \quad (\text{C.17})$$

$F(\omega)$  tiene cero para cualquier valor de  $\omega$ , salvo cuando  $\omega = \omega_0$ . La integral de la función  $\delta(\omega - \omega_0)$  vale 1.

Sabiendo que

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \left( \exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t) \right) \quad (\text{C.18})$$

la transformada de Fourier es

$$F(\omega) = \pi \left( \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right) \quad (\text{C.19})$$

# Bibliografía

- [1] Coimbra G., E. (2011). Análisis espectral en MATLAB. Retrieved from <https://es.slideshare.net/ABEL170/analisis-espectral-en-matlab-7757614>
- [2] eFundu. (2017). Sturm-Liouville boundary value problem. Retrieved from [http://www.efunda.com/math/ode/sturm\\_liouville.cfm](http://www.efunda.com/math/ode/sturm_liouville.cfm)
- [3] Franco García, Á. (2016). Movimiento ondulatorio. Modos de vibración de una membrana circular. Retrieved from <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/ondas/membrana/membrana.html>
- [4] Franco García, Á. (2016). Movimiento ondulatorio. Modos de vibración de una membrana rectangular. Retrieved from [http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/ondas/membrana\\_1/membrana\\_1.html](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/ondas/membrana_1/membrana_1.html)
- [5] Ginestar Peiró, D. (2009). Modelos en EDPs. Retrieved from <http://personales.upv.es/dginesta/docencia/posgrado/modelos.pdf>
- [6] Giraud, O., and Thas, K. (2010). Hearing shapes of drums – mathematical and physical aspects of isospectrality. [Escuchando las formas de los tambores - aspectos matemáticos y físicos de la iso-espectralidad] *Reviews of Modern Physics*, 82(3), 2213. doi:10.1103/RevModPhys.82.2213
- [7] Gordon, C., and Webb, D. (1996). You can't hear the shape of a drum. [No se puede escuchar la forma de un tambor] *American Scientist*, 84, 46.
- [8] Gordon, C., Webb, D., and Wolpert, S. (1992). One cannot hear the shape of a drum. [No se puede escuchar la forma de un tambor] *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1).
- [9] Gorostizaga, J. C. (2015). Integrales dobles y triples. Retrieved from [http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/mateII15/T\\_integrales23v/integrales23v.htm](http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/mateII15/T_integrales23v/integrales23v.htm)
- [10] Heilman, S. M. (2009). Hearing the shape of a drum: Recent results. Retrieved from <http://www.math.ucla.edu/~heilman/papers/Zelditch-%20ExposV3.pdf>
- [11] Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum? [¿Se puede escuchar la forma de un tambor?] *American Mathematical Monthly*, 73(4), [https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload\\_library/22/Ford/MarkKac.pdf](https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/MarkKac.pdf). doi:10.2307/2313748
- [12] Liu, C. (2015). Can we hear the shape of a drum? Retrieved from <https://www.comsol.com/blogs/can-we-hear-the-shape-of-a-drum/>
- [13] Lu, Z., and Rowlett, J. M. (2015). One can hear the corners of a drum. [Se pueden escuchar las esquinas de un tambor] *London Mathematical Society*, 48(1), 85-93. doi:10.1112/blms/bdv094
- [14] Moler, C. (2012). Can one hear the shape of a drum? Part 2, Eigenfunctions. Retrieved from <https://blogs.mathworks.com/cleve/2012/08/13/can-one-hear-the-shape-of-a-drum-part-2-eigenfunct>

- [15] Navarro de Carvalho, L. (2005). ¿Podemos oír la forma de un tambor? Retrieved from <http://www.cimat.mx/~gonzalo/drum/html/leo/doc.html>
- [16] Noonburg, V. (2008). A Vibrating Circular Drumhead. Retrieved from <http://uhaweb.hartford.edu/NOONBURG/m344lecture19.pdf>
- [17] Rolon, S. (2015). Problemas de valores en la frontera en otros sistemas coordenados. Retrieved from <https://documents.tips/documents/problemas-de-valores-en-la-frontera-en-otros-sistemas-coordenados>
- [18] Simeone, C. (2015). Matemática especial para la física. Principios variacionales. Retrieved from <http://materias.df.uba.ar/temasfma2015c1/files/2012/07/Apunte1.pdf>
- [19] Soto Garay, C. J. (2017). Ortogonalidad y series de Fourier. Retrieved from <http://www.monografias.com/trabajos89/ortogonalidad-y-series-fourier/ortogonalidad-y-series-fourier>
- [20] Weisstein, E. W. (2017). Bessel function. MathWorld - A Wolfram Web Resource. Retrieved from <http://mathworld.wolfram.com/BesselFunction.html>
- [21] Zill, D. G., and Cullen, M. R. (2009). Funciones ortogonales y series de Fourier. In Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera. (Séptima ed., pp. 397). México D.F.: Cengage Learning.