



TESIS DOCTORAL

**Caracterización térmica y de defectos
en materiales compuestos
mediante imagen infrarroja**

**MODELIZACIÓN FÍSICA, SISTEMA EXPERIMENTAL
Y TÉCNICAS DE REDUCCIÓN DE DATOS**

Autora:

Celeste Beatriz Justo María

Directores:

*Juan Meléndez Sánchez
Fernando López Martínez*

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

21 de junio de 2018

TESIS DOCTORAL

**Caracterización térmica y de defectos
en materiales compuestos
mediante imagen infrarroja**

**MODELIZACIÓN FÍSICA, SISTEMA EXPERIMENTAL
Y TÉCNICAS DE REDUCCIÓN DE DATOS**

Autora: Celeste Beatriz Justo María

Directores:

*Juan Meléndez Sánchez
Fernando López Martínez*

Firma del Tribunal Calificador

Firma

Presidente:

Vocal:

Secretario:

Calificación:

Leganés, de de

Resumen

El objetivo general de esta tesis ha sido explorar la potencialidad de las técnicas de termografía activa para proporcionar una caracterización cuantitativa de materiales de interés aeronáutico; en concreto, de materiales compuestos con refuerzo de fibra de carbono (CFRP).

La termografía activa es un conjunto de técnicas de análisis no destructivo basadas en el estudio de la respuesta de una muestra a una excitación térmica. Son técnicas conocidas hace tiempo, pero que a menudo se utilizan de modo empírico sin una adecuada fundamentación científica, lo que hace incierta su generalización más allá de los casos convencionales.

Por eso un primer objetivo parcial ha sido proporcionar esa fundamentación, sintetizando bibliografía dispersa y desarrollando un modelo térmico unidimensional (1D) y un método para su resolución (basado en la transformada de Laplace). Ambos proporcionan un marco unificado, tanto para deducir resultados ya conocidos para muestras planas sin pérdidas térmicas (como la determinación de la difusividad térmica α por excitación con un flash) como para obtener otros nuevos cuando las pérdidas son importantes. Debido a su baja conductividad térmica, este es el caso de los CFRP.

Este problema se aborda primero usando soluciones aproximadas a la ecuación del calor para obtener α a partir de la evolución de la temperatura $T(t)$ en los primeros segundos tras el flash, cuando el efecto de la convección aún es muy pequeño. Después se usa la solución exacta 1D para ajustar $T(t)$ a lo largo de todo el experimento, obteniendo además de α el número de Biot, Bi . Este *método flash adaptado* permite también, si se conoce la densidad de energía del flash, obtener los valores de calor específico volumétrico ρc_p y conductividad térmica κ .

Las limitaciones del modelo 1D se estudian también empleando el método de elementos finitos, que permite simular el comportamiento de muestras tridimensionales, aunque con un coste computacional enormemente mayor.

El método flash, estudiado hasta aquí, tiene el inconveniente de que la excitación puede ser insuficiente para obtener un buen nivel de señal en muestras gruesas. Una alternativa que puede superar esta limitación es el método escalón (*step heating*), que consiste en la excitación con una fuente luminosa de baja potencia, nominalmente constante, con la que conseguir mayor señal sin dañar la muestra. En la práctica, sin embargo, la forma

exacta de la función de excitación no suele conocerse, lo que impide un análisis cuantitativo con los métodos estándar. Este inconveniente se ha superado usando como entrada al modelo no el flujo incidente sino la temperatura de la cara caliente, lo que es posible gracias a la resolución por transformada de Laplace. El método ha requerido la puesta a punto de un sistema de medida (desarrollado inicialmente para el estudio de materiales compuestos sometidos a fuego) que consiste en dos cámaras infrarrojas que miden ambas caras de una muestra plana durante toda la duración del ensayo, proporcionando mapas espacialmente corregistrados y temporalmente sincronizados de la evolución temporal de la temperatura.

Una vez caracterizado térmicamente el material, a partir de las respuestas en temperatura de las dos caras se ha podido determinar la forma y la potencia de la excitación, resolviendo lo que se conoce como *problema inverso* mediante técnicas de regularización. Una vez calibrada la excitación se puede trabajar con una sola cámara, así como obtener ρc_p y κ .

La caracterización cuantitativa alcanza su máximo potencial cuando se aplica a toda la imagen, pero dada la gran resolución de las cámaras actuales, se hace necesario agilizar el proceso de recuperación de parámetros térmicos. Con este objetivo, se ha simulado la respuesta térmica a un flash para un conjunto de valores de α y Bi , y mediante el método estadístico de las componentes principales se ha podido codificar perfiles $T(t)$ de 2000 puntos por únicamente tres valores, lo que hace que los tiempos de computación se reduzcan drásticamente; además, al tener una matriz de perfiles de evolución temporal pre-calculada, deja de ser un problema iterativo, ganando más aún en rapidez. El cálculo rápido de los parámetros térmicos para toda una imagen permite aplicar esta metodología para caracterizar y detectar defectos. Se ha aplicado a muestras reales y comparado con cálculos mediante software comercial de elementos finitos, obteniendo resultados satisfactorios.

Finalmente, dado que este método, tal como está planteado originalmente, sólo puede devolver resultados de α y Bi de entre los valores discretos para los que se han precalculado los perfiles de temperatura, se ha puesto a punto una función que supera esta limitación proporcionando valores continuos de los parámetros térmicos mediante un ajuste polinómico cuyas variables independientes son las componentes principales del perfil experimental de temperaturas.

Abstract

The general objective of this thesis has been to explore the potential of active thermography techniques to provide a quantitative characterization of materials of aeronautical interest; in particular, of carbon fiber reinforced composite materials (CFRP).

Active thermography is a set of non-destructive analysis techniques based on the study of the response of a sample to thermal excitation. These techniques have been known for a long time, but they are often used empirically without adequate scientific base, which makes their generalization uncertain beyond conventional cases.

Consequently, a first partial objective has been to provide this foundation, synthesizing scattered knowledge and developing a one-dimensional thermal model (1D) and to derive a new a method for its resolution, based on the Laplace transform. Both provide a unified framework that deduces known results for flat samples without thermal losses (such as the determination of thermal diffusivity α by flash excitation) as well as extend to new ones when the convection losses are significant. Due to their low thermal conductivity, this is the case of CFRP.

This problem is to be first addressed using approximate solutions to the heat equation to obtain α from the evolution of the temperature $T(t)$ in the first few seconds after flash, when the effect of convection is still very small. The exact 1D solution is then used to adjust $T(t)$ throughout the whole experiment, obtaining α along with the number of Biot, Bi . This adapted flash method also allows, if the energy density of the flash is known, to obtain simultaneously in the same experiment the values of volumetric specific heat ρc_p and thermal conductivity κ .

The limitations of the 1D model are also studied using the finite element method, which allows the behaviour of three-dimensional samples to be simulated, at a much higher computational cost, though. The flash method, as to this point, has the disadvantage that the excitation may be insufficient to obtain a good signal level in coarse samples. An alternative that can overcome this limitation is the step heating method, which consists in excitation with a low power light source, nominally constant, with which to get more energy along the time without damaging the sample.

In practice, however, the exact shape of the excitation function is often not known, which prevents a quantitative analysis with the standard methods. This disadvantage has been overcome by using as input to the model not the incident flow but the temperature of

the hot face, which is possible thanks to Laplace's transform resolution. The method has required the development of a measurement system (initially developed for the study of composite materials exposed to fire) consisting of two infrared cameras that measure both sides of a flat sample throughout the duration of the test, providing spatially coregistered and temporarily synchronized maps of the temporal evolution of temperature.

Once the material has been thermally characterized, the shape and power of the excitation can be determined from the temperature responses of the two sides, solving what is known as the inverse problem by means of regularization techniques. Once the excitation has been calibrated it is possible to work with a single camera, as well as obtaining ρc_p and κ .

Quantitative characterization reaches its maximum potential when applied to the entire image, but given the high resolution of the current cameras, it is necessary to speed up the process of recovering thermal parameters. With this objective in mind, the thermal response to a flash has been simulated for a set of values of α and Bi , and by means of the statistical method of the main components it has been possible to code 2000 point $T(t)$ profiles for only three values, which reduces the computation times drastically; besides, by having a pre-calculated matrix of time evolution profiles, it is no longer an iterative problem, gaining even more speed. The rapid calculation of the thermal parameters for an entire image allows to apply this methodology to characterize and detect defects. It has been applied to real samples and compared with calculations using commercial finite element software, obtaining satisfactory results.

Finally, since this method, as it was originally proposed, can only return results from α and Bi from among the discrete values for which the temperature profiles have been pre-calculated, a function has been developed that overcomes this limitation by providing continuous values of the thermal parameters through a polynomial adjustment whose independent variables are the principal components of the experimental temperature profile.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Índice	V
1. Motivación y planteamiento	1
1.1. Objetivos y planteamiento del trabajo	2
1.1.1. Objetivos	2
1.1.2. Planteamiento	3
1.2. Trabajos realizados	5
1.3. Metodología y estructura de la tesis doctoral	6
I INTRODUCCIÓN	9
2. Introducción al infrarrojo	11
2.1. El espectro infrarrojo	11
2.1.1. Regiones del espectro electromagnético	13
2.2. Introducción a la emisión térmica	14
2.2.1. Radiancia, exitancia e irradiancia	14
2.2.2. Concepto de cuerpo negro	16
2.2.3. Ley de Planck	18
2.2.3.1. Ley de Wien. Ley de Stefan-Boltzmann	19
2.2.4. Absortancia, reflectancia y transmitancia	21
3. Estado del arte: detectores, termografía y NDT-IR	23
3.1. Introducción	23
3.2. Detectores Infrarrojos	24
3.2.1. Evolución histórica de la tecnología IR	25
3.2.2. Detectores térmicos y detectores cuánticos	26
3.2.3. Estado del arte	28
3.2.4. Rendimiento de los detectores	28

3.3.	Termografía IR	32
3.3.1.	Planteamiento del problema	32
3.3.2.	Función de calibrado	35
3.4.	Introducción al análisis no destructivo	36
3.4.1.	Principales técnicas de NDT	38
3.5.	NDT mediante termografía IR	38
3.5.1.	Termografía pasiva	38
3.5.2.	Termografía activa	39
3.5.3.	Tipos de excitación térmica en termografía activa	40
4.	Transmisión del calor. Teoría y sols. aprox.	45
4.1.	Transmisión de calor por conducción	45
4.2.	Transmisión de calor por convección	48
4.2.1.	Ley de enfriamiento de Newton	48
4.3.	Transmisión de calor por radiación	49
4.4.	Dos casos sencillos	51
4.4.1.	Caso estacionario	51
4.4.2.	Aproximación de “capacidad térmica global”	53
4.5.	Conclusiones	56
5.	Transmisión del calor. Sols. exactas 1D	57
5.1.	Introducción	57
5.2.	Solución de la ecuación del calor unidimensional	58
5.2.1.	Condiciones de contorno: flujo conocido en una cara	59
5.2.2.	Solución mediante transformada de Laplace	59
5.2.3.	Relación con la teoría de sistemas lineales	61
5.3.	Caso de sólido semi-infinito	62
5.3.1.	Sólido semi-infinito: función de transferencia	62
5.3.2.	Sólido semi-infinito: función de respuesta a impulso	63
5.3.2.1.	Convección despreciable	63
5.3.2.2.	Cara delantera	64
5.4.	Caso de placa de espesor finito	65
5.4.1.	Placa finita: caso de convección despreciable	66
5.4.1.1.	Placa finita: convección despreciable, cara delantera	68
5.4.1.2.	Placa finita: convección despreciable, cara trasera	69
5.4.1.3.	Cara trasera y cara delantera: comparación de resultados	70
5.4.2.	Placa finita: convección no despreciable	71
5.4.2.1.	Comparación con el caso sin convección	72

5.4.2.2. Comparación de los efectos de α y Bi	73
5.5. Solución numérica de la ecuación del calor	74
5.6. Caso de excitación arbitraria	76
5.7. Caso de temperatura conocida en una cara	77
5.7.1. Función de transferencia entre temperaturas de cara delantera y trasera	78
5.8. Conclusiones	79
II CARACTERIZACIÓN TÉRMICA	81
6. Termografía pulsada: métodos aproximados	83
6.1. Introducción	83
6.2. Aproximación analítica despreciando las pérdidas	85
6.2.1. Cara delantera	86
6.2.1.1. Aplicación a la detección de defectos y la obtención de α .	87
6.2.1.2. Resultados experimentales	88
6.2.2. Cara trasera	92
6.2.2.1. Aplicación a la medida de α . Resultados experimentales . .	93
6.3. Aproximación analítica sin despreciar las pérdidas	94
6.3.1. Descomposición en fracciones simples	95
6.4. Conclusiones	99
7. Termografía pulsada: sols. exactas	101
7.1. Modelo completo de las pérdidas: Cara delantera	101
7.1.1. Resultados experimentales	102
7.2. Modelo completo de las pérdidas: Cara trasera	103
7.2.1. Errores sistemáticos en ajustes sin convección	104
7.2.2. Obtención de difusividad térmica y número de Biot	106
7.2.3. Cálculo del calor específico volumétrico, conductividad térmica y coeficiente de transferencia de calor	107
7.2.4. Corrección de la temperatura máxima: otro punto de vista	109
7.3. Cara trasera: resultados experimentales	112
7.3.1. Resultados experimentales: Modelo 1D	112
7.3.2. Efectos tridimensionales: estudio cualitativo	113
7.3.3. Modelo tridimensional de elementos finitos	114
7.4. Conclusiones	118

8. Método escalón	119
8.1. Introducción al calentamiento escalón	119
8.2. Modelización del calentamiento escalón	120
8.2.1. Convección despreciable	120
8.2.2. Convección no despreciable	121
8.2.2.1. Discusión: efectos de la convección	122
8.3. El problema del calentamiento no ideal	124
8.4. Sistema experimental para la excitación escalón	127
8.5. Ajuste en el estado estacionario	129
8.5.1. Puesta a punto	129
8.5.2. Datos experimentales en CFRP	131
8.5.2.1. Método flash adaptado	131
8.5.2.2. Caracterización a partir del método escalón	133
8.5.2.3. Resumen de los parámetros térmicos obtenidos para el CFRP por los distintos métodos utilizados	138
8.6. Conclusiones	139
9. Potencia de la excitación	141
9.1. Introducción	141
9.2. Planteamiento del problema inverso	142
9.2.1. Deconvolución: idea intuitiva	143
9.2.2. Inestabilidad numérica	144
9.3. Descomposición en valores singulares (SVD)	146
9.3.1. Enunciado de la SVD	147
9.3.2. SVD y sistemas de ecuaciones lineales	148
9.3.3. Resultados obtenidos con la SVD	149
9.4. Regularización.	151
9.4.1. Resultados obtenidos con la regularización	152
9.5. Conclusiones	156
 III MÉTODOS ESTADÍSTICOS	 157
10. Componentes principales	159
10.1. Introducción	159
10.2. Principios básicos del PCA	160
10.3. PCA para detección de defectos	162
10.3.1. Cara delantera	164

10.3.2. Cara trasera	167
10.4. PCA para caracterización térmica	170
10.5. Resultados experimentales	175
10.5.1. Muestra homogénea	175
10.5.2. Muestra con inclusiones	176
10.5.3. Muestra sometida a fuego	179
10.6. Conclusiones	180
11. Ajuste multivariable	183
11.1. Casos de estudio	183
11.1.1. Ajuste multivariable con dos componentes principales	184
11.1.2. Ajuste multivariable con tres componentes principales	185
11.1.3. Aplicación del ajuste multivariable	187
11.2. Validación con un modelo 3D	189
11.2.1. Material homogéneo 3D	189
11.2.2. Material inhomogéneo con excitación flash uniforme	191
11.3. Simulación 3D de probeta con inclusiones	193
11.4. Conclusiones	194
IV CONCLUSIONES	197
12. Resumen y conclusiones	199
V APÉNDICES	209
A. Calibración de sistemas de imagen IR	211
A.1. Calibración estándar	212
A.1.1. Calibración de la cámara	212
A.1.2. Relación radiancia-temperatura	213
A.2. Calibración: no idealidades	216
A.2.1. Comprobación de la calibración en imágenes simuladas	220
A.2.2. Comprobación de la calibración en imágenes experimentales	226
Curriculum Vitæ y Contribuciones	235
Glosario de términos	239
Bibliografía	241

Motivación y planteamiento

Desde que el primer vuelo de los hermanos Wright en 1903 diera lugar a la aviación hasta el día de hoy, en el que se ha convertido en un medio de transporte común, los materiales de construcción de las aeronaves han sido un factor clave en la evolución de esta industria, desde la madera y el metal hasta llegar a los materiales compuestos.

Un material compuesto es aquel formado por al menos dos materiales distintos, sin que se haya producido ninguna reacción química entre ellos, sino que se unen a través de un ligante, consiguiendo con ello propiedades que sería imposible que tuvieran por separado. Dentro de la industria aeronáutica se usan principalmente dos tipos de materiales compuestos diferentes atendiendo al tipo de refuerzo que utilizan: los que emplean fibra de vidrio (*GFRP*, del inglés *Glass Fiber Reinforced Polymers*) o los que emplean fibra de carbono (*CFRP*, del inglés *Carbon Fiber Reinforced Polymers*).

La creciente demanda y la continua creación de nuevos materiales hace indispensable su completa caracterización, para un correcto entendimiento de su comportamiento en diferentes condiciones de operación. Esto es particularmente cierto para materiales compuestos tales como los CFRP que serán el objeto de estudio a lo largo de esta tesis, ya que sus propiedades pueden tener un amplio margen de variación de un espécimen a otro, y depender fuertemente de la temperatura, presencia de defectos, etc.

La caracterización térmica de los CFRP, es decir, la determinación de parámetros como la difusividad térmica α , el calor específico c_p o la conductividad térmica κ , es especialmente importante porque el valor de estos parámetros condiciona la respuesta del material en circunstancias críticas, como la resistencia al fuego. Esta caracterización puede llevarse a cabo mediante métodos clásicos, como la termogravimetría o la calorimetría diferencial de barrido, pero la mayoría de ellos requieren muestras pequeñas y son, normalmente, destructivos, dañando el espécimen [66]. Una alternativa muy atractiva, por tratarse de un método no destructivo, sin contacto y que además proporciona información espacial, es la termografía activa, en la que la muestra es excitada, y con la ayuda de una cámara infrarroja se registra la evolución de su temperatura. Esta evolución está directamente relacionada con los parámetros térmicos, que pueden, por tanto, ser recu-

perados con un análisis apropiado. La misma técnica proporciona además información cualitativa sobre defectos, permitiendo inspeccionar áreas grandes con una excelente relación coste-eficacia gracias al uso de la imagen.

El análisis no destructivo infrarrojo tiene un marcado carácter interdisciplinar pues surge de la simbiosis entre la tecnología de la imagen infrarroja y la ciencia de la transferencia de calor que rige el comportamiento térmico. Además, las cámaras IR actuales presentan cada vez mayor resolución espacial y temporal, lo que lleva a manejar volúmenes de datos más y más elevados que requieren de herramientas provenientes del campo de la estadística para su explotación adecuada. Como veremos, esta variedad de campos interrelacionados tiene su reflejo en la presente memoria.

1.1. Objetivos y planteamiento del trabajo

1.1.1. Objetivos

En consonancia con las exigencias de diseñadores y fabricantes de materiales compuestos, el objetivo general que ha guiado el desarrollo de la investigación en este trabajo ha sido la puesta a punto de un método de análisis no destructivo infrarrojo de **caracterización térmica** por termografía activa apropiado para materiales CFRP (lo que requiere tener en cuenta las pérdidas por convección), que, junto a técnicas de estadísticas apropiadas permita **reducir la alta dimensionalidad y el elevado volumen de datos**, para la implantación de estas técnicas en ambientes industriales reales. Más específicamente nos hemos centrado en:

Caracterización de muestras planas de materiales compuestos de fibra de carbono mediante técnicas de análisis no destructivo infrarrojo e implementación de técnicas de reducción de datos.

Dicho objetivo general se desglosa en objetivos parciales como sigue:

- **Objetivo 1.** Abordar el problema de **las pérdidas por convección** del método flash clásico y su aplicación a la técnica de termografía infrarroja activa de **calentamiento escalón**.
- **Objetivo 2.** Obtener la forma y la potencia de la excitación, resolviendo lo que se conoce como **problema inverso**.
- **Objetivo 3.** **Reducir la alta dimensionalidad y el elevado volumen de datos** que se obtienen al trabajar con cámaras IR de alta resolución espacial y temporal mediante

técnicas estadísticas.

La totalidad de los trabajos que conforman esta tesis doctoral ha sido desarrollada en forma de contribución a las líneas de investigación propias del *Laboratorio de Sensores, Teledetección e Imagen Infrarroja* de la *Universidad Carlos III de Madrid (LIR-UC3M)*. El grupo LIR-UC3M desarrolla desde su fundación, de forma simultánea, las áreas de *termografía infrarroja* y *análisis espectral infrarrojo*. De la evolución tecnológica y del conocimiento científico del grupo, han surgido nuevas líneas de investigación como la calibración radiométrica, el diseño de sensores electro-ópticos para dar solución a problemas específicos no resueltos, el análisis no destructivo de materiales mediante termografía activa, la caracterización térmica de materiales y el desarrollo de simulaciones de problemas térmicos sustentadas en datos experimentales. En estas últimas líneas de investigación se inscriben los trabajos realizados durante esta tesis doctoral.

1.1.2. Planteamiento

El punto de partida de nuestro trabajo ha sido una técnica prototípica de termografía activa: el método clásico de Parker, o método flash, expuesto por primera vez en el año 1961 [138], donde una muestra plana es excitada por una de las caras por una lámpara flash, y la difusividad térmica α del material se recupera a partir del aumento de temperatura en la cara trasera. Aunque el método flash fue originalmente implementado con un termopar de contacto, es muy adecuado para el uso de una cámara IR, proporcionando así un *mapa de difusividades*, con un valor de α para cada punto de la muestra. Este mapa revela claramente los defectos e inhomogeneidades y proporciona una alternativa a otros métodos de análisis no destructivo (*Non-Destructive Testing*, NDT) usados para este fin, como pueden ser la termografía lock-in o la termografía pulsada de fase, con la ventaja de proporcionar resultados más cuantitativos [196].

La obtención práctica de mapas cuantitativos de difusividad térmica con el método flash para muestras planas de materiales tipo CFRP, u otros materiales de propiedades térmicas similares, obliga a superar **dos dificultades principales**. Ante todo, el trabajo original de Parker consideraba que las **pérdidas por convección** en la muestra eran despreciables. En materiales aislantes como los CFRP, esto exige que las muestras sean muy finas, una condición que generalmente no puede conseguirse.

Un primer objetivo ha sido, pues, desarrollar un modelo térmico más completo que incluya la convección al ambiente además de la conducción en la muestra. Entramos aquí en el campo de la física de la transferencia del calor. La resolución de la ecuación del calor unidimensional con las condiciones de contorno adecuadas nos ha permitido proponer dos tipos de enfoques. Por una parte, se han encontrado soluciones aproximadas, válidas

en los primeros instantes tras el flash, cuando los efectos de las pérdidas de calor son todavía despreciables, que proporcionan un método sencillo para medir la difusividad de la muestra. Por otra parte, la solución completa se ha usado para proponer un *método flash adaptado* [162] en el que se determina también el número de Biot (Bi) que rige las pérdidas térmicas, y, si la densidad de energía de flash está calibrada, también el calor específico volumínico, ρc_p y la conductividad térmica κ .

El perfil de temperaturas $T(t)$ con el que la muestra responde a una excitación flash es, desde el punto de vista de la teoría de los sistemas lineales, su función de respuesta a impulso (*irf* del inglés *impulse response function*). Tener resuelto el problema térmico para el flash permite por tanto obtener la evolución térmica de la muestra para una excitación genérica, por simple convolución de la *irf* con la función de excitación. Es más, esta última no tiene por qué ser el flujo de calor sobre la muestra: eligiendo la *irf* adecuada, podemos usar como entrada al modelo la evolución de la temperatura en una cara de la muestra y obtener como salida la temperatura en la otra cara.

Este enfoque ha sido crucial para poder aplicar en la práctica *el método escalón*, en el que la muestra es excitada por una lámpara ordinaria, ya que aunque ésta mantiene su potencia nominal constante, se ha observado que la excitación que proporciona no es ideal. Ajustando los perfiles de temperatura $T(t)$ de ambas caras obtenidos experimentalmente se obtiene para cada punto de la muestra un valor de difusividad térmica (α) y un número de Biot (Bi). Algunos de los resultados obtenidos con este método han sido publicados en [161], donde se analiza el daño en muestras de CFRP sometidas a fuego a partir de valores cuantitativos de difusividad térmica.

La adquisición de las imágenes infrarrojas adecuadas para este procesado cuantitativo no es trivial, y ha supuesto el desarrollo específico de un sistema formado por dos cámaras que obtienen imágenes simultáneas y corregistradas de las dos caras del espécimen objeto de estudio, con suficiente resolución espacial y temporal y calibradas radiométricamente.

Una segunda dificultad es de naturaleza más práctica y está relacionada con el **gran volumen de datos** a manejar, que conlleva largos tiempos de computación. Como $T(t)$ debe ser registrada para toda la imagen, los datos adquiridos para un sólo experimento puede alcanzar varios gigabites si la dimensión temporal es grande. Con el fin de abordar este problema hemos usado la estadística, proponiendo un método de recuperación para los parámetros térmicos α y Bi basado en el análisis de datos por *componentes principales* (PCA, del inglés *principal component analysis*). El análisis por componentes principales es un método clásico de reducción de dimensionalidad que ya ha sido usado en el campo del NDT, dándose en llamar PCT (del inglés, *principal component thermography*), [108],[56], [78] o [133], para detectar y cuantificar defectos. En nuestro caso, el análisis por componentes principales será usado para hacer más eficiente la recuperación de los parámetros térmicos

α y B_i para cada punto de la muestra, y se ha complementado con un ajuste multivariante con el que se obtiene una función de ajuste que proporciona valores continuos de los parámetros térmicos a partir de los resultados del procesado estadístico. Finalmente, una vez obtenidas las propiedades térmicas del material, este conocimiento ha sido usado para deducir el flujo incidente en función del tiempo, lo que requiere resolver el problema inverso, mediante técnicas de regularización.

1.2. Trabajos realizados

Para alcanzar los propósitos principales que se presentan en esta memoria se han realizados los siguientes **trabajos específicos**:

- *Estudio de los parámetros a tener en cuenta para una correcta calibración de un sistema infrarrojo.* Para ello será necesario introducirnos en la radiometría del problema, así como en todo lo referente a las cuestiones clásicas de instrumentación IR.
- *Puesta a punto de un sistema de dos cámaras IR para el registro de los experimentos.* A partir del sistema desarrollado en [161], especialmente diseñado para ensayos a fuego, ha sido necesario una adaptación para el problema que se aborda en esta tesis.
- *Resolución de la ecuación del calor y obtención de las funciones de transferencia que rigen el comportamiento térmico.* Se han reunido en una presentación coherente las soluciones a la ecuación del calor unidimensional con excitación flash publicadas en la bibliografía, y se ha puesto a punto un método de resolución basado en la transformada de Laplace que permite su generalización para cualquier excitación arbitraria.
- *Estudio de los parámetros que rigen la excitación escalón.* Para una correcta recuperación de los parámetros térmicos a partir de la excitación escalón será necesario el estudio de los parámetros que rigen tal excitación: valor de temperatura máximo alcanzado o física del estado estacionario entre otros.
- *Técnicas de regularización para el estudio del problema inverso.* El problema inverso de la conducción del calor suele ser un problema *mal condicionado*. Esto es, que la solución puede que no sea única o que sea inestable. Por ello, se han estudiado y puesto a punto varias técnicas de regularización que tratan estas dificultades.
- *Reducción de la complejidad y extracción eficiente de la información.* Debido al gran volumen de datos a manejar a partir de las imágenes obtenidas por las cámaras IR actuales, el uso de técnicas de reducción de dimensionalidad será un elemento clave en la implementación práctica de la recuperación de datos.

- *Generalización de los métodos de recuperación de datos.* Uno de los objetivos es explorar el empleo de técnicas de ajuste multivariable (funciones polinómicas que dependen de varias variables) una vez concluida la etapa de reducción de la dimensionalidad.
- *Validación de cada una de las técnicas expuestas mediante simulaciones.* Se comprobará la validez de cada una de las técnicas a partir de simulaciones teóricas y también mediante simulaciones tridimensionales en un software comercial de elementos finitos. Estas validaciones servirán para comprobar la bondad de los modelos desarrollados y su aplicabilidad a experimentos reales.
- *Caracterización de materiales de interés aeronáutico (CFRP).* La caracterización térmica en esta tesis doctoral estará centrada en los materiales de interés aeronáutico (CFRP). Cada una de las técnicas anteriores será finalmente implementada para dar valores de parámetros térmicos y de detección de defectos en este tipo de materiales.

1.3. Metodología y estructura de la tesis doctoral

El trabajo desarrollado se expone en la presente memoria a partir de una estructura delimitada en cuatro partes:

- (I) La **parte I** de esta memoria estará dedicada a una introducción a los fundamentos físicos del problema. El **capítulo [2]** está dedicado a exponer los conceptos básicos sobre el infrarrojo. En el **capítulo [3]**, se resume el estado del arte de las técnicas de análisis no destructivo haciendo especial hincapié en el NDT-IR, que es el caso que nos ocupa. El **capítulo [4]** expone la teoría básica de la transmisión del calor y las soluciones aproximadas en los casos sencillos de temperatura uniforme o estado estacionario, que serán útiles como casos límite, pero no describen el problema de la termografía activa, en el que tenemos una temperatura no uniforme que varía con el tiempo. Resolver la ecuación del calor en este caso, para un problema unidimensional (que modela una placa plana sometida a un flujo de calor), es el objetivo del **capítulo [5]**. Aquí se ponen las bases teóricas que van a ser usadas en el resto de la tesis. Aunque la mayor parte de lo expuesto puede encontrarse en la bibliografía, se ha realizado un esfuerzo para sintetizar resultados dispersos y dotarlos de un marco coherente, proporcionado por la resolución mediante *transformada de Laplace* y el enfoque de *teoría de sistemas lineales*. Se considera la evolución de la temperatura como la respuesta (*output*) de la muestra a una excitación (*input*), obtenida por convolución de ésta con una función de respuesta a impulso que depende de las propiedades térmicas del sistema. Aunque *a priori* lo natural es considerar como excitación el flujo de calor incidente, se demuestra que el formalismo funciona igual si se toma como

input la temperatura de la cara sometida a la radiación y como *output* la de la cara opuesta, lo que en capítulos posteriores permitirá extender la aplicabilidad del método.

- (II) Una vez introducida la física del problema así como resuelto el problema del calibrado para obtener una medida de temperatura correcta (que se expone en el apéndice [A]), pasamos a la **parte II** en la que nos ocupamos de la recuperación de los parámetros térmicos. En el **capítulo [6]** se han analizado y aplicado a experimentos reales distintos métodos de aproximación para problemas de termografía pulsada en los que las pérdidas de calor no son despreciables, comparando resultados por cara delantera y por cara trasera. Estos métodos se basan en el análisis de la evolución térmica en los primeros segundos tras el flash, cuando el efecto de las pérdidas es todavía pequeño.

En el **capítulo [7]** se utiliza ya el modelo completo que modela las pérdidas para ofrecer valores correctos de los parámetros térmicos. Además de presentar el estudio teórico y los resultados experimentales obtenidos, comparados con el capítulo anterior, se ha estudiado la limitación del método debido a los efectos tridimensionales que pueden aparecer en ciertas muestras, comparando los resultados con los de un modelo de elementos finitos. A continuación, se expone en el **capítulo [8]** el desarrollo teórico de la técnica de calentamiento escalón así como sus ventajas e inconvenientes y como se han potenciado y abordado, respectivamente, cada una de ellas. Se mostrará cómo se puede hacer uso de esta técnica poco explotada para la caracterización térmica de muestras reales de material compuesto, incluso cuando no se conoce el perfil temporal de la excitación de la lámpara, usando como entrada al modelo la evolución de la temperatura en la cara caliente. Esta técnica ha requerido para su aplicación práctica el desarrollo de un sistema de adquisición infrarrojo formado por dos cámaras que proporcionan imágenes simultáneas y corregistradas de ambas caras. En el último capítulo de esta parte (**capítulo [9]**), se afronta el *problema inverso*, o lo que es lo mismo, la recuperación de datos a los que no se tiene acceso y que son interesantes desde el punto de vista experimental y teórico como son la forma y la potencia de la excitación de la lámpara. De esta información se pueden obtener otros parámetros térmicos de interés, o puede ser usada como entrada al modelo si no se dispone de un sistema de dos cámaras que registren ambas caras del espécimen a lo largo del experimento.

- (III) La **parte III** de esta tesis se centra en la reducción de la dimensionalidad de los datos. Como ya se ha expuesto, la creciente demanda de nuevos materiales hace necesaria una correcta caracterización térmica, que puede ser proporcionada por el análisis

no destructivo infrarrojo, pero el uso de cámaras IR cada vez con mayor resolución espacial y temporal conlleva un gran volumen de datos que hace que el tiempo de computación sea muy elevado y pueda resultar inviable para ciertas aplicaciones prácticas. Por ello, en el **capítulo [10]**, se propone usar el método estadístico de las componentes principales para agilizar el proceso de recuperación de los parámetros térmicos. A partir de una matriz de datos pre-calculadas, se estudiará la correlación entre las variables que entran en juego permitiendo una drástica reducción del volumen de datos. En esta parte se incluye un capítulo más (**capítulo [11]**), donde se estudia una generalización del método de las componentes principales mediante un ajuste multivariable que permita obtener parámetros térmicos más allá de los valores introducidos en la matriz pre-calculada.

- (IV) Finalmente, la **parte IV** consta del **capítulo [12]**, donde se realiza una recopilación y un análisis crítico de los resultados obtenidos en el desarrollo de esta tesis, exponiéndose las principales contribuciones realizadas en los campos de la termografía IR y del análisis y caracterización de los materiales compuestos.

Parte I

INTRODUCCIÓN

Introducción al infrarrojo

RESUMEN: Esta tesis se engloba dentro del análisis no destructivo infrarrojo. Para un buen entendimiento de esta técnica será necesario definir los conceptos más característicos del espectro infrarrojo. En este capítulo se hará una breve introducción a la región infrarroja del espectro así como a la emisión térmica.

Se denomina **espectro electromagnético** a la distribución energética del conjunto de las ondas electromagnéticas. Referido a un objeto, se denomina *espectro* a la radiación electromagnética que este emite (espectro de emisión) o absorbe (espectro de absorción). El espectro electromagnético se extiende desde la radiación de menor longitud de onda, como los rayos cósmicos, rayos gamma y los rayos X, pasando por la luz ultravioleta, la luz visible y la radiación infrarroja, hasta las ondas electromagnéticas de mayor longitud de onda, como son las ondas de radio. Una particular longitud de onda λ (en el vacío) tiene una frecuencia f asociada y una energía de fotón E . Por tanto, el espectro electromagnético puede ser expresado igualmente en cualquiera de estos términos, que se relacionan en las siguientes ecuaciones (donde c es la velocidad de la luz en el vacío $c = 299,792,458 \text{ m/s}$ y h es la constante de Planck, $h \approx 6,626069 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$):

$$\lambda = \frac{c}{f}$$
$$E = hf$$

En el trabajo descrito en esta memoria nos va a interesar una porción específica del espectro: *la región infrarroja*.

2.1. El espectro infrarrojo

El *espectro infrarrojo* fue descubierto en el año 1800 por el astrónomo y constructor de telescopios Sir Frederick William Herschel (1738-1822) [128] cuando quiso saber cuánto

calor atravesaba los diferentes filtros que usaba para observar la luz proveniente del Sol. Notó que los filtros de diferentes colores parecían proporcionar diferentes cantidades de calor. Dirigió la luz del Sol a través de un prisma de vidrio para crear un espectro y luego midió la temperatura de cada color usando termómetros con bulbos ennegrecidos, colocando otros dos termómetros fuera del espectro como muestras de control (figura 2.1). Al medir las temperaturas individuales del violeta, azul, verde, amarillo, naranja y rojo, se dio cuenta de que todos los colores tenían mayor temperatura que los controles. Además, encontró que las temperaturas aumentaban desde la zona violeta hasta la zona roja del espectro. Herschel decidió entonces medir la temperatura justo más allá de la porción roja, en una zona del espectro aparentemente desprovista de luz solar. Para su sorpresa, encontró que esta región tenía el nivel más alto de temperatura de todos.

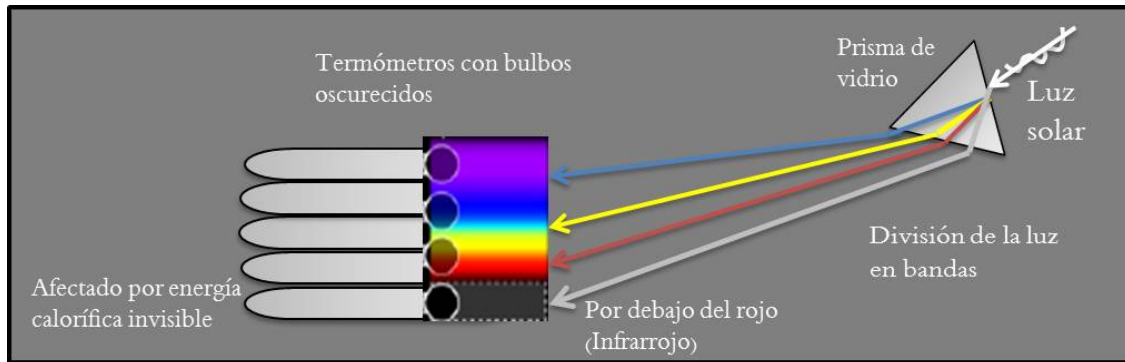


Figura 2.1: Forma esquemática del experimento de Herschel. Adaptada de [164]

Herschel realizó experimentos adicionales sobre los que él llamó *rayos caloríficos* más allá de la porción roja del espectro. Encontró que tenían la capacidad de ser reflejados, refractados, absorbidos y transmitidos de una manera similar a la luz visible. Lo que Sir William había descubierto era una forma de luz (o radiación) más allá de la luz roja, conocida ahora como **radiación infrarroja**. El experimento de Herschel demostró por primera vez que había otros tipos de luz que no podía verse con nuestros ojos.

Los recientes desarrollos en tecnología de detectores han llevado a muchas aplicaciones útiles de la radiación infrarroja. La tecnología médica infrarroja es usada para análisis no invasivo de tejidos corporales y fluidos. Las cámaras infrarrojas se emplean por la policía y cuerpos de seguridad y también como vigilancia militar; en la lucha contra incendios se utilizan para localizar personas o animales y para detectar puntos calientes en incendios forestales. La imagen infrarroja permite detectar pérdidas de calor en edificios, comprobar fallos por estrés en sistemas eléctricos y mecánicos y monitorizar la contaminación. Los satélites infrarrojos se usan de manera rutinaria para la medida de la temperatura de los océanos, y la monitorización de nubes para predecir tormentas. En arqueología, imágenes

térmicas han sido utilizadas para descubrir antiguos caminos y senderos, proporcionando información muy valiosa sobre antiguas civilizaciones, etc. [83].

2.1.1. Regiones del espectro electromagnético

Dentro del espectro electromagnético, la radiación infrarroja está en el intervalo de $0,74$ a $300 \mu\text{m}$; es decir, entre la zona visible del espectro y la asociada a las microondas. Dentro de la región infrarroja es habitual diferenciar cuatro intervalos, que vienen dados por la transmitancia espectral atmosférica (Ver figuras 2.2 y 2.3).

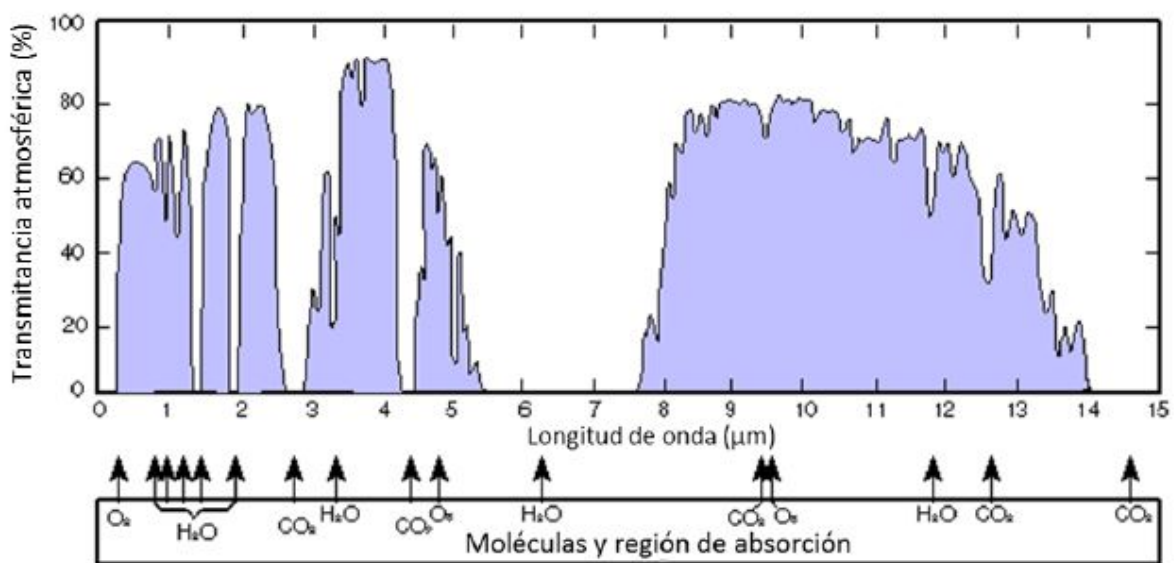


Figura 2.2: Transmitancia atmosférica en función de la longitud de onda

- *Infrarrojo cercano o NIR (Near InfraRed)*, que abarca desde $0,74 \mu\text{m}$ (fin de la región visible del espectro) hasta $1 \mu\text{m}$. Es una de las regiones más explotadas y con una gran diversidad de usos: medicina, telecomunicaciones, visión nocturna.
- *Infrarrojo de onda corta o SWIR (Short Wavelength InfraRed)*, que va desde $1 \mu\text{m}$ hasta $3 \mu\text{m}$. Es la región espectral dominante para las telecomunicaciones de larga distancia.
- *Infrarrojo medio o MIR (Mid InfraRed)*, que está definida desde las $3 \mu\text{m}$ hasta las $5 \mu\text{m}$. Tiene una gran aplicación en termografía y en general, imagen de objetos de alta temperatura.

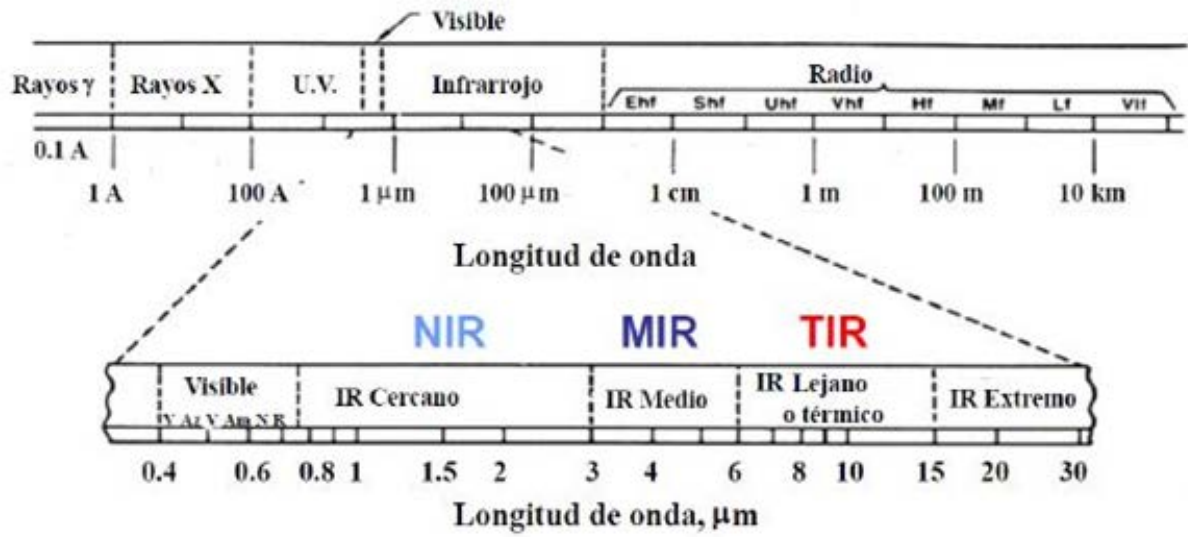


Figura 2.3: Clasificación de las principales regiones del espectro electromagnético. Se destaca la región infrarroja así como su clasificación en las distintas regiones.

- *Infrarrojo térmico o TIR (Thermal InfraRed)*, que va desde las $8 \mu\text{m}$ hasta las $12 \mu\text{m}$. Esta es una de las bandas más utilizadas. Se llama *infrarrojo térmico* porque es en esta banda donde se concentra la distribución de energía radiada por cuerpos a temperaturas cercanas al ambiente.

Las regiones entre $5 - 8 \mu\text{m}$ y más allá de $12 \mu\text{m}$ tienen poca utilización debido a la intensa absorción atmosférica. Un resumen de esta clasificación puede verse en la tabla 2.1.

2.2. Introducción a la emisión térmica

En esta sección exponemos brevemente las leyes que rigen la emisión de la radiación infrarroja, pero previamente tenemos que definir las magnitudes físicas con las que esta se cuantifica.

2.2.1. Radiancia, exitancia e irradiancia

La *radiancia espectral* $\mathcal{L}(\lambda, \theta, \phi)$ es la potencia o flujo Φ [W] (a una longitud de onda dada λ) emitido por unidad de superficie y ángulo sólido en una dirección determinada. Si consideramos el diferencial de superficie dA , la dirección (θ, ϕ) y el diferencial de ángulo

Banda espectral	Intervalo (μm)	Aplicaciones
NIR	0.74-1	Telecomunicaciones, medicina, visión nocturna
SWIR	1-3	Telecomunicaciones larga distancia
MIR	3-5	Inspección altas temperaturas (interiores, investigaciones científicas)
TIR	8-12	Temperatura ambiente (exteriores, inspección industrial)

Tabla 2.1: Bandas espectrales del infrarrojo.

sólido $d\omega$ definido por dA_n (ver figura 2.4), según esta definición, la radiancia espectral emitida \mathcal{L}_λ es:

$$\mathcal{L}_\lambda(\lambda, \theta, \phi) = \frac{d^3\Phi}{dA \cos\theta d\omega d\lambda} \quad [Wm^{-2}sr^{-1}\mu m^{-1}] \quad (2.1)$$

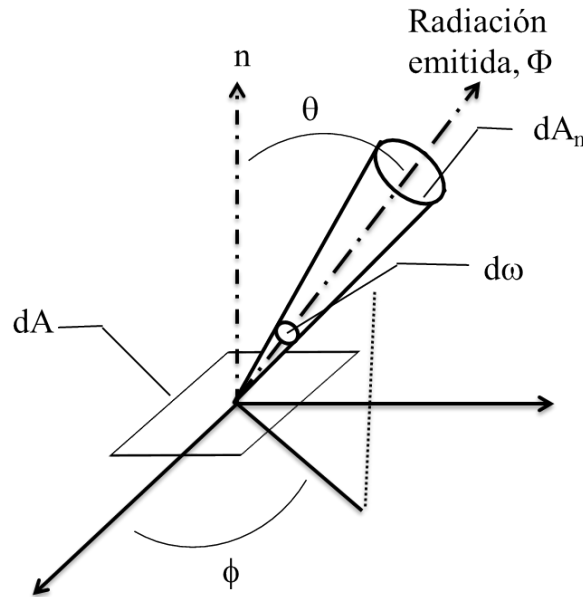


Figura 2.4: Esquema de radiación emitida

Esta expresión define la radiancia espectral como el cociente entre el flujo emitido $d^3\Phi$ y el ángulo sólido $d\omega$, el intervalo espectral $d\lambda$ y el elemento de superficie proyectado perpendicularmente a la radiación emitida ($dA \cos\theta$). La potencia radiante por unidad de área para una superficie emisora puede ser calculada si se conocen la distribución espectral

y direccional de la radiancia, integrando $\mathcal{L}(\lambda, \theta, \phi)$ a todos los ángulos. Esta cantidad es conocida como *exitancia espectral*:

$$M(\lambda) = \frac{d\Phi(\lambda)}{dA} \quad (2.2)$$

con unidades $[Wm^{-2}\mu m^{-1}]$. Si se considera un emisor *lambertiano* en el que la radiación emitida es independiente de la dirección, es decir, $\mathcal{L}(\lambda, \theta, \phi) = \mathcal{L}(\lambda)$, es fácil calcular la exitancia espectral demostrándose que [188]:

$$M(\lambda) = \pi\mathcal{L}(\lambda) \quad (2.3)$$

Donde el factor π proviene de la integral del ángulo sólido al hemisferio. Lo discutido para la radiación emitida por una superficie puede ser adaptado a una radiación incidente y, entonces la *radiancia espectral incidente* $\mathcal{L}(\lambda, \theta, \phi)$ se define como :

$$\mathcal{L}(\lambda, \theta, \phi) = \frac{d^3\Phi}{dA \cos\theta d\omega d\lambda} \quad [Wm^{-2}sr^{-1}\mu^{-1}] \quad (2.4)$$

Análogamente, la *irradiancia espectral* $E(\lambda)$ se define como la potencia radiante espectral incidente en una superficie por unidad de área en todas las direcciones en el hemisferio sobre el dA considerado:

$$E(\lambda) = \frac{d\Phi(\lambda)}{dA} \quad (2.5)$$

Si la radiación incidente es difusa isotrópicamente (lambertiana) entonces, $E(\lambda) = \pi\mathcal{L}(\lambda)$.

La *exitancia total* $M[(W \cdot m^{-2})]$ y la *irradiancia total* $E[Wm^{-2}]$ son entonces definidas como la potencia radiante (emitida o incidente) en todas las longitudes de onda y en todas direcciones por unidad de área:

$$M = \int_0^\infty M(\lambda)d\lambda \quad , \quad E = \int_0^\infty E(\lambda)d\lambda \quad (2.6)$$

La radiancia es una magnitud especialmente importante en las aplicaciones debido a que toma el mismo valor en la fuente y el detector (siempre que ambos estén en un medio de igual índice de refracción y que no absorba la radiación). Este *principio de invariancia de la radiancia* [130], simplifica mucho el problema de la termografía infrarroja que veremos en el apartado [3.3.1].

2.2.2. Concepto de cuerpo negro

Hay una gran variedad de fuentes de radiación, pero desde el punto de vista conceptual, la más importante es el *cuerpo negro*. El nombre de *cuerpo negro* fue introducido por

primera vez por Gustav Kirchhoff en 1862. Se define como aquel cuerpo que absorbe totalmente toda la radiación incidente. Una vez alcanzado el equilibrio, la re-emite en todas las direcciones; esta radiación emitida por el cuerpo negro es una función de su temperatura y de la longitud de onda pero es independiente de la dirección; es decir, es radiación *lambertiana*.

Ninguna superficie puede emitir más energía que un cuerpo negro para una temperatura y longitud de onda dadas. La emisión de una superficie real es la de un cuerpo negro corregida por un factor dado por la *emisividad*, ε . Es decir, la emisividad es el cociente de la radiación emitida por la superficie y la radiación emitida por el cuerpo negro (en las mismas condiciones de temperatura, dirección y banda espectral de interés). Es una magnitud adimensional que va desde 0 hasta 1 y depende de varios parámetros (Ver figura 2.5).

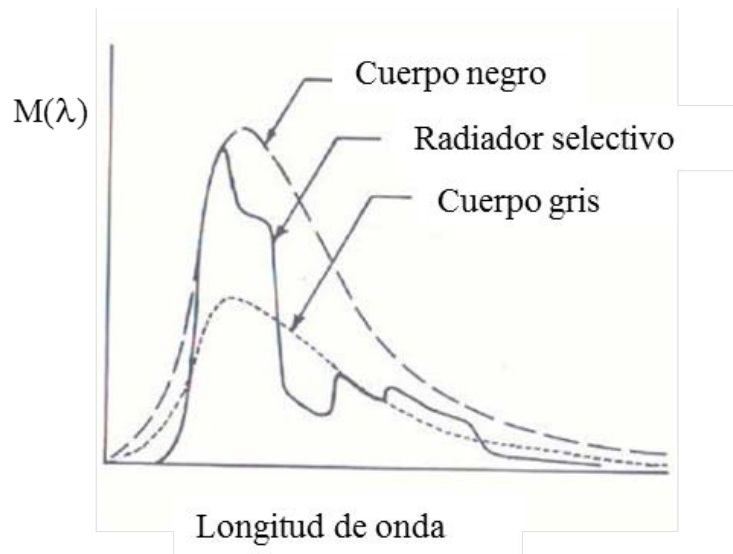


Figura 2.5: Emisión de un cuerpo negro, de un cuerpo negro gris y de un cuerpo selectivo. La de estos dos últimos se obtiene multiplicando la exitancia espectral del cuerpo negro $M(\lambda)$, por la emisividad espectral $\varepsilon(\lambda)$ del objeto.

Debido a estas dependencias, se introduce el concepto de emisividad espectral-direccional. La emisividad espectral-direccional de una superficie a una temperatura T emitiendo en la longitud de onda λ en la dirección (θ, ϕ) se define como:

$$\varepsilon(\lambda, T, \theta, \phi) = \frac{\mathcal{L}_\lambda(\lambda, T, \theta, \phi)}{\mathcal{L}_{\lambda, CN}(\lambda, T)} \quad (2.7)$$

En la práctica, generalmente no es necesario tener en cuenta todas las dependencias de la emisividad. La dependencia de los ángulos puede ignorarse a menudo, y son comunes

los objetos cuya emisividad es independiente de la longitud de onda, que se conocen como *cuerpos grises*.

La incertidumbre sobre la emisividad es una preocupación importante en el campo de la radiometría infrarroja, la cual está basada en la medida de la energía radiada: medidas de temperatura requieren conocer la emisividad ε y viceversa, la emisividad puede obtenerse si se mide la radiación emitida y se conoce la temperatura.

Aunque parezca un concepto abstracto, existen realizaciones físicas que son buenas aproximaciones al cuerpo negro ideal. Por ejemplo, la radiación que emitirá un cuerpo negro puede aproximarse con la precisión deseada por la radiación emitida a través de un agujero practicado en una cavidad. En cada una de las reflexiones en su interior se absorbe una parte de la luz, y después de las múltiples reflexiones, toda la energía que penetró por el orificio ha sido virtualmente absorbida, de esta forma, el orificio de la cavidad, si es suficientemente pequeño, se comporta como un cuerpo negro ideal y, por tanto, la luz que sale por él es una radiación de cuerpo negro (Ver figura 2.6).

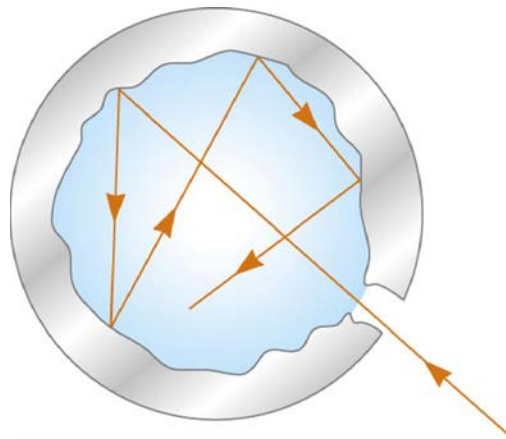


Figura 2.6: Esquema radiación de una cavidad actuando como cuerpo negro.

Existen también en el mercado “cuerpos negros extensos”, que son esencialmente una superficie a temperatura controlada con un recubrimiento sumamente absorbente. En la práctica estos dispositivos solo son una aproximación al cuerpo negro ideal; e incluso los cuerpos negros de cavidad no son perfectos, en la medida en la que su apertura no es infinitesimal.

2.2.3. Ley de Planck

La importancia del cuerpo negro no radica solo en que sea el emisor ideal, sino en que la radiación que emite está dada por una ley física fundamental. El 14 de diciembre de 1900, el físico alemán Max Planck presentó un trabajo acerca de la radiación del cuerpo

negro en una reunión de la Sociedad Alemana de Física, en Berlín. Esta fecha puede considerarse como el nacimiento de la física cuántica ya que en su deducción de la expresión teórica de la intensidad de la radiación en función de la longitud de onda y de la temperatura, Planck abandonó la física clásica al introducir la hipótesis de que: *un oscilador de frecuencia natural ν puede intercambiar energía únicamente en porciones de magnitud $E = nh\nu$* , donde h es una nueva constante de la naturaleza, (llamada hoy “constante de Planck” con unidades de julio multiplicado por segundo), n es un número entero positivo y ν es la frecuencia de la radiación.

Para un cuerpo negro en equilibrio térmico, la radiancia espectral $\mathcal{L}_{\lambda,CN}$ emitida es, según la ley de Planck:

$$\mathcal{L}_{\lambda,CN} = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left(\exp \frac{hc}{\lambda kT} - 1 \right)} \quad [Wm^{-2}sr^{-1}\mu m^{-1}] \quad (2.8)$$

Donde h es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz y k es la constante de Boltzmann.

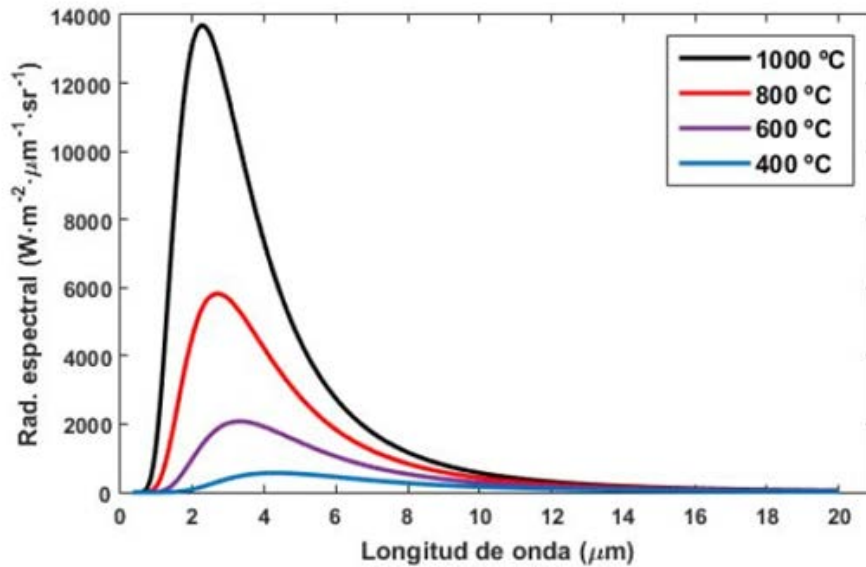


Figura 2.7: Ejemplo de distribución espectral de distintas radiancias de cuerpo negro a temperaturas entre 1000°C y 400°C según describe la Ley de Planck.

2.2.3.1. Ley de desplazamiento de Wien. Ley de Stefan-Boltzmann

La longitud de onda en la que se produce el máximo de emisión viene dada por la *ley de Wien* y la potencia total emitida por unidad de área viene dada por *ley de Stefan-Boltzmann*.

Aunque ambas pueden derivarse de la ley de Planck, históricamente se obtuvieron antes y de forma experimental.

Cuando aumenta la temperatura de un radiador de cuerpo negro, aumenta la energía radiada general, y el pico de la curva de radiación se mueve hacia longitudes de onda más cortas (Ver figura 2.8). Se encuentra que el producto de la longitud de onda máxima y la temperatura es constante lo que constituye la *Ley de Wien*, formulada en 1893 por el físico alemán Wilhelm Wien (Ec. (2.9)).

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2898}{T} \quad (2.9)$$

donde T es la temperatura del cuerpo negro en Kelvin (K) y $\lambda_{\text{máx}}$ es la longitud de onda del pico de emisión en micras.

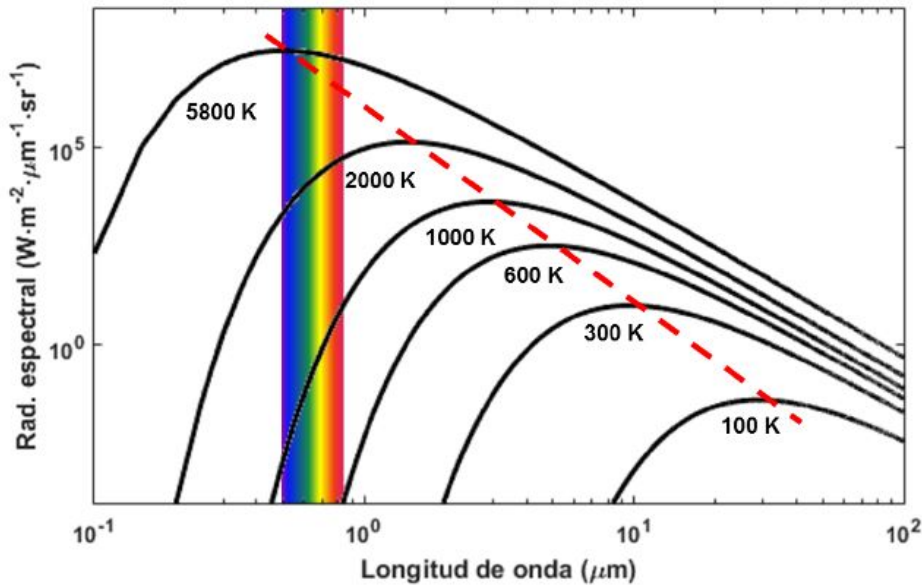


Figura 2.8: Ley de Planck para la radiación de cuerpos negros a diferentes temperaturas entre 5800K (aproximadamente la temperatura superficial del Sol) y 100K. Marcada su correspondencia aproximada por colores la región del espectro visible. La línea punteada representa la posición del máximo según la ley de Wien.

La ley de Stefan-Boltzmann da el flujo radiante total emitido por un cuerpo negro de área A a temperatura T :

$$\phi = \sigma AT^4 \quad (2.10)$$

donde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} [Wm^{-2}K^{-4}]$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

Esta ley se obtiene integrando la ley de Planck, pero fue propuesta con anterioridad (1879) por Josef Stefan a partir del análisis de los datos experimentales; cinco años más tarde, Ludwig Boltzmann obtuvo la ley teóricamente.

2.2.4. Absortancia, reflectancia y transmitancia

Cuando un flujo de energía radiante (Φ_i) incide en un objeto, una parte se refleja (Φ_r), otra se absorbe (Φ_a) y otra se transmite (Φ_t). La conservación de la energía exige que:

$$\frac{\Phi_r}{\Phi_i} + \frac{\Phi_a}{\Phi_i} + \frac{\Phi_t}{\Phi_i} = 1 \quad (2.11)$$

Donde $\frac{\Phi_r}{\Phi_i} = \rho$, $\frac{\Phi_a}{\Phi_i} = \alpha$ y $\frac{\Phi_t}{\Phi_i} = \tau$ son la reflectancia, la absortancia y la transmitancia, respectivamente. Entonces, la ecuación (2.11), se puede expresar como:

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (2.12)$$

Para un cuerpo opaco ($\tau = 0$) la relación se simplifica a la ecuación:

$$\rho + \alpha = 1 \quad (2.13)$$

Hay una relación entre los procesos de absorción y emisión y entre la emisividad y la absortancia, dada por la ley de Kirchhoff (llamada en honor al físico alemán Gustav Kirchhoff):

$$\varepsilon(\lambda) = \alpha(\lambda) \quad (2.14)$$

Esta ecuación es válida en condiciones de equilibrio térmico local, en el que el flujo absorbido es igual al flujo emitido.

Estado del arte: detectores, termografía y NDT-IR

RESUMEN: Sirva este capítulo, primeramente, como introducción al análisis no destructivo y en segundo lugar, como recopilación de los diferentes tipos de detectores infrarrojos así como a la evolución histórica de la tecnología IR. También se introducirá el concepto de *termografía* además de los tipos de excitación térmica usados.

3.1. Introducción

Como se ha explicado en secciones anteriores, todos los objetos con temperaturas por encima del cero absoluto emiten radiación electromagnética que caen en la región infrarroja del espectro. La dependencia de la forma y la intensidad del espectro de radiación con la temperatura, dada por la ley de Planck, hace posible conocer la temperatura de la superficie de un objeto sin necesidad de contacto físico, siempre que seamos capaces de medir con precisión la radiación IR que emite.

La radiación infrarroja (IR) descubierta por Herschel en 1800 tuvo que esperar sólo 30 años para ser medida por los primeros detectores (termopilas). Cincuenta años después, en 1880, William de Wiveleslie Abney obtuvo la primera imagen infrarroja. Finalmente, ochenta y tres años después, en 1963, apareció la primera cámara IR con mono-detector producida por AGA [90]. Este suceso fue una verdadera revolución para la ciencia, la industria y la medicina. Sin embargo, después de un período de entusiasmo, el aprovechamiento real de las cámaras fue un tanto decepcionante debido a su funcionamiento más bien cualitativo.

La segunda revolución ocurrió en la última década del siglo XX, debido a la conjunción de un importante esfuerzo en el entendimiento y modelado de los fenómenos térmicos involucrados en la termografía activa y pasiva, y de la aparición de cámaras de matriz de

plano focal (FPA, del inglés *focal plane array*) que permitieron un diseño más robusto y mayor sensibilidad y precisión en el análisis temporal y espacial. Por último, aparecieron cámaras IR con una sensibilidad térmica de $1mK$, que abren un abanico de nuevas posibilidades [155]. La consecuencia de este progreso técnico es el auge en el desarrollo de técnicas de termografía IR en más y más campos diversos de aplicación. El campo militar fue el primero en desarrollar sistemas de imagen IR, pero al ir madurando la técnica, llegaron nuevas aplicaciones. Algunos de los ejemplos son los siguientes:

- *Medicina*. La observación de la distribución espacial de la temperatura corporal ayuda en el diagnóstico y tratamiento. Por ejemplo, la termografía para detectar cáncer de mama o melanomas de piel [71].
- *Agricultura*. La monitorización mediante un sistema infrarrojo del proceso de nucleación del hielo en flores o árboles frutales para ayudar a desarrollar tecnologías de protección frente a congelación. Otro ejemplo es *agricultura de precisión* con imágenes de satélite [83].
- *Medio ambiente*. La termografía infrarroja también puede ser utilizada para monitorizar la contaminación marina, de ríos o bosques ya sea térmica o de residuos. Obtener información acerca del tiempo atmosférico, mediante el estudio de las nubes a partir de satélites IR e incluso ayudar a la detección y extinción de incendios, detectando puntos calientes [188].
- *Mantenimiento*. La termografía infrarroja es un instrumento excelente de supervisión para ayudar en la reducción de los costes de mantenimiento de los equipos mecánicos detectando el calentamiento excesivo en motores, bombas, poleas, ventiladores, plantas de potencia eléctrica, etc. El análisis de las imágenes termográficas permite predecir el fallo y llevar a cabo acciones correctoras antes de un colapso total [121].
- *Análisis no destructivo (NDT-IR, del inglés Non-Destructive Testing)*. La termografía infrarroja es capaz de hacer frente a la mayoría de los requerimientos del análisis no destructivo (NDT) tales como medidas de tamaño, profundidad y resistencia térmica de defectos en una amplia variedad de materiales y componentes [197].

3.2. Detectores Infrarrojos

La mayoría de los detectores infrarrojos son sensibles en la banda de infrarrojo medio ($3 - 5 \mu m$) o la de infrarrojo térmico ($8 - 12 \mu m$). Hay algunos sistemas que trabajan en el infrarrojo cercano o en el infrarrojo de onda corta pero están específicamente diseñados

para aplicaciones concretas. Por otra parte, como se mostraba en la figura 2.2, la atmósfera es opaca en la región del infrarrojo entre $5,5 - 7,8 \mu m$, lo que hace imposible la medida a distancia en esa región.

3.2.1. Evolución histórica de la tecnología IR

El primer instrumento usado para detectar el infrarrojo fue el termómetro usado por Herschel; pero la historia de los detectores infrarrojos propiamente dicha se origina con el *efecto termoeléctrico* en la unión de dos metales distintos, descubierto por Thomas Johann Seebeck en 1821. Este efecto consiste en una conversión directa de diferencias de temperatura en voltaje eléctrico y permitió la invención de la *termopila* por Nobili en 1829. Más tarde, la propiedad de los metales de cambiar su resistencia eléctrica con la variación de la temperatura llevó a la invención del *bolómetro* por el americano Samuel Pierpont Langley en el año 1878.

Un hito en el desarrollo de los detectores es el descubrimiento por Hertz en 1887 del efecto fotoeléctrico, que fue explicado y formulado en 1905 por Albert Einstein. Relacionado con el efecto fotoeléctrico está el *efecto fotoconductor* que aumenta la conductividad eléctrica de los no metales cuando están expuestos a radiación electromagnética.

El primer detector fotoconductor, un sulfuro de talio, fue desarrollado por Theodore Willard Case en 1917. Tenía problemas de ruido y de estabilidad y fue sujeto de estudio durante la Segunda Guerra Mundial, para ser abandonado en favor del sulfuro de plomo (PbS) que tiene mejor rendimiento. Durante finales de la década de 1940 y la década de 1950 se desarrollaron nuevos materiales como el seleniuro de plomo (PbSe) y el telururo de plomo (PbTe).

A finales de los 50 y principios de los 60 el desarrollo de compuestos de semiconductores, tales como el antimoniuro de indio (InSb) y de aleaciones como el telururo de cadmio y mercurio (HgCdTe, llamado generalmente MCT) permitió fabricar detectores con respuesta espectral desde el infrarrojo medio (MIR) hasta el infrarrojo térmico (TIR). El MCT se convirtió en el material más importante y versátil para aplicaciones de detectores IR. Permite la detección fotoconductor y fotovoltaica aunque, inicialmente, se tuvieron dificultades en producir detectores con alta uniformidad, debido al débil enlace Hg-Te que implicaba inestabilidad [97].

La historia del desarrollo de los detectores usados para imagen IR comienza con detectores de un sólo elemento donde la imagen del escenario se obtenía a través de un mecanismo de barrido; continúa con detectores de matriz lineal, para llegar a matrices bidimensionales (matrices de plano focal o FPAs) con las que se puede obtener una imagen completa del orden de miles de píxeles y, llegando a formatos multicolor con capacidad para detectar en dos o más bandas espectrales.

3.2.2. Detectores térmicos y detectores cuánticos

Los detectores usados para la tecnología IR pueden ser divididos por su principio de funcionamiento en dos categorías: detectores térmicos y detectores cuánticos (o fotónicos) [197].

Detectores térmicos Estos detectores miden la radiación IR a partir del calentamiento que ésta produce al ser absorbida por un material. La principal ventaja es su respuesta a temperatura ambiente y sobre un amplio intervalo del espectro electromagnético. La principal desventaja es su lento tiempo de respuesta que no los hace adecuados para eventos de alta frecuencia.

Ejemplos de detectores que pertenecen a esta familia son: termopilas, bolómetros y detectores piroeléctricos.

- **Termopilas:** están basadas en el efecto termoeléctrico y son, esencialmente, un número de termopares conectados en serie.
- **Bolómetros:** se basan en el cambio en la resistencia con la temperatura de un elemento resistivo. El diseño clásico consistía en dos tiras de platino ennegrecidas que formaban dos ramas de un puente de Wheatstone; la resistencia en el circuito variaba cuando una de ellas expuesta a la radiación se calentaba.

A día de hoy, los avances en micromecanizado del silicio han dado lugar a la tecnología de los **microbolómetros**, formados por una rejilla de óxido de vanadio o silicio amorfo encima de un puente de silicio poroso que sirve de aislante térmico y soporte mecánico de la estructura. Se pueden encontrar comúnmente en diferentes tamaños: 160x120, 320x24, 640x512 o incluso mayores.

- **Piroeléctricos:** están basados en el efecto piroeléctrico que consiste en un cambio en la carga de la superficie del cristal como consecuencia del cambio en el momento dipolar cuando la temperatura del cristal varía. Sólo tienen respuesta en alterna, por lo que la técnica común es incorporar un dispositivo *chopper* en el sistema óptico y crear una señal de salida AC. Algunos materiales que presentan este efecto piroeléctrico son el sulfato de triglicina (TGS), el tantalato de litio ($LiTaO_3$) y el fluoruro de polivinilo (PVF2).

Detectores cuánticos o fotónicos Los detectores cuánticos generan cargas libres en respuesta a la absorción de fotones. La principal ventaja es un tiempo de respuesta corto (del orden de microsegundos); una desventaja es la necesidad de refrigerar hasta temperaturas criogénicas para deshacerse del exceso de corriente de oscuridad. En estos detectores,

los electrones son excitados desde la banda de valencia de un semiconductor hasta la banda de conducción por los fotones incidentes; existe una longitud de onda λ_c de corte que corresponde con la energía E_g entre bandas, dada por:

$$\lambda_c = \frac{hc}{E_g} \quad (3.1)$$

por encima de la cual no existe absorción. El valor de E_g depende del material y tiende a aumentar con la temperatura.

En el pasado, los detectores estaban situados en la pared de un matraz Dewar que se rellenaba con nitrógeno líquido a 77 K. La nueva generación de sistemas incluye refrigeración en miniatura basada en el efecto termoeléctrico de Peltier (inverso del efecto Seebeck) o en el ciclo de Stirling y no necesitan una fuente de refrigeración externa [97]. Existen cuatro tipos principales de detectores fotónicos: fotovoltaicos, fotoconductores, fotoemisores y fotodetectores infrarrojos de pozo cuántico (QWIP, de las siglas en inglés Quantum Well Infrared Photodetector).

- **Fotovoltaicos intrínsecos:** están basados en un dispositivo de unión p-n. Cuando al detector le llegan fotones de energía mayor o igual a la energía de ancho de banda prohibida, los portadores eléctricos son arrastrados a través del fotodiodo y se separan por la barrera de potencial de la unión p-n para crear una corriente. Estos dispositivos operan en la región de polarización inversa del diodo; esto minimiza el flujo de corriente a través del detector y, por tanto, la disipación de potencia. Estos detectores están normalmente fabricados con silicio (Si), germanio (Ge), arseniuro de galio (GaAs), antimoniuro de indio (InSb), arseniuro de indio y galio (InGaAs) y telururo de mercurio y cadmio (HgCdTe).
- **Fotoconductores intrínsecos:** la radiación incidente con energía mayor o igual a la energía de ancho de banda prohibida genera portadores de electricidad, de modo que la conductividad eléctrica del material mejora (podríamos decir que se produce un efecto fotoeléctrico interno). Materiales de uso común para este tipo de detectores son sulfuro de plomo (PbS), seleniuro de plomo (PbSe) y también telururo de mercurio y cadmio (HgCdTe).
- **Detectores extrínsecos:** son similares a los intrínsecos pero los portadores son excitados desde los niveles de impurezas y no desde la banda de valencia del material base; esto se consigue dopando el material semiconductor. Los materiales más usados son el silicio y el germanio dopados con impurezas de boro, arsénico o galio. Así, la respuesta espectral de estos detectores puede ser controlada por el nivel dopado.

- **Fotoemisores:** están compuestos por dos materiales: una capa de metal superpuesta a una capa semiconductor. Un ejemplo típico es el siliciuro de platino (PtSi) sobre silicio (Si). El proceso consiste en la emisión de portadores desde el metal hasta el semiconductor por una absorción de fotones. La principal ventaja es una respuesta más uniforme ya que ésta depende de las características del metal. Sin embargo, ya que la absorción de fotones en el metal es proporcional al cuadrado de la longitud de onda, este tipo de detectores está más indicado para longitudes de onda larga.
- **Fotodetectores infrarrojos de pozo cuántico (QWIP):** el principio básico es similar al de los detectores extrínsecos, pero en este caso, la radiación es absorbida por el conjunto del pozo cuántico, no sólo por un único átomo dopado y así la absorción aumenta (y también la respuesta) con respecto a los detectores extrínsecos. Los QWIPs generalmente consisten en capas finas de arseniuro de galio (GaAs) alternadas con capas de arseniuro de aluminio y galio (AlGaAs).

3.2.3. Estado del arte

En las cámaras IR actuales las matrices de plano focal (FPA) son la norma, bien sean basadas en detectores refrigerados (cuánticos) o detectores de microbolómetros no refrigerados. Éstas últimas, y debido a su bajo coste, se están haciendo cada vez más populares para técnicas de NDT. Las principales características de cada uno de los tipos de cámaras IR están recogidas en la tabla 3.2 [155].

3.2.4. Rendimiento de los detectores

Las figuras de mérito que nos permitirán comparar y evaluar las principales características de los sistemas de imagen infrarroja se van a explicar a continuación. Algunas de ellas son comunes también en otros ámbitos, especialmente en los sistemas de imagen que operan en la banda electro-óptica o visible, mientras que otras son específicas para el IR.

- *Rango dinámico.* Se suele expresar como la ratio entre la mayor y menor señal que pueden detectarse en un mismo instante de tiempo sin superar los límites de ruido y saturación del equipo.
- *Responsividad.* Habitualmente se define como el cociente entre la señal de salida eléctrica (en general, corriente, I_{gen}) frente a la potencia asociada a la radiación incidente P_{inc} a la que es sometido el detector. Aunque esta definición es posible extenderla de forma que abarque etapas posteriores de procesado, lo más común es emplear la

Refrigerado	No refrigerado
<p data-bbox="293 279 427 310">Ventajas</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="573 338 906 678"> <ul style="list-style-type: none"> ■ Bajo ruido ■ Alta frecuencia de adquisición ■ Tiempo de integración ajustable ■ Alta linealidad </div> <div data-bbox="980 352 1315 1108"> <ul style="list-style-type: none"> ■ No requieren enfriamiento criogénico ya que cuentan con una estabilización termoeléctrica interna ■ Buen precio comparado con las refrigeradas ■ Muy compactas y ligeras ■ Altamente portátiles, ya que pueden funcionar con batería y guardar imágenes en tarjetas PC-MCIA </div> </div>	
<p data-bbox="293 1167 521 1199">Inconvenientes</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="573 1241 906 1619"> <ul style="list-style-type: none"> ■ Requieren refrigeración por debajo de temperaturas criogénicas ($\sim 77K$) bien con nitrógeno líquido o con ciclos de Stirling ■ Alto coste </div> <div data-bbox="980 1241 1315 1314"> <ul style="list-style-type: none"> ■ Tiempo de respuesta relativamente lento </div> </div>	

Tabla 3.2: Principales características de los detectores refrigerados y no refrigerados.

expresión:

$$R = \frac{I_{gen}}{P_{inc}} [A/W] \quad (3.2)$$

También es frecuente extender dicha definición incluyendo la dependencia con la longitud de onda, denominándose entonces responsividad espectral o respuesta espectral.

- *Potencia de ruido equivalente o NEP (Noise Equivalent Power)*. Se define como la potencia incidente en nuestro sistema tal que se obtenga una relación señal a ruido igual a la unidad en el detector. Se trata de una medida de ruido, aunque expresada en términos de potencia a la entrada:

$$NEP = \frac{N}{R_T} \quad (3.3)$$

En esta ecuación, N representa el ruido bajo consideración (I_{rms} en el caso de corriente) y R_T el factor de responsividad total entre la entrada y la salida. En el ruido N se engloban todas aquellas contribuciones ajenas al objetivo de la medida, incluyéndose todas las fuentes de ruido que podrían reducirse mediante una mejora en el diseño (interferencias electromagnéticas, derivas térmicas,...) junto con otras asociadas al sistema detector, como el ruido térmico, *shot*, de tipo *flicker*, de oscuridad o el espacial, y también el provocado por fluctuaciones temporales de las fuentes de emisión.

- *Detectividad específica o D^** . Puesto que la NEP depende tanto del ancho de banda (Δf) como del área del detector (A_D), surge la necesidad de crear una magnitud independiente de ambas que nos permita comparar diferentes detectores. Esto se consigue definiendo la detectividad específica de este modo [71]:

$$D^* = \frac{\sqrt{A_D} \sqrt{\Delta f}}{NEP} \quad (3.4)$$

La razón es que el ruido es generalmente proporcional a $\sqrt{\Delta f}$ y a $\sqrt{A_D}$ y se pone en el denominador para que valores de D^* mayores indiquen mejores detectores. De esta forma se consigue una magnitud que permite la comparación de diferentes tecnologías de fabricación de detectores. En la figura [3.1] podemos encontrar la detectividad específica de los materiales detectores más habituales, representada en función de la longitud de onda y considerando su temperatura de operación.

- *Diferencia de temperatura equivalente de ruido o NETD (Noise Equivalent Temperature Difference)*. Esta es una de las figuras más empleadas y características del tipo de sensores que nos ocupa, especialmente en ámbitos como la termografía. En esencia, se

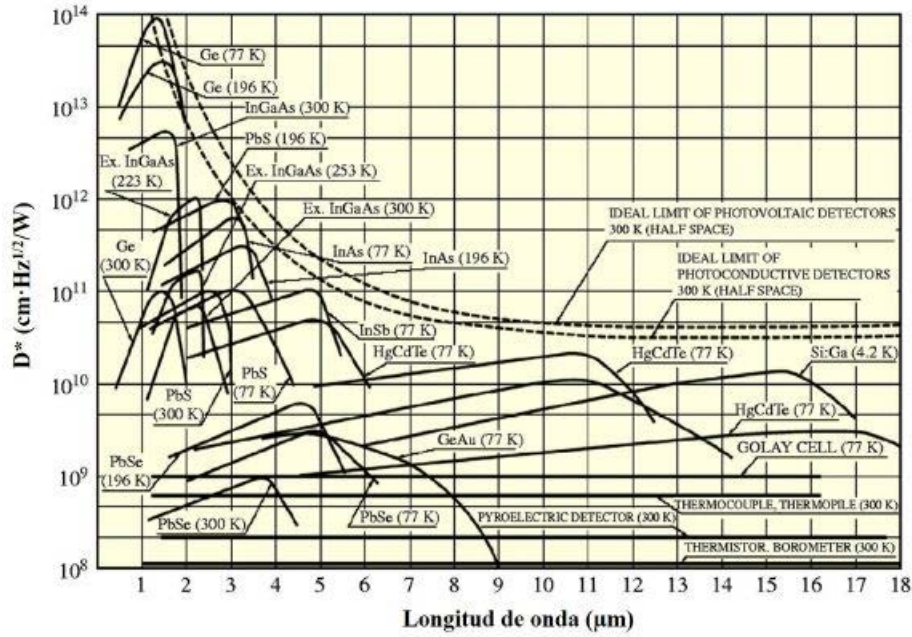


Figura 3.1: Detectividad específica en función de la longitud de onda para distintos tipos de materiales detectores. Ilustración adaptada de [207].

trata simplemente de una forma de expresar el ruido de nuestro sistema visto desde la entrada a éste, y a través de una unidad más natural y fácil de interpretar como es la temperatura. En esta definición se expresa el ruido medido como el mínimo incremento con respecto a una temperatura de referencia (normalmente el ambiente) que el equipo es capaz de discriminar, referido a un ancho de banda espectral determinado, un valor de apertura numérica o número $\#F$ (típicamente unitario) y un valor de tasa de adquisición de imágenes determinado. Pese a que se trata de una magnitud que normalmente se caracteriza de forma empírica, también es posible estimar su valor mediante la ecuación propuesta en (3.5) [71]:

$$NETD = \frac{NEP}{\frac{\partial P_{inc}}{\partial T}} = \frac{4F^2}{\tau_T \cdot \pi} \sqrt{\frac{\Delta f}{A_D}} \frac{1}{\int_{\Delta\lambda} \frac{\partial L(T,\lambda)}{\partial T} D^*(\lambda) d\lambda} \quad (3.5)$$

En la ecuación anterior, Δf hace referencia al ancho de banda temporal, sintonizado en los circuitos de pre-procesado y adaptado a la tasa de imágenes por segundo máxima disponible, motivo por el que la NETD suele llevar especificada la frecuencia en Hz a la que ha sido evaluada; τ_T es la transmitancia total de todos los subsistemas, como la óptica, filtros interferenciales si los hubiera u otros.

3.3. Termografía IR

La termografía infrarroja utiliza un dispositivo que detecta radiación IR proveniente de los objetos y con la ayuda de electrónica y software específicos la transforma en una señal de vídeo y, finalmente, en un mapa de temperaturas. Naturalmente, esta es una descripción simplificada; en realidad, la forma en la que se obtiene el mapa final de temperaturas es un procedimiento bastante complejo que implica disciplinas físicas como el electromagnetismo, la óptica, la transferencia de calor, etc.

La termografía infrarroja está siendo usada en una gran variedad de campos de aplicación y para muy diferentes propósitos; de hecho, puede proporcionar beneficios en casi cualquier proceso industrial o tecnológico que dependa de la temperatura. Un sistema de imagen IR debería considerarse un preciado aliado para tareas de diagnóstico y prevención, para comprender los complejos fenómenos de la dinámica de fluidos, para caracterizar un material o para procedimientos de evaluación que puedan ayudar a mejorar el diseño y fabricación de productos. Puede usarse para controlar los procesos de fabricación, para evaluar de manera no destructiva la integridad del producto final y para monitorizar el componente ya en servicio.

La termografía infrarroja es un caso particular de una disciplina más amplia que se ha dado en llamar teledetección (*remote sensing*). El objetivo de la teledetección es extraer información de un objeto a partir de la radiación electromagnética que éste emite, absorbe o dispersa, y que es captada a distancia por un sensor. Ese sensor puede tener resolución espectral (distinguir entre diferentes longitudes de onda de la radiación), resolución espacial (y por tanto, proporcionar una imagen) o ambas cosas.

En el caso de la termografía infrarroja (IR), se quiere medir la temperatura de un objeto a partir de la radiación infrarroja que ese objeto emite, y que es detectada por una cámara que trabaja en un cierto intervalo espectral (hay por tanto resolución espacial pero no espectral).

3.3.1. Planteamiento del problema

El problema en todas las técnicas de teledetección es relacionar la señal que proporciona el sensor (en el caso de una cámara la llamaremos número digital, ND) con la magnitud que queremos medir [29],[93],[100]. En el caso de la termografía infrarroja, haciendo algunas suposiciones razonables en condiciones de laboratorio (respuesta lineal del sensor, transmitancia atmosférica unidad, ausencia de fuentes externas, etc) no es difícil obtener la temperatura a partir del número digital siempre que tengamos un valor cuantitativo para la radiancia incidente sobre la cámara, es decir, siempre que la cámara esté calibrada radiométricamente. El proceso de calibración es decisivo para cualquier aplicación de

la termografía y se estudiará con más detalle en el apéndice [A]. En esta sección vamos a asumir que disponemos de una cámara IR calibrada, de modo que en las condiciones de trabajo el detector funciona dentro de su intervalo lineal, es decir, que proporciona un nivel digital (ND) que es función lineal de la radiancia:

$$ND = \text{Gain} \cdot L_{in} + \text{Offset} \quad (3.6)$$

siendo L_{in} la radiancia incidente en la banda espectral de trabajo de la cámara y Gain (ganancia) y Offset dos parámetros propios de la cámara para una configuración dada que se han determinado mediante la calibración radiométrica.

Consideramos con un caso sencillo: la observación directa de un objeto mediante una cámara IR. La radiancia incidente sobre la cámara, L_{in} , vendrá dada por la suma de diferentes términos. Además de la radiancia emitida por el objeto, L_{obj}^e , tendremos una contribución de la radiancia emitida por los alrededores del objeto, L_{amb} y reflejada por éste. Si la emisividad del objeto es ε_{obj} y si éste es opaco, la reflectancia será $\rho_{obj} = (1 - \varepsilon_{obj})$ y, por tanto, este término valdrá $L_{amb}(1 - \varepsilon)$. Hay que añadir la radiancia emitida por la atmósfera, L_{atm} , que es recogida directamente por la óptica y también se deberá tener en cuenta la emisión propia de la óptica y demás partes del sistema, L_{sist} (ver figura 3.2). Por tanto, la radiancia incidente será:

$$L_{in} = [L_{obj}^e + L_{amb}(1 - \varepsilon_{obj})] \tau_{atm} + L_{atm} + L_{sist} \quad (3.7)$$

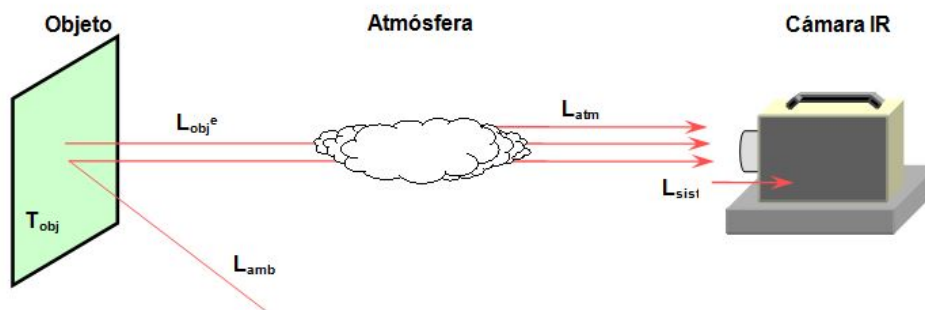


Figura 3.2: Ejemplo sencillo de teledecepción IR donde se señalan cada una de las contribuciones a tener en cuenta para una correcta calibración.

Se puede comprobar que, incluso en este caso tan sencillo, intervienen muchos factores en la medida. Sin embargo, para medidas a cortas distancias realizadas en una ventana atmosférica podemos considerar que la transmitancia atmosférica es prácticamente la unidad, y en consecuencia su emisividad y, por lo tanto, su radiancia L_{atm} son despreciables.

Si también despreciamos la emisión propia del sistema L_{sist} , obtenemos una expresión más sencilla:

$$L_{in} = L_{obj}^e + L_{amb} (1 - \varepsilon_{obj}) \quad (3.8)$$

que podemos desarrollar como:

$$L_{in} = L^{CN}(T_{obj})\varepsilon_{obj} + L^{CN}(T_{amb})(1 - \varepsilon_{obj}) \quad (3.9)$$

donde $L_{obj}^e = L^{CN}(T_{obj})\varepsilon_{obj}$, siendo $L^{CN}(T_{obj})$ la radiancia emitida por un cuerpo negro a la temperatura del objeto y hemos considerado el ambiente como un cuerpo negro a T_{amb} .

La ecuación (3.9) muestra que si conocemos T_{amb} y obtenemos la radiancia a partir de la medida de la cámara, podemos determinar (haciendo uso de la Ley de Planck, que nos proporciona $\mathcal{L}^{CN}(T)$):

- La temperatura del objeto, T_{obj} , si conocemos su emisividad.
- La emisividad del objeto, ε_{obj} , si conocemos su temperatura.

Esta es la idea más básica de la termografía IR, pero pese a su sencillez, este ejemplo pone de manifiesto que no proporciona medidas directas. Por el contrario, para extraer la información, como ocurre con cualquier técnica de teledetección, es necesario complementar la medida (en nuestro caso, el ND proporcionado por la cámara para cada píxel) con:

- Un *modelo del sistema sensor*, para obtener la radiancia incidente a partir del número digital proporcionado por el sistema. En nuestro caso, se trata de la calibración dada por los parámetros Gain y Offset.
- Un *modelo radiométrico del escenario*, que estará compuesto a su vez de:
 - Un *modelo del ambiente*, para estimar las distintas contribuciones a la radiancia incidente y hacer las aproximaciones oportunas para, a partir de ésta, estimar la radiancia emitida por el objeto.
 - Un *modelo del objeto*, que relacione la radiancia emitida con la temperatura del objeto (para lo que será necesario conocer su emisividad) o con su emisividad (para lo que se necesitará saber su temperatura).

En el caso sencillo pero frecuente de un objeto opaco, sin fuentes adicionales al ambiente y en una banda en la que la atmósfera tiene $\tau_{atm} = 1$, para conocer la temperatura necesitamos conocer los parámetros de Gain y Offset propios de la cámara, y la integral de la función de Planck en la región espectral de trabajo, además de los datos del escenario de medida: emisividad del objeto y temperatura ambiente.

3.3.2. Función de calibrado

Al medir con una cámara calibrada obtenemos L_{in} . Si conocemos ε_{obj} y T_{amb} podremos despejar de (3.9):

$$L^{CN}(T_{obj}) = \frac{L_{in} - (1 - \varepsilon_{obj})L_{CN}(T_{amb})}{\varepsilon_{obj}} \quad (3.10)$$

Para obtener la temperatura T_{obj} es necesario invertir $L^{CN}(T)$, y para ello hay que conocer su forma funcional. Si la cámara fuera sensible en todo el espectro, esta vendría dada por la ley de Stefan-Boltzmann:

$$L^{CN}(T) = cT^4 \quad (3.11)$$

donde $c = \sigma/\pi$; el factor π aparece porque estamos trabajando con radiancias [W/m^2sr] en vez de con exitancias [W/m^2], recordemos la ecuación (2.3).

En la práctica, la cámara sólo será sensible en una ventana espectral, de λ_i a λ_f , y la función será más complicada (se obtendrá integrando la Ley de Planck en esa ventana). La llamaremos *función de calibrado*, f :

$$f(T) = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} L^{CN}(T, \lambda) d\lambda \equiv L^{CN}(T, \lambda_i, \lambda_f) \quad (3.12)$$

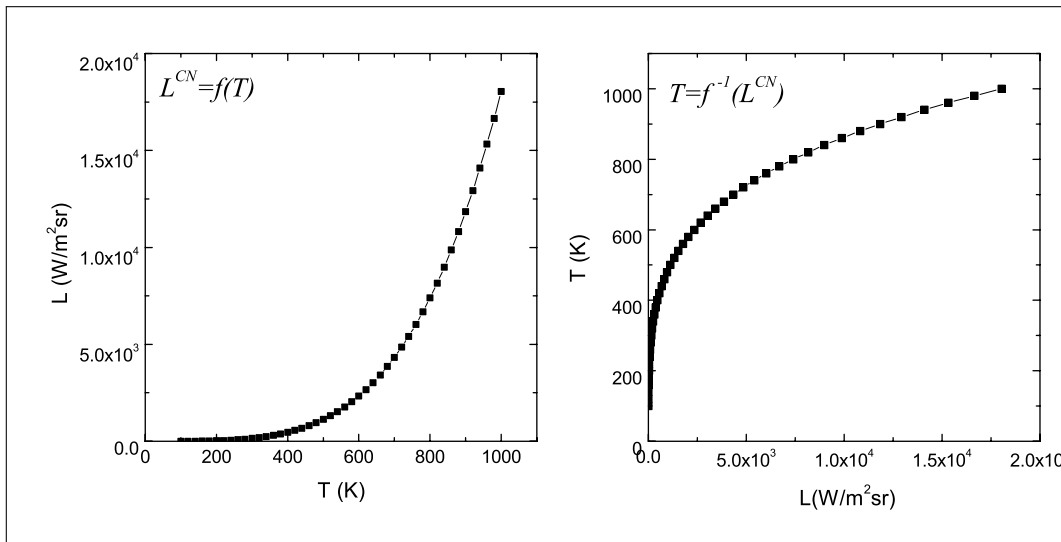


Figura 3.3: (Izquierda): Radiancia (L) en función de temperatura para un cuerpo negro. Sería la gráfica de la función de calibrado para una cámara sensible por igual en todo el espectro. (Derecha): Temperatura de un cuerpo negro en función de su radiancia, función inversa de la anterior.

Si estuviéramos observando un cuerpo negro, $\varepsilon_{obj} = 1$, la ecuación (3.10) da de inmediato que $L_{in} = L^{CN}(T, \lambda_i, \lambda_f)$, es decir, la función de calibrado daría directamente la

radiancia incidente en función de la temperatura. Como la señal que proporciona una cámara bien calibrada (su número digital, ND) es función lineal de la radiancia, la relación entre ND y T viene dada esencialmente por la función de calibrado.

Podemos hacernos una idea del comportamiento de esta función con el caso sencillo dado por la ecuación (3.11). La gráfica se muestra en la figura 3.3. Si en el eje de L pusiéramos ND, la gráfica tendría la misma forma (sólo cambiarían los valores numéricos). El hecho de que la radiancia no sea función lineal de la temperatura implica que con radiancias bajas, y por tanto ND bajos, una incertidumbre pequeña en ND puede corresponder a una gran incertidumbre en T. Para minimizar errores, conviene pues evitar la zona inferior del rango de trabajo de una cámara térmica.

Lógicamente, cuando la ventana espectral de la cámara cubre sólo un intervalo finito, la radiancia no es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura más que de un modo aproximado y en un intervalo aproximado de temperaturas, como se puede apreciar en la figura 3.4.

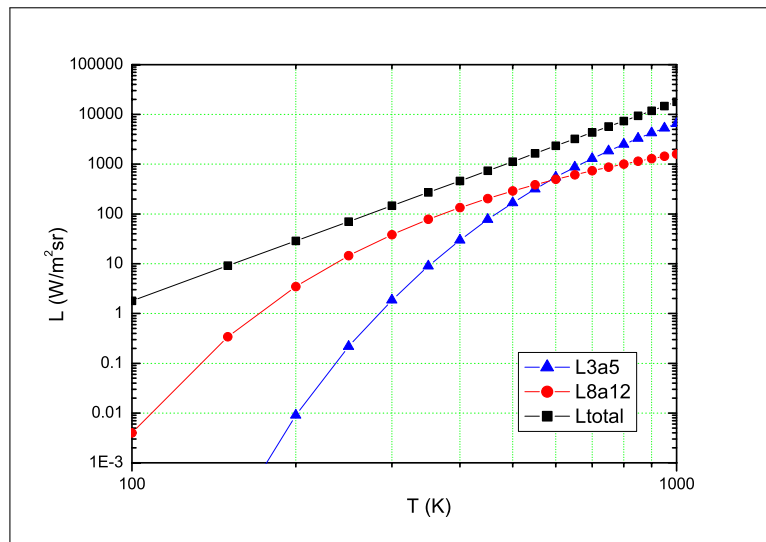


Figura 3.4: Comparación entre las radiancias totales, de 3 a 5 μm y de 8 a 12 μm en función de la temperatura. Las radiancias son proporcionales a T^4 en las regiones en las que las respectivas curvas son paralelas a la recta de L_{total} (alrededor de 900 K para la banda de 3 a 5 μm y de 400 K para la banda de 8 a 12 μm).

3.4. Introducción al análisis no destructivo

La continua mejora de los sistemas de termografía IR en términos de sensibilidad radiométrica, rapidez de adquisición y resolución espacial ha permitido extenderla a aplicaciones que van más allá de la medida de temperaturas.

En esta línea, cabe destacar el análisis no destructivo, que pretende identificar la presencia de defectos en los materiales (nos referimos aquí a defectos macroscópicos, no a los microdefectos que afectan a la red cristalina del material).

La inspección visual o mediante imagen en el visible está muy limitada en sus capacidades, ya que sólo percibe defectos superficiales (salvo en los casos de materiales transparentes como el vidrio). Esto ha motivado el desarrollo de una gran variedad de técnicas, basadas generalmente en la excitación del material con algún tipo de energía y el análisis de su respuesta. En general, cuando una señal dada toca la superficie de un material, ésta puede ser absorbida, reflejada o transmitida y la propagación de la señal dentro del material depende de sus propiedades mecánicas, térmicas, químicas, acústicas, eléctricas y ópticas. Por supuesto, estas propiedades se ven modificadas en presencia de inhomogeneidades alterando de manera global la respuesta del material. Lo que se necesita es elegir la técnica más apropiada teniendo en cuenta que su efectividad depende de dos factores principales:

- Las propiedades del material base (térmicas, ópticas, eléctricas, etc.) deben permitir que la señal viaje a través de él.
- La perturbación que causa un defecto oculto a la propagación del test debe ser lo suficientemente grande para que no se confunda con ruido de fondo.

Hay gran variedad de técnicas que se basan en las propiedades térmicas, acústicas, eléctricas o en la respuesta del material a la radiación (rayos X, gamma o incluso neutrones) pero ninguna es capaz de detectar cualquier tipo de defecto en cualquier tipo de material así que se ha de seleccionar la más adecuada para cada aplicación específica y algunas veces será necesaria una sinergia entre varias técnicas.

Una buena técnica de NDT debería poseer las siguientes características:

- **Detección de defectos:** posibilidad de descubrir anomalías en un estadio temprano, antes de que se manifiesten los efectos negativos. Este requerimiento conlleva alta resolución y alta sensibilidad.
- **No invasiva:** se pretende salvaguardar la pieza inspeccionada y evitar cualquier alteración en la misma que pueda afectar a su propósito.
- **No dañina:** importante para proteger a los operarios y al medio ambiente de los posibles efectos de negativos de contaminación.
- **Tiempo y coste:** estos son dos parámetros importantes en la industria que puede imponen serias limitaciones al uso de una técnica en particular aunque cumpla con las tres características anteriores.

3.4.1. Principales técnicas de NDT

A continuación damos una breve descripción de las técnicas de NDT más habituales, a excepción de la termografía IR que estudiaremos en profundidad en la sección siguiente [11]:

- **Inspección visual:** representa el primer paso del examen NDT. De hecho tiene varias ventajas reales: simplicidad, rapidez, bajo coste, mínimo entrenamiento y requerimientos de equipos y la posibilidad de ser llevado a cabo mientras el material está siendo usado o procesado.
- **Corrientes de Foucault:** se usa la inducción electromagnética para detectar defectos en materiales que son conductores eléctricos. Un cambio en la conductividad eléctrica o la permeabilidad del material provoca un cambio en la fase y amplitud de la corriente medida.
- **Líquidos penetrantes:** es un método utilizado en materiales no porosos (metales, plásticos o cerámicos). Consiste en aplicar un fluido con tensión superficial baja en la superficie del material y después de un tiempo retirarlo y observar los patrones indicadores de defectos.
- **Análisis radiográfico:** es uno de los métodos más conocidos. Se basa en la capacidad que tiene la radiación de longitud de onda corta para penetrar en los materiales. Mide la atenuación producida para determinar anomalías.
- **Ultrasonidos:** se basa en el principio de que una onda ultrasónica (de frecuencia mayor a 20 kHz) se modifica cuando atraviesa un material: pueden ser reflejadas, refractadas y enfocadas; en particular, cuando se introducen en un material homogéneo, viajan en línea recta a una velocidad constante hasta que encuentran una discontinuidad.

3.5. NDT mediante termografía IR

Hay dos modos de aplicación diferentes de la termografía IR al análisis no destructivo: la pasiva y la activa.

3.5.1. Termografía pasiva

La **termografía pasiva** se utiliza para analizar componentes que están en condiciones de operación a una temperatura superior al ambiente. La inspección no requiere ninguna estimulación térmica externa sobre el objeto a analizar: el flujo de calor generado por

el propio objeto bajo estudio se aprovecha para evaluar su correcto o incorrecto funcionamiento. Por ejemplo, la termografía pasiva se utiliza para inspeccionar hornos, instalaciones eléctricas o centralitas. Un incremento en la resistencia eléctrica de un elemento induce un aumento de la temperatura por lo que es posible distinguir sobrecalentamientos en conexiones así como defectos asociados con otros problemas.

La termografía pasiva es útil en el mantenimiento predictivo para descubrir un problema antes de que su solución sea cara o imposible ya que el sobrecalentamiento es habitualmente el primer signo de un problema en un aparato eléctrico o mecánico. Sin embargo, no proporciona medidas cuantitativas (más allá de la propia temperatura), y no es útil para inspeccionar materiales o piezas antes de su puesta en servicio.

Si se quiere información cuantitativa sobre defectos o propiedades térmicas hay que recurrir a la termografía activa.

3.5.2. Termografía activa

En la **termografía activa**, la inspección se lleva a cabo estimulando térmicamente el objeto bajo estudio y monitorizando la variación de temperatura de su superficie durante la fase de transitorio de calentamiento o enfriamiento. El análisis se realiza modelando la respuesta al estímulo en términos de la conducción del calor dentro del objeto, lo que permite estimar las propiedades térmicas ajustando el modelo a la respuesta medida. Se trata de una técnica mucho más potente, y a la vez más compleja que la termografía pasiva, tanto desde el punto de vista teórico como experimentalmente.

En las aplicaciones estudiadas en el presente documento, nos centraremos en la termografía activa infrarroja.

Ventajas y dificultades de la termografía IR Cualquier técnica de análisis no destructivo tiene sus puntos fuertes y sus puntos débiles. En el caso de la termografía activa IR, las ventajas e inconvenientes son los siguientes:

Ventajas

- Rápida inspección (hasta unos m^2 en unos pocos segundos).
- Sin contacto.
- Seguridad del personal (ya que la radiación infrarroja no es dañina).

- Los resultados son fáciles de interpretar en una primera aproximación (se “ve” lo que se está inspeccionando). Pero además, las imágenes pueden ser procesadas para obtener mayor información, a menudo de tipo cuantitativo.
- Amplio abanico de aplicaciones.
- Requiere una única herramienta de inspección para todas las tareas de inspección.

Dificultades

- No es sencillo obtener de manera rápida una excitación térmica uniforme y altamente energética sobre una gran área.
- Las pérdidas térmicas (convección y radiación) dificultan la interpretación de los resultados obtenidos.
- El coste de los equipos es alto en comparación con otras técnicas (aunque la tendencia los últimos años ha sido de una reducción de precios considerable, llegando a ser a día de hoy asumible para muchas empresas).
- Sólo puede detectar defectos a partir de la falta de uniformidad de las propiedades térmicas (por ejemplo, delaminaciones y fracturas son sólo detectados si producen resistencias térmicas en la interfaz).
- Su capacidad de penetración bajo la superficie del material es limitada.
- En algunas aplicaciones puede ser problemático el desconocimiento de la emisividad del material.

Hay que señalar también un inconveniente de una naturaleza diferente, señalado por D. Balageas [9]: la propia simplicidad del montaje experimental y la rapidez con la que se obtienen imágenes térmicas puede incentivar un análisis poco riguroso, que no modelice adecuadamente los fenómenos térmicos implicados, y salte a conclusiones precipitadas que pasen por cuantitativas sin serlo. La literatura sobre termografía activa es abundante, pero buena parte de ella adolece de la falta de fundamentación física que critica este autor. Una dificultad del trabajo desarrollado en esta tesis ha sido la necesidad de poner en claro esos fundamentos físicos. A ello hemos dedicado los dos siguientes capítulos.

3.5.3. Tipos de excitación térmica en termografía activa

Existen numerosos tipos de estimulación térmica de interés práctico en la termografía activa para NDT-IR. A continuación, se explican brevemente tres de ellos: termografía

pulsada (*pulsed thermography, PT*), termografía lock-in (*Lock-in thermography, LT*) y calentamiento escalón (*Step heating, SH*).

Termografía pulsada (Pulsed Thermography, PT) La termografía pulsada es uno de los métodos usados más ampliamente. Básicamente, se trata de calentar brevemente el espécimen y registrar con la cámara IR la curva de decaimiento de temperatura. La energía suministrada por el pulso en la cara delantera (cara excitada) se propaga por difusión bajo la superficie, pero la presencia de un defecto subsuperficial modifica la velocidad de difusión con respecto al material sano. La excitación térmica se consigue generalmente con una lámpara flash y su duración va de unos pocos milisegundos en el caso de materiales de alta conductividad térmica (tales como metales) a unos pocos segundos para especímenes con conductividades térmicas bajas (como plásticos o materiales compuestos de resina epoxy. El calentamiento producido es generalmente de unos pocos grados por encima de la temperatura inicial del material, lo que previene el daño en el componente inspeccionado y la rápida estimulación térmica hace que la duración de la inspección sea breve (una de las razones de la popularidad de este método).

Varias configuraciones de medida son posibles:

- *Inspección puntual*: calentamiento con un láser o con un rayo de luz focalizado. Tiene como ventajas que es un calentamiento repetitivo y uniforme y como desventajas que es necesario barrer el punto de excitación para inspeccionar completamente una superficie, lo que ralentiza el proceso.
- *Inspección lineal*: calentamiento usando lámparas lineales, cables calentados o propulsores de aire (calientes o fríos). Tiene una velocidad de inspección rápida (hasta $1m^2/s$) y una buena uniformidad gracias al movimiento lateral.
- *Inspección superficial*: calentamiento usando lámparas flash. Tiene como ventajas que un análisis completo del fenómeno es posible porque se puede registrar simultáneamente la evolución de la temperatura en toda la superficie, pero tiene el inconveniente de que es difícil corregir un calentamiento uniforme, lo que debe ser corregido en el tratamiento posterior de los datos.

Las configuraciones de observación posibles son:

- *En reflexión*: la fuente térmica y el detector están localizados en el mismo lado del componente a inspeccionar
- *En transmisión*: la fuente térmica y el detector están situados cada uno a un lado del componente a inspeccionar.

De forma general, el modo de reflexión se usa para detección de defectos situados cerca de la superficie calentada mientras que el de transmisión permite identificar defectos cerca de la cara trasera. Obviamente, si la cara trasera no es accesible, el método de transmisión no es posible.

Termografía lock-in (Lock-in Thermography, LT) La termografía lock-in (LT) se basa en la excitación térmica periódica (sinusoidal) del espécimen bajo estudio [30]. Se lleva a cabo iluminando la muestra con una lámpara modulada. Este calentamiento periódico lleva a una variación armónica de la temperatura de la superficie del objeto así como en su interior, aunque con una amplitud fuertemente atenuada en función de la profundidad. El análisis de las medidas en termografía lock-in consiste en el estudio de la amplitud y de la fase de la temperatura superficial medidas en relación a la excitación. Es decir, una medida de termografía lock-in proporcionará una imagen de amplitud y una de fase, o una imagen *en fase* (0°) y una en *cuadratura* (-90°), referidas a la fase de la excitación periódica introducida. Para propósitos de análisis no destructivo, la imagen de fase es normalmente más informativa que la de amplitud, ya que esta última depende fuertemente de la emisividad local del objeto y de la intensidad de la iluminación, en general no uniforme. Por el contrario, para detección de puntos calientes en dispositivos electrónicos, es más adecuada la imagen de amplitud, ya que está directamente relacionada con el poder de disipación local.

La ventaja de la *termografía lock-in* con respecto a métodos estacionarios radica sobre todo en su significativa mejora de sensibilidad asociada a la detección síncrona (de ahí el nombre de lock-in [31]) posibilitada por el carácter armónico de la excitación. Como inconveniente se puede destacar que hay que relacionar la frecuencia de la excitación con las propiedades del material: profundidad del defecto y naturaleza del mismo, por lo que hace necesario un conocimiento previo de estos o bien un barrido fino en frecuencias que asegure la identificación de todos los tipos de defectos cualquiera que sea la profundidad a la que se encuentre [157], [120].

Calentamiento escalón (Step Heating, SH) En este procedimiento es el aumento de la temperatura el que es monitorizado, durante la aplicación de una excitación escalón. La muestra es continuamente calentada a potencia baja y sus propiedades térmicas son obtenidas de la variación de la temperatura con el tiempo.

La mayoría de los esfuerzos en investigación y de los trabajos publicados durante los últimos años se han ocupado de la termografía pulsada y la termografía lock-in. De hecho, desde los artículos de Osiander y Spicer en 1998 [135], pocos trabajos relacionados con el calentamiento escalón se pueden encontrar en la literatura [61],[4].

Desde un punto de vista práctico, la principal diferencia con la PT es que con esta técnica se trabaja a baja potencia y los tiempos de medida son más largos. Su principal ventaja comparada con la termografía lock-in es que la profundidad del defecto y las propiedades térmicas son accesibles con una sola medida sin un conocimiento previo de la muestra; es decir, no es necesario conocer sus propiedades térmicas o la localización del defecto.

Aunque la realización experimental del SH es muy diferente del PT, matemáticamente ambos procedimientos dan la misma información. Este tipo de excitación será más ampliamente desarrollado en los siguientes capítulos de esta tesis.

Hay que señalar que si queremos ir más allá de la simple detección de defectos y buscamos su caracterización térmica o la del propio material, es decir, si queremos resultados cuantitativos y no solo cualitativos, tendremos que modelizar los transitorios de calor en el material para poder interpretar los resultados. Esto nos va a obligar a resolver la ecuación del calor en los próximos capítulos.

Transmisión del calor. Teoría básica y soluciones aproximadas

RESUMEN: Este capítulo expone la teoría básica de la transmisión del calor repasando los mecanismos de radiación, convección y conducción. Se describen las soluciones aproximadas en los casos sencillos de temperatura uniforme o estado estacionario, que serán útiles como casos límite, pero no describen el problema de la termografía activa, en el que tenemos una temperatura no uniforme que varía con el tiempo. Se hará especial hincapié en las soluciones analíticas unidimensionales con convección para el caso estacionario que serán utilizadas a lo largo de toda la tesis.

Cuando dos regiones están a diferentes temperaturas, el calor fluye de la más caliente a la más fría. Como es bien sabido, existen tres mecanismos distintos por los cuales esta transferencia tiene lugar [32][28]:

- *Conducción*: propagación de calor debida a la agitación térmica de las moléculas, sin que exista un desplazamiento neto de materia.
- *Convección*: el calor es transferido por el desplazamiento de las moléculas de una sustancia; sólo puede producirse en fluidos.
- *Radiación*: es la transmisión de calor entre dos cuerpos sin que entre ellos exista contacto, debida a las ondas electromagnéticas que emite todo cuerpo que esté a mayor temperatura que el cero absoluto.

4.1. Transmisión de calor por conducción

La teoría de la conducción del calor se debe al físico y matemático francés Joseph Fourier que publicó en 1822 su *Théorie analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor), tratado en el cual formuló la ecuación diferencial parcial que gobierna la difusión del calor,

solucionándola mediante el uso de series de funciones trigonométricas y estableciendo así la representación de cualquier función como series de senos y cosenos, ahora conocidas como *las series de Fourier*. En el planteamiento de Fourier no se tiene en cuenta la estructura molecular de la sustancia ni cómo es el mecanismo microscópico de transmisión, sino que se considera la materia como un medio continuo.

Consideraremos una distribución espacio-temporal de la temperatura (*campo de temperaturas*):

$$T = f(x, y, z, t)$$

La ley de Fourier establece que el flujo de calor por conducción en un medio isótropo es proporcional y de sentido contrario al gradiente de temperatura.

$$\vec{\phi} = -\kappa \vec{\nabla} T \quad (4.1)$$

donde $\vec{\phi}$ es el vector densidad de flujo de calor en $[Wm^{-2}]$, κ es una constante de proporcionalidad llamada *conductividad térmica* $[Wm^{-1}K^{-1}]$ y $\vec{\nabla} T$ es el gradiente del campo de temperaturas en el interior del material $[Km^{-1}]$. El signo indica que el calor debe fluir hacia la zona de temperatura más baja.

En la ecuación (4.1) aparece el flujo de calor que es un parámetro que no es fácil de medir y es a menudo desconocido. Es conveniente por eso construir una ecuación en la que sólo aparezcan temperaturas y parámetros propios del material. Para relacionar el

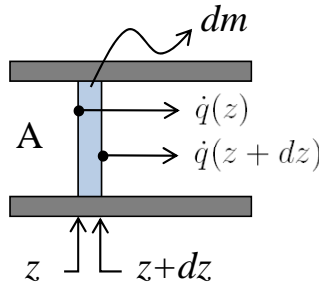


Figura 4.1: Consideramos un diferencial de masa $dm = \rho A dz$ entre los puntos z y $z + dz$ y conducción unidimensional (podemos imaginar como aislantes las capas de arriba y abajo). La tasa de transferencia de calor $[W]$ es $\dot{q}(z)$ en z y $\dot{q}(z + dz)$ en $z + dz$.

flujo de calor con la temperatura recurrimos a la figura 4.1. Suponiendo un caso sencillo unidimensional, es claro que la diferencia entre la tasa de calor entrante y la saliente determina el ritmo de variación de la temperatura del diferencial de masa (siendo c_p el calor

específico y ρ la densidad):

$$\underbrace{[\dot{q}(z, t) - \dot{q}(z + dz, t)]}_{-d\dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial t}(z, t) c_p \rho A dz \quad (4.2)$$

lo que puede escribirse como

$$-\frac{\partial \dot{q}}{\partial z} = c_p \rho A \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3)$$

La ley de Fourier (4.1) en una dimensión, teniendo en cuenta que $\phi \equiv \dot{q}/A$, dice que $\dot{q} = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial z}$, con lo que llegamos a que:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{c_p \rho}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (4.4)$$

que es la **ecuación del calor unidimensional**. Si definimos la difusividad térmica

$$\alpha \equiv \frac{\kappa}{\rho c_p} \quad (4.5)$$

(cuyas unidades son $[m^2 s^{-1}]$ en el sistema internacional), tenemos

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.6)$$

y en tres dimensiones, $\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$ siendo $\nabla^2 \equiv \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$ el operador laplaciano.

El caso más general de la ecuación de conducción, expresada en forma diferencial, refleja el balance entre el flujo neto del calor, el calor generado y calor almacenado en el material:

$$\alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{q}_G}{\rho c_p} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.7)$$

donde, \dot{q}_G es el calor generado por unidad de tiempo y volumen. En esta memoria no consideraremos el caso de calor generado en el medio, por lo que será la ecuación (4.6) nuestro punto de partida para el estudio de la conducción.

Significado físico de la difusividad térmica. La ecuación del calor (4.6) muestra que la variación de temperatura en un material, para un valor dado de $\nabla^2 T$, es proporcional a α , la difusividad térmica.

Se suele decir que un material se enfría o se calienta rápidamente porque es un buen conductor térmico, pero en realidad la razón es que es un buen difusor. La confusión entre estos dos términos proviene de que en la materia condensada (líquidos y sólidos) buenos/malos conductores suelen ser buenos/malos difusores ya que las variaciones de κ entre distintos materiales son mucho mayores que las del producto ρc . Pero κ y α juegan

papeles muy diferentes: mientras que κ controla el flujo de calor en estado estacionario, α determina la rapidez de la variación de temperatura en los transitorios.

4.2. Transmisión de calor por convección

El término *convección* proviene del verbo latino “*convectare*” que significa llevar a un sitio y se refiere al proceso de transporte de energía térmica desde (o hacia) un sólido a temperatura T_s por medio de un fluido adyacente a temperatura T_f en movimiento, en presencia de un gradiente de temperaturas. En realidad, el fenómeno envuelve dos mecanismos [5]:

- La conducción de calor entre el sólido y la capa adyacente de fluido en reposo.
- El movimiento de las partículas del fluido.

Existen dos tipos de convección:

- **Convección libre o natural.** Ocurre cuando la fuerza motriz del movimiento del fluido procede únicamente de la variación de su densidad como consecuencia del contacto con una superficie a distinta temperatura, lo que da lugar a fuerzas ascensionales.
- **Convección forzada.** Tiene lugar cuando una fuerza motriz exterior mueve el fluido. Como, en general, la velocidad del fluido en la convección forzada es mayor que en la convección natural, se transfiere una mayor cantidad de calor para una determinada diferencia de temperaturas.

4.2.1. Ley de enfriamiento de Newton

Consideremos una superficie sólida que se encuentra a una temperatura T_s , en contacto con un fluido a una temperatura T_f . En estas condiciones se produce convección, caracterizada por un flujo térmico transmitido dado por una relación empírica conocida como *ley de enfriamiento de Newton*. Publicada en la obra “*Tabula calorum*” establece que, “*la rapidez de cambio de temperatura de un cuerpo en cualquier tiempo t es proporcional a la diferencial de las temperaturas del cuerpo y del medio circundante en el tiempo t* ”, o escrito de forma matemática:

$$\dot{q}_{cnv} \equiv \frac{dQ}{dt} = hA(T_s - T_f) \quad (4.8)$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor [$Wm^{-2}K^{-1}$] y A es el área del objeto. Si la temperatura del objeto T_s es mayor que la temperatura del ambiente T_f , el cuerpo pierde una cantidad de calor dQ en dt , disminuyendo su temperatura en dT_s . Es decir,

$$dQ = -mc_p dT_s \quad (4.9)$$

donde $m = \rho V$ es la masa del objeto (siendo ρ la densidad y V el volumen), y c_p es el calor específico. La ecuación que nos da la variación de la temperatura T del cuerpo en función del tiempo es:

$$\rho V c_p \frac{dT_s}{dt} = -hA(T_s - T_f) \quad (4.10)$$

La ecuación anterior es una expresión aproximada que supone que el sólido está todo él a la misma temperatura T_s . Una formulación más precisa del enfriamiento de un cuerpo en un medio necesitaría un análisis del flujo de calor que tuviera en cuenta que en general no es homogéneo en el sólido ni en el medio. La aplicabilidad de esta ley simplificada viene determinada por el valor del **número de Biot**.

El número de Biot El número de Biot es un número adimensional que relaciona la transferencia de calor por conducción dentro de un cuerpo y la transferencia de calor por convección en la superficie de dicho cuerpo. Su nombre hace honor al físico francés Jean Baptiste Biot que en 1804 analizó la interacción entre la conducción de un sólido y la convección en sus superficies. El número de Biot se define como:

$$Bi = \frac{hL}{\kappa} \quad (4.11)$$

siendo h el coeficiente de transferencia de calor, L una longitud característica, definida generalmente como el volumen del cuerpo dividido por su superficie externa total y κ la conductividad térmica del material.

Cuando el número de Biot es pequeño (en la práctica suele exigirse $Bi < 0,1$ para una placa plana) la conducción en el sólido es mucho más eficaz que la convección en el fluido y se puede considerar uniforme la temperatura de aquel [5].

4.3. Transmisión de calor por radiación

Mientras que la conducción y la convección térmica tienen lugar sólo en un medio material, la radiación térmica puede transportar el calor a través del vacío en forma de ondas electromagnéticas. La cantidad de energía que abandona una superficie en forma de calor radiante depende de la temperatura absoluta a la que se encuentra y también la

naturaleza de la superficie, como ya hemos visto al estudiar la ley de Planck y la definición de emisividad (apartados [2.2.3] y [2.2.2]). Generalmente, no es necesario considerar la dependencia espectral de la radiación y se puede dar cuenta de la pérdida total de calor usando la ley de Stefan-Boltzmann.

$$\Phi = \varepsilon\sigma AT^4 \quad (4.12)$$

Un cuerpo emite energía radiante con una rapidez dada por la ecuación (4.12), pero al mismo tiempo absorbe radiación de sus alrededores. Si un cuerpo se encuentra a temperatura T y el ambiente a una temperatura T_0 , la energía neta ganada o perdida por unidad de tiempo como resultado de la radiación es:

$$\Phi_{neta} = \varepsilon\sigma A(T^4 - T_0^4) \quad (4.13)$$

Se ha tenido en cuenta que $\alpha = \varepsilon$ (ley de Kirchhoff); se aprecia que esto tiene que ser así porque cuando el cuerpo esté en equilibrio con los alrededores; debe irradiar y absorber la misma cantidad de energía, de modo que, su temperatura permanezca constante.

Aproximación lineal. Generalmente, si las diferencias de temperatura con el ambiente no son muy grandes, esta ecuación se linealiza de la siguiente manera.

Si escribimos $T_s = T_f + \Delta T$, elevamos a la 4ª potencia y desarrollamos encontramos que:

$$\frac{T_s^4 - T_f^4}{T_f^4} = 4 \left(\frac{\Delta T}{T_f} \right) + 6 \left(\frac{\Delta T}{T_f} \right)^2 + 4 \left(\frac{\Delta T}{T_f} \right)^3 + \left(\frac{\Delta T}{T_f} \right)^4 \quad (4.14)$$

De modo que si $\frac{\Delta T}{T_f} \ll 1$ podemos despreciar los términos de orden mayor que uno y escribir:

$$T_s^4 - T_f^4 \simeq 4\Delta T \cdot T_f^3 \quad (4.15)$$

Si agrupamos las pérdidas por convección dadas por la ecuación (4.8) con las pérdidas por radiación dadas por la ecuación (4.13) y suponemos la simplificación anterior, obtenemos lo que llamaremos un **coeficiente de convección eficaz** h^{ef} dado por:

$$h^{ef} = h + 4\sigma\varepsilon T_f^3 \quad (4.16)$$

de modo que las pérdidas totales son

$$\Phi_{neta} + \Phi_{cnv} = h^{ef} \cdot A \cdot \Delta T \quad (4.17)$$

siendo ΔT la diferencia de temperatura del objeto con el ambiente. En lo sucesivo ignoraremos la radiación y se entenderá que cuando ponemos h nos referimos al h^{ef} que la engloba.

4.4. Dos casos sencillos

Nos proponemos ahora resolver la ecuación del calor unidimensional en dos casos sencillos: el del estado estacionario (en el próximo apartado) y el de temperatura uniforme (en el siguiente).

4.4.1. Caso estacionario

Planteamiento Podemos conseguir una importante simplificación en la ecuación del calor si suponemos que $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. La ecuación se convierte entonces en la ecuación de Laplace $\nabla^2 T = 0$ o, en una dimensión:

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = 0 \quad (4.18)$$

Este caso de estado estacionario es especialmente sencillo e importante (pues a largo plazo se alcanza siempre que hay convección y densidad de flujo constante, una situación muy habitual).

Condiciones de contorno. Vamos a resolver esta ecuación en un caso que será especialmente importante en esta tesis: el de una placa homogénea de espesor L con el eje z perpendicular a la placa de modo que la cara *delantera* sea $z = 0$ y la cara *trasera* sea $z = L$. Sobre la cara delantera de la placa incide una densidad de flujo externo de radiación que designaremos por $\phi_0 [W \cdot m^{-2}]$. El flujo neto será:

$$\phi = \phi^{rad} + \phi^{cnv} \quad (4.19)$$

donde, como es habitual, el flujo por convección ϕ^{cnv} engloba la conducción en el aire. A su vez, (siendo T_D la temperatura de la cara delantera y T_f la del ambiente)

$$\phi^{rad} = \phi_0(t) - \sigma \varepsilon (T_D^4 - T_f^4) \quad (4.20)$$

$$\phi^{cnv} = -h_D (T_D - T_f) \quad (4.21)$$

El término $\sigma \varepsilon (T_D^4 - T_f^4)$ vamos a englobarlo en la convección, con la linealización descrita en (4.15), aunque escribiremos por simplicidad h en lugar de h^{ef} . Así llegamos a que

para la cara delantera:

$$\phi_D = \phi_0 - h_D(T_D - T_f) \quad (4.22)$$

Para la cara trasera suponemos que no hay flujo externo. Si T_T es la temperatura en esa cara,

$$\phi_T = h_T(T_T - T_f) \quad (4.23)$$

Tenemos que poner aquí signo positivo para la convección, al contrario que en la cara delantera, porque la pérdida de calor significa aquí que ϕ va hacia la derecha (es positivo). En el interior de la placa, la transmisión del calor es sólo por conducción, y según la ley de Fourier, este flujo por conducción es $\frac{\dot{q}}{A} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}$. La conservación de la energía obliga a que:

$$\phi = \frac{\dot{q}}{A} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.24)$$

donde Φ representa tanto Φ_D como Φ_T .

Resolución La ecuación de Laplace unidimensional (4.18) tiene como solución general:

$$T(z) = A_1 z + A_2 \quad (4.25)$$

es decir, una distribución lineal de temperatura. Introduciendo esta solución en la condición de contorno (4.24), para las caras delantera y trasera, obtenemos dos ecuaciones de las que despejamos las constantes A_1 y A_2 . Haciendo por simplicidad $T_f = 0$ (se entiende entonces que las temperaturas que obtenemos representan el "exceso de temperatura respecto al ambiente") y operando se llega a:

$$A_1 = \frac{-h_T \phi_0}{\kappa(h_D + h_T) + h_D h_T L} \quad (4.26)$$

$$A_2 = \frac{\phi_0 (h_T L + \kappa)}{\kappa (h_D + h_T) + h_D h_T L} \quad (4.27)$$

Evidentemente, la temperatura en la cara delantera es $T(0) = A_2$, mientras que sustituyendo en (4.25), haciendo $z = L$ y simplificando se llega a que la temperatura en la cara trasera es:

$$T(L) = \frac{\phi_0 \kappa}{\kappa (h_D + h_T) + h_D h_T L} \quad (4.28)$$

Este resultado se expresa de forma más conveniente calculando la temperatura media:

$$T_m \equiv \frac{T(0) + T(L)}{2} = \frac{\phi_0}{2} \frac{2\kappa + h_T L}{(h_D + h_T)\kappa + h_D h_T L} \quad (4.29)$$

Y si $h_D = h_T = h$, queda muy sencillo:

$$T_m = \frac{T(0) + T(L)}{2} = \frac{\phi_0}{2h} \quad (4.30)$$

Por su parte, el cociente entre ambas temperaturas es también muy sencillo si $h_D = h_T = h$:

$$\frac{T(0)}{T(L)} = \frac{\phi_0(hL + \kappa)}{\phi_0\kappa} = 1 + \frac{hL}{\kappa} = 1 + Bi \quad (4.31)$$

Por lo tanto, si $Bi = \frac{hL}{\kappa_s} \ll 1$ podemos considerar la temperatura de la placa uniforme como ya habíamos mencionado. Intuitivamente, un número de Biot muy pequeño representa una conducción en el sólido muy eficaz en comparación con la convección en el fluido, lo que tiende a uniformizar la temperatura en aquel.

Resumiendo, para una placa homogénea sometida a una radiación constante por una cara, en estado estacionario:

- el cociente entre las temperaturas de cara caliente y fría viene determinado por el número de Biot: cuando este es muy pequeño (convección despreciable, o equivalentemente muy buena conducción) son muy parecidas, cuando es grande son muy distintas.
- la temperatura media es proporcional al flujo de calor e inversamente proporcional al coeficiente de convección (si no hubiera convección obtendríamos un valor infinito, pero es que entonces no habría estado estacionario).

4.4.2. Aproximación de “capacidad térmica global”

Planteamiento La aproximación más sencilla para el estudio de la transmisión del calor en el caso no estacionario es la de *capacidad térmica global*, que supone considerar T uniforme en el objeto. Esta aproximación es generalmente aplicable cuando el número de Biot es pequeño. En la práctica, se suele exigir para una placa plana que $Bi < 0,1$ [41].

Ecuación diferencial En esta aproximación podemos obtener una ecuación diferencial aplicando la conservación de la energía no a un diferencial de volumen como hacíamos

en la figura 4.1 sino a la placa en conjunto. Obtenemos que ¹

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = A(\phi_D + \phi_T) = A(\phi_0 - (h_D + h_T)(T - T_f)) \quad (4.32)$$

Llamando $h_D + h_T \equiv 2h$, poniendo $T_f = 0$, y dividiendo por V , tenemos:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{\phi_0 - 2hT}{L} \quad (4.33)$$

expresión que juega aquí el papel de la ecuación del calor (4.4). Haciendo:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &\equiv \frac{\phi_0}{2h} \quad (\text{dimensiones de temperatura}) \\ \tau &\equiv \frac{\rho c L}{2h} = \frac{\kappa L}{\alpha 2h} \quad (\text{dimensiones de tiempo}) \end{aligned}$$

llegamos a:

$$\tau \frac{dT}{dt} = \varphi_0(t) - T \quad (4.34)$$

El caso más sencillo es que el flujo externo ϕ_0 sea cero; es decir, que el objeto se esté calentando o enfriando sólo por convección. Entonces, $\varphi(t) = 0$ y es inmediato separar variables e integrar la ecuación anterior para encontrar que T tiende a 0 según una exponencial decreciente de constante de tiempo τ .

Resolución. En el caso general, la ecuación (4.34), puede resolverse aplicando la transformada de Laplace. Recordemos que la transformada de Laplace de la función $f(t)$ es una función $F(s)$ definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.35)$$

(usaremos también la notación $F \equiv \mathcal{L}[f] \equiv \bar{f}$). La transformada de Laplace es un operador lineal que tiene la propiedad de que:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \quad (4.36)$$

lo que permite transformar ecuaciones diferenciales en algebraicas. Así, aplicándola a (4.34), tenemos:

$$\tau \cdot (s\bar{T} - T(0)) = \bar{\varphi}_0 - \bar{T} \quad (4.37)$$

Despejando \bar{T} y haciendo la transformada inversa:

$$T = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\bar{\varphi}_0 + \tau \cdot T(0)}{\tau s + 1} \right) \quad (4.38)$$

¹Hemos escrito $\phi_T = -h_T(T - T_f)$ porque, a diferencia de (4.23), ϕ_T no representa ahora un flujo (positivo cuando va hacia la derecha) sino un balance de energía (negativo cuando $T_f > T$)

Si la condición inicial es $T(0) = 0$, y teniendo en cuenta que la transformada inversa del producto es el producto de convolución de la transformada ²,

$$T(t) = \varphi_0 * \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\tau s + 1} \right) = \varphi_0 * e^{-t/\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^t \varphi_0(u) e^{-\frac{t-u}{\tau}} du \quad (4.39)$$

Para el caso particular en el que el flujo de calor es un pulso cuadrado ($\phi(t) = \phi_0$ para $0 < t < t_0$ y $\phi(t) = 0$ en otro caso) se llega a que

$$T(t) = \begin{cases} \varphi_0(1 - e^{-t/\tau}) & 0 < t < t_0 \\ \varphi_0 e^{-t/\tau} (e^{t_0/\tau} - 1) & t_0 < t \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

Un ejemplo puede verse en la figura 4.2. Puede apreciarse que para tiempos suficien-

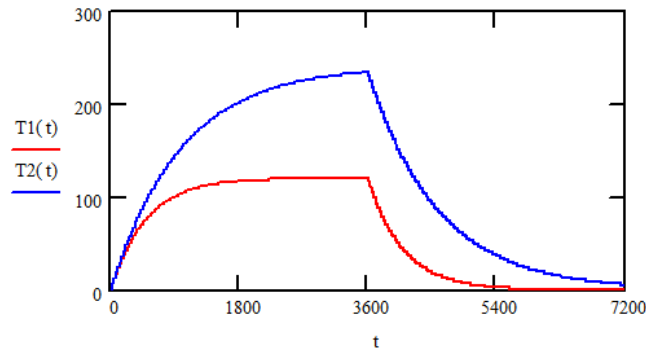


Figura 4.2: Temperatura sobre el ambiente (K) en función del tiempo (s) en la aproximación de capacidad térmica global para una placa de acero de 2 mm de espesor que absorbe un pulso cuadrado de $\phi_0 = 1200 \text{ W/m}^2$ y 60 minutos de duración, para dos valores del coeficiente de convección: $h = 10 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ (T1, en rojo) y $h = 5 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ (T2, en azul). Se aprecia que la temperatura en el estado estacionario es ϕ/h , y el tiempo característico para alcanzarla τ es inversamente proporcional a h

temente largos la temperatura tiende a un valor estacionario $T(\infty) = \varphi_0 = \frac{\phi_0}{2h}$ que se corresponde con el valor de T_m deducido en (4.30) para el caso estacionario. El periodo de enfriamiento puede expresarse de manera más conveniente en la forma:

$$T(t > t_0) = T(t_0) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

Obviamente, al ser $Bi = 0$ en esta aproximación, $T(0)$ y $T(L)$ coinciden, de acuerdo con (4.31).

²Es decir, $\mathcal{L}^{-1} \{F(s) \cdot G(s)\} = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$

4.5. Conclusiones

Este capítulo ha servido para estudiar la teoría y las soluciones aproximadas de la transmisión del calor. Se han estudiado dos casos sencillos: caso estacionario y aproximación de "capacidad térmica global", que nos han permitido comprender la naturaleza de estos mecanismos que serán utilizados a lo largo de la tesis.

Transmisión del calor. Soluciones exactas en una dimensión

RESUMEN:

Resolver la ecuación del calor para un problema unidimensional (que modela una placa plana sometida a un flujo de calor), es el objetivo de este capítulo. Aquí se ponen las bases teóricas que van a ser usadas en el resto de la tesis. Aunque la mayor parte de lo expuesto puede encontrarse en la bibliografía, se ha realizado un esfuerzo para sintetizar resultados dispersos y dotarlos de un marco coherente, proporcionado por la resolución mediante *transformada de Laplace* y el enfoque de *teoría de sistemas lineales*. Se considera la evolución de la temperatura como la respuesta (*output*) de la muestra a una excitación (*input*), obtenida por convolución de ésta con una función de respuesta a impulso que depende de las propiedades térmicas del sistema. Aunque *a priori* lo natural es considerar como excitación el flujo de calor incidente, se demuestra que el formalismo funciona igual si se toma como *input* la temperatura de la cara sometida a la radiación y como *output* la de la cara opuesta, lo que en capítulos posteriores permitirá extender la aplicabilidad del método.

Aunque en determinadas situaciones las aproximaciones desarrolladas en el capítulo anterior pueden dar resultados válidos, hay a menudo problemas prácticos en los que es imprescindible tener una solución exacta de la ecuación del calor. En particular, esto es cierto en la mayoría de las técnicas de termografía activa usadas para análisis no destructivo (*Non-Destructive Testing, NDT*) de materiales que nos interesan en esta memoria.

5.1. Introducción

La transferencia de calor unidimensional estacionaria es casi siempre una idealización del proceso real que estamos tratando de modelar [41]. Por ejemplo, en el modelado de

la transferencia de calor a través de una pared plana, se asume típicamente que la temperatura ambiente a ambos lados es constante y de valores fijos, cuando en realidad esas temperaturas cambian con las condiciones ambientales (tales como el día y la noche). Un análisis estacionario unidimensional sólo será apropiado cuando el tiempo característico de cambio de temperatura ambiente sea significativamente más largo que el tiempo de difusión característico (o tiempo de relajación térmico) de la pared.

Análogamente, como hemos visto en el apartado [4.4.2], la aproximación de capacidad térmica global sólo será válida generalmente cuando el número de Biot sea muy pequeño. Pero incluso para convección despreciable, y por tanto, $Bi = 0$, puede no ser válida la aproximación si el flujo incidente tiene una variación muy rápida con el tiempo como es el caso de excitación flash, tal como veremos más adelante en este capítulo.

En definitiva, cuando no se cumplen los criterios que permiten una u otra simplificación, como ocurrirá en los casos de interés en esta tesis, se hace necesario modelar la dependencia con el tiempo y la posición de la temperatura. Analíticamente, esto implica que el campo de temperatura vendrá definido por ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) en lugar de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La solución de la EDP del calor, incluso para el caso sin fuentes y unidimensional, al que nos vamos a restringir aquí, puede plantear una gran variedad de casos diferentes, según sean las condiciones iniciales y de contorno. El libro clásico sobre este tema es el de Carslaw y Jaeger [32], que no ha dejado de reeditarse desde su publicación original en 1946.

El sistema físico que nos va a interesar a nosotros es una placa homogénea que recibe un flujo de calor, posiblemente variable, por una cara, y tiene pérdidas de calor por ambas caras. Modelizaremos éstas por un coeficiente de convección efectiva h que tiene en cuenta la convección y (convenientemente linealizada) la radiación.

5.2. Solución de la ecuación del calor unidimensional

Vamos a empezar por obtener la solución general al problema de la distribución de temperaturas en una placa plana sometida a un flujo de radiación. Escribimos la ecuación del calor para el caso unidimensional, sin fuentes (ya que supondremos que no se genera calor en la placa y que no hay pérdidas en el plano de la placa; es decir, en el plano xy las temperaturas son uniformes):

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0} \quad (5.1)$$

5.2.1. Condiciones de contorno: flujo conocido en una cara

Si representamos por ϕ [W/m^2] la densidad de flujo de calor, las condiciones de contorno son, midiendo como de costumbre la temperatura respecto del ambiente ($T_a = 0$):

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \phi_{(z=0)} = \phi_0(t) - h_D T(0, t) \quad (5.2)$$

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = \phi_{(z=L)} = h_T T(L, t) \quad (5.3)$$

donde $\phi_0(t)$ representa la irradiancia externa, que sólo incide sobre la cara delantera, y se ha tenido en cuenta el flujo de calor por convección en ambas caras, con coeficientes h_D y h_T para las caras delantera y trasera, respectivamente¹.

5.2.2. Solución mediante transformada de Laplace

Problemas del tipo del que nos ocupa son resueltos en [32] con una variedad de métodos matemáticos, entre los que destaca la separación de variables, las funciones de Green y las transformadas de Laplace. Este último método va a ser el más conveniente para nosotros, por la flexibilidad que proporciona, ya que, como veremos, una vez resuelto el problema para una excitación tipo impulso, va a poderse resolver el caso de una excitación genérica mediante el producto de convolución. Siguiendo el planteamiento de [158], transformamos (respecto al tiempo) la ecuación diferencial (5.1), obteniendo:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{T} = 0 \quad (5.4)$$

Para la transformada de Laplace hemos empleado la notación $\bar{T}(z, s) \equiv \mathcal{L}[T(z, t)]$. Se ha utilizado que $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}T(t)\right] = s\bar{T}(s) - T(t=0)$ (donde la temperatura inicial $T(t=0)$ suponemos que es igual a la del ambiente). La variable s funciona aquí como un parámetro, y por eso hemos puesto una derivada total en vez de parcial. La solución general de esta ecuación diferencial es:

$$\bar{T}(z, s) = A \sinh(qz) + B \cosh(qz) \quad \text{siendo} \quad q^2 = \frac{s}{\alpha} \quad (5.5)$$

donde A y B serán en general funciones del parámetro s , y quedarán determinadas por las condiciones de contorno.

¹Obsérvese que en la cara $z = L$ escribimos la densidad de flujo de calor por convección con signo +, al contrario que en $z = 0$; esto se debe a que la pérdida de calor requiere que la derivada de T respecto de z sea negativa en $z = L$ y positiva en $z = 0$.

Para imponerlas, aplicamos también la transformada de Laplace a (5.2) y (5.3). Obtenemos así:

$$-\kappa \frac{d\bar{T}}{dz} \Big|_{z=0} = \bar{\phi}_0(s) - h_D \bar{T}(0, s) \quad (5.6)$$

$$-\kappa \frac{d\bar{T}}{dz} \Big|_{z=L} = +h_T \bar{T}(L, s) \quad (5.7)$$

Si ahora sustituimos (5.5) aquí,

$$-\kappa q [A \underbrace{\cosh(q0)}_{=1} + B \underbrace{\sinh(q0)}_{=0}] = \bar{\phi}_0(s) - h_D \bar{T}(0, s) = \bar{\phi}_0(s) - h_D B \quad (5.8)$$

$$-\kappa q [A \cosh(qL) + B \sinh(qL)] = h_T \bar{T}(L, s) = h_T [A \sinh(qL) + B \cosh(qL)] \quad (5.9)$$

(hemos tenido en cuenta que $\bar{T}(0, s) = A \sinh(q0) + B \cosh(q0) = B$). Despejamos de la primera ecuación:

$$A = - \left(\frac{\bar{\phi}_0(s) - h_D B}{\kappa q} \right) \quad (5.10)$$

Antes de sustituir en la segunda, la reorganizamos:

$$A \underbrace{[-\kappa q \cosh(qL) - h_T \sinh(qL)]}_{\equiv[1]} = B \underbrace{[\kappa q \sinh(qL) + h_T \cosh(qL)]}_{\equiv[2]}$$

y sustituyendo ahora (5.10),

$$-\frac{\bar{\phi}_0}{\kappa q} [1] + \frac{h_D B}{\kappa q} [1] = B [2] \Rightarrow B = \frac{-\frac{\bar{\phi}_0}{\kappa q} [1]}{[2] - \frac{h_D}{\kappa q} [1]}$$

Desarrollando [1] y [2], tenemos finalmente

$$B = \frac{\bar{\phi}_0}{\kappa q} \frac{\kappa q \cosh(qL) + h_T \sinh(qL)}{\left[(h_D + h_T) \cosh(qL) + \left(\kappa q + \frac{h_T h_D}{\kappa q} \right) \sinh(qL) \right]} \quad (5.11)$$

Una vez que tenemos determinadas A y B , sustituimos en (5.5) para tener la solución de la ecuación (5.4):

$$\bar{T}(z, s) = \frac{\bar{\phi}_0}{\kappa q} \left\{ -\sinh(qz) + \frac{\left[\frac{h_D}{\kappa q} \sinh(qz) + \cosh(qz) \right] \cdot \left[\cosh(qL) + \frac{h_T}{\kappa q} \sinh(qL) \right]}{\left(\frac{h_D + h_T}{\kappa q} \right) \cosh(qL) + \left(1 + \frac{h_T h_D}{\kappa^2 q^2} \right) \sinh(qL)} \right\} \quad (5.12)$$

(recordemos que $q = \sqrt{s/\alpha}$). La solución $T(z, t)$ de la ecuación diferencial original (5.1) se obtendrá haciendo la transformada de Laplace inversa de $\bar{T}(z, s)$. El problema, sin embargo, no es trivial, ya que $\bar{T}(z, s)$ no tiene transformada inversa analítica. Antes de resolverlo conviene hacer algunas consideraciones genéricas (apartado [5.2.3]) y estudiar un caso particular especialmente importante, el del sólido semiinfinito (sección [5.3]).

5.2.3. Relación con la teoría de sistemas lineales

La ecuación (5.12) es, esquemáticamente, $\bar{T}(z, s) = \bar{\phi}_0 \cdot \left[\frac{1}{\kappa q} \{ \dots \} \right]$. Como la transformada inversa de un producto es el producto de convolución de las transformadas inversas, el resultado será:

$$T(z, t) = \phi_0(t) * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\kappa q} \{ \dots \} \right] \quad (5.13)$$

En el caso de que la excitación sea una función impulso, $\phi_0(t) = Q_0\delta(t)$, queda simplemente

$$T(z, t) = Q_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\kappa q} \{ \dots \} \right] \quad (5.14)$$

lo que significa que $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\kappa q} \{ \dots \} \right]$ es la respuesta del sistema a una excitación impulso unitaria, por lo que se llama *función de respuesta a impulso* (en inglés, impulse response function, *irf*). Vemos que la excitación impulso equivale a poner en la ecuación Q_0 en vez de $\bar{\phi}_0$ ². En lo sucesivo supondremos este caso, ya que el caso general se obtiene simplemente quitando el Q_0 y haciendo la convolución con $\phi_0(t)$, como en (5.13).

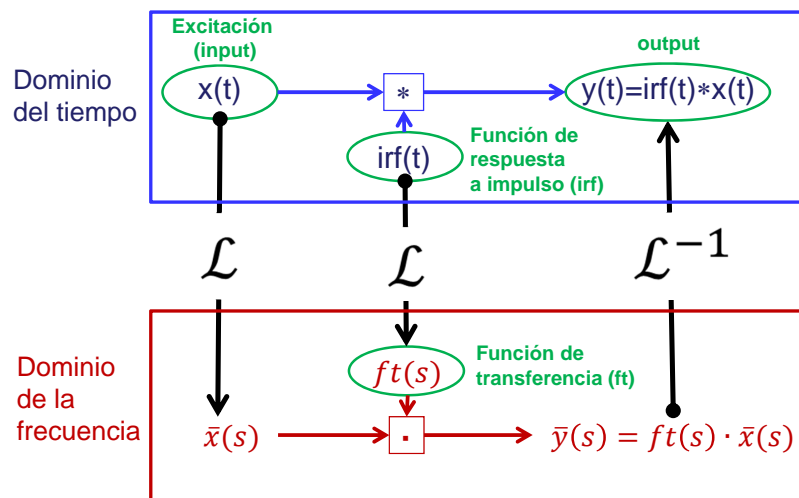


Figura 5.1: Esquema de los dos dominios, temporal y de frecuencias, de la teoría de sistemas lineales. Adaptada de [195].

Este tipo de resultados son estándar en la *teoría de sistemas lineales*, en la que se considera un sistema lineal y su respuesta cuando se ve sometido a una cierta *función de excitación* o *input* a lo largo del tiempo. En nuestro caso el sistema lineal es la placa y el *input* es la

²No hay que olvidar que ϕ_0 tiene unidades de potencia/área, mientras que $\bar{\phi}_0$ y Q_0 tienen unidades de energía/área.

radiación $\phi_0(t)$ con la que excitamos la placa; la respuesta o *output* es la distribución de temperaturas $T(z, t)$ que se instaura.

El estudio de estos sistemas se facilita pasando al dominio de frecuencias, mediante una transformada de Laplace, ya que ahí la respuesta del sistema consiste simplemente en multiplicar la transformada de Laplace del input por una función llamada *de transferencia*. En el dominio del tiempo, esto equivale a que la respuesta del sistema es la convolución de la función de excitación con la transformada inversa de la función de transferencia. Esta función del tiempo recibe el nombre de *función de respuesta a impulso* del sistema (es decir, la respuesta del sistema cuando la excitación es una delta de Dirac) (ver figura 5.1).

Esto es justo lo que acabamos de encontrar. Con la terminología que acabamos de introducir, la ecuación (5.12) es, salvo el factor $\overline{\phi_0}$, la función de transferencia ft de la placa para la posición genérica z .

$$\overline{T}(z, s) = \overline{\phi_0} \cdot \left[\frac{1}{\kappa q} \{ \dots \} \right] \equiv \overline{\phi_0}(s) \cdot ft(z, s) \quad (5.15)$$

Haciendo la transformada inversa,

$$T(z, t) = \phi_0(t) * \mathcal{L}^{-1} [ft(z, s)] \equiv \phi_0(t) * irf(z, t) \quad (5.16)$$

De modo que conocida la función de respuesta a impulso $irf(z, t) = \mathcal{L}^{-1} [ft(z, s)]$, en principio el problema de determinar la temperatura en cualquier punto de la placa y en cualquier instante ya está resuelto: basta hacer la convolución de la *irf* con la función de excitación.

En lo sucesivo, particularizaremos (5.12) a varios casos de interés, suponiendo una excitación impulso, $\phi_0(t) = Q_0\delta(t)$, por lo que $\overline{\phi_0} = Q_0$. Lo que obtendremos será en cada caso la función de transferencia (multiplicada por Q_0) y su transformada inversa será la *irf* (multiplicada por Q_0); es decir, la temperatura para una excitación tipo delta de Dirac con una densidad de energía [J/m^2] de Q_0 .

5.3. Caso de sólido semi-infinito

Un caso especialmente sencillo para la propagación del calor es el de un sólido semi-infinito. Es importante además porque muchas de las técnicas de termografía activa se han desarrollado basándose en resultados obtenidos modelizando de esta manera los especímenes.

5.3.1. Sólido semi-infinito: función de transferencia

Obtenemos el sólido semi-infinito como caso límite de la placa plana si hacemos que su espesor tienda a infinito. En particular, haciendo en (5.12) $qL \rightarrow \infty$, $h_T = 0$ y

$h_D \equiv h$ (ya que al no haber cara trasera obviamente no puede haber convección en ella), obtenemos (poniendo ya Q_0 en vez de $\overline{\phi_0}$):

$$\overline{T}(z, s) = \frac{Q_0}{\kappa q} \left\{ -\sinh(qz) + \frac{\left[\frac{h}{\kappa q} \sinh(qz) + \cosh(qz) \right] \cdot \cosh(\infty)}{\frac{h}{\kappa q} \cosh(\infty) + \sinh(\infty)} \right\}$$

Es fácil demostrar que $\frac{\sinh(\infty)}{\cosh(\infty)} \rightarrow 1$, de modo que $\frac{\cosh(\infty)}{\frac{h}{\kappa q} \cosh(\infty) + \sinh(\infty)} \rightarrow \frac{\kappa q}{h + \kappa q}$ y se tiene que

$$\overline{T}(z, s) = \frac{Q_0}{\kappa q} \left\{ -\sinh(qz) + \frac{h}{h + \kappa q} \sinh(qz) + \frac{\kappa q}{h + \kappa q} \cosh(qz) \right\} = \frac{Q_0}{h + \kappa q} \{ \cosh(qz) - \sinh(qz) \}$$

y finalmente,

$$\overline{T}(z, s) = \frac{Q_0}{h + \kappa q} e^{-qz} \quad (5.17)$$

Recordemos que $q = \sqrt{s/\alpha}$, Q_0 representa la energía por unidad de área depositada en forma de delta de Dirac sobre el plano $z = 0$, y el sólido se extiende en la región $z \geq 0$ (se supone, ver sección [5.2.2], que la temperatura inicial es igual que la del ambiente). Si en vez de Q_0 ponemos 1 en la ecuación (5.17) obtenemos la función de transferencia para el sólido semi-infinito.

Es evidente que esta ecuación representa una simplificación muy grande en comparación con el caso de la placa de anchura finita L (ecuación (5.12)). Aún así, (5.17) no tiene transformada inversa analítica. Sí la va a tener en dos casos particulares:

- **Convección despreciable:** Haciendo $h = 0$ en (5.17), tenemos:

$$\overline{T}(z, s) = \frac{Q_0}{\kappa q} e^{-qz} \quad (5.18)$$

- **Cara delantera:** Si hacemos $z = 0$ en (5.17), tenemos:

$$\overline{T}(0, s) = \frac{Q_0}{h + \kappa q} \quad (5.19)$$

Naturalmente, si se dan ambas condiciones, tenemos el caso más sencillo: $\overline{T}(0, s) = \frac{Q_0}{\kappa q}$.

5.3.2. Sólido semi-infinito: función de respuesta a impulso

5.3.2.1. Convección despreciable

La distribución de temperaturas en un sólido semi-infinito ($z \geq 0$) que ha recibido una energía por unidad de área Q_0 en el plano $z = 0$, en forma de delta de Dirac en $t = 0$ se calcula aplicando \mathcal{L}^{-1} a las \overline{T} que acabamos de obtener.

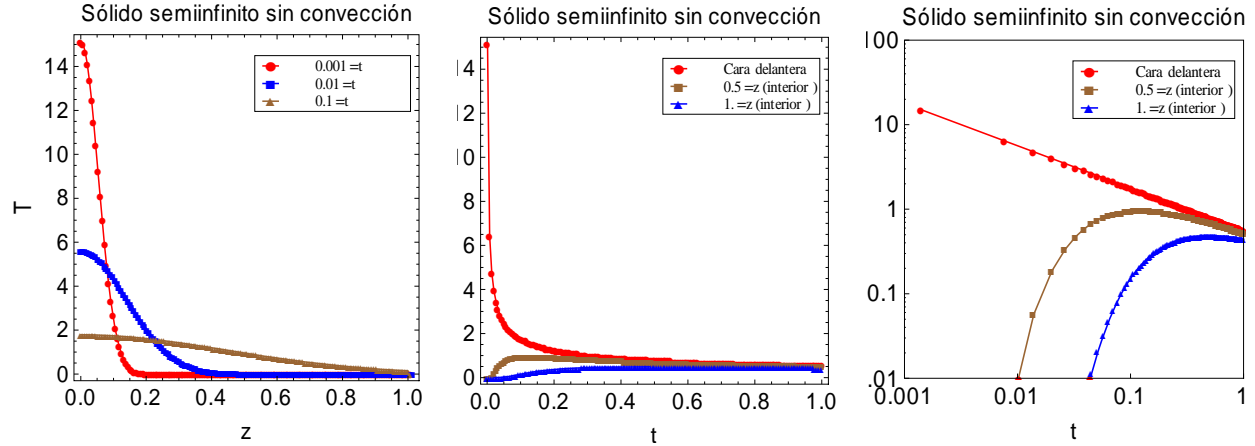


Figura 5.2: Gráficas de la función de respuesta a impulso para un sólido semiinfinito sin convección. Físicamente, representan las temperaturas en el interior del sólido cuando es sometido a un flujo instantáneo (delta de Dirac) en la superficie libre. La temperatura, el tiempo y el espesor están en unas unidades arbitrarias en las que $\kappa = 1$, $\alpha = 1$, $Q_0 = 1$.

La transformada inversa de la función de transferencia en el caso de convección despreciable (5.18) es resuelta en [117] y [177], obteniéndose:

$$T(z, t) = \frac{Q_0 \sqrt{\alpha}}{\kappa \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{\alpha t}} \quad (5.20)$$

Esta función de respuesta a impulso se ha representado en la figura 5.2 en función del espacio y del tiempo. Al transcurrir el tiempo, la delta de Dirac inicial se transforma en una gaussiana, siempre centrada en $z = 0$ pero cada vez más ancha (izquierda). La variación temporal se representa en las gráficas del centro y la derecha, para tres posiciones: la cara delantera y dos puntos en el interior. La tendencia se aprecia mejor en la gráfica log-log, donde es evidente que la temperatura de la superficie tiene una pendiente $-\frac{1}{2}$, como corresponde a $T \propto -\frac{1}{\sqrt{t}}$.

5.3.2.2. Cara delantera

Si calculamos la transformada inversa de la función de transferencia en la cara delantera (5.19) obtenemos [184] (ver gráfica en la figura 5.3).

$$T(0, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{Q_0}{h + \kappa q} \right] = Q_0 \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{\kappa \sqrt{\pi t}} - \frac{\alpha h}{\kappa^2} e^{\frac{h^2 t \alpha}{\kappa^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{h \sqrt{t \alpha}}{\kappa} \right) \right] \quad (5.21)$$

Como se puede apreciar, el caso sin convección da una recta de pendiente $-1/2$ en la gráfica log-log, y la convección hace que el enfriamiento sea más rápido.

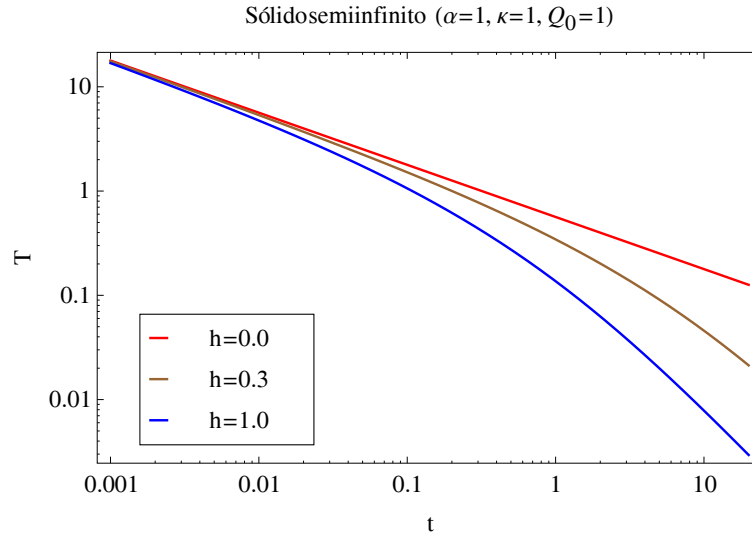


Figura 5.3: Gráficas de la función de respuesta a impulso para la cara delantera de un sólido semiinfinito, para tres valores del coeficiente de convección. La temperatura y el tiempo están en unas unidades arbitrarias en las que $\kappa = 1, \alpha = 1, Q_0 = 1$.

El caso de cara delantera y convección despreciable lo obtenemos haciendo $z = 0$ en la ecuación (5.20).

$$T(z = 0, t) = \frac{Q_0 \sqrt{\alpha}}{\kappa \sqrt{\pi t}} = \frac{Q_0}{e \sqrt{\pi t}} \quad (5.22)$$

siendo e la efusividad, $e = \sqrt{\kappa \rho c} = \frac{\kappa}{\sqrt{\alpha}}$. Esta ecuación se obtiene también haciendo $h = 0$ en (5.21). La gráfica log-log es una recta de pendiente $-\frac{1}{2}$. Esta fórmula se ha presentado por algunos autores (ecuaciones (10.10) y (9.8) de [106]) como el punto de partida de la *termografía pulsada* (pulsed thermography, PT) que se basa en registrar la evolución de la temperatura superficial para todos los puntos de un espécimen plano. La presencia de defectos se traduce en desviaciones locales de este comportamiento ideal, como veremos enseguida.

5.4. Caso de placa de espesor finito

Volvemos ahora al caso genérico, dado por la función de transferencia (5.12). A partir de ahora supondremos que el coeficiente de convección es igual en las dos caras: $h_D = h_T \equiv h$ (lo que tiene sentido para una placa vertical). La función se simplifica considerablemente en los casos de la cara trasera y delantera, que son por otra parte los que tienen relevancia experimental.

5.4.1. Placa finita: caso de convección despreciable

Imponiendo la condición de que $h_D = h_T = 0$ en (5.12), y poniendo Q_0 en vez de $\overline{\phi_0}$ (excitación = función impulso) obtenemos una considerable simplificación:

$$\overline{T}(z, s) = \frac{Q_0}{\kappa q} \left\{ -\sinh(qz) + \frac{\cosh(qz) \cdot \cosh(qL)}{\sinh(qL)} \right\} \quad (5.23)$$

(esta ecuación es la (7) de [158]).

La transformada inversa de (5.23) no tiene, aparentemente, expresión analítica, salvo en los dos casos particulares más importantes: la cara trasera y la cara delantera, que vamos a ver en los siguientes apartados.

Sin embargo, el artículo clásico de Parker *et al* [138] resuelve el problema como un caso límite de la difusión del calor cuando una capa fina (calentada por el flash) está en contacto térmico con el resto de la placa. La solución por separación de variables a este problema (obtenida por Carslaw y Jaeger [32]) proporciona una expresión para la temperatura en cualquier punto del interior de la placa:

$$T(z, t) = \frac{Q_0 \alpha}{\kappa L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \alpha t\right)} \right\} \quad (5.24)$$

Este resultado es sorprendentemente sencillo, y nos da la evolución de T para la cara delantera si hacemos $z = 0$ (ecuación (5.27)) y para la cara trasera si lo particularizamos para $z = L$ (ecuación (5.30)).

Por otra parte es claro que cuando $t \rightarrow \infty$ la temperatura en cualquier punto de la placa tiende a su valor adiabático final (el que se obtiene al suministrar un calor $Q_0 A$ a un objeto de masa ρAL y calor específico c_p):

$$T_{\text{lim}} = \frac{Q_0 \alpha}{\kappa L} = \frac{Q_0}{\rho L c_p} \quad (5.25)$$

Variables adimensionales Es interesante comparar las temperaturas previstas por (5.24) para la placa finita con las que obtuvimos para el sólido semiinfinito (Figura 5.2). Para facilitar la comparación, conviene usar variables adimensionalizadas, lo que puede hacerse definiendo:

- $z^* \equiv z/L$, siendo L el espesor de la placa (es decir, tomamos L como unidad de longitud).
- $t^* \equiv \alpha t/L^2$. Este tiempo adimensional es llamado a veces *número de Fourier*, Fo .

En función de estas variables, la ecuación del calor (5.1) queda:

$$\frac{\partial T}{\partial t^*} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^{*2}} = 0 \quad (5.26)$$

Comparando con la ecuación original, vemos que si expresamos longitudes y tiempos en estas unidades, la difusividad toma el valor $\alpha = 1$. Por otra parte, h puede expresarse convenientemente en función del *número de Biot*, adimensional:

$$Bi \equiv \frac{hL}{\kappa} = \frac{h}{\kappa}$$

ya que estamos tomando $L=1$. Finalmente, normalizando las temperaturas a T_{lim} ,

$$T_{\text{normaliz}} \equiv T^* \equiv \frac{T}{T_{\text{lim}}} = \frac{T\kappa L}{Q_0\alpha}$$

Es evidente que esta es la temperatura que obtenemos si hacemos $\kappa = 1$, $Q_0 = 1$, $\alpha = 1$, $L = 1$, por lo que estas temperaturas serán comparables a las que habíamos mostrado en las gráficas para sólido semiinfinito.

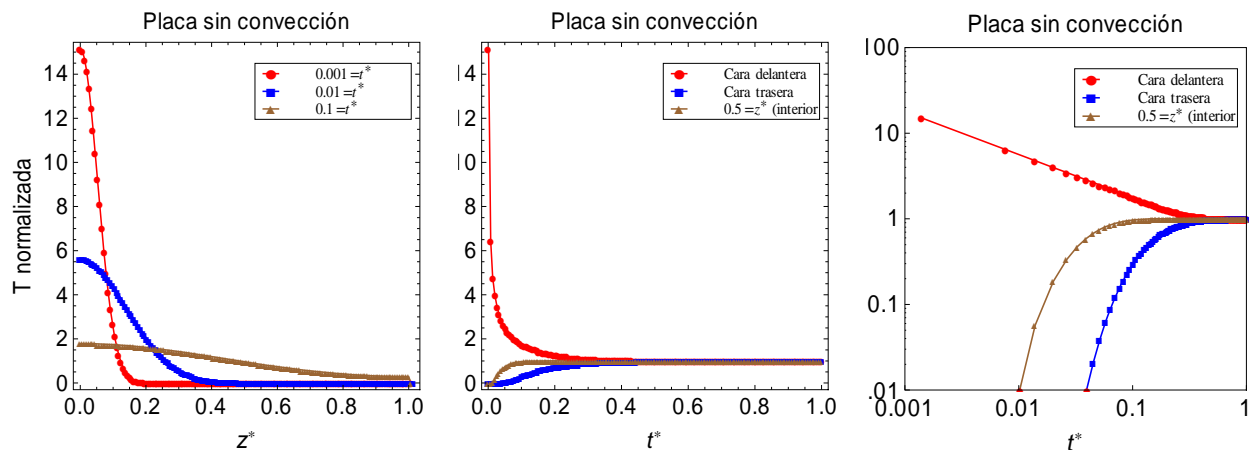


Figura 5.4: Gráficas de la función de respuesta a impulso para una placa de anchura finita sin convección. Físicamente, representan las temperaturas cuando es sometida a un flujo instantáneo (delta de Dirac) en la superficie delantera. La temperatura, el tiempo y la posición espacial están normalizadas, como se explica en el texto.

Comparación con el caso semiinfinito La figura 5.4 muestra los resultados análogos a los de 5.2, pero ahora para una placa finita. Las gráficas en escala lineal son muy similares, pero cuando representamos la evolución temporal escala log-log (derecha), vemos una importante diferencia: ahora las temperaturas tienden a estabilizarse en el valor ΔT_{lim} ($= 1$ en unidades normalizadas) a partir de un tiempo que depende del espesor de la placa. Esto se aprecia mejor en la figura 5.5.

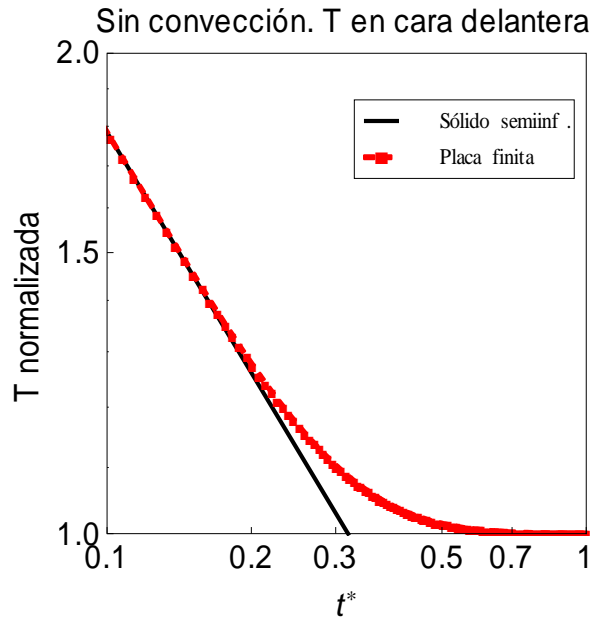


Figura 5.5: Comparación de las temperaturas en cara delantera para el sólido semiinfinito y una placa de espesor finito. En ambos casos no hay convección.

Estudiamos ahora con más detalle los dos casos de importancia experimental: la evolución de las temperaturas en las caras delantera y trasera.

5.4.1.1. Placa finita: convección despreciable, cara delantera

Haciendo $z=0$ en (5.24) se obtiene:

$$T(0, t) = \frac{Q_0 \alpha}{\kappa L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \right\} \quad (5.27)$$

(Esta ecuación, como la (5.30), puede derivarse también mediante la transformada de Laplace de (5.23), haciendo ahora $z = 0$ [117], [177]).

También hay una expresión para esta temperatura en el artículo de Osiander y Spicer [135], pero la fórmula es diferente:

$$T(0, t) = \frac{Q_0 \sqrt{\alpha}}{\kappa \sqrt{\pi t}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(Ln)^2}{\alpha t}} \right\} \quad (5.28)$$

Sorprendentemente, esta ecuación da exactamente los mismos resultados que la anterior (cuestión a la que volveremos en el apartado [6.2.1]).

Determinación de α a partir de la evolución de las temperaturas Hemos visto que en la gráfica log-log las temperaturas en la cara delantera describen al principio una recta con pendiente $-1/2$, pero que en la placa la gráfica se desvía de esa recta a partir de un tiempo característico, relacionado con el espesor. La desviación respecto de la linealidad aparece gradualmente, pero para fijar un criterio podemos elegir el punto en el que $T_{semi-inf}$ coincide con el valor de ΔT_{lim} , es decir, vale 1 en nuestra escala normalizada. Eso ocurre cuando

$$T_{semi-inf}(z = 0, t) = \frac{Q_0\sqrt{\alpha}}{\kappa\sqrt{\pi t}} = \frac{Q_0\alpha}{\kappa L} \Rightarrow \frac{\alpha t}{L^2} \equiv t^* = \pi^{-1}$$

y se aprecia de manera aproximada en la figura 5.5. En la práctica, el criterio consiste en elegir como tiempo el que corresponde a la intersección de la recta de pendiente $-\frac{1}{2}$ con la línea horizontal que ajusta la parte de la curva para tiempos largos (el eje x en 5.5). Llamamos a ese tiempo t_c , y a partir del valor de t_c proporcionado por el corte, obtenemos:

$$(\text{conociendo } \alpha) : L = \sqrt{\pi\alpha t_c} \quad ; \quad (\text{conociendo } L) : \alpha = \frac{L^2}{\pi t_c} \quad (5.29)$$

Vemos que de esta manera puede determinarse la difusividad del material [13]. Análogamente, un defecto subsuperficial varía el valor del espesor en el que el material es homogéneo, lo que producirá una desviación de la linealidad; el tiempo que tarda en aparecer esa desviación permite estimar la profundidad del defecto.

5.4.1.2. Placa finita: convección despreciable, cara trasera

Haciendo $z = L$ en (5.24) obtenemos:

$$T(L, t) = \frac{Q_0\alpha}{\kappa L} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \right\} \quad (5.30)$$

Esta ecuación puede obtenerse mediante la transformada inversa de Laplace de (5.23) tras hacer $z = L$ [117], [177].

Determinación de α : el método flash La ecuación anterior, que da la evolución de la temperatura en la cara trasera de una placa que ha recibido un flujo $Q_0\delta(t)$ en la cara delantera siendo la convección despreciable, describe exactamente el caso de una técnica de termografía IR usada para medir la difusividad de un material llamada “método flash” en la que un espécimen del material, en forma de placa plana, es sometido a un “flash” (un pulso de radiación, generalmente IR, de duración muy breve) por una cara (“cara delantera”) y se registra con una cámara IR la evolución de su temperatura en la cara opuesta (“cara trasera”). La evolución de la temperatura en la cara trasera permite medir

la difusividad del material. Si denotamos $U(L, t) \equiv T(L, t)/\Delta T_{\text{lim}}$ (siendo ΔT_{lim} , como antes $\frac{Q_0 \alpha}{\kappa L}$), esta temperatura normalizada viene dada por:

$$U(L, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \frac{\pi^2 \alpha t}{L^2}} \quad (5.31)$$

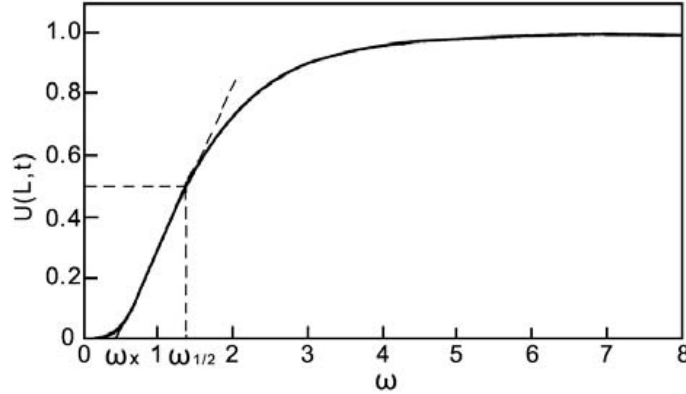


Figura 5.6: Temperatura normalizada en la cara trasera para una placa excitada en la cara delantera con un pulso muy breve en el instante inicial. El parámetro ω es por definición $\omega = \frac{\pi^2 \alpha t}{L^2}$. Sacado de [199], figura 1.

La función $U(L, t)$ se ha representado en la figura 5.6, tomada del artículo clásico de Parker *et al.* [138]. Se aprecia que la temperatura crece hasta estabilizarse en un valor límite (cuando toda la placa está a temperatura uniforme, recordemos que estamos despreciando la convección), y la rapidez de este crecimiento depende del valor de la difusividad α . Parker *et al.* sugirieron determinar la difusividad midiendo el instante $t_{0,5}$ el que $U(L, t_{0,5}) = 0,5$, ya que para ese punto $\omega = 1,37$ y por tanto

$$\alpha = \frac{1,37L^2}{\pi^2 t_{0,5}} \quad (5.32)$$

5.4.1.3. Cara trasera y cara delantera: comparación de resultados

La ecuación (5.32) es análoga a la (5.29), y una y otra proporcionan α a partir de la evolución de la temperatura en la cara trasera y delantera, respectivamente. Los dos métodos son equivalentes en teoría; sin embargo, ha sido mucho más usado el basado en la evolución de la temperatura en la cara trasera, que ha merecido el nombre de “método flash” por antonomasia.

Hay que tener en cuenta que, cuando fue propuesto originalmente por Parker, la temperatura se medía con un termopar, que perturbaba el calentamiento si se colocaba en la cara delantera. Por otra parte, incluso utilizando cámaras IR, medir por la cara trasera tiene la ventaja de que los incrementos de temperatura son menores, por lo que no hay

peligro de saturación de los detectores IR en los instantes iniciales; y también es más rápido, ya que se alcanza antes la estabilización de la temperatura (si nos fijamos en la figura 5.6 hay que esperar hasta $\omega \approx 5$ o lo que es lo mismo hasta $t^* \approx 0,5$; mientras que si observamos la figura 5.5, veremos que habrá que esperar hasta $t^* \approx 1$ para que se alcance la estabilización).

Hay que señalar que es posible determinar α usando la señal de la cara delantera en su primera etapa, cuando la placa se comporta todavía como un medio semiinfinito, mediante la ecuación (5.22), lo que tiene la ventaja adicional de que se cumplirá mejor el requisito de pérdidas de calor despreciables. Sin embargo, esto requiere conocer Q_0 , con lo que el método pierde uno de sus principales atractivos, que es el no necesitar un pulso calibrado sino sólo uno que sea suficientemente corto en comparación con el tiempo característico $t_{0,5}$. Una salida es estimar Q_0 a partir de T_{\lim} (5.25), pero generalmente cuando se ha estabilizado la temperatura hay ya ciertas pérdidas, de modo que el valor de incremento máximo de temperatura medido T_{\max} es inferior a T_{\lim} , lo que introduce una importante incertidumbre. Volveremos a esta cuestión en el capítulo [6].

5.4.2. Placa finita: convección no despreciable

Como advertimos en su momento, la ecuación (5.12) no tiene transformada de Laplace inversa analítica. Sin embargo, Balageas en [12], citando a Degiovanni [43] da una expresión analítica, obtenida por separación de variables, para la temperatura en un punto genérico de una muestra cilíndrica con convección, sometida a un calentamiento flash por una de sus caras planas³.

Simplificando esa ecuación para el caso de convección igual por las dos caras planas y despreciable por la cara lateral (lo que convierte el problema en unidimensional), se llega a que, para una placa de espesor L , densidad ρ y calor específico c , que recibe un flash con densidad de energía Q , la temperatura viene dada por:

$$T(z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\cos(U_n z^*) + Bi \frac{\text{sen}(U_n z^*)}{U_n} \right) 2Q\alpha/\kappa L}{\left(1 + \cos U_n \frac{\text{sen} U_n}{U_n} \right) + 2Bi \left(\frac{\text{sen} U_n}{U_n} \right)^2 + \frac{Bi^2}{U_n^2} \left(1 - \cos U_n \frac{\text{sen} U_n}{U_n} \right)} \exp(-t^* U_n^2) \quad (5.33)$$

siendo U_n la n -sima solución de la ecuación trascendente: $\text{tg } U = \frac{2UBi}{U^2 - Bi^2}$ y $t^* \equiv \frac{t\alpha}{L^2}$, $z^* \equiv z/L$. Teniendo en cuenta la definición de U y normalizando a $T_{\lim} = \frac{Q_0\alpha}{\kappa l}$, la ecuación

³Es la ecuación (3) del artículo, pero hay que señalar que contiene una errata: z^* , allí denotado como \bar{z} , aparece como factor que multiplica a toda la expresión, cuando en realidad debería aparecer en el argumento del coseno y el seno: $\cos(U_n z^*)$, $\text{sen}(U_n z^*)$.

anterior se simplifica quedando esta expresión para la temperatura normalizada:

$$T^*(z^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_n^2 \left(\cos(U_n z^*) + Bi \frac{\text{sen}(U_n z^*)}{U_n} \right)}{U_n^2 + 2Bi + Bi^2} \exp(-t^* U_n^2) \quad (5.34)$$

Convección no despreciable, cara delantera. Si $z^* = 0$, (5.34) se convierte en:

$$T^*(0, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_n^2}{U_n^2 + 2Bi + Bi^2} \exp(-t^* U_n^2) \quad (5.35)$$

Convección no despreciable, cara trasera. Si $z^* = 1$, (5.34) se convierte en:

$$T^*(1, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_n^2 \left(\cos(U_n) + Bi \frac{\text{sen}(U_n)}{U_n} \right)}{U_n^2 + 2Bi + Bi^2} \exp(-t^* U_n^2)$$

Puede demostrarse, sin embargo [117], que esta expresión se simplifica quedando:

$$T^*(1, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2U_n^2}{U_n^2 + 2Bi + Bi^2} \exp(-t^* U_n^2) \quad (5.36)$$

Hay un claro paralelismo entre las ecuaciones (5.35) y (5.36), por un lado, y (5.27) y (5.30), por otro: tanto con convección como sin ella, los términos de la serie son los mismos para la cara delantera y la trasera, pero en el primer caso todos los signos son positivos y en el segundo se alternan.

5.4.2.1. Comparación con el caso sin convección

No es difícil comprobar que para el caso de $Bi = 0$, la ecuación (5.34) se convierte en la (5.24) que daba Parker para la placa sin convección (la clave es que en ese caso las soluciones U_n de la solución trascendente son simplemente $n\pi$, para $n = 0, 1, 2, \dots$).

Los resultados de (5.34) para un valor de $Bi = 1$ se representan en la figura 5.7. Si comparamos con la figura 5.4, encontramos que introducir la convección los modifica como era de esperar, haciendo que a largo plazo disminuya la temperatura. En la gráfica log-log se aprecia que la convección hace que, para tiempos largos, la temperatura del interior sea más alta que la de las caras externas, incluso cuando estas ya prácticamente coinciden. La comparación se aprecia mejor en la figura 5.8, que muestra en una misma gráfica los casos con y sin convección.

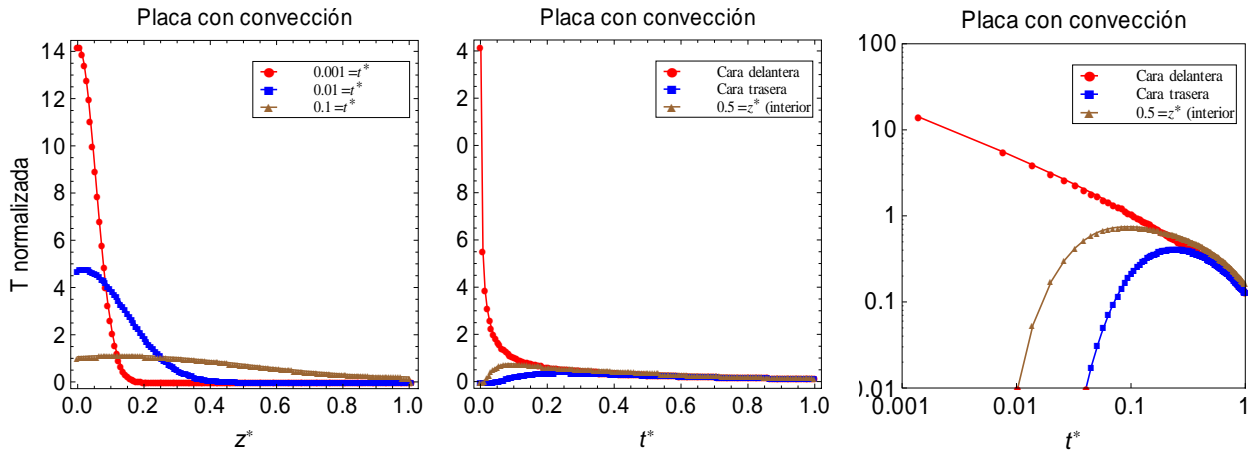


Figura 5.7: Gráficas de la función de respuesta a impulso para una placa de anchura finita con convección ($Bi = 1$). Representan las temperaturas cuando es sometida a un flujo instantáneo (delta de Dirac) en la superficie delantera. La temperatura, el tiempo y la posición espacial están normalizadas.

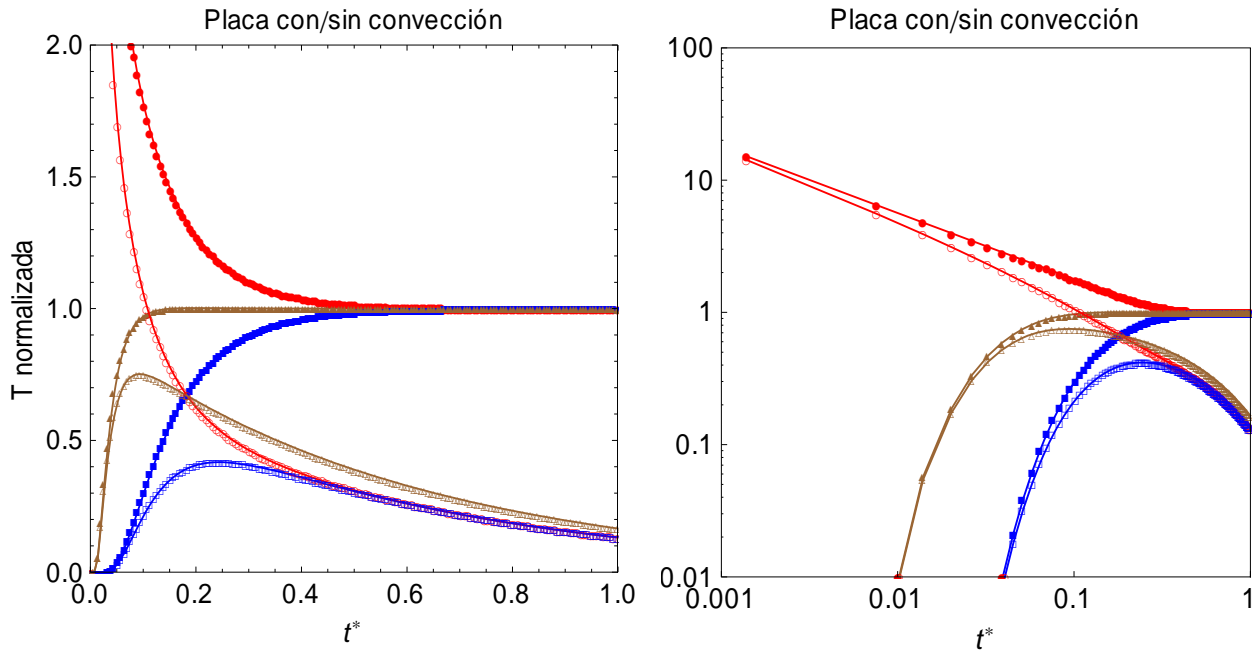


Figura 5.8: Comparación de la respuesta en temperaturas en una placa finita sometida a un flujo instantáneo (delta de Dirac) en la superficie delantera. Temperaturas normalizadas representadas en función del tiempo adimensional para la cara delantera (rojo), trasera (azul) y el punto central de la placa (marrón), en los casos sin convección (símbolos llenos) y con $Bi = 1$ (símbolos huecos), en escala lineal (izquierda) y log-log (derecha).

5.4.2.2. Comparación de los efectos de α y Bi

Tenemos, en definitiva, que la evolución de la temperatura depende de dos parámetros, α y Bi , pero los efectos de cada uno son muy diferentes, lo que se evidencia porque en la figura 5.8 tenemos una gráfica para cada valor de Bi pero no aparece el valor de

α . La razón es que la difusividad va implícita en el eje de $t^* = tL^2/\alpha$: la variación de α simplemente cambia la escala horizontal de las gráficas, como se aprecia en la figura 5.9; por tanto, gráficas con el mismo valor de Bi tienen el mismo perfil, únicamente más o menos dilatado horizontalmente, mientras que la variación de Bi sí que introduce un cambio sustancial en la forma del perfil de temperaturas (veáanse en el capítulo [7], las figuras 7.1 y 7.3).

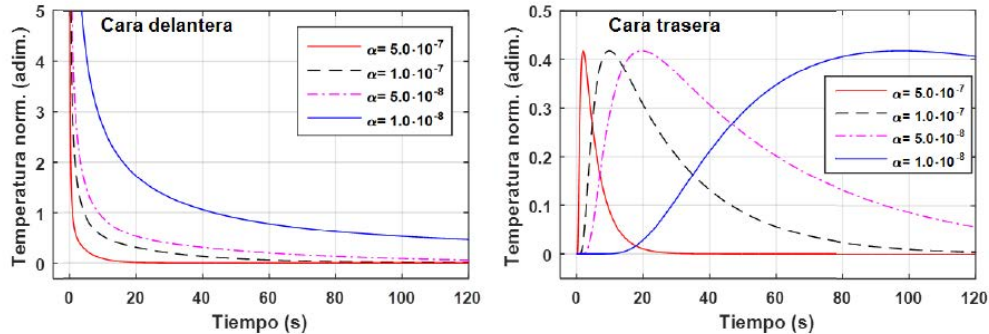


Figura 5.9: Efecto del valor de α en la evolución de la temperatura normalizada en función del tiempo para un caso fijo $Bi = 1$. Izquierda: cara delantera; Derecha: cara trasera. Las unidades de α son m^2/s .

5.5. Solución numérica de la ecuación del calor

Las ecuaciones (5.35) y (5.36) son la solución exacta al problema de la determinación de la temperatura en las caras delantera y trasera de una placa homogénea iluminada por un pulso de radiación. Son pues las funciones de respuesta a impulso (*irf*) que proporcionan también la solución cuando la excitación es una densidad de flujo con una dependencia arbitraria del tiempo $\phi_0(t)$, mediante el producto de convolución: $T(z, t) = \phi_0(t) * irf(z, t)$ (ecuación (5.16)), y proporcionan por eso la base para cualquier estudio sistemático de la termografía activa. Sin embargo, la literatura apenas hace mención a estas ecuaciones, hasta el punto de que, en nuestro estudio del tema, hasta un estadio bastante avanzado no las encontramos y pensamos que no existían soluciones analíticas, por lo que buscamos un método numérico para invertir la función de transferencia (5.12).

Existen varios algoritmos para este propósito, pero probablemente el más usado, por su estabilidad, exactitud y rapidez es el de Gaver-Stehfest [178], desarrollado por H. Stehfest en 1970, basado en el trabajo de D.P. Gaver de 1966. Utiliza una expresión que produce un valor aproximado $f_\alpha(t)$ de la transformada inversa a partir de la transformada de Laplace $F(s)$, a la que se da valores en múltiplos de $\ln 2/t$:

$$f_a(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i F\left(\frac{\ln 2}{t} i\right)$$

siendo

$$V_i = (-1)^{(N/2)+i} \sum_{\kappa=\lceil \frac{i+1}{2} \rceil}^{\min\{i, N/2\}} \frac{\kappa^{(N/2)+1} (2\kappa)!}{(N/2 - \kappa)! \kappa! (\kappa - 1)! (i - \kappa)! (2\kappa - i)!}$$

dónde $\lceil \frac{i+1}{2} \rceil$ indica el mayor entero menor o igual que $\frac{i+1}{2}$ y N debe ser par. En principio, cuanto mayor sea N mejor es la aproximación; en la práctica, los errores de redondeo la empeoran para valores de N excesivamente grandes.

Hemos usado dos implementaciones de este algoritmo: la de Peter Valkó para Mathematica⁴ y la de Wahyu Srigutomo para Matlab⁵

Encontrar la solución analítica nos ha permitido verificar el correcto funcionamiento del algoritmo numérico, como se muestra en las figuras 5.10 y 5.11 que comparan los resultados de las expresiones (5.35) y (5.36) con los obtenidos en Matlab mediante al algoritmo de Gaver-Stehfest.

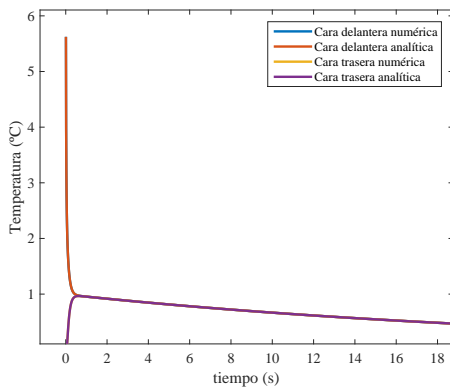


Figura 5.10: Perfiles temporales de respuesta a impulso en cara delantera y cara trasera para los casos analítico y numérico. Parámetros térmicos: $Q = 1$; $\alpha = 1$; $\kappa = 1$; $L = 1$ y $Bi = 0,02$.

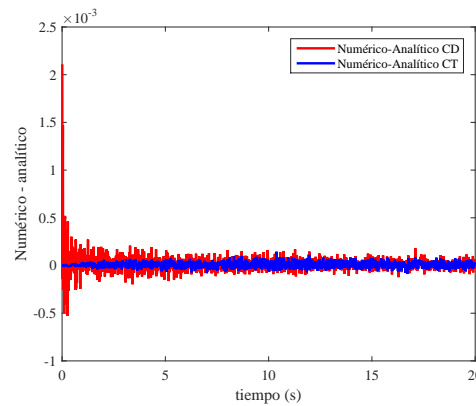


Figura 5.11: Diferencias entre los perfiles obtenidos numéricamente y los obtenidos analíticamente, para las caras delantera (CD) y trasera (CT).

Si bien una ecuación analítica tiene siempre ventajas (por ejemplo, es más rápida de usar, nos puede proporcionar una comprensión cualitativa, podemos obtener casos particulares límite que son de utilidad, etc.), y nuestro uso de una solución numérica vino en principio determinado por desconocer la solución analítica, en el caso que nos ocupa las ventajas de ésta son un tanto engañosas, ya que la fórmula viene dada como una serie infinita en la que cada término está determinado por un U_n , que es la solución de la

⁴<http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/4738/>

⁵<https://es.mathworks.com/matlabcentral/profile/authors/870382-wahyu-srigutomo>

ecuación trascendente y no tiene una expresión cerrada. Además, la familia de soluciones U_n es distinta para cada número de Biot, por lo que en cada caso hay que encontrar las soluciones de la ecuación, que es también un paso numérico que lleva aparejado un error. En definitiva, no se aprecia una ventaja práctica frente a la inversión numérica de Laplace que se había implementado originalmente y con la que se ha seguido trabajando.

Por otra parte, usar la inversión numérica permite resolver cualquier problema para el que tengamos la función de transferencia, por lo que es más versátil. Veremos que esto es una ventaja determinante cuando, como en la sección [5.7], nuestro *input* no sea el flujo sobre la cara delantera.

Un par de ejemplos de los resultados obtenidos con la inversión numérica, visualizados como gráficas 3-D, están en la figura 5.12, en la que se aprecia claramente el efecto global de la convección.

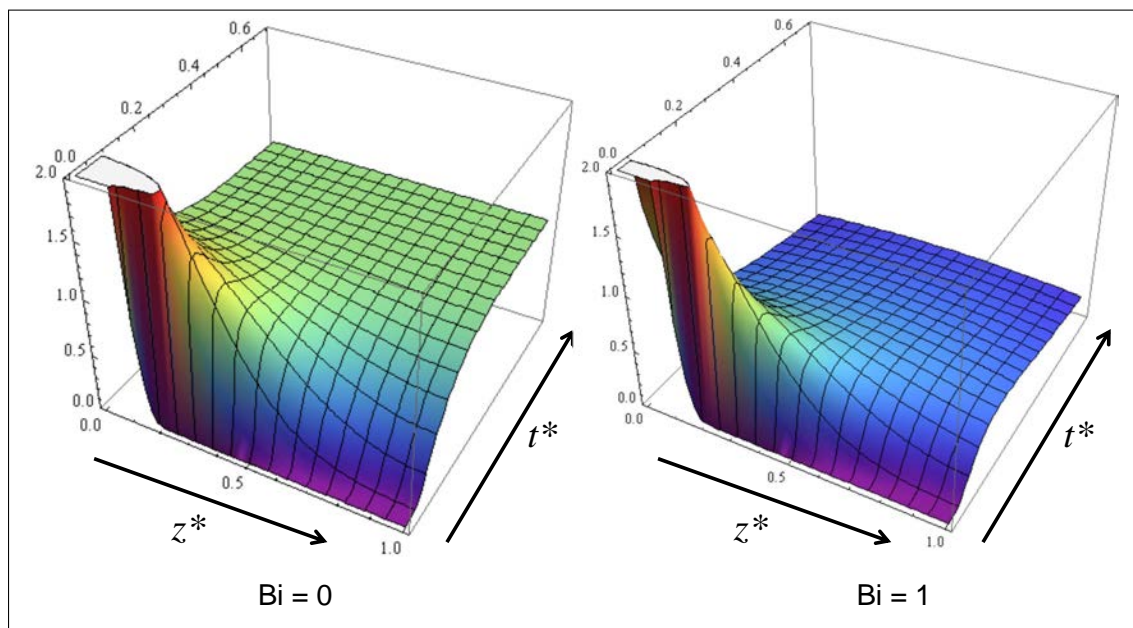


Figura 5.12: Gráficas de temperaturas normalizadas frente a tiempo y espacio adimensionales (se ha cortado el eje vertical para mostrar mejor la estructura): izquierda, sin convección; derecha, para $Bi=1$.

5.6. Caso de excitación arbitraria

Hasta aquí hemos considerado que la función de excitación era una delta de Dirac; por tanto, las soluciones $T(z, t)$ que hemos obtenido son funciones de respuesta a impulso. Como vimos en el apartado [5.2.3], si la función de excitación es otra, el único cambio es que hay que hacer la convolución de la función de respuesta a impulso con la función de excitación. La figura 5.13 muestra dos ejemplos de los resultados obtenidos, para el

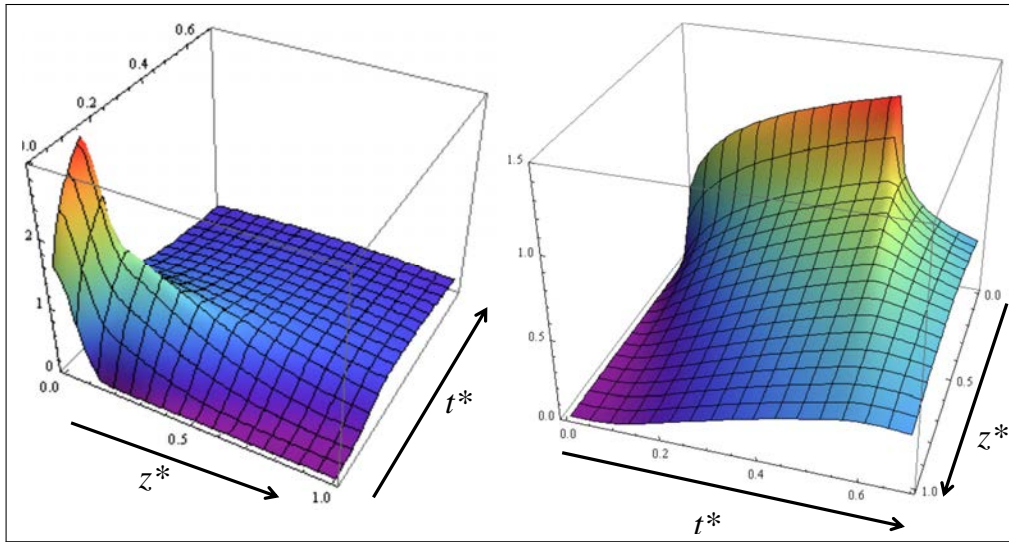


Figura 5.13: Gráficas de temperaturas normalizadas frente a tiempo y espacio adimensionales, para $Bi=1$, para dos valores diferentes de duración Δt de una excitación escalón: izquierda, $\Delta t^* = 0,15$, derecha, $\Delta t^* = 0,50$.

caso de excitación por una función escalón. La excitación escalón, que tiene un papel muy destacado en esta tesis, será tratada de manera más extensa en el capítulo [8].

5.7. Caso de temperatura conocida en una cara

En todo este capítulo hemos considerado como *input* el flujo de calor sobre la cara delantera y como *output* la temperatura en uno u otro punto de la placa; la correspondiente función de transferencia se obtenía particularizando (5.12) al punto en cuestión con las aproximaciones oportunas, y su transformada de Laplace inversa era la función de respuesta a impulso (*irf*). Esta *irf* proporciona la evolución de la temperatura cuando la excitación es un pulso de calor (delta de Dirac) y, mediante el producto de convolución, también para una excitación genérica $\phi_0(t)$; un ejemplo se ha visto en la sección anterior, para excitación escalón.

Dado que la respuesta depende de α (y de Bi cuando la convección no es despreciable), estos parámetros térmicos podrán obtenerse del ajuste de la respuesta térmica experimental por la teórica. En la práctica, el flujo $\phi_0(t)$ sobre la cara delantera es difícil de medir, y no suele ser conocido, pero esto no es una dificultad mientras se trate de un pulso de duración muy pequeña⁶. No obstante, si queremos superar esta limitación y plantear una termografía activa con aplicación lo más general posible, es necesario afrontar este pro-

⁶Larson y Koyama encontraron ya en 1967 que para pulsos de anchura menor que $t^* = 1/16$ los errores en la α recuperada por el método de Parker eran menores del 10% [95].

blema.

Una posible solución estriba en utilizar como *input*, en lugar del flujo, la temperatura medida en un punto, y como *output*, la temperatura medida en otro. En concreto, vamos a buscar la función de transferencia que nos relacione la temperatura de la cara delantera con la de la trasera.

5.7.1. Función de transferencia entre temperaturas de cara delantera y trasera

Al principio del capítulo hemos demostrado, usando la transformada de Laplace, que la ecuación del calor para una placa tiene la solución dada por la ecuación (5.5):

$$\bar{T}(z, s) = A \sinh(qz) + B \cosh(qz) \quad \text{siendo} \quad q^2 = \frac{s}{\alpha}$$

Entonces determinábamos A y B aplicando las condiciones de contorno (5.2) (cara “delantera”, $z = 0$, con convección y una densidad de flujo de calor conocida) y (5.3) (cara “trasera”, $z = L$, sólo con convección). Ahora vamos a asumir que lo que conocemos no es la densidad de flujo sobre la cara caliente sino la temperatura de ésta.

Según (5.5), en $z = 0$ tenemos que $\bar{T}(0, s) = B$: si conocemos la evolución temporal de la temperatura en la cara delantera, su transformada de Laplace nos da el coeficiente B . Para obtener el coeficiente A , sustituimos (5.5) en la condición de contorno (5.7), que no ha cambiado:

$$-\kappa \frac{d\bar{T}}{dz} \Big|_{z=L} = h_T \bar{T}(L, s) \Rightarrow$$

$$-\kappa q [A \cosh(qL) + B \sinh(qL)] = h_T [A \sinh(qL) + B \cosh(qL)]$$

(esta es la ecuación (5.9) que ya obtuvimos en su momento). Despejando de aquí A :

$$A = \frac{h_T B \cosh(qL) + \kappa q B \sinh(qL)}{-\kappa q \cosh(qL) - h_T \sinh(qL)}$$

Si sustituimos ahora en (5.5) y hacemos $z = L$,

$$\bar{T}(L, s) = B \left[-\frac{h_T \cosh(qL) + \kappa q \sinh(qL)}{\kappa q \cosh(qL) + h_T \sinh(qL)} \cdot \sinh(qL) + \cosh(qL) \right]$$

Sustituyendo $B = \bar{T}(0, s)$ y simplificando, se llega a:

$$\bar{T}(L, s) = \bar{T}(0, s) \cdot \left[\frac{\kappa q}{\kappa q \cosh(qL) + h_T \sinh(qL)} \right] \quad (5.37)$$

La expresión entre corchetes nos da la función de transferencia para la temperatura de la cara trasera cuando el *input* es la temperatura de la cara delantera⁷.

⁷Podíamos haber obtenido este resultado más rápidamente, sin más que comparar las ecuaciones que ya teníamos para $\bar{T}(0, s)$ y para $\bar{T}(L, s)$, y hallar el factor de proporcionalidad entre ellas.

Haciendo ahora la transformada inversa de Laplace de (5.37),

$$T(z = L, t) = T(0, t) * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\cosh(qL) + \frac{h_T}{\kappa q} \sinh(qL)} \right] \quad (5.38)$$

O en formato adimensional:

$$T(z = 1, t^*) = T(z = 0, t^*) * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\cosh(\sqrt{s}) + \frac{Bi}{\sqrt{s}} \sinh(\sqrt{s})} \right] \quad (5.39)$$

No hemos encontrado una forma analítica para esta transformada inversa de Laplace, pero se puede calcular sin dificultad por el método numérico expuesto en la sección [5.5]. En la figura 5.14 se puede apreciar la forma de la función de respuesta a impulso que utilizaremos para convolucionar cualquier excitación arbitraria, que sería el resultado de la ecuación (5.38).

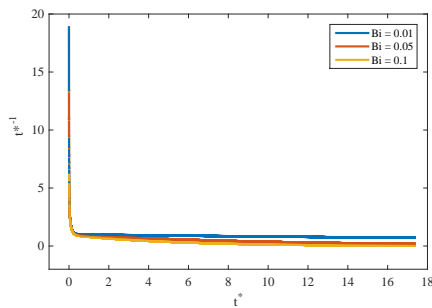


Figura 5.14: Representación de la función de respuesta a impulso (irf) de la ecuación (5.38) para valores de número de Biot igual a 0.01, 0.05 y 0.1.

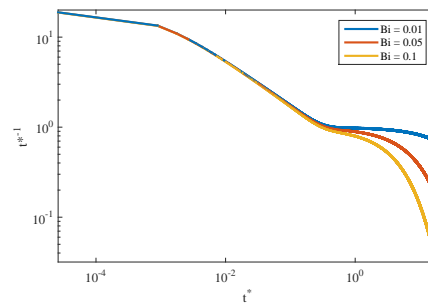


Figura 5.15: Representación log-log de la función de respuesta a impulso (irf) de la figura 5.14.

5.8. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se ha hecho una detallada y extensa recopilación de resultados dispersos en la literatura para la termografía pulsada, encontrando las expresiones analíticas de la evolución de la temperatura en los casos que nos interesan.

Además, se ha resuelto la ecuación del calor para el caso de excitación flash mediante el método de la transformada de Laplace, tratando el problema dentro del marco de la teoría de sistemas lineales, lo que permite obtener la temperatura de cualquiera de las caras del espécimen objeto de estudio sin más que convolucionar la función de respuesta a impulso (*impulse response function, irf*) adecuada con la excitación arbitraria que se desee.

Aunque las soluciones analíticas encontradas en la literatura proporcionan la *irf* en muchos casos de interés, finalmente se ha optado por una solución numérica, que proporciona resultados igualmente válidos, y que nos permite resolver cualquier problema para el que tengamos la función de transferencia, por lo que es más versátil. Esto ha permitido resolver el problema de la evolución de la temperatura en la cara trasera de una placa cuando el *input* no es el flujo sobre la cara delantera, sino la temperatura de ésta, lo que a su vez ha sido indispensable para resolver el problema planteado en el capítulo [8].

Parte II

CARACTERIZACIÓN TÉRMICA

Termografía pulsada con pérdidas de calor: métodos aproximados

RESUMEN: En esta segunda parte de la memoria nos ocuparemos de la recuperación de los parámetros térmicos. En este capítulo se han analizado y aplicado a experimentos reales distintos métodos de aproximación para problemas de termografía pulsada en los que las pérdidas de calor no son despreciables, comparando resultados por cara delantera y por cara trasera. Estos métodos se basan en el análisis de la evolución térmica en los primeros segundos tras el flash, cuando el efecto de las pérdidas es todavía pequeño.

6.1. Introducción

El método flash clásico, cuyos fundamentos se han expuesto en el apartado [5.4.1.2], permite determinar la difusividad de una placa de material siempre que la duración adimensional del pulso de radiación Δt_p^* sea muy pequeña y la convección sea despreciable [138].

Ambas condiciones se pueden expresar como:

$$\Delta t_p^* = \frac{\Delta t_p}{L^2/\alpha} \ll 1 \Rightarrow \frac{L^2}{\alpha} \gg \Delta t_p$$

$$Bi = \frac{hL}{\kappa} = \frac{hL}{\alpha\rho c_p} \ll 1 \Rightarrow \frac{L}{\alpha} \ll \frac{\rho c_p}{h}$$

Estas ecuaciones muestran que se trata de requisitos contrapuestos. Mientras que la condición de pulso tipo delta de Dirac se consigue mejor con espesores grandes y difusividades pequeñas, la condición de pérdidas despreciables es más fácil de cumplir con espesores pequeños y difusividades grandes. Existe pues un espesor óptimo para la aplicación del método [95], pero no siempre se puede elegir el espesor de las muestras.

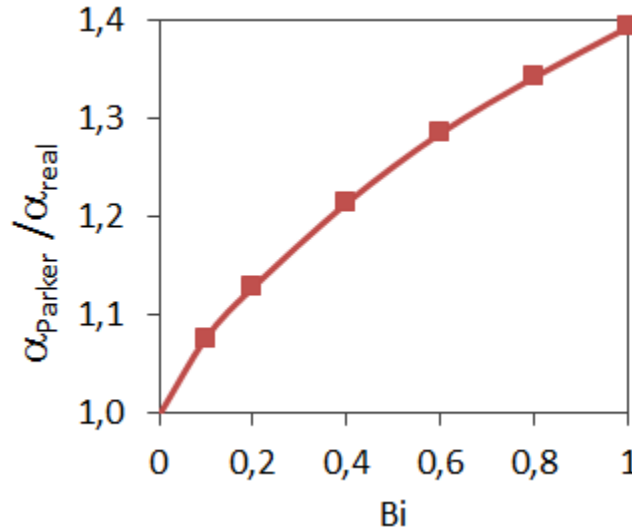


Figura 6.1: Error cometido al obtener con el método de Parker la difusividad para una muestra en la que la convección no es despreciable.

Tomando valores estándar de parámetros térmicos para materiales tipo CFRP [81], se puede hacer una estimación numérica de las condiciones arriba especificadas. Si tomamos $\rho c_p = 1,4 \cdot 10^6 [J/K \cdot m^3]$, $\kappa = 0,5 [W/m \cdot K]$ y, por tanto, $\alpha \approx 3,6 \cdot 10^{-7} [m^2/s]$, y además suponemos un espesor $L = 2,4 \cdot 10^{-3} [m]$ y un número de Biot $Bi = 0,05$, tendremos un coeficiente de transferencia de calor $h \approx 10 [W/m \cdot K]$, que es el orden de magnitud de referencia para fenómenos de convección natural. Con estos datos: $\frac{L^2}{\alpha} = \frac{(2,4 \cdot 10^{-3})^2}{3,6 \cdot 10^{-7}} \approx 16 s$. En nuestro caso, $\Delta t_p \approx 100 ms$, por lo que se cumple con creces la condición de pulso tipo Dirac (en su trabajo original, Parker [138] requiere que $\frac{L^2}{\alpha}$ sea 30 veces mayor que Δt_p). Por otro lado, $\frac{L}{\alpha} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{3,6 \cdot 10^{-7}} \approx 7 \cdot 10^3 [s/m]$ y $\frac{\rho c_p}{h} \approx 1,3 \cdot 10^5 [s/m]$; es decir, $\frac{\rho c_p}{h}$ es unas 20 veces mayor que $\frac{L}{\alpha}$. Esta condición no se cumple tan bien como la primera, de modo que tendremos que corregir el efecto de las pérdidas, sobre todo teniendo en cuenta que el valor de h o Bi no se conoce bien a priori y que, como veremos en seguida, incluso unas pérdidas pequeñas tienen un efecto apreciable en las temperaturas de la cara trasera.

Consideraciones análogas se aplican a la cara delantera, por lo que tanto en un caso como otro se hace necesario tener en cuenta el efecto de las pérdidas en el análisis de los datos experimentales.

El efecto de las pérdidas de calor fue tratado en la literatura casi inmediatamente después de la publicación original de Parker en 1961, pero la primera solución completa a la ecuación del calor con pérdidas fue la publicada por Degiovanni en 1977 [43], que se reduce en el caso unidimensional a la ecuación (5.34). Su resultado demuestra que la corrección es importante, porque incluso para un número de Biot pequeño como $Bi \approx 0,1$, el método de Parker sobreestima la difusividad en $\approx 8\%$ (ver figura 6.1).

Varios métodos de reducción de datos basados en esta solución exacta han sido propuestos [13]. Sin embargo, es posible en principio un enfoque menos exigente matemáticamente, basado en la *medida temprana*: minimizar el problema de las pérdidas usando sólo la evolución de la temperatura en los primeros momentos tras el flash, cuando éstas son todavía muy pequeñas. Este planteamiento fue desarrollado por Balageas en [12] para la cara trasera: invierte la solución sin pérdidas (5.31), obteniendo una $\alpha(t)$ aproximada a partir de $T^*(t)$; calcula $\alpha(t)$ a partir de los datos experimentales, y extrapola a $t \rightarrow 0$ para obtener el valor correcto. El inconveniente es que calcular la temperatura normalizada T^* requiere conocer T_{lim} , que debido a las pérdidas no coincide con la temperatura máxima medida experimentalmente, T_{max} . En el apartado [7.2.4] volveremos a esta cuestión.

En este capítulo propondremos varias soluciones a los problemas que las pérdidas de calor plantean al método flash, tanto por la cara delantera como por la trasera. Comenzamos con métodos de ajuste de los datos basados en la medida temprana, para lo que previamente desarrollaremos soluciones aproximadas a la evolución de la temperatura en ambas caras en ausencia de convección. Estas soluciones, analíticamente muy sencillas, deberían proporcionar un ajuste razonablemente bueno del perfil de temperaturas para valores pequeños de t^* , al menos en los casos en los que las pérdidas no sean muy importantes. En el siguiente capítulo estudiaremos el caso general, en el que las soluciones teóricas completas, incorporando la convección, se usan para ajustar los perfiles experimentales.

6.2. Aproximación analítica despreciando las pérdidas

En el capítulo anterior hemos encontrado soluciones exactas para el problema de la evolución de la temperatura en una placa de espesor finito: las funciones de respuesta a impulso (*irf*) venían dadas, en el caso sin convección, por la fórmula de Parker (5.24), y en el caso con convección, por la de Degiovanni (5.34); y el perfil de temperaturas, $T(z, t)$, se obtenía mediante la convolución del flujo de calor $\phi(t)$ en la cara $z = 0$ con la correspondiente *irf*.

Sin embargo, para determinadas aplicaciones puede ser útil disponer de soluciones aproximadas más sencillas (y más manejables, ya que las soluciones exactas tienen la forma de una serie infinita). Como hemos sugerido en la sección anterior, un ejemplo es precisamente el estudio de la evolución de la temperatura de una placa con pérdidas sometida a un experimento flash. Vamos a obtener aquí soluciones de ese tipo, pero no partiendo de las *irf* sino de sus correspondientes funciones de transferencia. En esta sección nuestro punto de partida es la ecuación (5.23), que corresponde al caso sin convección, y en la siguiente lo será la ecuación (5.12), para en el caso general de convección no despreciable.

Comenzamos por el caso sin convección, buscando una aproximación a la función de transferencia para el caso en el que los valores de $qL = \sqrt{\frac{sL^2}{\alpha}}$ son grandes. Teniendo en cuenta la relación inversa de s con el tiempo, es de esperar que su transformada inversa de Laplace sea una aproximación válida para el caso de t^* pequeños.

6.2.1. Cara delantera

Partimos de la ecuación (5.23) que, particularizada para $z = 0$, queda:

$$\bar{T}(0, s) = \frac{Q_0}{\kappa q} \left\{ \frac{\cosh(qL)}{\sinh(qL)} \right\}$$

Buscamos un desarrollo en serie de esta función que sea válido para valores grandes de qL , para lo que hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\cosh(qL)}{\sinh(qL)} &= \frac{e^{qL} + e^{-qL}}{e^{qL} - e^{-qL}} \equiv \frac{a + \epsilon}{a - \epsilon} = \frac{a + \epsilon}{a} \frac{1}{\left(1 - \frac{\epsilon}{a}\right)} = \\ &\left(1 + \frac{\epsilon}{a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^n \end{aligned}$$

donde $a \equiv e^{qL}$, $\epsilon \equiv e^{-qL}$, y $\epsilon \ll 1$. Tenemos en definitiva:

$$\bar{T}(0, s) = \frac{Q_0}{\kappa q} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nqL}\right) = \frac{Q_0}{\kappa \sqrt{s/\alpha}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\sqrt{s/\alpha}L}\right)$$

Calculando la transformada de Laplace inversa¹, se llega a:

$$T(0, t) = \frac{Q_0 \sqrt{\alpha}}{\kappa \sqrt{\pi t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 L^2}{t\alpha}}\right) \quad (6.1)$$

Este resultado es la ecuación (5.28) que en el capítulo anterior habíamos tomado del artículo de Osiander y Spicer [135] sin demostración.

La demostración que hemos proporcionado ahora sugiere que truncar la serie a los primeros términos proporcionará una aproximación válida para valores pequeños de t^* . La figura 6.2, que muestra la comparación de la solución exacta con las aproximaciones que se obtienen reteniendo uno, dos y cuatro términos en las ecuaciones de Osiander (6.1) y Parker (5.27), lo confirma, y muestra además que la aproximación de Parker es complementaria, pues sus primeros términos proporcionan una excelente aproximación para los valores altos de t^* (se han normalizado las temperaturas a $T_{\text{lim}} = \frac{Q_0 \alpha}{\kappa l}$).

¹Por ejemplo, con Mathematica [110].

La aproximación que se obtiene reteniendo un sólo término en el sumatorio de (6.1),

$$T(0, t) \approx \frac{Q_0 \sqrt{\alpha}}{\kappa \sqrt{\pi t}} \left(1 + 2e^{-\frac{L^2}{t\alpha}} \right) \quad (6.2)$$

representada en gráfica de la izquierda de la figura 6.2 por la línea azul de trazos, tiene un error relativo del 0,1 % para $t^* = 0,55$ y del 1 % para $t^* = 0,83$.

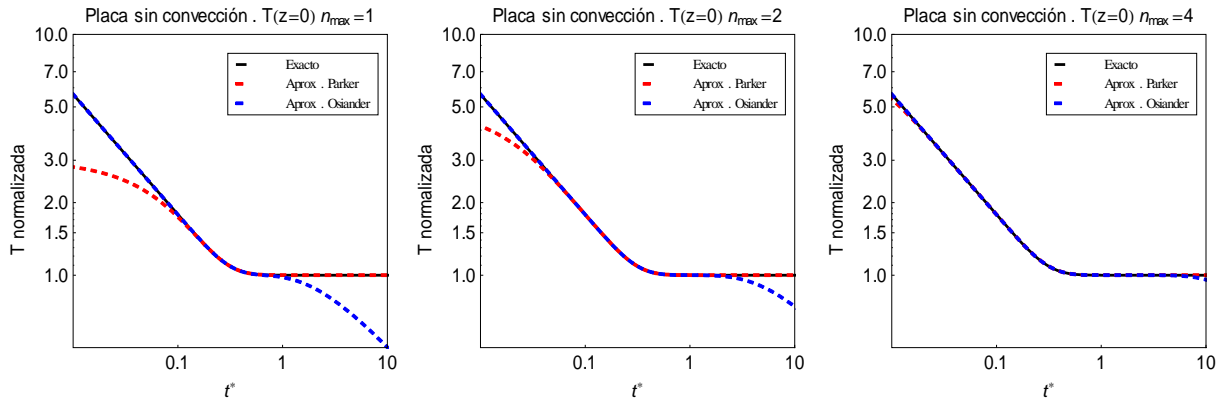


Figura 6.2: Comparación de las aproximaciones obtenidas truncando las series (6.1) (“de Osiander”) y (5.27) (“de Parker”) para la temperatura en la cara delantera de una placa sometida a un flujo instantáneo de radiación (delta de Dirac) en la superficie delantera. Tanto la temperatura como el tiempo están normalizados

6.2.1.1. Aplicación a la detección de defectos y la obtención de α

El término que multiplica al paréntesis representaba la $T(0, t)$ en el caso de sólido semi-infinito, así que pondremos $T_\infty(0, t) \equiv \frac{Q_0 \sqrt{\alpha}}{\kappa \sqrt{\pi t}}$. Por tanto, si siguiendo a Balageas [10] identificamos el incremento de temperatura en una zona “sin defecto” de una muestra plana con $T_\infty(0, t)$ y el incremento de temperatura en la zona “con defecto” (a profundidad L) con $T_L(0, t)$, encontramos una expresión muy sencilla para el contraste relativo C_r cuando usamos la aproximación dada por la ecuación (6.2).

$$C_r(t) \equiv \frac{T_L(0, t) - T_\infty(0, t)}{T_\infty(0, t)} \approx 2e^{-\frac{L^2}{t\alpha}} \quad (6.3)$$

Según esto, para $t \rightarrow \infty$, $C_r \rightarrow 2$, pero obviamente en el límite $t \rightarrow \infty$ la aproximación no es válida. No obstante, para los primeros instantes en los que la temperatura de la zona con defecto se aleja de la de la zona sin defecto, se cumple que

$$L \approx \sqrt{t\alpha \ln \left(\frac{2}{C_r} \right)} \quad (6.4)$$

de modo que la gráfica de $\sqrt{t\alpha \ln\left(\frac{2}{C_r}\right)}$ debería ser una recta horizontal cuya ordenada nos daría L . Este método tiene la ventaja respecto al basado en estimar t_c (ecuación (5.29)) de que es más rápido, porque no hay que esperar a que la temperatura se estabilice en el defecto: eso requería que $t^* \approx 1$, es decir, $t \approx \frac{L^2}{\alpha}$ (como vimos en [5.4.1.3]), mientras que como vimos en la ecuación (5.29), para $t_c = \frac{L^2}{\pi\alpha}$ hay ya una importante desviación respecto del comportamiento semi-infinito. La mayor rapidez tiene la ventaja adicional de que minimiza los efectos de la convección y los de la difusión lateral del calor².

Este método puede usarse, alternativamente, para la determinación de la difusividad en una región sin defectos y de espesor conocido, despejando

$$\alpha(t) = \frac{L^2}{t \cdot \ln\left(\frac{2}{C_r(t)}\right)} \quad (6.5)$$

6.2.1.2. Resultados experimentales

Montaje experimental de experimentos flash El equipo habitual para llevar a cabo experimentos de excitación flash consta de los elementos siguientes (ver figura 6.3):

- Una lámpara flash, con emisión en el visible (es habitual usar un filtro para eliminar radiación en el IR).
- Una cámara IR, colocada del mismo lado de la lámpara si se trata de medidas por la cara delantera (lo que a veces se llama configuración en *reflexión*, aunque lo que mide la cámara no es la luz reflejada sino la emitida por el espécimen) o del lado contrario para medidas en la cara trasera (la llamada configuración en *transmisión*, aunque la cámara no mide radiación transmitida sino emitida).
- Un ordenador de adquisición.
- Una unidad de control que permita sincronizar y definir la excitación que se va a llevar a cabo.

Cada uno de los elementos arriba definidos, están representados de manera esquemática en la figura 6.3, para la configuración en *transmisión*. La de *reflexión* es análoga, con la cámara al otro lado del espécimen, y es la que se ha usado en las medidas descritas a continuación.

²Según [10], en esta aproximación de primer orden el contraste no depende de la resistividad térmica del defecto; esto es otra ventaja de limitarse a la zona en la que empieza a emerger el contraste.

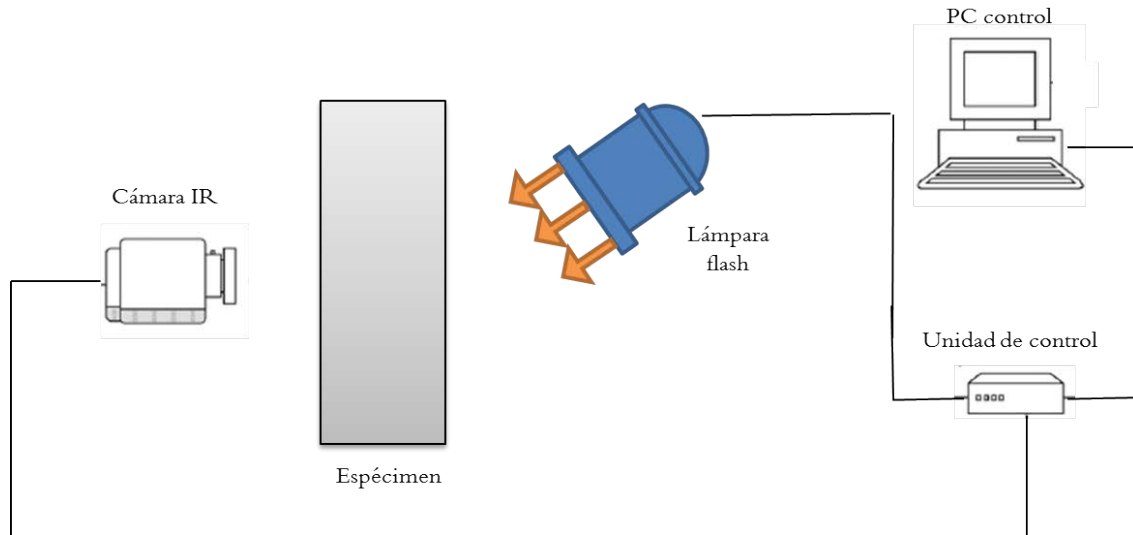


Figura 6.3: Esquema de los elementos involucrados en un experimento de excitación flash. Figura adaptada de [79]

Muestra estudiada El método de determinación de α basado en la medida de la evolución temprana de la temperatura que acabamos de describir lo hemos aplicado a una placa de baquelita de $100 \times 130 \times 5,5 \text{ cm}^3$, en la que se han practicado unos rebajes cilíndricos de varios diámetros y profundidades, dispuestos en forma de matriz (ver esquema de la figura 6.4). La muestra ha sido sometida a una iluminación flash por el lado de los rebajes y la evolución de la temperatura por la cara opuesta (plana) ha sido registrada por una cámara Thermosensorik 640, con una frecuencia de adquisición de 189 frames por segundo (FPS). Estudiaremos aquí tres puntos: P_1 y P_2 , en el centro de dos rebajes cilíndricos (diámetro 10 mm) y P_0 en un punto sin rebajar y lejos de los bordes. Los espesores son: $P_1 = 1,05 \text{ mm}$, $P_2 = 1,5 \text{ mm}$, $P_0 = 5,5 \text{ mm}$. Los valores de los espesores y diámetros de la probeta de baquelita pueden consultarse en la tabla 6.1.

Resultados Para compensar la inevitable falta de uniformidad de la iluminación del flash, los incrementos de temperatura $T(t) - T_a$ (siendo T_a la temperatura ambiente, que es también la inicial de la placa) se han normalizado en cada punto a $T(t_0) - T_a$ (siendo $T(t_0)$ la temperatura del punto en un instante temprano en el que los efectos del espesor finito y la convección no se han hecho notar aún; hemos elegido $t_0 = 0,53 \text{ s}$).

La figura 6.5 muestra la evolución de estos incrementos de temperatura normalizados en escala lineal (izquierda) y log-log (derecha). Como se aprecia, existe una cierta desviación con respecto a la curva que correspondería al sólido infinito sin convección (curva discontinua de pendiente $-\frac{1}{2}$). Esto es de esperar porque en la práctica T no puede ten-

	Diámetros (mm)		Espesores (mm)
D_1	10	P_1	1.05
D_2	8	P_2	1.5
D_3	6	P_3	2.5
D_4	4	P_4	3.5
		P_5	4
		P_0 (Sin defecto)	5.5

Tabla 6.1: Valores de los espesores y diámetros reales de la probeta de baquelita utilizada en los experimentos.

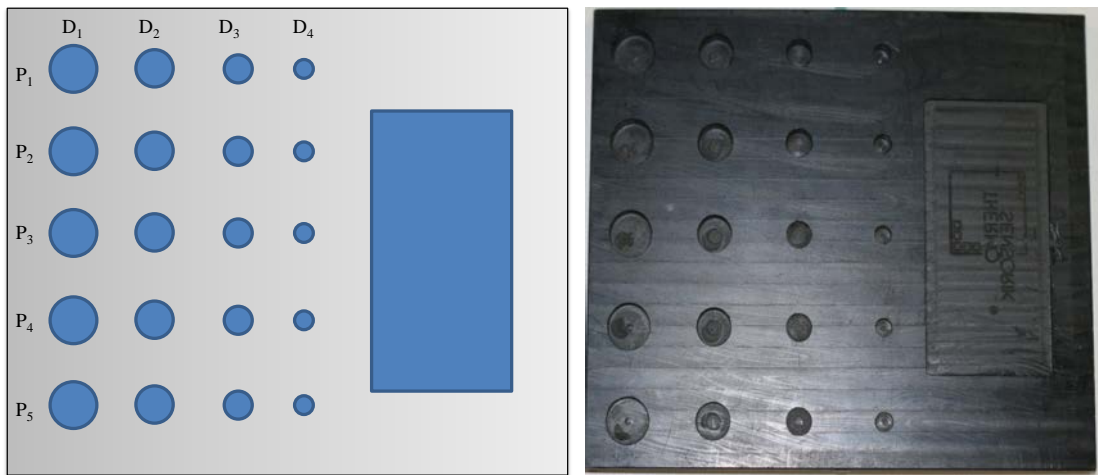


Figura 6.4: Izquierda: Representación esquemática de la probeta de baquelita usada para mostrar el método de detección de defectos y de caracterización térmica. Derecha: foto en visible de la probeta de baquelita.

der a infinito cuando t tiende a cero. Por otra parte, pequeñas incertidumbres en el origen de tiempos producen alteraciones apreciables de la pendiente en la escala log-log para valores pequeños del tiempo. Conviene por tanto no usar para el ajuste ese tramo de la gráfica, y fijarse en los tiempos para los que los datos experimentales se ajustan a la recta de pendiente $-\frac{1}{2}$ y los posteriores en los que empiezan a separarse de ella.

Podemos obtener α a partir de la ecuación (6.3) si representamos el contraste $C_r(t)$ de los puntos P_1 y P_2 respecto de P_0 , tal como se hace en la figura 6.6 (izquierda). Encontramos que el valor de $C_r = 0,1$ se encuentra para $t = 2,11\text{ s}$ en P_1 y $t = 4,43\text{ s}$ en P_2 , lo que, según la ecuación (6.5) corresponde a $\alpha(P_1) = 1,83 \cdot 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$ y $\alpha(P_2) = 1,68 \cdot 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$.

Alternativamente, podemos dibujar la función $\alpha(t)$ dada por (6.5), como se hace en la figura 6.6 (derecha). Idealmente las gráficas deberían ser sendas líneas horizontales, pero se observa una tendencia a decrecer al aumentar t . Esto es una consecuencia de los

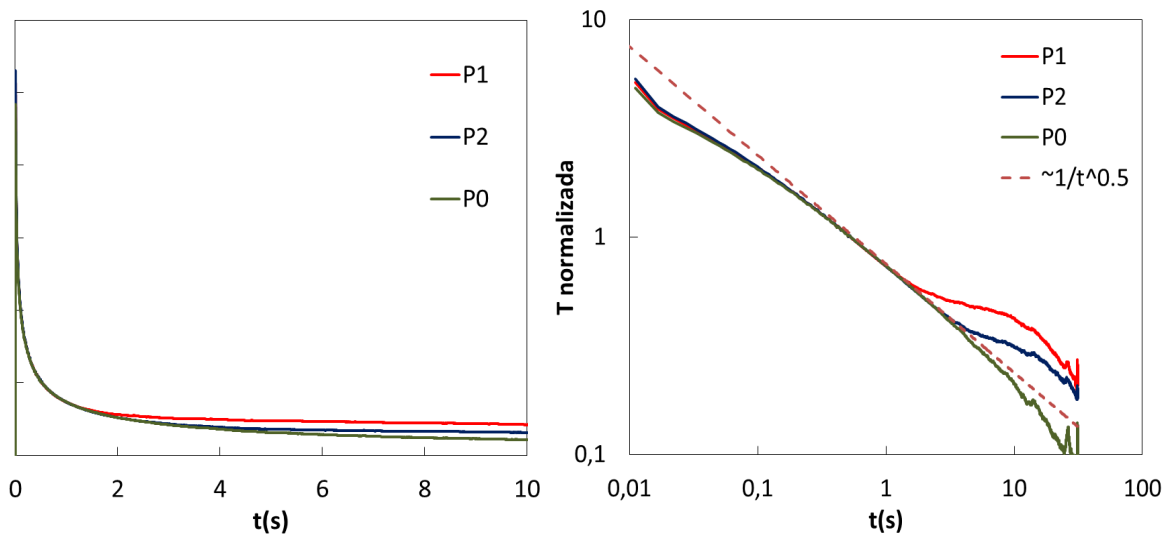


Figura 6.5: Evolución de la temperatura en cara delantera para los tres puntos analizados en la probeta de baquelita. Izquierda: escala lineal; Derecha: escala log-log.

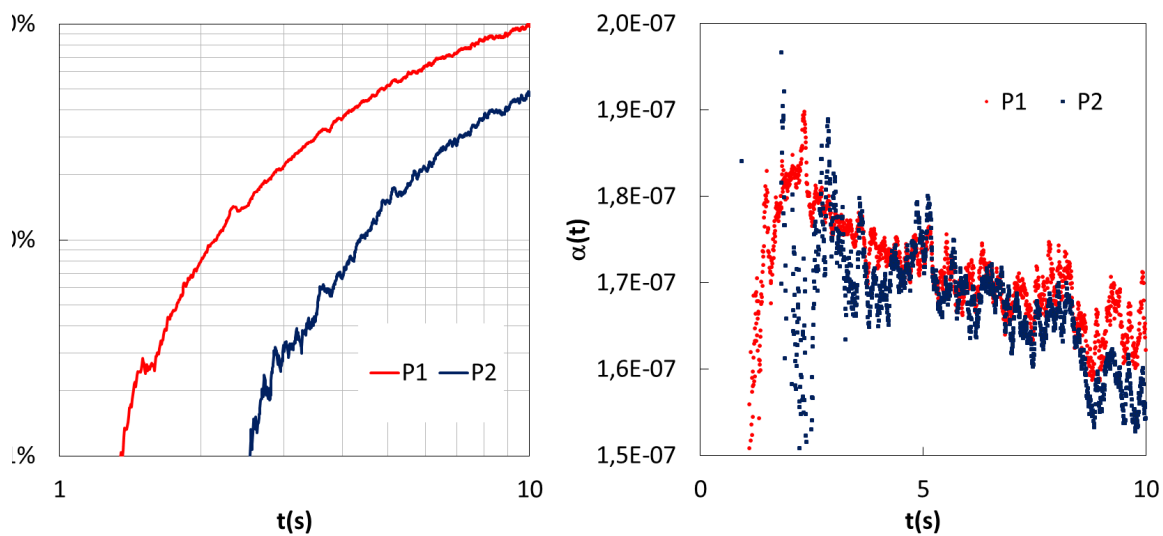


Figura 6.6: Izquierda: evolución del contraste con respecto al tiempo en los dos puntos estudiados de la baquelita; Derecha: difusividad térmica frente al tiempo para esos dos mismos puntos.

efectos de la convección, que desvía la gráfica de $T(t)$ hacia valores menores, reduciendo el contraste relativo C_r y por tanto disminuyendo el valor de $\alpha(t)$. En principio el valor correcto debería obtenerse en el límite de $t \rightarrow 0$, pero el alto nivel de ruido, sobre todo para valores pequeños de t , hace incierto este procedimiento (es lógico que el ruido sea grande, teniendo en cuenta que en la expresión (6.3) de $\alpha(t)$ hay en el denominador dos factores que tienden uno a 0 y otro a infinito cuando $t \rightarrow 0$). En cualquier caso, extrapolando los valores de la región entre 3 y 5 s, encontramos $\alpha(P_1) = 1,80 \cdot 10^{-7} m^2/s$ y $\alpha(P_2) = 1,75 \cdot 10^{-7} m^2/s$, valores en razonable acuerdo con los obtenidos en el párrafo anterior. No obstante, es de esperar que un método más riguroso, que tenga explícitamente en cuenta el efecto de las pérdidas de calor, proporcione valores más fiables. Por ejemplo, es claro que los valores de $\alpha(P_1)$ y $\alpha(P_2)$ deberían ser iguales, ya que el material es el mismo; una posible razón que obtengamos valores distintos es que los efectos de la convección no serán iguales en ambos puntos, ya que al tener distinto grosor tienen diferentes números de Biot.

Hay que señalar que estos ajustes, basados en la ecuación (6.2), deben limitarse a valores del tiempo para los que el error de esta aproximación sea pequeño. En nuestro caso, para $\alpha \approx 1,8 \cdot 10^{-7} m^2/s$, el valor de $t^* = 0,83$ por debajo del cual el error relativo es menor del 1% se corresponde con $t \approx 5$ s para P_1 y $t \approx 10$ s para P_2 . Naturalmente, que se cumpla esta condición no garantiza que obtengamos el valor correcto de α , pues estamos aplicando una aproximación sin convección a una muestra que la tiene. Veremos el resultado de los ajustes que sí tienen en cuenta las pérdidas en el apartado [7.1.1].

6.2.2. Cara trasera

Como antes, partimos de la ecuación (5.23), pero particularizamos para $z = L$:

$$\bar{T}(L, s) = \frac{Q_0}{\kappa q} \left\{ \frac{1}{\sinh(qL)} \right\}$$

Hacemos

$$\frac{1}{\sinh(qL)} = \frac{2}{e^{qL} - e^{-qL}} \equiv \frac{2}{a - \epsilon} = \frac{2}{a} \left(\frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{a}} \right) = \frac{2}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{a^{n+1}}$$

y sustituyendo $a \equiv e^{qL}$ y $\epsilon \equiv e^{-qL}$ llegamos a :

$$\bar{T}(0, s) = \frac{Q_0}{\kappa q} 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n-1)qL} = \frac{Q_0}{\kappa \sqrt{s/\alpha}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n-1)\sqrt{s/\alpha}L}$$

La transformada inversa de Laplace es:

$$T(L, t) = \frac{Q_0 \sqrt{\alpha}}{\kappa \sqrt{\pi t}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 L^2}{4t\alpha}} \quad (6.6)$$

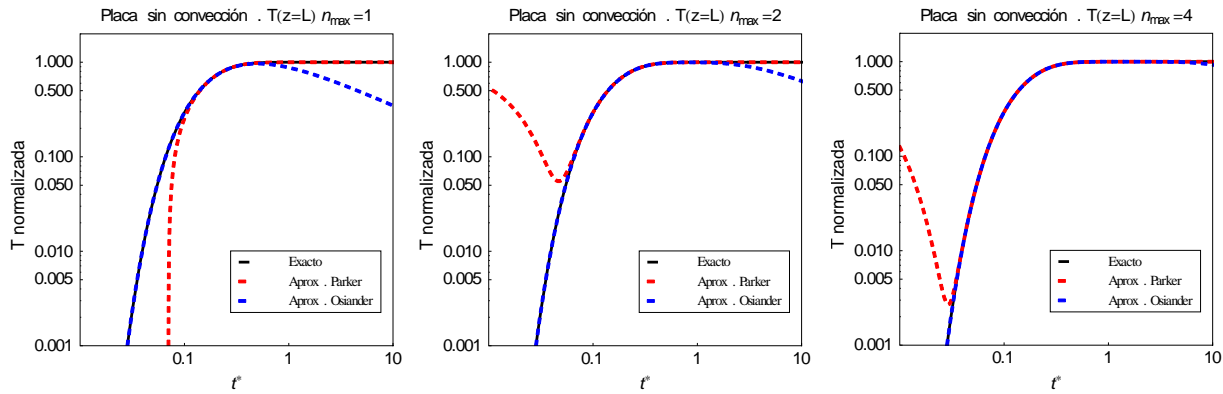


Figura 6.7: Comparación de las aproximaciones obtenidas truncando las series (6.1) (“de Osiander”) y (5.27) (“de Parker”) para la temperatura en la cara trasera de una placa sometida a un flujo instantáneo de radiación (delta de Dirac) en la superficie delantera. Tanto la temperatura como el tiempo están normalizados.

Esta fórmula nos proporciona una aproximación análoga a la (6.1) pero para la temperatura de la cara trasera, de la que antes no disponíamos (vamos a llamarla “tipo Osiander”) y que será válida para valores pequeños de t^* . Esto se confirma en la figura 6.7, que muestra la comparación entre la solución exacta y las soluciones aproximadas obtenidas truncando (6.6) y la ecuación clásica de Parker (5.30).

La aproximación que se obtiene reteniendo un sólo término en el sumatorio de (6.6),

$$T(L, t) \approx \frac{2Q_0\sqrt{\alpha}}{\kappa\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{L^2}{4t\alpha}} \quad (6.7)$$

representada en gráfica de la izquierda de la figura 6.7 con la línea azul de trazos, tiene un error relativo del 0,1 % para $t^* = 0,29$ y del 1 % para $t^* = 0,44$. Alcanza su valor máximo para $t^* = \frac{1}{2}$, siendo el correspondiente valor de temperatura $T_{max}^* = \sqrt{\frac{8}{\pi e}} = 0,9678$.

6.2.2.1. Aplicación a la medida de α . Resultados experimentales

Se ha utilizado la misma muestra de apartado anterior, observada también por la cara plana, pero ahora iluminada por el flash en la cara contraria (el montaje corresponde a la figura 6.3).

La expresión aproximada (6.7) permite estimar la difusividad si la usamos para ajustar el primer tramo de la curva $T(t)$ de la cara trasera en un experimento flash. Dado que no conocemos la energía depositada por unidad de área Q_0 , el procedimiento seguido ha consistido en normalizar las curvas experimentales entre 0 y 1, para ajustarlas posteriormente por la temperatura proporcionada por la ecuación (6.7), normalizada a T_{lim} (es decir, en

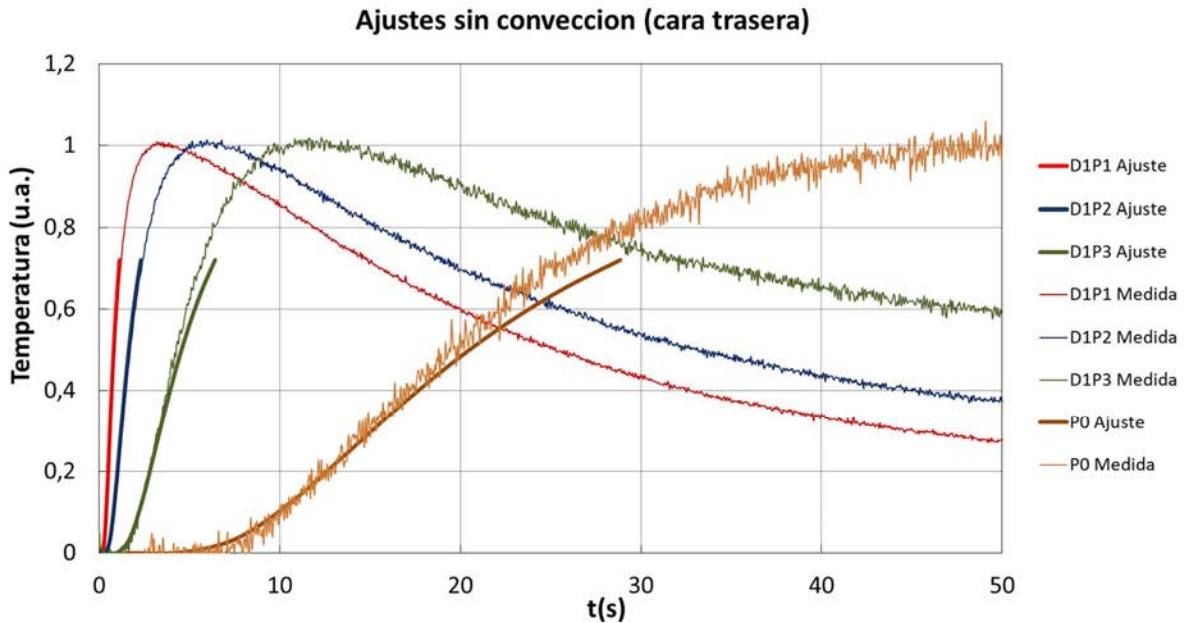


Figura 6.8: Gráficas experimentales de $T(t)$ medidas en la cara trasera de un experimento flash para la muestra de la figura 6.4 y su ajuste con la ecuación (6.2) para un valor de difusividad $\alpha = 1,85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

unidades de T^*)³.

Los resultados se muestran en la figura 6.8. Los espesores en los respectivos puntos son: $P_1 = 1,05 \text{ mm}$, $P_2 = 1,5 \text{ mm}$, $P_3 = 2,5 \text{ mm}$ y $P_0 = 5,5 \text{ mm}$. Se ha buscado el mejor ajuste para los primeros instantes de calentamiento (sólo se ha representado en la gráfica los valores teóricos para la región de $t^* < 0,2$) con la condición de usar el mismo valor de α para todos los puntos. Con estas restricciones, se ha encontrado un valor de $\alpha = 1,85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

6.3. Aproximación analítica sin despreciar las pérdidas

De igual modo que hemos hecho en la sección anterior para el caso sin convección, se podría intentar obtener una aproximación analítica en el caso general para valores pequeños de t^* , esto es, valores grandes de s en el dominio de Laplace. Nos hemos propuesto hacer esto para la cara trasera, que es la que generalmente proporciona información. Si ponemos $z = L$ (cara trasera), en (5.12) queda, después de simplificar (ponemos ya Q_0 en

³Se ha dividido además por el valor máximo $T_{max}^* = 0,9678$, lo que supone una corrección muy pequeña pero hace que los valores teóricos estén también entre 0 y 1.

vez de $\overline{\Phi}_0$):

$$\overline{T}(L, s) = \frac{Q_0}{\kappa q} \cdot \left\{ \frac{1}{\frac{2h}{\kappa q} \cosh(qL) + \left(1 + \frac{h^2}{\kappa^2 q^2}\right) \sinh(qL)} \right\} \quad (6.8)$$

Dividiendo numerador y denominador por $\sinh(qL)$, llegamos a:

$$\overline{T}(L, s) = \frac{Q_0}{\kappa q} \frac{\frac{1}{\sinh(qL)}}{\frac{2h}{\kappa q} \frac{\cosh(qL)}{\sinh(qL)} + \left(1 + \frac{h^2}{\kappa^2 q^2}\right)} \quad (6.9)$$

El numerador $\frac{1}{\sinh(qL)}$ lo habíamos encontrado en la temperatura en la cara trasera sin convección y la fracción del denominador $\frac{\cosh(qL)}{\sinh(qL)}$ en la temperatura en la cara delantera sin convección. Si desarrollamos estos dos términos tendremos, con la notación de los apartados anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sinh(qL)} &= \frac{2}{a} + \frac{2\epsilon}{a^2} + \frac{2\epsilon^2}{a^3} + \dots \\ \frac{\cosh(qL)}{\sinh(qL)} &= 1 + \frac{2\epsilon}{a} + \frac{2\epsilon^2}{a^2} + \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\overline{T}(L, s) = Q_0 \frac{\frac{2}{a} + \frac{2\epsilon}{a^2} + \frac{2\epsilon^2}{a^3} + \dots}{2h \left(1 + \frac{2\epsilon}{a} + \frac{2\epsilon^2}{a^2} + \dots\right) + \left(\kappa q + \frac{h^2}{\kappa q}\right)} \quad (6.10)$$

Si nos quedamos con los dos primeros términos de las series, teniendo en cuenta que $\frac{1}{a} = \frac{1}{e^{qL}} = e^{-qL}$; $\frac{\epsilon}{a} = \frac{e^{-qL}}{e^{qL}} = e^{-2qL}$ y $\frac{\epsilon^2}{a^2} = \frac{e^{-2qL}}{e^{2qL}} = e^{-4qL}$, podremos escribir:

$$\overline{T}(L, s) = 2Q_0 \frac{e^{-qL} + e^{-3qL}}{2h \left(1 + 2e^{-2qL}\right) + \left(\kappa q + \frac{h^2}{\kappa q}\right)} \quad (6.11)$$

El enfoque planteado en la sección [6.2] nos lleva a esta ecuación, pero a diferencia de lo que ocurría allí, no he hemos encontrado una transformada inversa de Laplace analítica. Por ello, hemos planteado un método genérico de aproximación: la descomposición en fracciones simples, como veremos en el apartado siguiente.

6.3.1. Descomposición en fracciones simples

Una técnica estándar para realizar la transformada de Laplace inversa de una función racional es descomponer ésta en fracciones simples [134]. Recordemos que la descomposición en fracciones simples de una función racional es la operación que consiste en expresar

la fracción como una suma de un polinomio y una o varias fracciones con un denominador más simple. Es decir, tendremos $\frac{f(x)}{g(x)}$, donde f y g son polinomios, expresada en la forma $\sum_j \frac{f_j(x)}{g_j(x)}$, donde $g_j(x)$ son polinomios que son los factores de $g(x)$. De manera general, si consideramos dos polinomios $P(x)$ y $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ con grado $P < n$, escribiremos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x - a_1} + \frac{c_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{c_n}{x - a_n} \quad (6.12)$$

Dado que $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s+\alpha)^n} \right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \exp^{-\alpha t} \cdot u(t)$ (siendo $u(t)$ la función escalón unitaria), la transformada inversa de Laplace de una función racional descompuesta en fracciones simples es inmediata.

Nos vamos a proponer aquí desarrollar en serie de Taylor el denominador de la ecuación (6.8), de modo que lo aproximemos por un polinomio ⁴. La función de transferencia aproximada así obtenida será una fracción racional, y su desarrollo en fracciones simples tendrá una transformada inversa de Laplace analítica. Lo primero que vamos a hacer es desarrollar en serie de Taylor el seno y el coseno hiperbólicos:

$$\begin{aligned} \cosh(\sqrt{s}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\sqrt{s})^{2n} = 1 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{24} + \frac{s^3}{720} + \cdots \\ \sinh(\sqrt{s}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\sqrt{s})^{2n+1} = \sqrt{s} + \frac{\sqrt{s}^3}{6} + \frac{\sqrt{s}^5}{120} + \cdots \end{aligned}$$

Naturalmente, sólo se puede truncar el desarrollo con buena aproximación si \sqrt{s} es pequeño, lo que corresponde valores grandes de t^* , la situación opuesta a la de las secciones anteriores. Aunque en principio tiene más interés el caso de t^* pequeño, los valores grandes son los que vamos a encontrar en el calentamiento escalón que veremos en el capítulo [8], y, en cualquier caso, vamos a ver qué grado de precisión ofrece la aproximación para valores genéricos de t^* .

Sustituyendo las expresiones anteriores en (6.8), desarrollando y simplificando se llega a la siguiente expresión racional:

$$\bar{T}^*(L, s) \approx \frac{1}{s^4 \left(\frac{1}{5040} \right) + s^3 \left(\frac{Bi^2}{5040} + \frac{Bi}{360} + \frac{1}{120} \right) + s^2 \left(\frac{Bi^2}{120} + \frac{Bi}{12} + \frac{1}{6} \right) + s^1 \left(\frac{Bi^2}{6} + Bi + 1 \right) + s^0 (2Bi + Bi^2)} \quad (6.13)$$

Para calcular las raíces del polinomio que aparece en el denominador y de los coeficientes del numerador haremos uso de la función *residue* de Matlab. La descomposición

⁴Previamente lo escribiremos en variables adimensionales, lo que equivale a hacer iguales a 1 los valores de k , Q_0 , α y K y, por tanto, $q = \sqrt{s}$

en fracciones simples será del tipo de la ecuación (6.12), que reescribimos aquí en coordenadas laplacianas:

$$\bar{T}^*(s) = \frac{c_1}{s - a_1} + \frac{c_2}{s - a_2} + \dots + \frac{c_n}{s - a_n}$$

donde n será el orden del denominador (asumiendo que no hay raíces múltiples). Con esta transformación, la transformada inversa será del tipo:

$$T^*(t) = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t} + \dots + c_n e^{a_n t} \quad (6.14)$$

Si entre los coeficientes y las raíces encontramos números complejos conjugados, podemos obtener una expresión usando funciones trigonométricas del siguiente modo. Si:

- $c_1 = \alpha + i\beta ; c_2 = \alpha - i\beta$
- $a_1 = \sigma + i\omega ; a_2 = \sigma - i\omega$

Tendremos

$$c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t} = (\alpha + i\beta) \exp((\sigma + i\omega)t) + (\alpha - i\beta) \exp((\sigma - i\omega)t)$$

Desarrollando las exponenciales imaginarias:

$$(\alpha + i\beta) e^{(\sigma + i\omega)t} = e^{\sigma t} (\alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t + i\beta \cos \omega t + i\alpha \sin \omega t)$$

$$(\alpha - i\beta) e^{(\sigma - i\omega)t} = e^{\sigma t} (\alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t - i\beta \cos \omega t - i\alpha \sin \omega t)$$

Llegamos a:

$$c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t} = e^{\sigma t} (2\alpha \cos \omega t - 2\beta \sin \omega t)$$

De este resultado, tenemos una expresión alternativa para la transformada inversa usando sólo funciones trigonométricas y evitando, también, el uso de números complejos. Para la expresión (6.13) se ha encontrado, en el intervalo de valores de $Bi \in [0, 1]$ que los dos primeros coeficientes y las dos primeras raíces son conjugados (es decir, $c_1 = \alpha + i\beta$, $c_2 = \alpha - i\beta$, $a_1 = \sigma + i\omega$, $a_2 = \sigma - i\omega$), de modo que podemos dar una una expresión general de la transformada inversa de Laplace para la respuesta en cara trasera para excitación flash:

$$T^*(t) = e^{\sigma t} [2\alpha \cos(\omega t) - 2\beta \sin(\omega t)] + c_3 e^{a_3 t} + c_4 e^{a_4 t} \quad (6.15)$$

El valor de los coeficientes y las raíces dependerá del valor que tome el número de Biot. Estudiándolos de 0 a 1 con paso 0.01 y ajustando los valores obtenidos con funciones lineales o exponenciales, se llega a que estos dependen del número de Biot tal como se muestra en la tabla 6.2.

σ	$= 4,32Bi - 16,20$
ω	$= 0,082e^{-3,39Bi} - 16,44e^{0,01Bi}$
a_3	$= -9,53e^{0,37Bi} - 8,79 \cdot 10^{-6}e^{10,69Bi}$
a_4	$= -4,766e^{0,04Bi} + 4,77e^{-0,38Bi}$
α	$= 0,35e^{-0,03Bi} - 0,0015e^{4,48Bi}$
β	$= -0,039Bi + 14,66$
c_3	$= -1,69e^{-0,21Bi} - 0,0043e^{4,20Bi}$
c_4	$= 0,07e^{-0,99Bi} + 0,93e^{-0,29Bi}$

Tabla 6.2: Expresiones analíticas en función del número de Biot para los parámetros que definen la inversa de Laplace obtenidas mediante un ajuste.

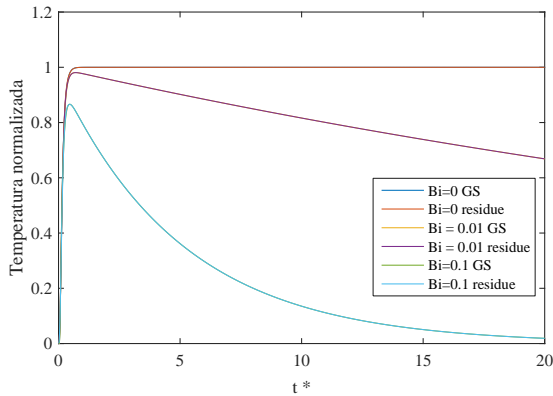


Figura 6.9: Temperatura normalizada frente a t^* para tres valores de Bi (0, 0.01 y 0.1). Se comparan los resultados obtenidos mediante la descomposición en fracciones parciales ("residuos") con los de la solución numérica de Gaver-Stehfest ("G-S")

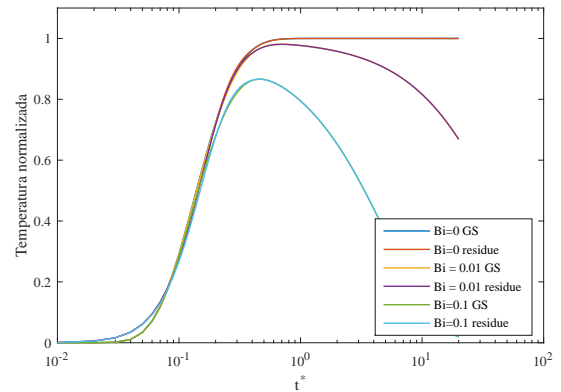


Figura 6.10: Los datos de la figura 6.9 representados con eje horizontal en escala logarítmica. Las diferencias entre los resultados obtenidos con ambos métodos solo se aprecian para valores pequeños de t^* .

Queda por comprobar si a partir de estas expresiones se obtienen los mismos resultados que en el caso de la solución numérica de Gaver-Stehfest. Veámoslo en las figuras 6.9 y 6.10: se observa, especialmente en 6.10, que no se aprecian diferencias entre un método y otro.

En conclusión, el método desarrollado en esta sección permite trabajar con ecuaciones analíticas que, con un número pequeño de términos, proporcionan una excelente aproximación a la evolución de la temperatura en la cara trasera para un experimento flash. Estas expresiones pueden integrarse para proporcionar la respuesta a una excitación escalonada ideal (o convolucionarse con la excitación en la cara delantera para el caso general).

No obstante, pese a la conveniencia de disponer de una solución analítica, el hecho de que haya que buscar las raíces para cada número de Biot limita la utilidad de esta solución, ya que esas raíces tienen que encontrarse por un procedimiento numérico. Cuando no se conozca a priori el número de Biot y haya que determinarlo, usar la aproximación desarrollada aquí no supone una ventaja clara respecto de la inversión numérica de la transformada de Laplace, que es el método que hemos seguido usando en el resto de esta memoria.

6.4. Conclusiones

La solución exacta de la ecuación del calor con convección, encontrada en el capítulo [5], nos permite demostrar que si no se tienen en cuenta las pérdidas térmicas, el *método clásico de Parker* [138] para determinar α por termografía flash (basado en la medida del tiempo $t_{0,5}$ que tarda en alcanzarse en la cara trasera un incremento de temperatura igual a la mitad del máximo T_{max}) da errores considerables, incluso para valores pequeños del número de Biot (un 8 % para $Bi = 0, 1$, figura 6.1).

Sin embargo, se ha demostrado que pueden obtenerse valores de α mucho más precisos con *aproximaciones que no tienen en cuenta las pérdidas*, si las usamos para ajustar los primeros segundos de calentamiento (*ajuste temprano*). Se han deducido dos aproximaciones analíticas, una para la cara delantera (basada en la solución de [135]) y otra para la cara trasera (que no hemos encontrado publicada en la literatura, ecuación (6.6)).

Ambas soluciones aproximadas se han aplicado a *medidas experimentales* realizadas sobre una muestra test de baquelita, demostrándose que la técnica del ajuste temprano permite recuperar valores de α más aproximados de manera sencilla y fiable.

Finalmente, se ha construido una *solución analítica aproximada con pérdidas*, pero no se ha encontrado que, pese a su excelente ajuste a la solución exacta, proporcione una ventaja significativa respecto de la solución numérica expuesta en la sección [5.5].

Termografía pulsada con pérdidas de calor: soluciones exactas

RESUMEN: En este capítulo se utiliza ya el modelo unidimensional completo que incluye las pérdidas para recuperar valores correctos de los parámetros térmicos. Además de presentar el estudio teórico y los resultados experimentales obtenidos, comparados con los del capítulo anterior, se ha estudiado la limitación del método debido a los efectos tridimensionales que pueden aparecer en ciertas muestras, comparando los resultados con los de un modelo de elementos finitos.

Después de estudiar en el capítulo anterior las soluciones aproximadas, que despreciaban las pérdidas, para la evolución de la temperatura en experimentos de termografía flash con pérdidas, y su uso para obtener los parámetros térmicos del material, pasamos ahora a un modelo completo en el que se tienen en cuenta las pérdidas. Empezaremos con el modelo unidimensional expuesto en el capítulo [5] para, en la última sección del capítulo, estudiar los efectos tridimensionales en la propagación del calor.

7.1. Modelo completo de las pérdidas: Cara delantera

En el capítulo [5] se expuso la solución exacta de la ecuación del calor unidimensional con pérdidas, bien en forma analítica, con la ecuación (5.34), o en forma numérica con el algoritmo de Gaver-Stehfest (sección [5.5]). Estas soluciones son el punto de partida más riguroso para obtener las propiedades térmicas del espécimen en un experimento flash. En esta sección tratamos el problema para la cara delantera y en la siguiente para la trasera.

El efecto de la convección, tanto en la cara trasera como en la delantera, ya se presentó en la figura 5.8. Conviene sin embargo estudiar comparativamente el efecto de distintos grados de convección, medidos por el valor del número de Biot. Los resultados de la

evolución de las temperaturas en la cara delantera para una muestra sometida a una excitación flash se pueden ver en la figura 7.1; son indistinguibles para la solución analítica y la numérica. El efecto del espesor finito de la placa hace que la gráfica se desvíe de la recta de pendiente $-\frac{1}{2}$ correspondiente al sólido infinito, mientras que la convección, a su vez, la desvía de la tendencia horizontal que tiene la placa finita para $Bi = 0$.

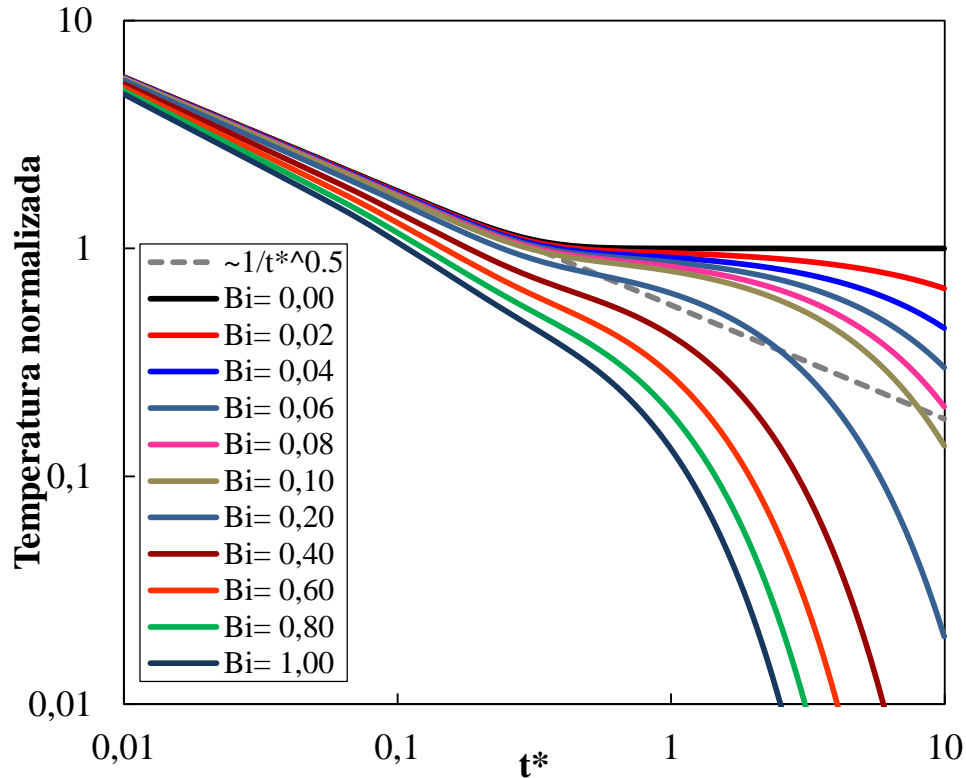


Figura 7.1: Efecto de los diferentes valores de Bi en la respuesta en temperatura para excitación flash por la cara delantera. $Bi=0$ corresponde al caso en el que no existe convección. Se incluye además el caso del sólido infinito sin convección (curva discontinua).

7.1.1. Resultados experimentales

Estos efectos explican cualitativamente los resultados experimentales mostrados en la figura 6.5. Veamos ahora si pueden reproducirlos cuantitativamente.

El resultado de los ajustes se muestra en la figura 7.2. Se ha impuesto que el valor de la difusividad térmica sea el mismo para los tres puntos, obteniéndose el ajuste mostrado para $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, con los números de Biot iguales a 0,10, 0,15 y 0,55 para los puntos P_1 , P_2 y P_0 , respectivamente. Estos valores son razonables ya que guardan la proporción

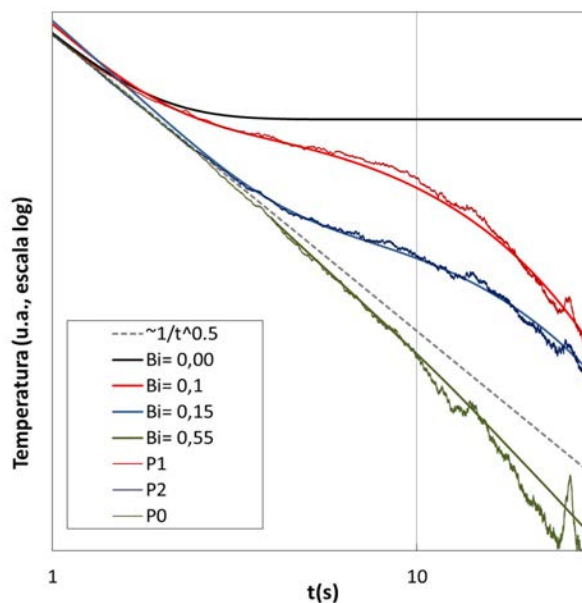


Figura 7.2: Ajuste curvas experimentales a curvas analíticas (Degiovanni) para los tres puntos estudiados. $Bi=0$ corresponde al caso en el que no existe convección. Se incluye además el caso del sólido infinito sin convección (curva discontinua).

aproximada de los espesores (que, recordemos, eran de $P_1 = 1,05 \text{ mm}$, $P_2 = 1,5 \text{ mm}$ y $P_0 = 5,5 \text{ mm}$).

Hay que recordar que lo que hemos denotado aquí como “temperatura” es el incremento de temperatura respecto del ambiente, y que viene medida en unidades arbitrarias. Por tanto, al ajustar los perfiles teóricos a los datos experimentales, además de variar α y Bi , hay que ajustar la escala vertical multiplicando por un factor de escala, lo que en la gráfica logarítmica tiene el efecto de desplazar verticalmente la gráfica. Un inconveniente de este método es que el resultado de α obtenido es bastante sensible a este desplazamiento. Hemos tomado el criterio de elegir el factor de escala de modo que la gráfica teórica coincida con la experimental en la región en la que comienza la desviación de la pendiente $-\frac{1}{2}$ (los tiempos que corresponden al tramo curvo de la curva $Bi = 0$), pero se ha comprobado que variar el punto elegido dentro de esta región altera el valor de α entre $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ y $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, lo que supone una incertidumbre importante.

7.2. Modelo completo de las pérdidas: Cara trasera

La figura 7.3, análoga a la 7.1 y obtenida igualmente, muestra los resultados de la evolución de $T^*(t^*)$ en la cara trasera.

Estas gráficas muestran que si las pérdidas no son tenidas en cuenta, el máximo de temperatura será subestimado. El tiempo $t_{0,5}$ es también subestimado, produciendo erro-

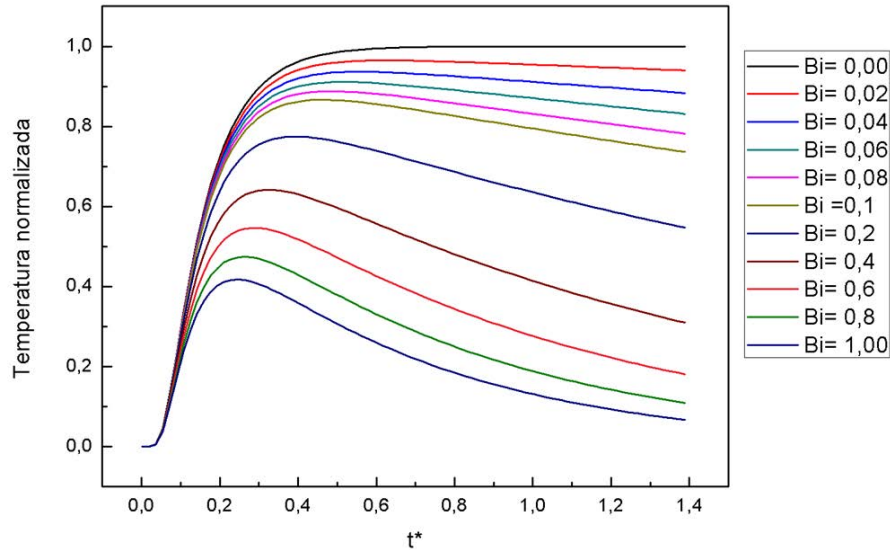


Figura 7.3: Efecto de los diferentes valores de Bi en la respuesta en temperatura para excitación flash por cara trasera. El resultado $Bi = 0$ es el caso sin pérdidas del método de Parker clásico.

res significativos en la recuperación de la difusividad térmica, que arrojará valores demasiado altos si se usa el método de Parker, como ya se mencionó en relación a la figura 6.1: incluso valores pequeños de Bi muestran efectos muy apreciables.

7.2.1. Errores sistemáticos en ajustes sin convección

Podemos ahora revisar el ajuste que se hizo, sin efectos de convección, a las medidas por la cara trasera de la muestra de baquelita en el apartado [6.2.2.1]. Se encontró que podía lograrse un buen acuerdo con los datos experimentales en los primeros instantes de calentamiento, pero que, incluso para $t^* < 0, 2$, se empezaban a producir desviaciones sistemáticas entre el ajuste sin convección y los datos experimentales, como se aprecia en la figura 6.8. Podemos estudiar ahora si estas desviaciones se explican por los efectos de la convección.

En la figura 7.4 se han representado las curvas teóricas exactas para tres valores de Bi que serían apropiados, a la vista de los resultados de [7.1.1], para los espesores correspondientes a los puntos D_1P_1 , D_1P_2 , y D_1P_3 , junto con las curvas proporcionadas por la aproximación (6.7) sin convección. Tanto las curvas exactas como las aproximadas se han normalizado entre 0 y 1, como se hizo en [6.2.2.1]. La escala de tiempos está en unidades adimensionales, pero para lograr el mejor ajuste a los datos con convección en los primeros instantes, se ha modificado para las curvas sin convección por un factor, indicado en cada figura como “alfa relativa”. Este factor es el cociente $\alpha_{ajuste}/\alpha_{real}$.

Vemos que el ajuste sin convección en los primeros instantes sobreestima la difusivi-

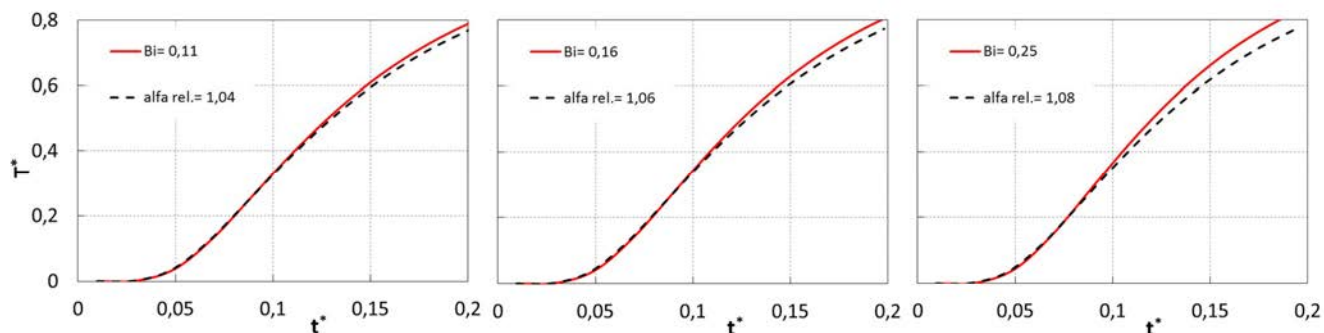


Figura 7.4: Comparación de los perfiles de $T^*(t^*)$ por la cara trasera calculados con la expresión exacta [5.34] para distintos números de Biot con el ajuste óptimo para pequeños valores de t^* . El valor indicado como “alfa rel.” es el valor por el que hay que multiplicar la difusividad real para conseguir el ajuste.

dad, tanto más cuanto mayor sea Bi (entre, aproximadamente, un 4% y un 8% para Bi entre 0,11 y 0,25). Los errores sistemáticos del ajuste sin convección respecto de las curvas con convección en la figura 7.4 son completamente análogos a los errores respecto de las curvas experimentales en la figura 6.8, por lo que explican esas desviaciones y sugieren que el valor $\alpha = 1,85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ encontrado está sobreestimando el valor de la difusividad real.

No obstante, cabe preguntarse si este error sistemático no se deberá a que, al normalizar todas las curvas entre 0 y 1, estamos normalizando los datos experimentales a $T_{\text{máx}}$ en vez de a T_{lim} , precisamente el problema señalado por Balageas en [12] y mencionado en la introducción de este capítulo. La figura 7.5 muestra los perfiles de temperaturas en cara trasera para $t^* < 0,4$ y varios valores de Bi entre 0 y 1. A la izquierda, estos perfiles están normalizados a T_{lim} (es decir, los valores de temperaturas son los de T^*) mientras que a la derecha se han normalizado a $T_{\text{máx}}$ (de modo que quedan entre 0 y 1). Se muestra también, en cada caso, la curva de temperatura aproximada dada por la ecuación (6.7) para valores pequeños de t^* (en los que el error respecto del valor exacto sin convección es menor del 0,1%).

Se observa que al aumentar Bi las curvas normalizadas a T_{lim} se inclinan hacia la derecha, y las normalizadas a $T_{\text{máx}}$ lo hacen hacia la izquierda. Si pretendiéramos reproducir este efecto con la curva sin convección, tendríamos que disminuir α en el primer caso y aumentarla en el segundo. Esto último es lo que hemos encontrado en la figura 7.4 en la que normalizábamos a $T_{\text{máx}}$, pero ahora vemos que también hay un error sistemático, de signo opuesto, si normalizamos las curvas a T_{lim} .

Esto puede apreciarse de un modo más cuantitativo si despejamos $\alpha(t)$ de la ecuación

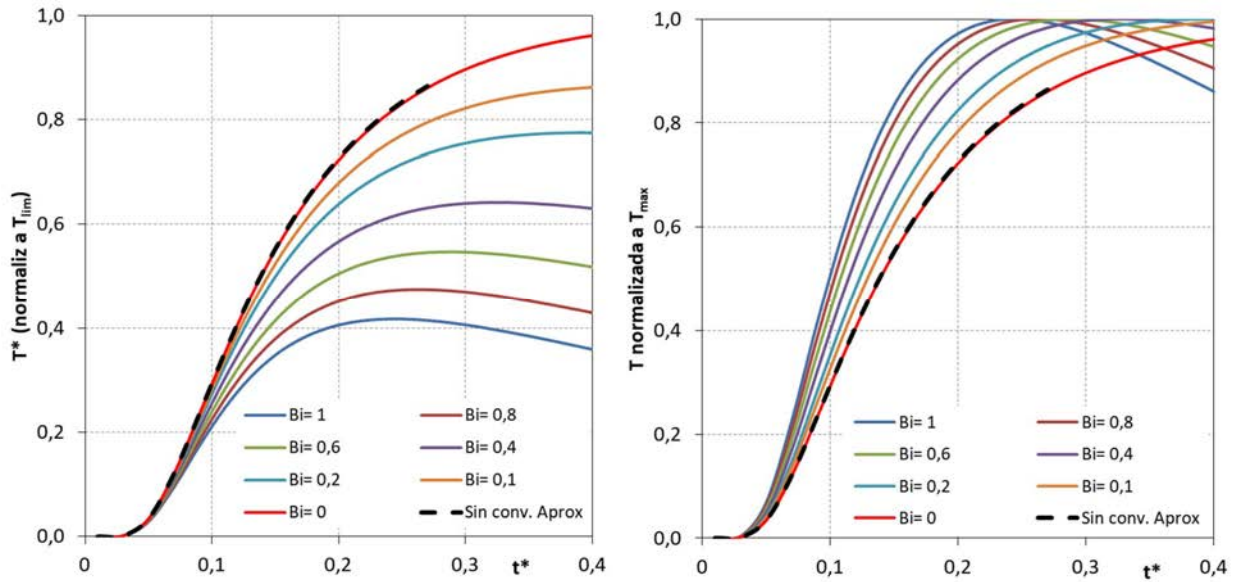


Figura 7.5: Temperaturas en la cara trasera de un experimento flash para varios valores del número de Biot. Izquierda: normalizadas a la temperatura final adiabática, T_{lim} . Derecha, normalizadas a la temperatura máxima, T_{max} . Se ha representado también, con línea de trazos, la solución sin convección aproximada proporcionada por la ecuación (6.7).

aproximada (6.7). En la figura 7.6 se comparan los resultados obtenidos según se normalicen las temperaturas a T_{max} o a T_{lim} . En ambos casos se recupera el valor real de α extrapolando a $t^* \rightarrow 0$ (aunque puede haber problemas numéricos para valores muy próximos a cero¹). Los errores son muy similares, aunque de signo opuesto, mientras $t^* < 0,2$; sin embargo, para valores mayores de t^* la $\alpha(t)$ recuperada con las temperaturas normalizadas a T_{max} diverge. En definitiva, la ventaja de normalizar a T_{lim} en vez de a T_{max} radica en que, aunque los errores en la α recuperada por el método de ajuste temprano sin convección son del mismo orden, el método es estable durante un intervalo de tiempo mayor. No obstante, esto se hace al precio de tener que estimar el valor de T_{lim} a partir de los datos experimentales. En el apartado [7.2.4] volveremos a esta cuestión.

7.2.2. Obtención de difusividad térmica y número de Biot

Disponer de la solución de la ecuación del calor con convección nos ha permitido reevaluar los ajustes sin convección, pero nuestro verdadero objetivo es usar esa solución para encontrar los valores de difusividad térmica y número de Biot de manera simultánea.

¹Los problemas se deben a que el valor exacto de $T^*(t^*)$ se calcula sumando la serie infinita (5.34); al truncarla, los t^* muy próximos a cero dan valores muy pequeños, pero negativos, de T^* .

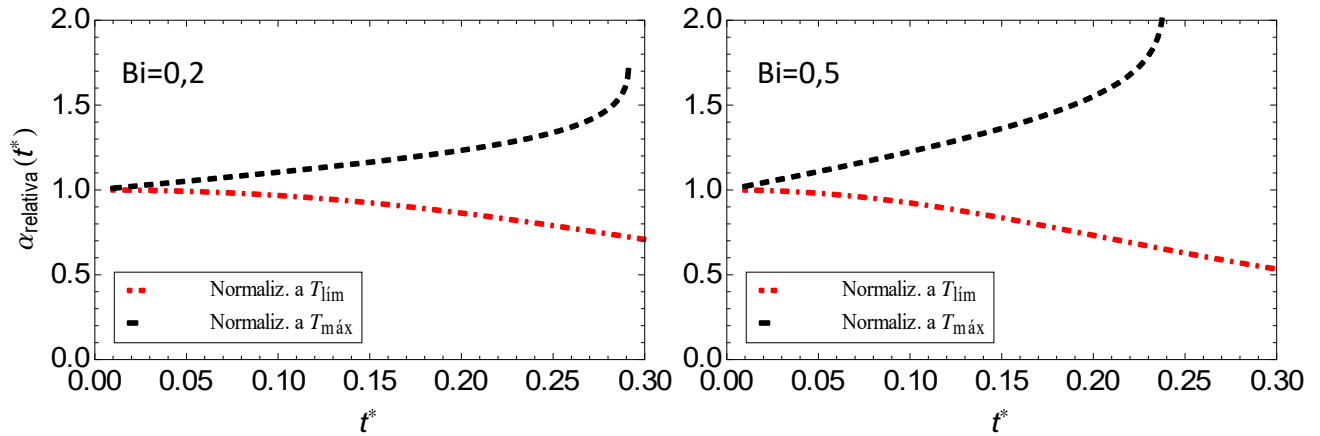


Figura 7.6: Valores de difusividad (relativa al valor real) recuperados despejando $\alpha(t)$ de la ecuación aproximada sin convección (6.7), según se usen temperaturas normalizadas al máximo experimental T_{max} o a la temperatura máxima adiabática T_{lim} , para dos valores del número de Biot.

El procedimiento que hemos desarrollado, conceptualmente muy directo, se ha publicado en la referencia [162] con el nombre de *método flash adaptado*. Se usa un algoritmo de búsqueda de máximo gradiente que proporciona el mejor ajuste entre el perfil experimental y el modelado. Este algoritmo minimiza el error cuadrático entre las funciones experimentales y las modeladas, obteniéndose estas mediante la inversión numérica de la transformada de Laplace como se explicó en la sección [5.5].

De manera esquemática es:

$$(\hat{Bi}, \hat{\alpha}) = argmin \left[\sum_t ||f_{modelo}(Bi, \alpha, t) - f_{experimental}(Bi, \alpha, t)||^2 \right] \quad (7.1)$$

El ajuste se hace con las temperaturas en unidades arbitrarias (en la práctica, se normalizan al valor máximo tanto las curvas teóricas como las experimentales). Luego, una vez calculado el número de Biot, hemos representado las gráficas renormalizadas de modo que la temperatura límite (T_{lim}) corresponda con 1. Es decir, primero se normaliza a $T_{m\acute{a}x}$ y después se normaliza a T_{lim} .

7.2.3. Cálculo del calor específico volumétrico, conductividad térmica y coeficiente de transferencia de calor

Como se ha visto anteriormente, para obtener los parámetros térmicos α y Bi basta con trabajar con perfiles normalizados, y por tanto, no se requiere una calibración radiométrica de la cámara IR, sólo que tenga una respuesta lineal. Esto deja de ser cierto si nos interesa medir la conductividad térmica. Como $\kappa = \alpha \rho c_p$, es necesario obtener previamente ρc_p

(calor específico volumétrico), lo que requiere conocer la temperatura máxima T_{lim} que se alcanzaría si no hubiera pérdidas:

$$\rho c_p = \frac{Q}{LT_{lim}} \quad (7.2)$$

donde Q es la densidad de energía de la fuente flash, que también hay que conocer (en nuestro caso es $\approx 6200 [J/m^2]$ [174]) y L es el espesor de la muestra. En función de la temperatura máxima alcanzada, $T_{m\acute{a}x}$

$$\rho c_p = \frac{Q}{L \cdot T_{max}} \left(\frac{T_{max}}{T_{lim}} \right) \quad (7.3)$$

Hay que incorporar pues una corrección que viene dada por el factor $\frac{T_{m\acute{a}x}}{T_{lim}}$, representado en la gráfica de la figura 7.7. Se observa que, como era de esperar, cuanto más alto es Bi , más baja es la máxima temperatura alcanzada. Los puntos discretos admiten el ajuste, también representado en la figura, de la ecuación (7.4):

$$\frac{T_{m\acute{a}x}}{T_{lim}} \approx 0,24203 + 0,06417 \cdot \exp\left(\frac{-Bi}{0,08319}\right) + 0,69263 \cdot \exp\left(\frac{-Bi}{0,73008}\right) \quad (7.4)$$

Este es un ajuste empírico proporcionado por Matlab. Sin embargo, la forma de la gráfica sugiere la posibilidad de un ajuste más sencillo. En efecto, hemos encontrado que el cociente inverso, $\frac{T_{lim}}{T_{m\acute{a}x}}$, se ajusta casi perfectamente por una ecuación lineal (ver figura 7.8):

$$\frac{T_{lim}}{T_{m\acute{a}x}} = 1,381 \cdot Bi + 1,008 \quad (7.5)$$

El ajuste tiene sentido físico (en particular, cuando $Bi \rightarrow 0$, $\frac{T_{lim}}{T_{m\acute{a}x}}$ debe tender a uno), pero no hemos encontrado una demostración de que deba existir una relación lineal como (7.5), más allá del buen ajuste que proporciona.

La fracción de temperatura máxima $\frac{T_{m\acute{a}x}}{T_{lim}}$ será la que nos permitirá corregir los valores de calor específico volumétrico según la ecuación (7.3). Sabiendo los valores de difusividad térmica, calor específico volumétrico y número de Biot, la conductividad térmica y el coeficiente de transferencia de calor se calculan del siguiente modo:

$$\kappa = \alpha \cdot \rho c_p \quad (7.6)$$

$$h = \frac{Bi \cdot \kappa}{L} \quad (7.7)$$

En definitiva, una estimación precisa de Bi mediante el ajuste de la curva experimental con (7.1) proporciona un valor para la fracción de temperatura máxima mediante (7.5) o (7.4), lo que permite obtener ρc_p con (7.3) y, finalmente, κ con la definición de la ecuación (7.6). Un esquema de todo el procedimiento desarrollado se resume gráficamente en el diagrama de la figura 7.9.

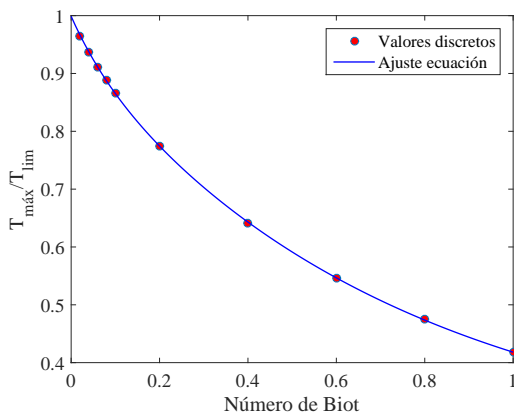


Figura 7.7: T_{\max}/T_{\lim} frente a número de Biot. Valores discretos junto a curva analítica obtenida.

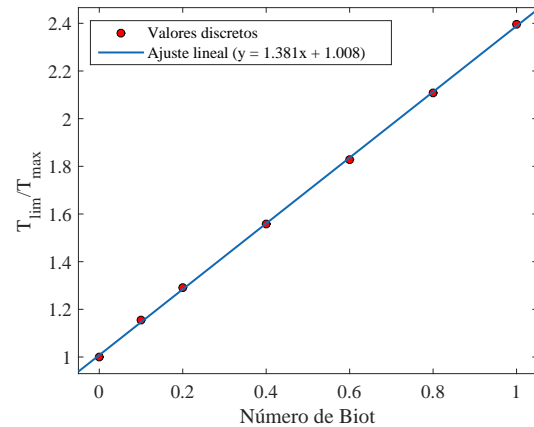


Figura 7.8: T_{\lim}/T_{\max} frente a número de Biot. Valores discretos junto a ajuste lineal obtenido.

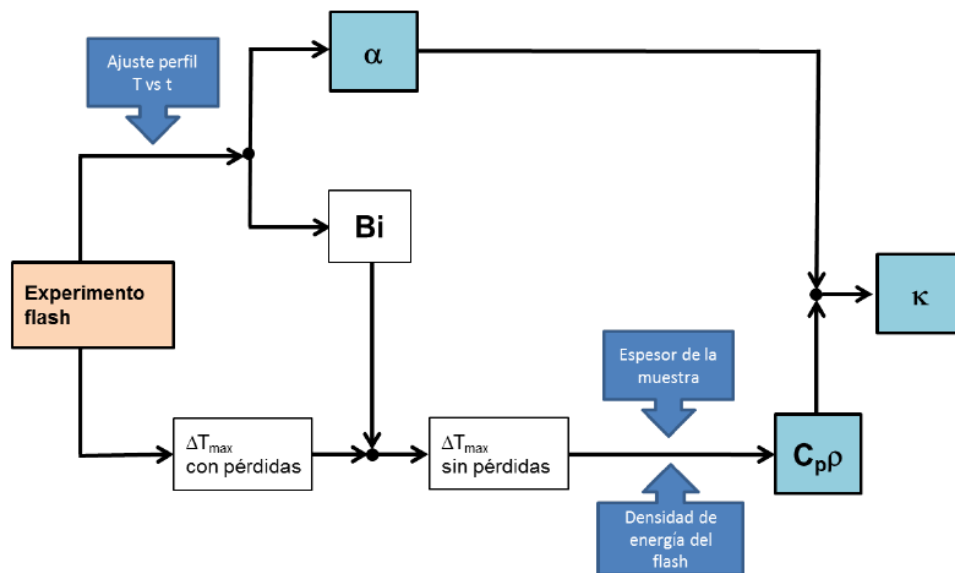


Figura 7.9: Diagrama del proceso de obtención de las propiedades térmicas a partir de un experimento flash.

7.2.4. Corrección de la temperatura máxima: otro punto de vista

En el apartado anterior nos ha interesado la corrección de la temperatura máxima debida a las pérdidas a fin de obtener ρc_p y en consecuencia κ , pero ya nos habíamos encontrado con el problema de relacionar T_{\max} y T_{\lim} al estudiar los errores sistemáticos de los ajustes sin convección en [7.2.1]. Es en este contexto en el que se lo planteó Balageas en [12], dónde, como se mencionó en la introducción a este capítulo, formuló un método para la determinación de la difusividad basado en el ajuste de los valores de T^* por la

cara trasera en los primeros segundos tras el flash. Obtener T^* a partir de la temperatura medida requiere conocer la temperatura adiabática final T_{lim} , pero debido a las pérdidas, esta no coincide con el valor $T_{m\acute{a}x}$ medido experimentalmente, por lo que, basándose en la solución exacta de [43], este autor propone la siguiente correlación que las relaciona [12]:

$$\text{Log}_{10} \left[\text{Log}_{10} \left(\frac{T_{lim}}{T_{m\acute{a}x}} \right) \right] = -\frac{2}{3} \left(\frac{t_{m\acute{a}x}}{t_{0,5}} \right) + 1,13 \quad (7.8)$$

La razón de que pueda escribirse una ecuación como ésta radica en que el cociente $\frac{t_{m\acute{a}x}}{t_{0,5}}$ no depende de α (pues este parámetro, como vimos en [5.4.2.2], sólo altera la escala del eje de tiempos) y por tanto sólo puede depender de Bi , que es de lo que dependen las pérdidas de calor, y por tanto el cociente $\frac{T_{lim}}{T_{m\acute{a}x}}$. La ecuación (7.8) tiene la ventaja de que proporciona el cociente $\frac{T_{lim}}{T_{m\acute{a}x}}$ en términos de $\frac{t_{m\acute{a}x}}{t_{0,5}}$, dos tiempos fácilmente medibles, sin necesitar una calibración radiométrica de la cámara.

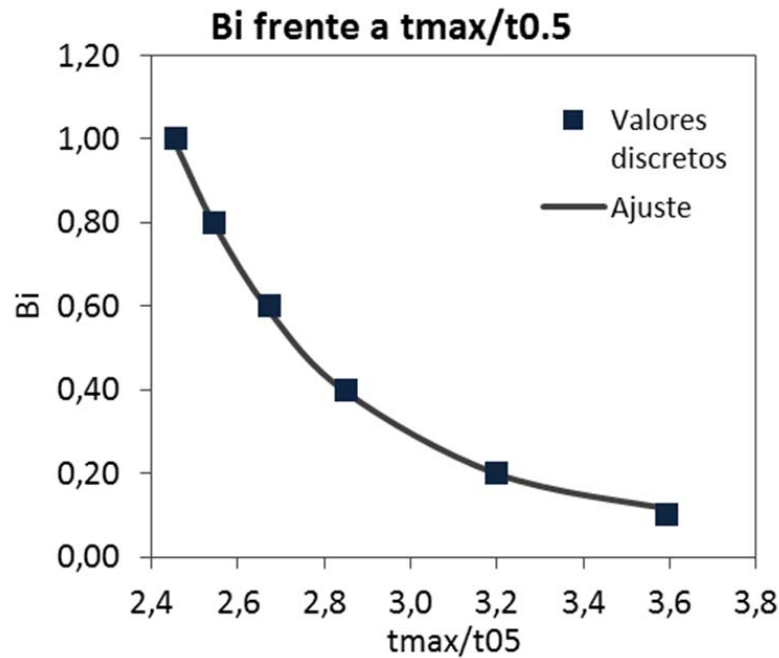


Figura 7.10: Relación entre número de Biot y $t_{max}/t_{1/2}$, obtenida de las curvas de la figura 7.3.

Dado que para cada valor de Bi podemos calcular la curva completa de $T^*(t^*)$ tal como se muestra en la figura 7.3, y por consiguiente, tanto $\frac{T_{lim}}{T_{m\acute{a}x}}$ como $\frac{t_{m\acute{a}x}}{t_{0,5}}$, se plantea la cuestión de si la relación entre ambos cocientes proporcionada por (7.8) coincide con nuestros resultados.

En primer lugar, la relación entre Bi y $\frac{t_{m\acute{a}x}}{t_{0,5}}$, obtenida por nosotros de las curvas $T(t)$

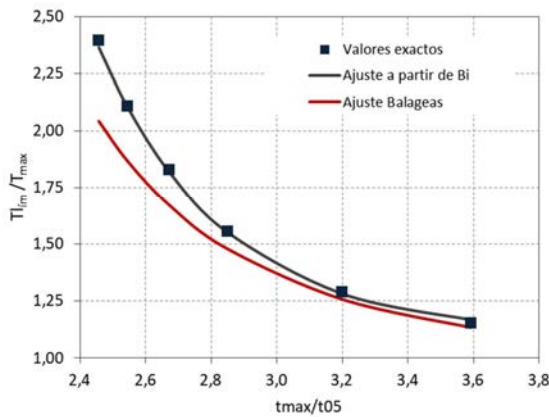


Figura 7.11: Cociente de T final adiabática y T máxima alcanzada ($T_{lim}/T_{máx}$) frente a $t_{máx}/t_{1/2}$. Se presentan la curva analítica (7.8) (ajuste Balageas) junto con los valores discretos obtenidos de las curvas exactas de la figura 7.1 y el ajuste basado en el número de Biot, proporcionado por la combinación de las ecuaciones (7.5) y (7.9).

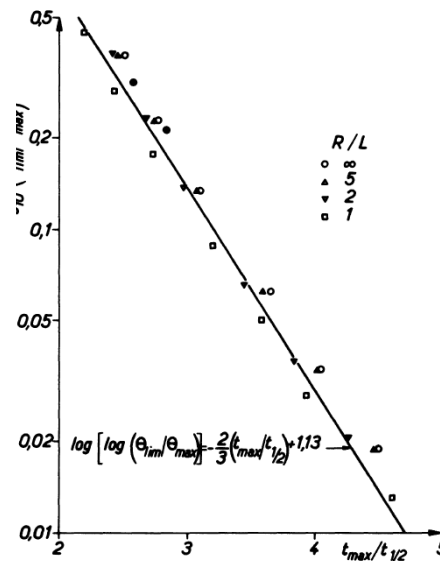


Figura 7.12: Figura 7 de [12]. Muestra la relación entre el cociente T_{lim}/T_{max} y el cociente $t_{max}/t_{0,5}$ para muestras en forma de disco, con distintas proporciones de radio a espesor. El caso unidimensional corresponde a $R/L = \infty$.

mostradas en 7.3, se presenta en la figura 7.10, y puede ajustarse mediante la ecuación

$$Bi = 600 \cdot \exp \left(-2,64 \cdot \frac{t_{máx}}{t_{0,5}} \right) + 0,07 \quad (7.9)$$

La combinación de esta ecuación con (7.5) proporciona una relación entre $\frac{t_{máx}}{t_{0,5}}$ y $\frac{T_{lim}}{T_{máx}}$. La comparación entre nuestros datos teóricos, esta relación y la que se da explícitamente en [12] (ecuación (7.8)) puede apreciarse en la figura 7.11. Llama la atención el desacuerdo entre las curvas, pero la explicación radica en que (7.8) se obtiene en la publicación original [12] a partir del ajuste lineal de la figura 7.12, que corresponde a muchas muestras cilíndricas de diferentes proporciones entre radio (R) y anchura (L). Sin embargo, el caso unidimensional, que es nuestro objeto de estudio, se corresponde a $R/L = \infty$, y por lo tanto sólo a los puntos marcados con un círculo. Limitándonos a esos puntos, el acuerdo entre nuestro ajuste y los datos de 7.12 es excelente.

7.3. Cara trasera: resultados experimentales

7.3.1. Resultados experimentales: Modelo 1D

Pasamos ahora al estudio de los resultados experimentales obtenidos en la muestra de baquelita de la figura 6.4, que hemos analizado en apartados anteriores. Estudiaremos cuatro perfiles, tres de ellos correspondientes al diámetro D_1 en los puntos P_1 , P_2 y P_3 , y uno a una zona sin defecto, que denominaremos como P_0 .

Los ajustes obtenidos mediante el método flash adaptado, descrito en el apartado [7.2.2], se pueden ver en la figura 7.13; los valores de difusividad térmica y número de Biot obtenidos para cada uno de los perfiles analizados son los que se presentan en la tabla 7.1.

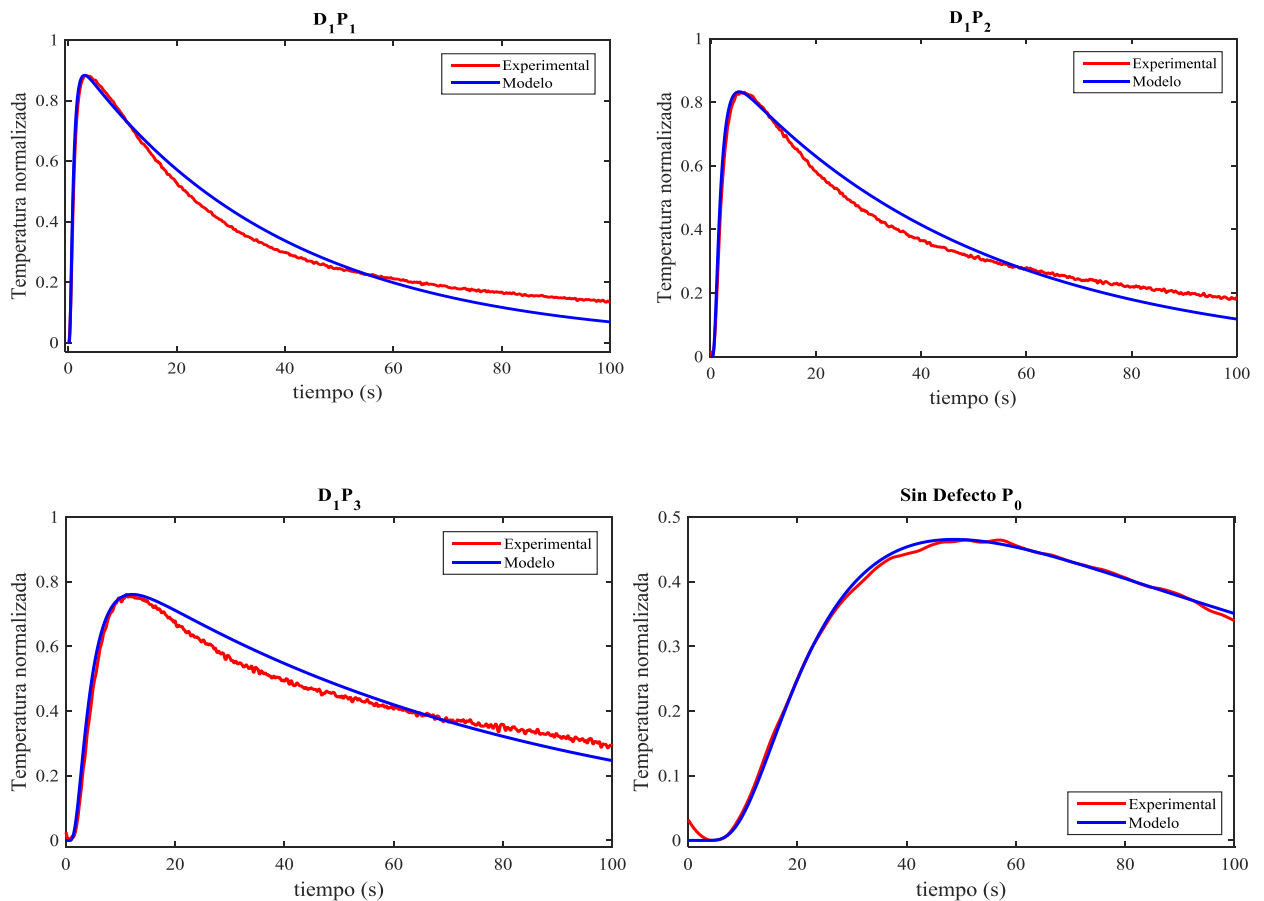


Figura 7.13: Curvas experimentales junto a las curvas proporcionadas por el modelo cuyo error cuadrático es mínimo, en el intervalo temporal representado.

Es llamativo que el ajuste de las curvas teóricas a las experimentales es muy deficiente para tiempos posteriores al instante en el que se alcanza la temperatura máxima, a ex-

Punto	$\alpha \times 10^{-7} [m^2/s]$	Número de Biot
Sin defecto	1,61	0,83
D_1P_1	1,76	0,08
D_1P_2	1,80	0,13
D_1P_3	1,98	0,22

Tabla 7.1: Valores de difusividad térmica y Biot obtenidos mediante el método flash adaptado para los cuatro puntos de la probeta de baquelita que se presentan en la figura 7.13.

cepción del perfil considerado *sin defecto*. Por otra parte, los valores de α obtenidos en los cuatro puntos son muy dispares. Estos resultados poco satisfactorios parecen sugerir que los efectos tridimensionales, que no son considerados en nuestro modelo (y que serían mínimos en P_0 , el único punto en el que hay buen ajuste) pueden ser importantes en los “defectos” P_1 , P_2 y P_3 .

7.3.2. Efectos tridimensionales: estudio cualitativo

Una manera de entender cualitativamente el problema es con referencia a la figura 7.14, que muestra los perfiles de incremento de temperatura para varios instantes sucesivos tras el flash, en puntos correspondientes al espesor P_1 pero con distintos diámetros. Los perfiles de la izquierda, correspondientes a $t \leq 0,55$ s, tienen un tramo plano en el primer instante ($t = 0,06$ s) en todos los defectos, pero con el transcurso del tiempo ese tramo va desapareciendo, primero en los diámetros más pequeños y luego sucesivamente en los más grandes, de modo que para $t \geq 0,55$ s el perfil de temperaturas no es plano en ninguno de los defectos.

Físicamente, la explicación es que la zona del defecto, más fina, se calienta antes que la zona sin defecto (lo que se aprecia muy bien en la la figura 7.15, en la que los defectos tienen el mismo diámetro pero distintos grosores: el calentamiento de P_1 es mucho más rápido que el de P_3 y P_4 , y éste a su vez más rápido que el de las regiones intermedias, donde la placa es más gruesa). De este modo, transcurridos unos segundos hay una transferencia de calor en el plano, de las regiones finas a las gruesas, lo que tiende a difuminar los perfiles. Se trata, en definitiva, de un efecto tridimensional que no puede ser bien reproducido por nuestro modelo unidimensional.

Una manera de minimizar el efecto 3D es limitar nuestros ajustes a los primeros segundos. En la figura 7.16, se muestra el resultado de restringirnos a la región temporal desde el origen hasta el máximo. A simple vista se ve que el acuerdo entre las curva teóricas y las experimentales es mucho mejor, y también los valores de difusividad recuperados (ver

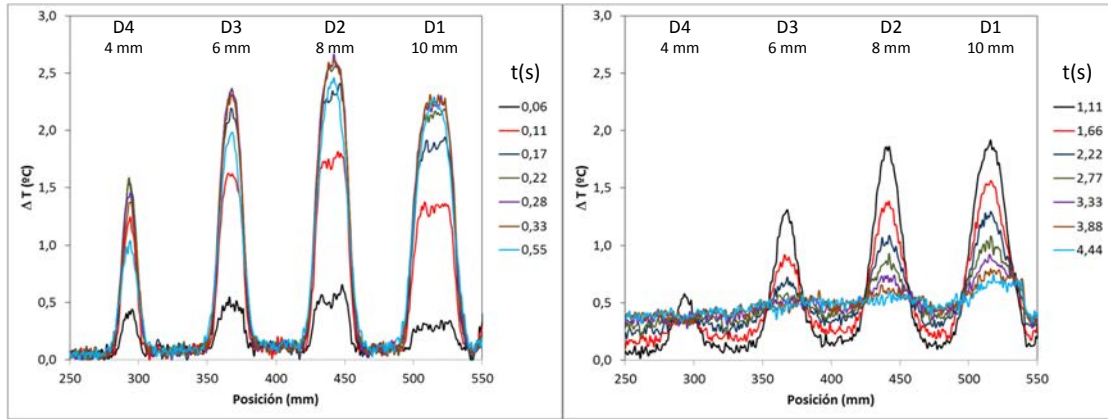


Figura 7.14: Perfiles de temperatura medidos en la cara trasera de una placa de baquelita, para distintos tiempos (medidos tras el flash). Los máximos corresponden a los rebajes circulares hechos por la cara delantera; en todos el espesor es de 1,05 mm; los diámetros son los mostrados en la figura. El espesor de la placa sin rebajar (correspondiente a los puntos entre máximos) es de 5,50 mm.

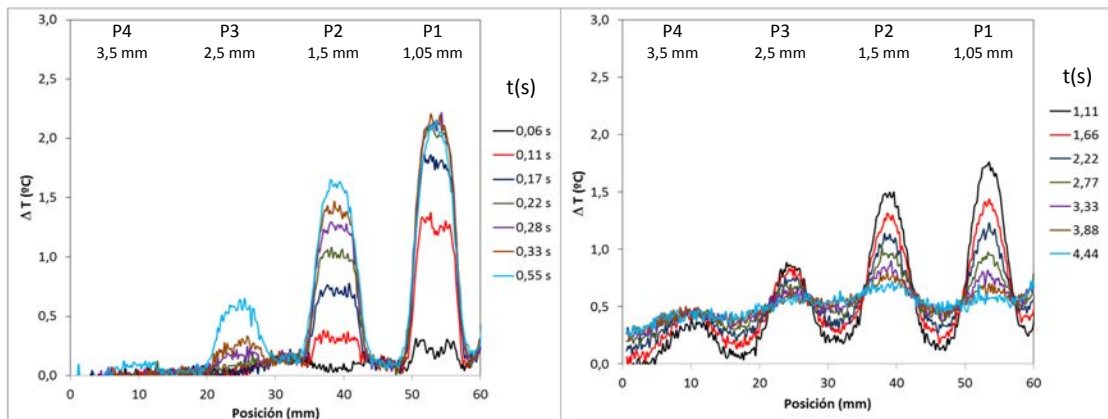


Figura 7.15: Perfiles de temperatura medidos en la cara trasera de una placa de baquelita, para el mismo experimento de la figura anterior. En este caso, todos los rebajes tienen un diámetro de 10 mm; los espesores son los mostrados en la figura.

tabla 7.2) son mucho más similares entre los distintos puntos (y tienen valores razonables comparados con los obtenidos en el capítulo anterior).

7.3.3. Modelo tridimensional de elementos finitos

La manera más rigurosa de tratar los efectos tridimensionales sería incluirlos en el modelo físico. Esto es posible utilizando un software de elementos finitos que incorpore la geometría de la placa y resuelva la ecuación del calor con las condiciones de contorno de excitación flash y pérdidas por convección. Hemos abordado el problema usando el soft-

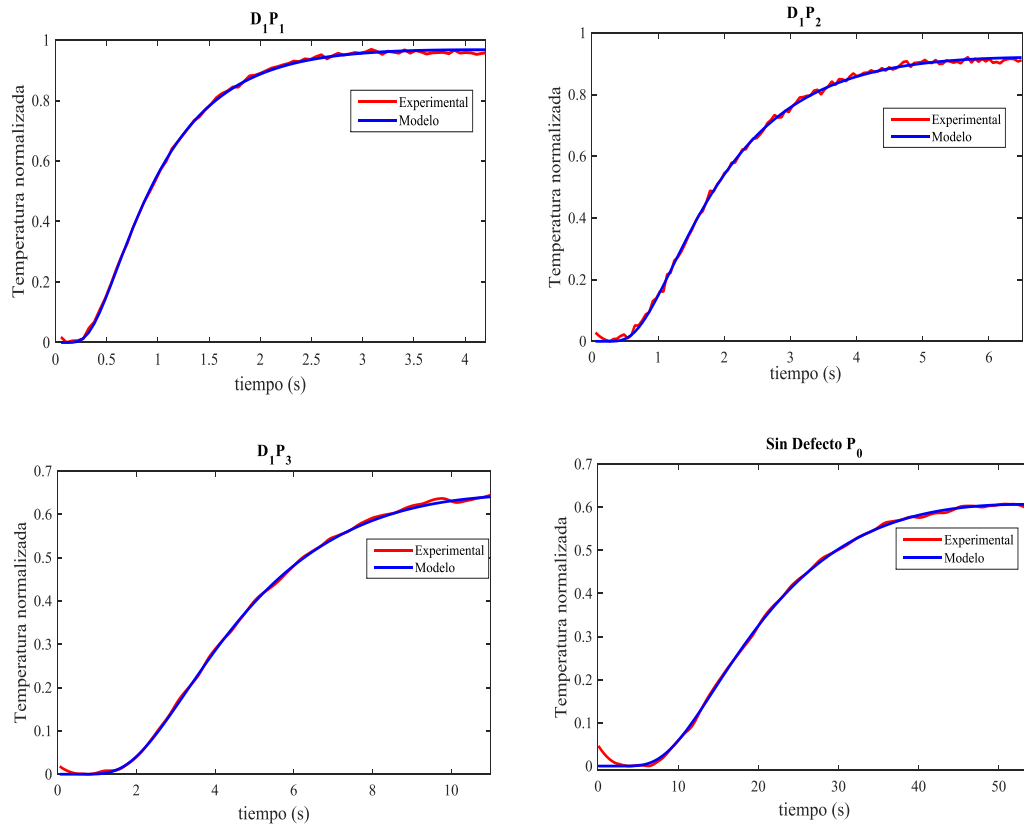


Figura 7.16: Curvas experimentales junto a las curvas proporcionadas por el modelo cuyo error cuadrático es mínimo, ajustando hasta aproximadamente el máximo.

ware comercial COMSOL Multiphysics [126]. Este software de análisis y resolución por elementos finitos tiene un módulo para el análisis de transferencia de calor por conducción, convección y radiación. Para simular un fenómeno de transferencia de calor como los que estamos estudiando, necesitaremos definir de manera adecuada la geometría de la pieza así como su mallado. También tendremos que introducir los valores de los parámetros físicos: conductividad térmica κ , densidad ρ y calor específico c_p (que de manera indirecta definirán el valor de la difusividad térmica α), así como el coeficiente de transferencia de calor h , que a partir del espesor L y de la conductividad térmica κ nos proporcionará un valor de número de Biot.

Para asegurarnos que los resultados obtenidos sean los adecuados, un factor crítico es la implementación de las adecuadas condiciones de contorno; en particular, en el caso de la excitación flash, un flujo de calor por una de las caras de la pieza de muy corta duración. Esto conlleva problemas en cuanto a divergencias y/o definición de pasos de tiempo muy pequeños, que hacen aumentar el tiempo de computación, y ha exigido realizar un buen número de simulaciones de prueba para definir valores que reproduzcan bien el caso

Punto	$\alpha \times 10^{-7} [m^2/s]$	Número de Biot
Sin defecto	1,77	0,47
D_1P_1	1,68	0,02
D_1P_2	1,70	0,05
D_1P_3	1,67	0,39

Tabla 7.2: Valores de difusividad térmica y Biot obtenidos mediante el método flash adaptado para los cuatro puntos de la probeta de baquelita que se presentan en la figura 7.16.

unidimensional, del que conocemos la solución exacta, antes de abordar el tridimensional. Debido a estas características, los tiempos de simulación con este software aumentan hasta varias horas para una sola iteración, en marcado contraste con los modelos unidimensionales utilizados hasta el momento en esta tesis, con los que se consiguen unas 200 iteraciones en tiempos de menos de ≈ 10 s.

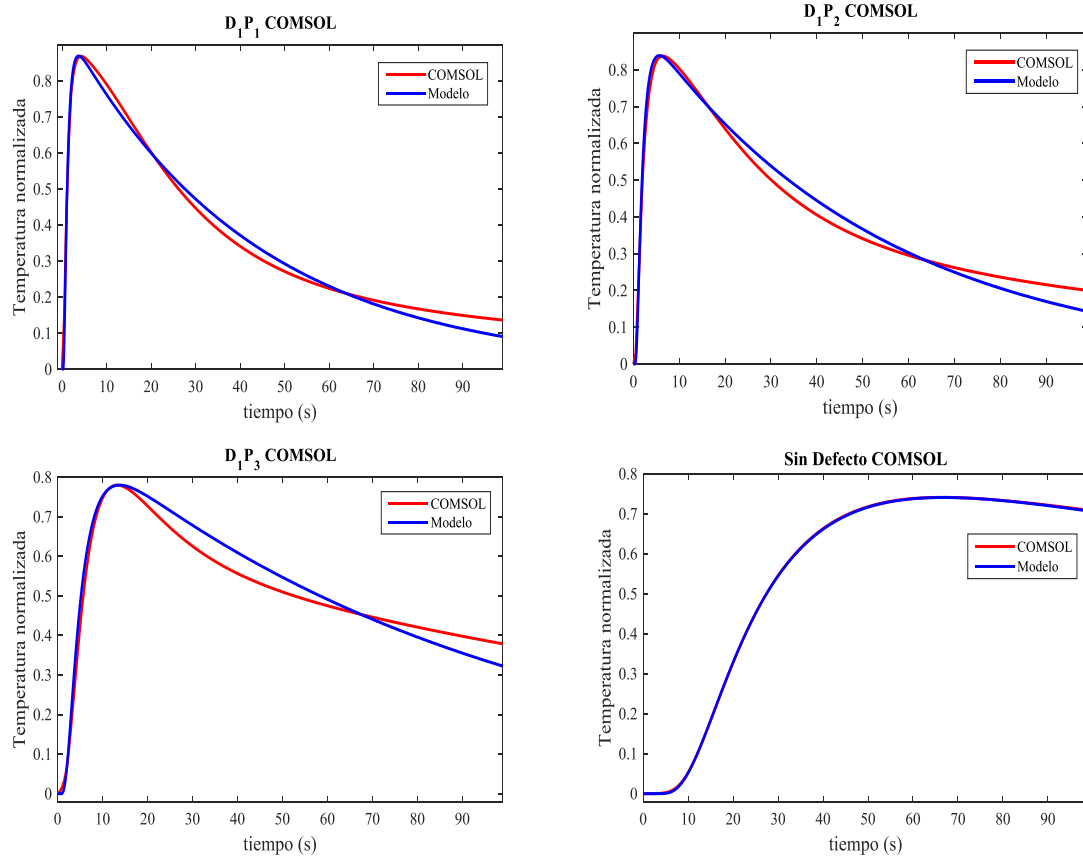


Figura 7.17: Ajuste entre los perfiles obtenidos con COMSOL y el modelo numérico de Matlab.

Claramente los largos tiempos de computación hacen impracticable el uso de este enfoque para ajustar iterativamente los perfiles experimentales y obtener de esa manera los parámetros térmicos, pero sí tiene utilidad para validar la idea de que las desviaciones de los perfiles experimentales respecto de los teóricos, tan notables en la figura 7.13, son atribuibles a los efectos tridimensionales. La figura 7.17 muestra los perfiles obtenidos con COMSOL para los mismos puntos de la figura anterior, usando para la muestra los siguientes datos de entrada: $\alpha = 1,67 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ y $h = 10 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ para toda la muestra. Con estos valores, y teniendo en cuenta que $Bi = \frac{hL}{\kappa}$, tendremos para los puntos P_1, P_2, P_3 y P_0 los valores de número de Biot 0.05, 0.075, 0.13 y 0.28, respectivamente. Cualitativamente, la relación de los ajustes 1D con los perfiles proporcionados por el modelo 3D es muy similar a la que vemos en la figura 7.13 con los perfiles experimentales, lo que confirma que los efectos tridimensionales explican verosímilmente las desviaciones del experimento respecto del modelo 1D.

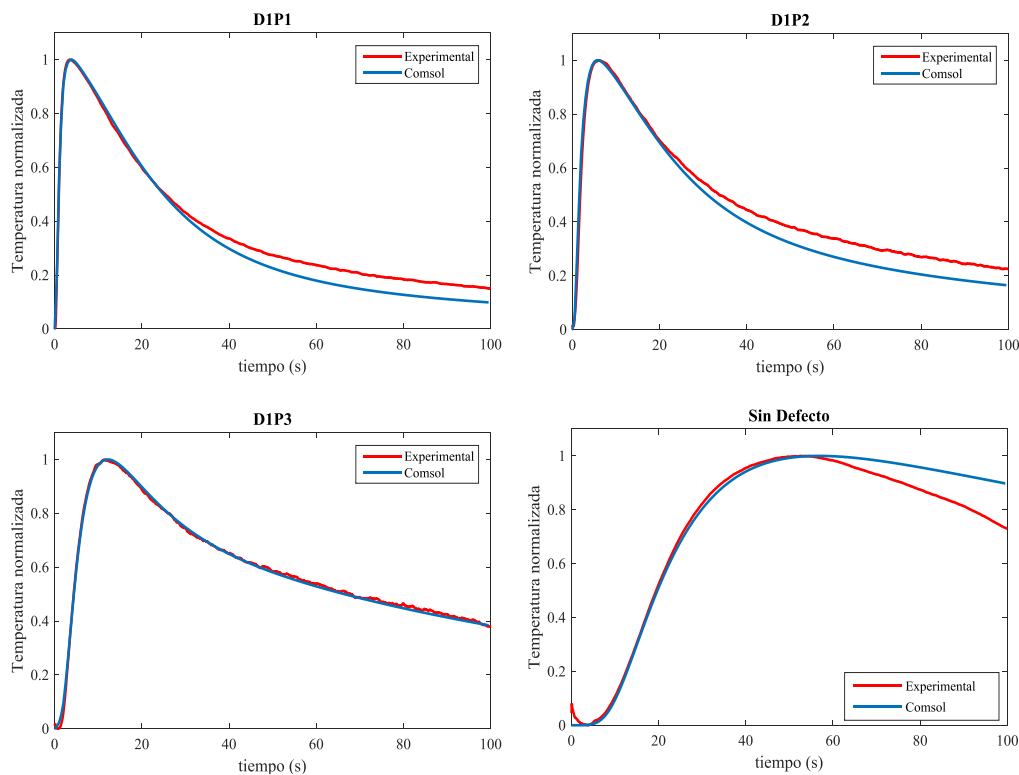


Figura 7.18: Perfiles experimentales junto a perfiles obtenidos con COMSOL para $\alpha = 1,75 \cdot 10^{-7} [\text{m}^2/\text{s}]$ y $h = 15 [\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}]$.

Al no haberse planteado un ajuste iterativo con el modelo 3D, por la desorbitada carga computacional que supondría, no disponemos de un ajuste óptimo, pero la figura 7.18 muestra el resultado de un ajuste con $\alpha = 1,75 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ y $h = 15 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ (con los

que se tienen los valores de número de Biot igual a 0.08, 0.11, 0.19 y 0.41 para los puntos P_1, P_2, P_3 y P_0 , respectivamente).

Los resultados mostrados en la figura 7.18 parecen indicar que el coeficiente de transferencia de calor debería ser más grande para la zona de la placa “sin defecto” que para los defectos, lo cual tiene sentido ya que al tratarse de huecos en una placa vertical, la convección en la región del hueco debe ser menor.

7.4. Conclusiones

Como conclusión de los capítulos [6] y [7], podríamos destacar que para la obtención de los parámetros térmicos mediante el método flash lo más práctico son los métodos de ajuste temprano, incluso cuando las pérdidas de calor son importantes. En efecto, aunque tener en cuenta esas pérdidas consigue que se reproduzcan bien los resultados en tiempos largos, los valores que obtenemos, incluso en la zona que hemos denominado “sin defecto” (libre de efectos tridimensionales), tienen bastante incertidumbre según ajustemos un intervalo más o menos largo de tiempo. Si hay efectos tridimensionales, el modelo unidimensional, aún con convección, solo los reproduce aceptablemente para tiempos menores al máximo, de modo que el método de ajuste temprano, mucho más sencillo, puede funcionar mejor si se aplica bien (teniendo en cuenta los errores sistemáticos en los que va a incurrir, tal como se explicó en el apartado 7.2.1).

No obstante, tener resuelto el problema de la convección y haber validado el modelo unidimensional experimentalmente tiene un interés que va más allá del caso de la obtención de la difusividad mediante la termografía flash. En particular, será imprescindible para resolver el problema del calentamiento escalón, que veremos en el capítulo siguiente.

Método escalón

RESUMEN: Este capítulo se dedicará al desarrollo teórico de la técnica de calentamiento escalón así como sus ventajas e inconvenientes y cómo se han potenciado y abordado, respectivamente, cada una de ellas. Se mostrará cómo se puede hacer uso de esta técnica poco explotada para la caracterización térmica de muestras reales de material compuesto, incluso cuando no se conoce el perfil temporal de la excitación de la lámpara, usando como entrada al modelo la evolución de la temperatura en la cara caliente. Esta técnica ha requerido para su aplicación práctica el desarrollo de un sistema de adquisición infrarrojo formado por dos cámaras que proporcionan imágenes simultáneas y corregistradas de ambas caras.

8.1. Introducción al calentamiento escalón

Como se introdujo en el apartado [3.5.3], el método escalón o *step heating* es una de las técnicas de termografía activa. Este método consiste en estudiar el incremento de la temperatura del material en función del tiempo mientras está sometido a un flujo de radiación nominalmente constante por una cara (excitación escalón).

El calentamiento escalón es una alternativa a las técnicas de termografía pulsada; en particular a la conocida técnica del *método flash*, basada en el análisis de la respuesta en temperatura en la cara trasera después de la aplicación de un pulso de energía instantáneo en la cara delantera. La baja intensidad del flujo de calor en el método escalón en comparación con la necesaria para las técnicas pulsadas hace que la muestra sea menos propensa a sufrir una transición de fase o una descomposición como resultado de un repentino incremento de la temperatura en la cara delantera [190]. Esto puede ser especialmente importante en muestras delicadas, como pueden ser cuadros o frescos [106]. Por otra parte, aunque el método flash se ha convertido en una técnica estándar, su uso encuentra dificultades en algunos tipos de materiales aislantes, que por su baja difusividad

térmica requieren tiempos de ensayo largos en los que se hace necesaria una corrección por pérdidas por convección (como vimos en el capítulo [6]). Una dificultad relacionada es que en muestras de estos materiales es posible que el flash no proporcione energía suficiente para que la señal sea detectable, en particular cuando se trata de especímenes gruesos (esta situación se presenta, por ejemplo, en muestras de tipo “sándwich”, importantes en aplicaciones aeronáuticas, que han de ser observadas por la cara trasera para obtener información promedio sobre todo el espesor). Por el contrario, en el método escalón se suministra energía continuamente a la muestra, con la ventaja adicional de que la fuente de excitación es mucho más sencilla y barata.

En nuestro estudio consideraremos la aplicación del flujo durante tiempos largos, incluso hasta alcanzar el estado estacionario (lo que, como veremos, tiene ventajas en cuanto a la sencillez de la interpretación de los resultados) y veremos que, gracias a la resolución de la ecuación por transformada de Laplace, lo podemos generalizar para una excitación no necesariamente constante y, en realidad, arbitraria.

8.2. Modelización del calentamiento escalón

8.2.1. Convección despreciable

Una primera modelización de la evolución de la temperatura en este método se consigue partiendo de las ecuaciones (5.27) y (5.30), que dan las funciones de respuesta a impulso¹, respectivamente, para las caras delantera y trasera en una placa finita sin convección. Como se explicaba en la sección [5.6], sólo es necesario convolucionar con la excitación deseada para obtener la forma de la respuesta a esa excitación. Como suponemos que función de excitación toma un valor constante $\phi(t) = \phi$ para $t > 0$ (y es 0 en otro caso) la convolución es trivial y encontramos [24] [25] [190]:

$$T(0, t) = \frac{\phi_0 \alpha}{\kappa L} \left[t + \frac{L^2}{3\alpha} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{\alpha t}{L^2}\right)}{n^2 \pi^2 \frac{\alpha}{L^2}} \right] \quad (\text{Cara delantera}) \quad (8.1)$$

$$T(L, t) = \frac{\phi_0 \alpha}{\kappa L} \left[t - \frac{L^2}{6\alpha} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{\alpha t}{L^2}\right)}{n^2 \pi^2 \frac{\alpha}{L^2}} \right] \quad (\text{Cara trasera}) \quad (8.2)$$

donde α es la difusividad térmica, y ϕ_0 [W/m^2] es la densidad de flujo de calor suministrado por unidad de área en la cara delantera.

En la figura 8.1 se puede ver la forma de las curvas en cara delantera y en cara trasera para una excitación escalón en el caso en el que no hay convección. Las temperaturas se

¹Salvo el factor Q_0 , que hay que eliminar.

han obtenido haciendo $\alpha = \kappa = L = 1$ en las ecuaciones (8.1) y (8.2), y poniendo $\phi_0 t_{fin} = 1$, siendo t_{fin} la duración del escalón (en este caso, $t_{fin} = 1$). Esto equivale a normalizar T a la temperatura T_{lim} que alcanzaría una placa idéntica pero sin convección que recibiera la misma energía en forma de flash.

Se aprecia que tras un breve periodo transitorio las temperaturas de ambas caras crecen linealmente con el tiempo. Como era de esperar a la vista de la ecuación (5.28), en el transitorio inicial la temperatura en la cara caliente crece de manera proporcional a la raíz cuadrada del tiempo adimensional²; la evolución en la cara trasera es más complicada. Una vez alcanzada la etapa lineal, las ecuaciones muestran que la diferencia en temperaturas entre las dos capas se estabiliza en el valor $T(0, \infty) - T(L, \infty) = \frac{\phi_0 L}{2\kappa}$, y su valor medio en $\frac{T(0, \infty) + T(L, \infty)}{2} = \frac{\phi_0 \alpha}{\kappa L} \left(t + \frac{L^2}{12\alpha} \right)$

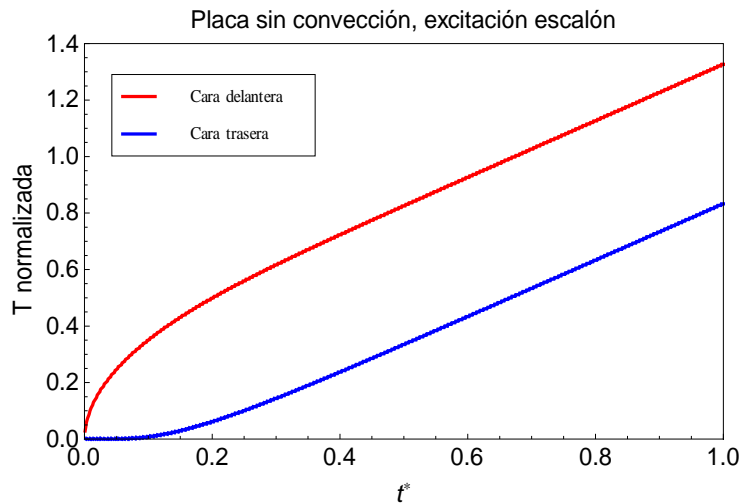


Figura 8.1: Respuesta a excitación escalón en cara delantera y en cara trasera sin convección, obtenida a partir de las ecuaciones analíticas (8.1) y (8.2) respectivamente. Las temperaturas se han normalizado al valor que alcanzaría la placa sin convección si recibiera en forma de flash la energía suministrada durante todo el período de excitación (en este caso entre $t^* = 0$ y $t^* = 1$). Para $t^* > 1$ (no representado) las temperaturas de las dos caras tienden a $T^{*normalizada} = 1$.

8.2.2. Convección no despreciable

En un experimento real, el calor transferido entre la muestra y sus alrededores es a menudo inevitable, especialmente en medidas de materiales que no son buenos conductores.

²Para $t^* < 0,38$ el error de ajustar $t^* \approx 2\sqrt{\frac{t^*}{\pi}}$ es menor del 1 %.

En cualquier caso, si se espera lo suficiente el efecto de las pérdidas térmicas se hará notar, y es necesario por eso tenerlo en cuenta en el modelo.

En este caso, habrá que convolucionar la función de respuesta a impulso (5.34) con la función escalón. Recordemos que esa función podía escribirse como

$$T(z^*, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z^*) \exp\left(-\frac{t\alpha U_n^2}{L^2}\right) \quad (8.3)$$

siendo U_n la n -sima solución de la ecuación trascendente: $\operatorname{tg} U = \frac{2UBi}{U^2 - Bi^2}$, $z^* \equiv z/L$, y

$$A_n(z^*) = \frac{U_n^2 \left(\cos(U_n z^*) + Bi \frac{\operatorname{sen}(U_n z^*)}{U_n} \right) 2\phi_0 \alpha / \kappa L}{U_n^2 + 2Bi + Bi^2}$$

Donde por comodidad hemos incluido el valor ϕ_0 de la excitación, de manera que convolucionaremos con la función escalón unitaria. Al hacer la convolución se obtiene

$$T(z^*, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(z^*) L^2}{\alpha U_n^2} \left\{ \exp\left(-\frac{t\alpha U_n^2}{L^2}\right) \cdot \left[-1 + \exp\left(\frac{\min[t, t_{fin}] \alpha U_n^2}{L^2}\right) \right] \right\} \quad (8.4)$$

donde $\min[t, t_{fin}]$ vale t si $t < t_{fin}$ (es decir, mientras dura la excitación) y t_{fin} si $t > t_{fin}$. Podemos particularizar para la cara delantera ($z^* = 0$) y la trasera ($z^* = 1$):

Cara delantera En la ecuación (8.4) ponemos $A_n(z^*) = A_n(0)$, donde

$$A_n(0) = \frac{U_n^2 2\phi_0 \alpha / \kappa L}{U_n^2 + 2Bi + Bi^2}$$

Cara trasera En la ecuación (8.4) ponemos $A_n(z^*) = A_n(1)$, donde

$$A_n(1) = (-1)^{n+1} A_n(0)$$

Las curvas de respuesta a excitación escalón para distintos números de Biot pueden verse en la figura 8.2 (la normalización es la misma de la figura 8.1).

8.2.2.1. Discusión: efectos de la convección

Conviene detenerse a examinar la figura 8.2 para ver sus implicaciones físicas. En primer lugar se observa que incluso unas pérdidas pequeñas tienen un efecto importante en la temperatura: para $Bi = 0,01$, temperatura normalizada en $t^* = 20$ es $\approx 0,8$, lo que significa que se ha perdido el 20 % de la energía suministrada, mientras que para $Bi = 0,1$, en $t^* = 20$ se ha perdido el 75 % de la energía. La convección se traduce en que el aumento de la temperatura no es lineal sino que se va haciendo cada vez más lento, y si se espera un tiempo suficientemente largo, se termina por alcanzar un estado estacionario. Puede

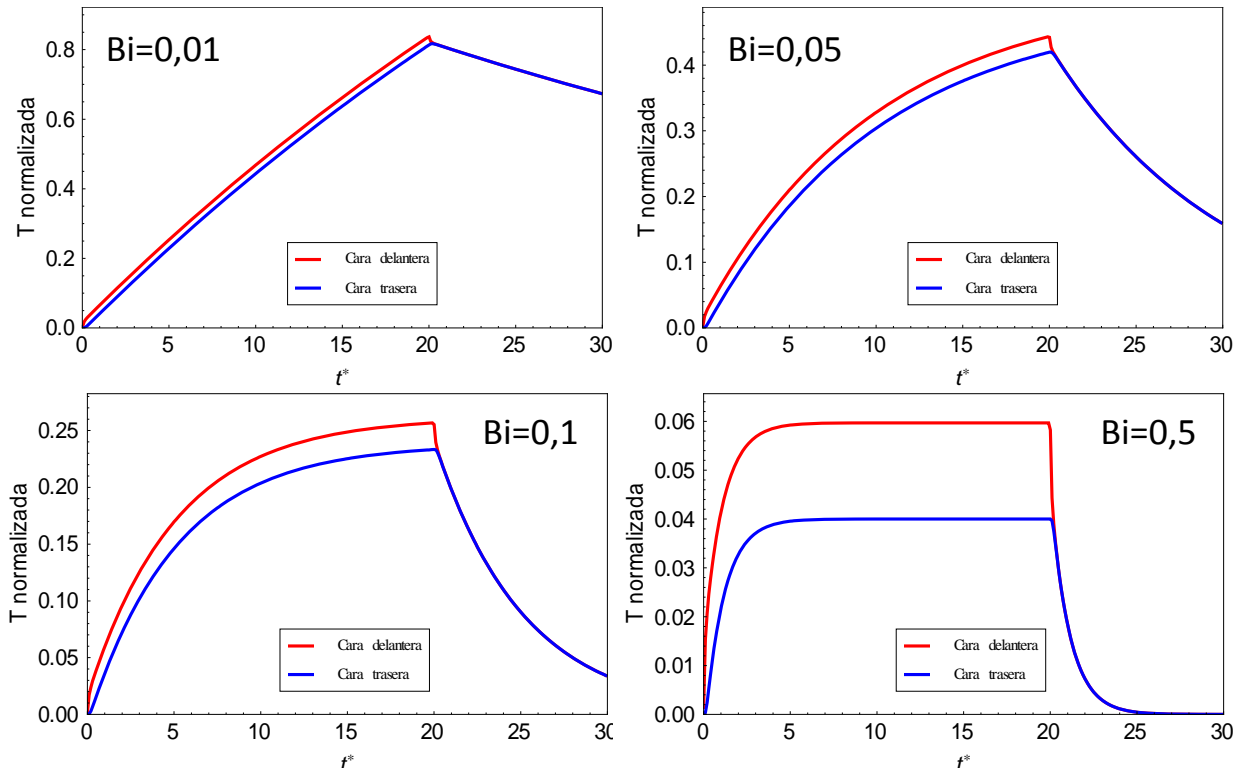


Figura 8.2: Curvas de respuesta a excitación escalón para diversos números de Biot. La normalización es la misma de la figura 8.1, pero ahora la excitación dura de $t^* = 0$ a $t^* = 20$.

comprobarse en la figura que, una vez alcanzado el estado estacionario (por ejemplo, en el caso de $Bi = 0,5$), se cumple la relación (4.31) que habíamos encontrado en el capítulo [4] para el cociente de las temperaturas de cara delantera y cara trasera:

$$\frac{T(0)}{T(L)} = \frac{T^{\text{normalizada}}(0)}{T^{\text{normalizada}}(L)} = 1 + Bi$$

y también la (4.30):

$$\frac{T(0) + T(L)}{2} = \frac{\phi_0}{2h} \Rightarrow \frac{T^{\text{normalizada}}(0) + T^{\text{normalizada}}(L)}{2} = \frac{1}{2Bi \cdot t_{fin}^*}$$

donde la última igualdad se justifica por la normalización empleada.

Tiempo para alcanzar el estado estacionario Algo que también queda patente en la figura 8.2 es que el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario tiene una relación aproximadamente inversa con Bi . Una manera sencilla de cuantificar esto es usando la aproximación de capacidad térmica global, que si bien sólo es adecuada para números

de Biot pequeños, sí proporciona un orden de magnitud correcto. Recordemos (ecuación (4.40)) que en esta aproximación la variación de la temperatura en una placa sometida a un pulso cuadrado es:

$$T \propto 1 - e^{-t/\tau}$$

siendo $\tau = \frac{\kappa L}{2\alpha h}$. En función del número de Biot, podemos escribir:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{2t\alpha h}{\kappa L} = \frac{2t\alpha}{L^2} \cdot \frac{hL}{\kappa} = 2t^* Bi$$

El grado de aproximación al nivel estacionario de temperatura T_∞ dependerá por tanto del valor de $2t^* Bi$:

$$2t^* Bi = 2 \Rightarrow e^{-2} = 0,135 \Rightarrow T(t^* = 1/Bi) = 86,5\% \text{ de } T_\infty$$

$$2t^* Bi = 3 \Rightarrow e^{-3} = 0,050 \Rightarrow T(t^* = 3/2Bi) = 95,0\% \text{ de } T_\infty$$

$$2t^* Bi = 4 \Rightarrow e^{-4} = 0,018 \Rightarrow T(t^* = 2/Bi) = 98,2\% \text{ de } T_\infty$$

(esto se puede apreciar cualitativamente en la figura 8.2 observando en el caso de $Bi = 0,5$ los valores de T para $t^* = 2$, $t^* = 3$ y $t^* = 4$). Para una muestra con los parámetros térmicos promedio de las muestras de CFRP estudiadas a lo largo de esta tesis; es decir, $L = 2,4 \text{ mm}$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ y $Bi = 0,05$, los tiempos en alcanzar esas temperaturas serán de ≈ 230 , 350 y 450 segundos, respectivamente.

8.3. El problema del calentamiento no ideal

El modo más inmediato para obtener la difusividad térmica y el número de Biot en un experimento de calentamiento escalón sería encontrar los valores de Bi y α para los que el perfil teórico $T(t)$ en la cara trasera tiene un ajuste óptimo con el experimental, a semejanza de lo que se hizo en el capítulo [7] con el método de Parker modificado. Pero surge la dificultad de que si la fuente de excitación no es "ideal" es decir, si sufre un calentamiento progresivo hasta un estado estacionario como se puede apreciar en la figura 8.3, no obtendríamos el valor de α real.

Si estudiamos qué efecto produce ese tipo de excitación en la respuesta de la cara trasera podemos observar que si tenemos una excitación no ideal e intentamos ajustar una curva experimental, obtendremos un valor de α subestimado. El efecto se muestra en la figura 8.4, en la que se ha calculado la respuesta de una placa con $\alpha = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ a las dos excitaciones del tipo de la figura 8.3, para alcanzar el estado estacionario. Los resultados son las curvas roja (para el escalón ideal) y azul (para escalón no ideal). Si se intenta ajustar esta mediante curvas de respuesta ideal el mejor resultado lo da la curva verde, correspondiente a $\alpha = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. En definitiva, el valor de α recuperado depende de la

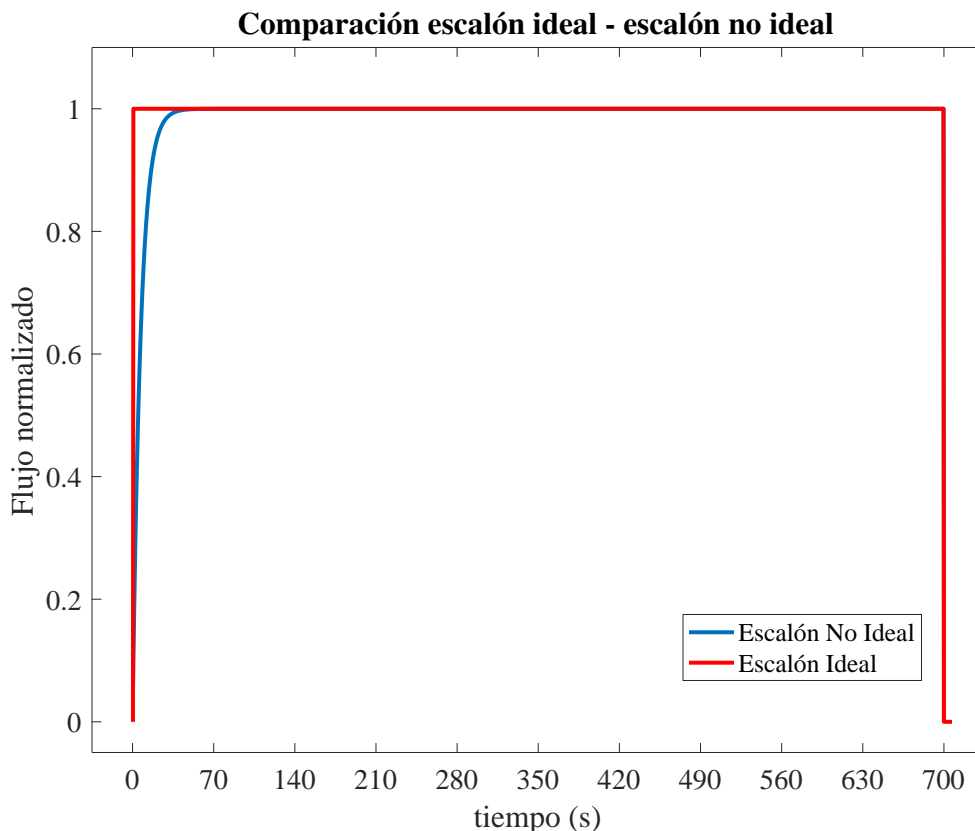


Figura 8.3: Ejemplo de la diferencia entre una excitación escalón ideal y una no ideal en la que se puede apreciar un retraso en alcanzar su máximo.

rapidez de la subida de temperatura, y esta se ve condicionada por el tiempo que tarda la excitación en alcanzar su valor estacionario.

El estudio de la excitación escalón como aquí vamos a tratarlo no ha sido ampliamente desarrollado ni mucho menos utilizado con el enfoque que en este capítulo se ha hecho. Los primeros estudios sobre el calentamiento escalón o *step heating* se remontan a finales del siglo XX con autores como L. Vozar, R. Osiander, J.W.M. Spicer o A. Griesinger [191] [190] [135] [60], que ya trataban este método de caracterización térmica e incluso hicieron desarrollos analíticos de la respuesta en temperatura con pérdidas por convección pero siempre tratando al escalón como una excitación de duración de no más de unos 20 segundos. En estas condiciones, se puede considerar que se está en tiempos tempranos, por lo que introducir o no pérdidas por convección no mejora enormemente los resultados. De hecho, los valores de difusividad térmica y profundidad de defectos eran recuperados con errores en torno al 40 % en el primer caso y del 20 % en el segundo caso. Poca bibliografía se encuentra entre esos primeros estudios y los más recientes [42] [18] [56] [7]. Estos últi-

mos se centran sobre todo en la detección de defectos, con duraciones de calentamiento que no superan los 10-20 segundos en ninguno de los casos. Con estas duraciones, se recuperan tamaños y profundidades de defecto en torno al 5 % de error relativo. Algunos de ellos además dan parámetros térmicos α y Bi [56], que se obtienen con errores relativos de un 10 %. Nosotros nos proponemos caracterizar térmicamente materiales expuestos a una excitación continua, sea cual sea la duración y la forma de la misma ya que habiendo resuelto el problema de la pérdida de calor por convección, mediante convolución podemos obtener la respuesta en cara trasera a esa excitación.

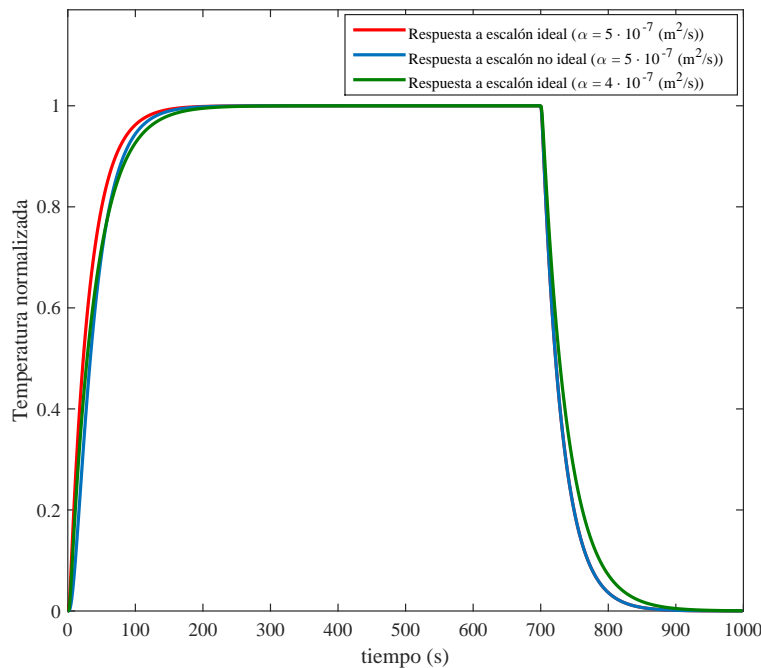


Figura 8.4: Ejemplo de la diferencia entre las respuestas a una excitación escalón ideal y una no ideal. El efecto de una excitación no ideal puede fácilmente confundirse con una difusividad más baja

Una posible solución a este problema radicaría en caracterizar experimentalmente la densidad de flujo de radiación $\phi_0(t)$ suministrado por la lámpara, pero el problema se complica porque aunque existen sensores de flujo, son de respuesta lenta e incómodos de operar, mientras que una cámara IR no puede medir directamente el flujo, sino sólo la variación de la temperatura del vidrio o de algún material expuesto a este $\phi_0(t)$, y la relación entre ésta y la densidad de flujo (como demuestran las ecuaciones al principio de este capítulo) no es sencilla: conocer el $\phi_0(t)$ incidente a partir de la temperatura requiere conocer α y Bi para el material, precisamente los parámetros que estamos buscando medir. Se ha optado por otra solución hecha posible por el enfoque mediante transformada

de Laplace y funciones de respuesta a impulso que adoptamos en el capítulo [5] para resolver la ecuación del calor. En efecto, en el apartado [5.7.1] se demostró que en lugar de $\phi_0(t)$ podía usarse como input la temperatura de la cara delantera, $T(0, t)$, siendo entonces la temperatura de la cara trasera, $T(L, t)$, la convolución de $T(0, t)$ con la función de respuesta a impulso (*irf*) dada por la transformada inversa de Laplace de la ecuación (5.39) que depende de α y Bi .

Nuestro planteamiento será, entonces, obtener estos parámetros buscando el ajuste óptimo de la $T(L, t)$ experimental mediante el perfil obtenido por convolución de los datos experimentales para $T(0, t)$ con la *irf*.

Obviamente, esto nos obligará a registrar simultáneamente las temperaturas de ambas caras de la muestra. Esto tiene la ventaja de que tendremos en cuenta cualquier tipo de no idealidad en la excitación: no solo la debida al calentamiento lento de la lámpara (figura 8.3), sino también a variaciones en las condiciones ambientales (por ejemplo, corrientes de aire) que se ha observado que tienen efectos apreciables en este tipo de experimentos de larga duración.

Una vez solucionada la caracterización térmica, veremos en el capítulo [9] como se puede obtener el flujo incidente a partir de las medidas de la cámara.

8.4. Sistema experimental para la excitación escalón

Con el fin de obtener las medidas simultáneas de cara delantera y trasera se va a utilizar un montaje más complejo que el usado en los experimentos flash [6.2.1.2] y que hemos denominado *Sistema dual de perfiles térmicos* (SDPT). Se trata de un nuevo sistema de medida desarrollado en el laboratorio IR de la UC3M y especialmente adaptado para medidas de materiales sometidos a fuego [161]. Pese a haber sido pensado y probado en base a unos requerimientos de operación concretos, posee una gran versatilidad y posibilita un rango de aplicación que va más allá de los requerimientos de partida, por lo que vamos a hacer uso aquí del SDPT para medidas de experimentos con excitación escalón.

Diseño del sistema de medida El SDPT usa dos cámaras IR que obtendrán imágenes de las dos caras del espécimen sometido a ensayo durante la duración completa de éste.

Un esquema del montaje, configurado para medida sobre muestras planas, puede verse en la figura 8.5. Cada cámara se coloca de manera perpendicular al espécimen, una a cada lado de la muestra, de modo que el sistema mide simultáneamente la evolución de la temperatura de ambas caras durante el experimento.

Para el caso que nos ocupa, se ha elegido el infrarrojo medio (MIR, con longitud de onda entre $3 \mu m$ y $5 \mu m$) como región espectral para la medida. Para esta banda se ha

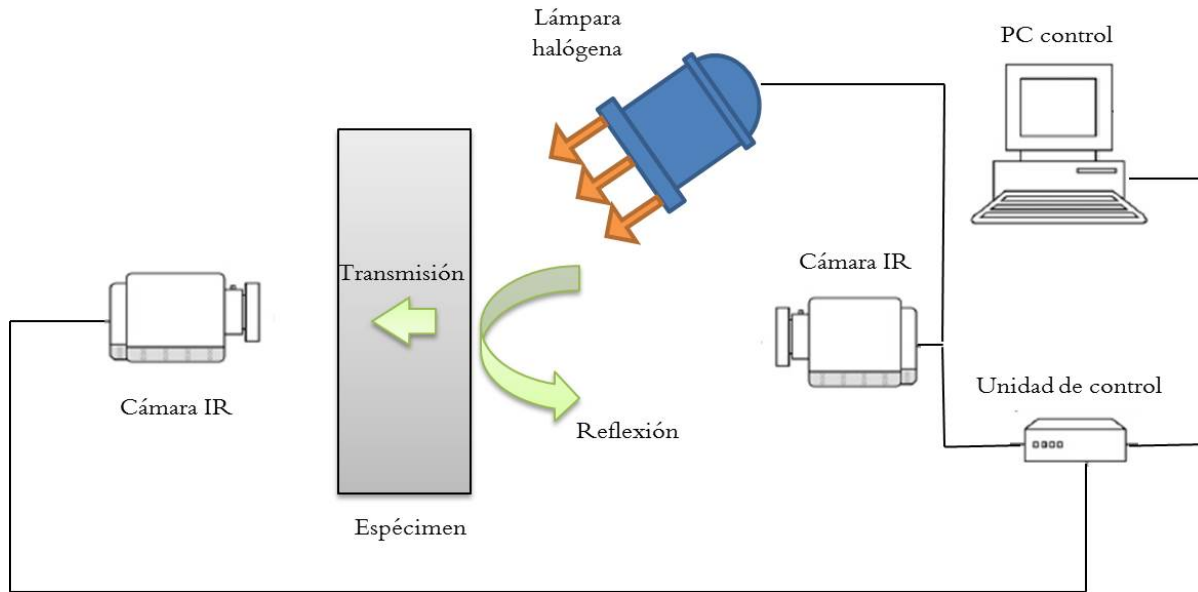


Figura 8.5: Esquema del montaje experimental de un ensayo a excitación escalón monitorizado por el sistema desarrollado formado por dos cámaras IR que proporciona imágenes simultáneas, georreferenciadas y calibradas en temperatura.

escogido dos cámaras refrigeradas. La primera de ella fue una cámara de antimonio de indio de la empresa Thermosensorik GmbH (Thermosensorik InSb640) con un array de 640×512 píxeles y con una lente de distancia focal de 50 mm . La segunda cámara también era de antimonio de indio pero en este caso de la empresa FLIR Systems (SC4000) con un array de 320×256 y una distancia focal de la lente utilizada de 25 mm . Estas dos focales son adecuadas para visualizar muestras de $300 \times 300 \text{ mm}^2$ a una distancia de $\sim 1 \text{ m}$ entre la probeta y la cámara, que son las medidas con las que trabajaremos en el laboratorio.

Para su correcta comparación, las secuencias procedentes de ambas cámaras deben estar *corregistradas*, de modo que cada píxel (i, j) de la imagen en cada cara pertenezca al mismo punto de la muestra. Esto se consigue con un postprocesado en el que se definen puntos de control de localización conocida, que se utilizan para deformar las imágenes mediante software, de tal forma que tengan el mismo tamaño en píxeles y cada píxel (i, j) en ambas imágenes se corresponde con el mismo área de la placa para sus caras delantera y trasera ³. Se ha utilizado el software de tratamiento de imágenes de ENVI [50], y de manera independiente, las funciones de procesamiento de imagen para referenciación espacial de Matlab [111], obteniéndose buenos resultados con ambas plataformas.

Las secuencias deben estar también *sincronizadas*, de modo que cada imagen esté tomada en el mismo instante en ambas caras. Se han probado diferentes aproximaciones

³En particular, esto exige que a una de las imágenes se le realice una reflexión especular

para la sincronización temporal de las secuencias de ambas cámaras. Una forma sencilla y efectiva es el uso de un evento visible para ambas cámaras, como el uso de una claqueta, o el encendido y apagado de la lámpara. Con esta solución se consigue una sincronización suficientemente buena teniendo en cuenta la dinámica de los ensayos a excitación escalón.

La posibilidad de disponer de los mapas térmicos de ambas caras, simultáneos, corregistrados y abarcando toda la duración del experimento nos abre un abanico de posibilidades para la caracterización térmica, pero nos vamos a centrar en dos planteamientos:

- a) *Ajuste simultáneo de α y Bi* : Disponer de la información completa de evolución de temperatura tanto en cara delantera como en cara trasera así como en las fases de calentamiento, estado estacionario y también enfriamiento nos permitirá estudiar qué información proporciona cada región en un ajuste simultáneo de α y Bi . Este estudio nos ayudará a determinar cuál es el mejor método de trabajo en comparación con los resultados obtenidos para la caracterización térmica a partir del método flash adaptado. Pese a que este método ofrece buenos resultados, el ajuste simultáneo de dos parámetros, hace que sea un proceso lento y, por ello, se ha propuesto un estudio alternativo.
- b) *Ajuste únicamente de α* : La relación entre las temperaturas de la cara delantera y la trasera en el estado estacionario nos proporciona de manera directa el número de Biot:

$$\frac{T(0)}{T(L)} = 1 + Bi \quad (8.5)$$

Una vez conocido éste, se obtiene el valor de la difusividad térmica mediante el ajuste de los perfiles térmicos de $T(t)$. Para este caso, la medida precisa de los valores de temperatura en cara delantera y en cara trasera será crucial. A partir de esta información, las curvas experimentales de cara trasera se ajustan a las teóricas sin más que modificar un único parámetro: la difusividad térmica. Como veremos, este modo de trabajar reduce los tiempos de ajuste de manera drástica además de proporcionar valores de α más próximos a los reales.

8.5. Ajuste en el estado estacionario

8.5.1. Puesta a punto

Antes de afrontar el problema de obtener los parámetros α y Bi es necesario resolver un problema previo asociado al valor de tiempo inicial (t_{min}) y al paso de tiempo óptimo (t_{step}) a elegir para hacer la convolución. Como se vio en la figura 5.14, la función de respuesta a impulso es una función que diverge en el origen y por esa razón estos dos

parámetros pueden influir mucho en el resultado numérico de esta operación, por lo que será crucial ajustarlos para obtener un correcto valor de temperatura en cara fría a partir de la temperatura de la cara caliente. El mismo problema se plantea incluso cuando queremos calcular la temperatura de la cara delantera en una excitación escalón a partir del flujo, ya que su correspondiente *irf* tiene también una divergencia en el origen.

Vamos a estudiar la influencia de los valores de t_{min} y t_{step} en este caso, ya que debido a la similitud de las *irf*, el estudio será válido también para la obtención de la temperatura de la cara trasera a partir de la delantera.

Para comparar los resultados obtenidos al cambiar t_{min} y t_{step} haremos uso de la física del estado estacionario que nos relaciona la temperatura de la cara delantera y de la cara trasera según la expresión (8.5). Para este estudio, usaremos perfiles calculados para un número de Biot igual a 0.5 ya que, como se puede apreciar en la figura 8.2, para valores de Biot menores el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario es demasiado largo.

Búsqueda del vector de tiempo óptimo Para la puesta a punto del método, vamos a estudiar cuáles son los valores tanto de tiempo mínimo como de paso de tiempo más adecuados para realizar la convolución de modo que se obtenga el número de Biot de manera precisa. Los valores utilizados y los valores recuperados del número de Biot se presentan en la tabla 8.1. Se muestra únicamente el estudio para $Bi = 0,5$, pero resultados muy similares se han obtenido para otros valores de número de Biot.

De manera gráfica, se pueden observar los valores absolutos de los errores relativos entre el valor de número de Biot real y el recuperado para cada uno de los pares $t_{min}^* - t_{step}^*$ de la tabla 8.1 en la figura 8.6.

$t_{step}^* \backslash t_{min}^*$	$2,2 \cdot 10^{-16}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$
$1 \cdot 10^{-4}$	0.4924	0.4934	0.4906	0.4788
$5 \cdot 10^{-4}$	0.4924	0.4922	0.4897	0.4784
$1 \cdot 10^{-3}$	0.4913	0.4934	0.4962	0.5232
$5 \cdot 10^{-3}$	0.4874	0.4887	0.4906	0.5079

Tabla 8.1: Valores de Bi recuperados para perfiles calculados con $Bi = 0,5$. En negrita se resalta el valor más cercano al valor buscado ($Bi = 0,5$) obtenido que se corresponde con el par de valores $t_{min}^* - t_{step}^*$ igual a $(5 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-3})$. El t_{min}^* mínimo es el valor más cercano a cero usado por Matlab.

Este estudio ha sido necesario ya que al usar un procedimiento numérico, hay que tener en cuenta este error, inherente al método, ya que se tratará de encontrar la *irf* que

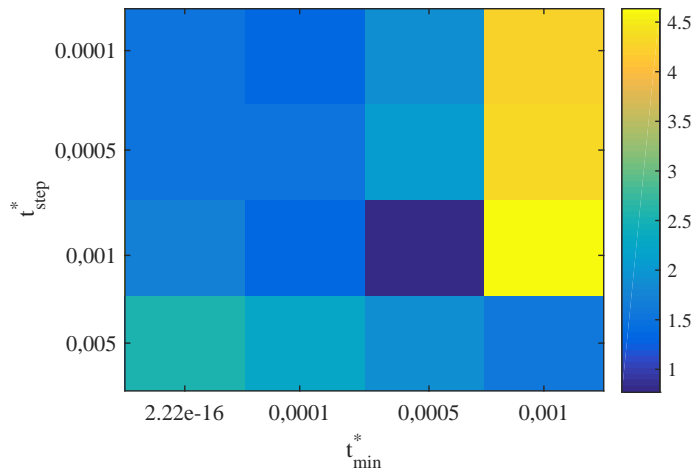


Figura 8.6: Error relativo (expresado en %, en valor absoluto) en la recuperación del número de Biot en el estado estacionario para un valor de número de Biot igual a 0.5.

reproduce la $T(L, t)$ cuando la convolucionamos con la $T(0, t)$ experimental y esa convolución es inevitable. Los resultados obtenidos, han dado como resultado que el par $t_{\min}^* - t_{\text{step}}^*$ óptimo para la recuperación correcta de los parámetros térmicos α y Bi es $(5 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-3})$ en unidades adimensionales (de t^*).

8.5.2. Datos experimentales en CFRP

8.5.2.1. Método flash adaptado

El método desarrollado en el capítulo [7] se hizo con vistas al análisis de muestras de material compuesto reforzado con fibra de carbono (CFRP). Comenzaremos analizando los parámetros térmicos de estos materiales mediante el método flash adaptado, que usaremos como referencia para comparar con los resultados del método escalón.

Consideramos dos muestras de CFRP que tienen nominalmente las mismas propiedades térmicas. La diferencia entre ellas será el espesor, siendo éste de $2,4 \text{ mm}$ y $1,05 \text{ mm}$. Estas dos muestras fueron sometidas a un experimento flash para obtener sus propiedades térmicas. Después y mediante el ajuste iterativo presentado en el capítulo anterior que tiene en cuenta las pérdidas por convección, se obtiene qué curva teórica da un error cuadrático mínimo con la experimental, obteniendo así los valores de α y Bi que mejor ajustan. Las curvas resultado de estas caracterizaciones para ambas muestras analizadas se pueden ver en las figuras 8.7 y 8.8. En ellas se muestran las curvas experimentales ligeramente suavizadas junto a las curvas teóricas que proporcionan el mejor ajuste. Las curvas se presentan normalizadas al valor de fracción de temperatura máximo alcanzado teniendo en cuenta las pérdidas por convección.

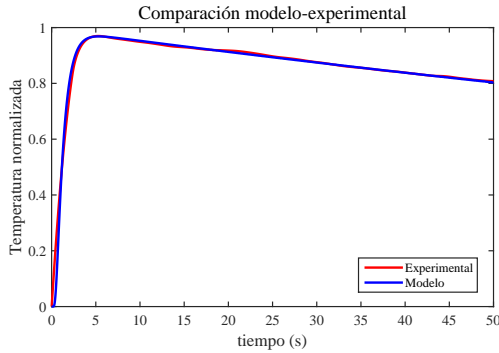


Figura 8.7: Curva experimental resultado de experimento flash junto a la curva teórica que proporciona el mejor ajuste para la muestra de espesor $L = 2,4 \text{ mm}$.

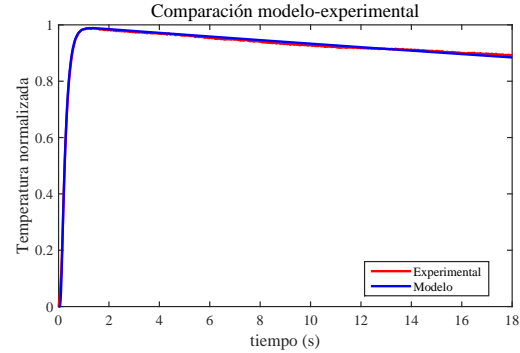


Figura 8.8: Curva experimental resultado de experimento flash junto a la curva teórica que proporciona el mejor ajuste para la muestra de espesor $L = 1,05 \text{ mm}$.

Los parámetros térmicos α y Bi obtenidos con el ajuste están recogidos en la tabla 8.2. Se realizaron varios experimentos en diferentes días y se muestran los resultados promedio obtenidos junto a su error (calculado como σ). Además, se ha calculado qué valor de difusividad térmica se habría obtenido haciendo uso del método flash clásico de Parker que no tiene en cuenta las pérdidas por convección. A la vista de los resultados, se puede afirmar, por un lado, que el valor de difusividad térmica obtenido por el método clásico de Parker está sobrestimado (como era de esperar, recordemos la figura 6.1) y, por otro lado, que pese a que las muestras eran supuestas iguales en cuanto a parámetros térmicos, no se puede hacer tal afirmación en base a nuestros resultados obtenidos.

Probeta	$\alpha_{t_{0,5}} \times 10^{-7} [\text{m}^2/\text{s}]$	$\alpha_{\text{adaptado}} \times 10^{-7} [\text{m}^2/\text{s}]$
$L = 2,4 \text{ mm}$	$6,8 \pm 0,2$	$6,6 \pm 0,2$
$L = 1,05 \text{ mm}$	$5,85 \pm 0,08$	$5,76 \pm 0,12$

Tabla 8.2: Valores de difusividad térmica obtenidos mediante los métodos clásico de Parker (denotados como $\alpha_{t_{0,5}}$) y mediante el método flash adaptado.

Para entender mejor el comportamiento del ajuste simultáneo de los dos parámetros (α, Bi), se muestran en la figura 8.9 los logaritmos de errores cuadráticos medios de la $T^{\text{normalizada}}$ (para apreciar mejor los diferentes valores) obtenidos al comparar la curva $T(t)$ experimental para la muestra de espesor $L = 2,4 \text{ mm}$ con los perfiles proporcionadas por el modelo para cada par de valores $\alpha - Bi$. Se aprecia, ante todo, que no hay mínimos locales, lo que garantiza que en condiciones ideales el algoritmo va a converger al valor de error mínimo. No obstante, puesto que hay un número máximo de iteraciones y un

criterio de parada cuando la mejora del error en sucesivas iteraciones es muy pequeña, puede que en un caso real se detenga antes de alcanzar el mínimo, sobre todo si el “valle” en el que éste está situado tiene pendientes poco pronunciadas. En nuestro caso, la región del mínimo es más alargada en dirección horizontal que vertical, lo que significa que los errores relativos serán generalmente mayores en el número de Biot que en la difusividad térmica.

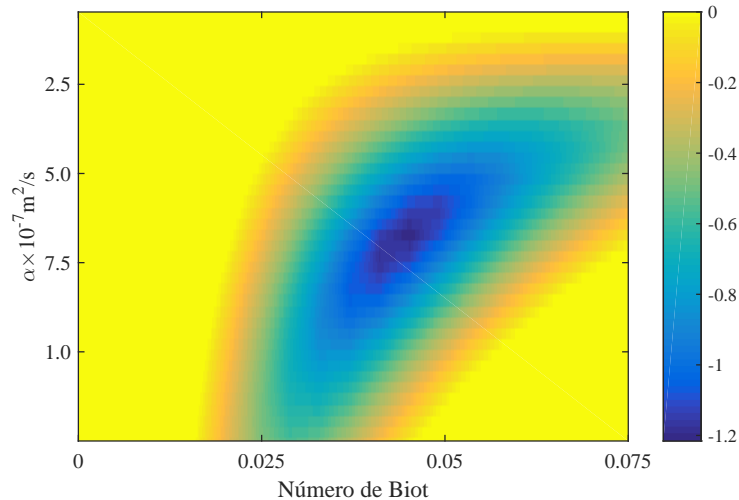


Figura 8.9: Valores de los logaritmos de los errores cuadráticos medios entre el perfil experimental de respuesta a excitación flash para el espécimen de espesor $L = 2,4 \text{ mm}$ y los proporcionados por el modelo (en unidades de $T^{\text{normalizada}}$) para distintos pares de valores $\alpha - Bi$.

8.5.2.2. Caracterización a partir del método escalón

Se han realizado medidas en las que, mientras la lámpara permaneció encendida, se adquirieron 1700 imágenes, espaciadas $0,7 \text{ s}$ (un tiempo total de 1189 s), y se adquirieron otras 280 para registrar el enfriamiento. Para la caracterización térmica de un material real a partir del método escalón en el estado estacionario se va a proceder a trabajar de dos maneras: en primer lugar, se ajustarán simultáneamente los parámetros α y Bi ; en segundo lugar, a partir del estado estacionario obtenido experimentalmente, calcularemos el número de Biot y con él, realizaremos el ajuste del parámetro α .

Ajuste simultáneo de los parámetros α y Bi

- El primero de los materiales analizados es un material homogéneo de fibra de carbono reforzada con resina epoxy de dimensiones $(300 \times 300 \times 2,4) \text{ mm}^3$.

Al disponer de toda la evolución de temperatura tanto de la cara delantera como de la cara trasera, se va a proceder a ajustar en varios intervalos temporales de interés para así comparar y analizar los resultados obtenidos (ver figura 8.10).

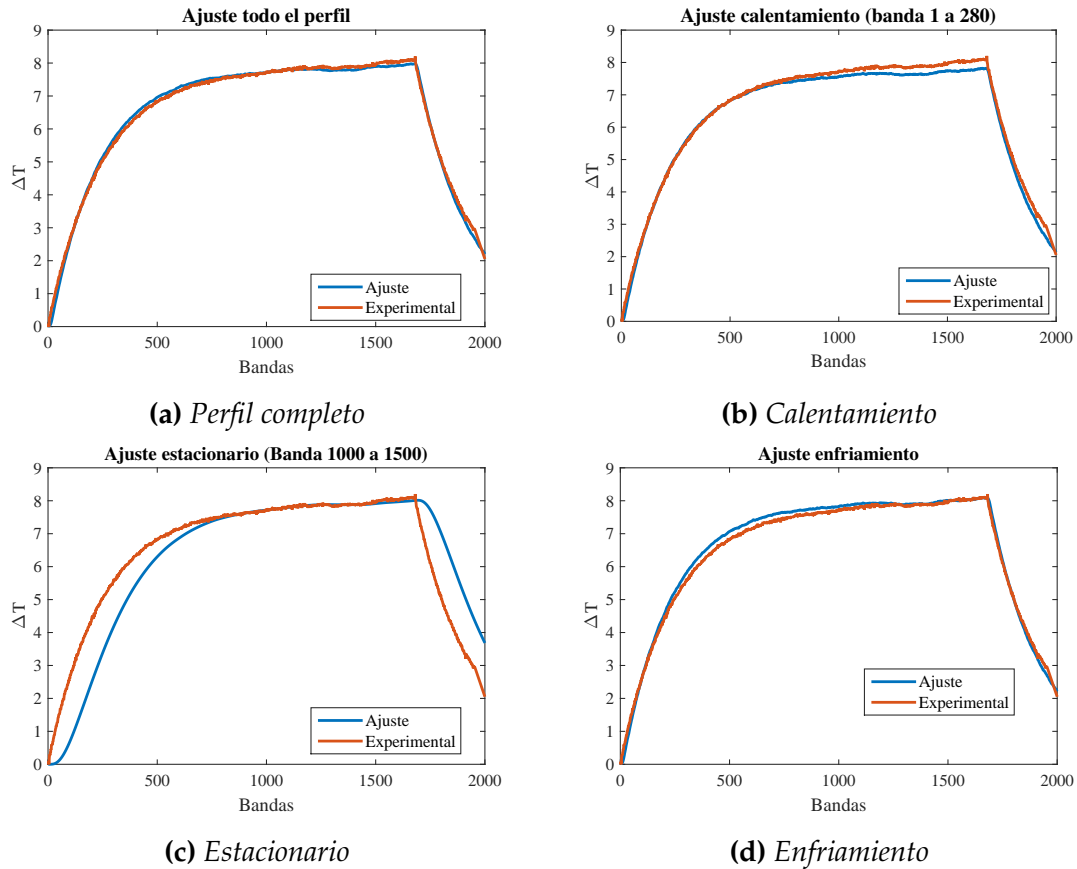


Figura 8.10: Perfil experimental (rojo) junto a los perfiles de ajuste (azul) para el que el error entre experimental y simulado es menor para el espécimen de $L = 2,4 \text{ mm}$. Cada "banda" está espaciada $0,7 \text{ s}$, de modo que la duración total del experimento es de poco más de 23 minutos.

El ajuste es el resultado de convolucionar la temperatura experimental de la cara delantera con la *irf*. Los datos experimentales (el de cara delantera con el que se ha hecho la convolución y el de la cara trasera con el que se han comparado los resultados proporcionados por el modelo) pueden verse en la figura 8.11a. Los parámetros térmicos recuperados del ajuste de cada uno de los casos se pueden ver en la tabla 8.3.

- El segundo de los materiales analizados fue un espécimen con características similares pero con un espesor de $1,05 \text{ mm}$. Los resultados obtenidos en este caso son de la tabla 8.4.

Para comprobar la bondad del ajuste, se puede recurrir a los resultados obtenidos en

Caso	$\alpha \times 10^{-7} m^2/s$	Número de Biot	Error cuadrático medio (K)
Perfil completo	4.45	0.23	0.12
Calentamiento	9.00	0.21	0.18
Estacionario	0.21	0.23	0.98
Enfriamiento	6.05	0.23	0.15

Tabla 8.3: Valores de difusividad térmica, número de Biot y error cuadrático medio recuperados para cada uno de los casos estudiados para la muestra de espesor $L = 2,4 \text{ mm}$ y presentados en la figura 8.10.

Caso	$\alpha \times 10^{-7} m^2/s$	Número de Biot	Error cuadrático medio (K)
Perfil completo	3.65	0.20	0.13
Calentamiento	3.55	0.21	0.12
Estacionario	3.30	0.25	0.05
Enfriamiento	3.80	0.30	0.18

Tabla 8.4: Valores de difusividad térmica y número de Biot recuperados para cada uno de los casos estudiados para la muestra de espesor $L = 1,05 \text{ mm}$

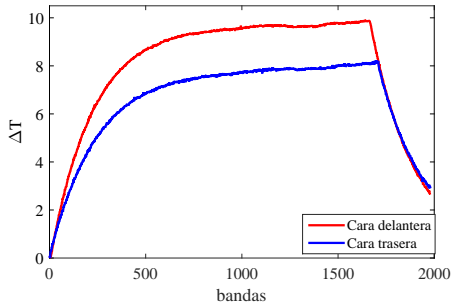
el apartado [8.5.2.1], en el que se han obtenido los parámetros térmicos de estos dos especímenes mediante el método flash adaptado. Se puede afirmar que para los dos casos presentados los resultados más aproximados son aquellos obtenidos del ajuste de todo el perfil lo que sugiere que este es el intervalo de ajuste más apropiado.

Como ya se ha dicho anteriormente, de los perfiles en temperatura de la cara delantera y cara trasera se puede obtener el número de Biot siempre y cuando las imágenes estén correctamente calibradas en temperatura y se alcance el estado estacionario. El método que acabamos de presentar, en el que es necesaria la variación de dos parámetros (α y Bi) para obtener un ajuste correcto es extremadamente lento, ya que exige un proceso iterativo dependiente de dos parámetros. Por esto se propone, a partir de las curvas en temperatura, obtener el número de Biot de modo experimental y sabiendo éste, sólo ajustar la difusividad térmica. Esto es lo que vamos a hacer en el siguiente apartado.

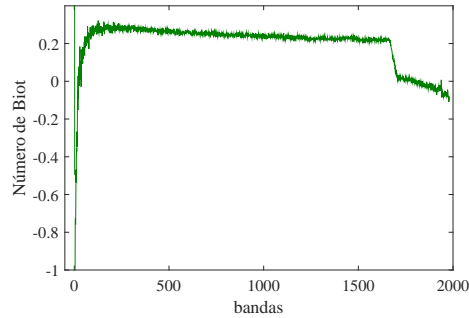
Ajuste de α conocido Bi

- **Especímen de 2,4mm.** Los perfiles de cara delantera y cara trasera así como el número de Biot obtenidos para esta muestra mediante la ecuación (8.5) pueden verse

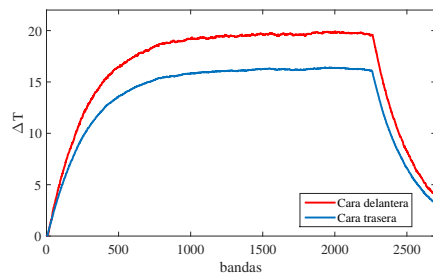
en las figuras 8.11a y 8.11b, respectivamente.



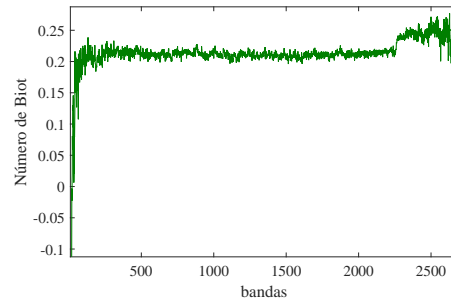
(a) Curvas experimentales para la muestra de espesor $L = 2,4 \text{ mm}$



(b) Número de Biot para la muestra de espesor $L = 2,4 \text{ mm}$



(c) Curvas experimentales para la muestra de espesor $L = 1,05 \text{ mm}$



(d) Número de Biot para la muestra de espesor $L = 1,05 \text{ mm}$

Figura 8.11: Curvas experimentales y valor de número de Biot obtenidos experimentalmente para las muestras de $L = 2,4 \text{ mm}$ y $L = 1,05 \text{ mm}$.

El número de Biot supuesto conocido se ha calculado como el valor medio entre las bandas 1111 y 1641, siendo este valor medio igual a 0.2257. El mejor ajuste para este caso nos da un valor de difusividad térmica igual a $\alpha = 6,64 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, que si nos fijamos en el valor obtenido en la tabla 8.2, se aproxima más al valor obtenido por el método del flash adaptado. Además, si calculamos el error cuadrático medio para este caso, obtenemos un valor de 0,11(K), que es menor que los obtenidos en la tabla 8.3.

El perfil experimental de cara trasera junto al perfil que nos proporciona el mejor ajuste se puede ver en la figura 8.12.

- **Espécimen de 1,05mm.** Para este espécimen se lleva a cabo el mismo estudio, siendo los perfiles experimentales y el número de Biot los que se muestran en las figuras 8.11c y 8.11d, respectivamente. En este caso, se ha obtenido un valor de número de Biot experimental igual a 0.2111 calculado como el valor medio del número de Biot

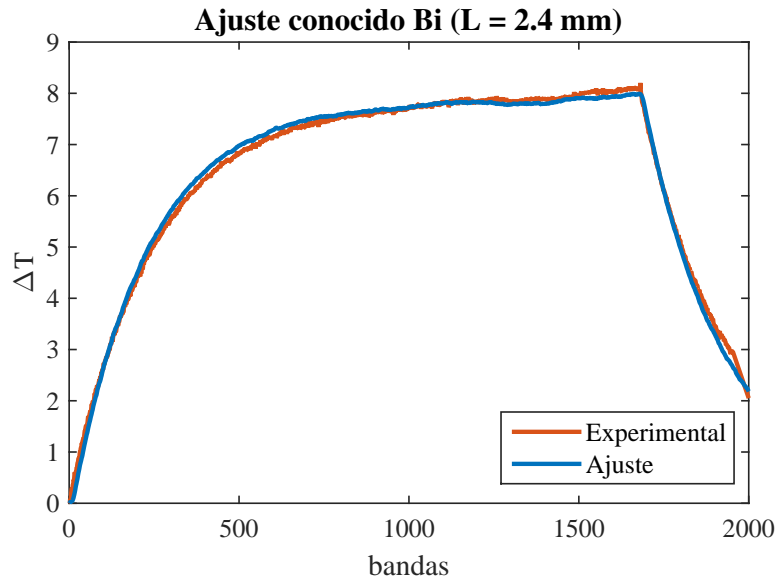


Figura 8.12: Perfil experimental para cara trasera junto perfil que proporciona el mejor ajuste conocido el número de Biot para la probeta de espesor $L = 2,4$ mm.

entre las bandas 1325 y 2231, como se puede apreciar en la figura 8.11d.

En este caso, el valor de difusividad térmica que nos proporciona el mejor ajuste ha sido $\alpha = 5,38 \cdot 10^{-7} m^2/s$, más parecido al valor obtenido con el método flash adaptado (tabla 8.2) que los proporcionados para el ajuste simultáneo de α y Bi . Además, si calculamos el error cuadrático medio para este caso, obtenemos un valor de $0,04(K^2)$, que es menor que los obtenidos en la tabla 8.4.

El perfil experimental de cara trasera junto al perfil que nos proporciona el mejor ajuste se puede ver en la figura 8.13.

Cabe destacar que tanto la figura 8.12 como la figura 8.13 presentan ajustes excelentes, lo que quiere decir que el método de obtener el número de Biot a partir del cociente de temperaturas y después ajustar mediante un método iterativo un único parámetro (la difusividad térmica α), proporciona mejores resultados y en un espacio de tiempo mucho más corto, pasando de decenas de minutos en el caso del ajuste simultáneo de α y Bi a unos pocos segundos en el caso de ajustar sólo α . Además, los valores obtenidos por este último método están más en consonancia con los valores obtenidos mediante el método flash adaptado, que se podría considerar como una validación del método aquí presentado para caracterizar térmicamente un material a partir del método escalón.

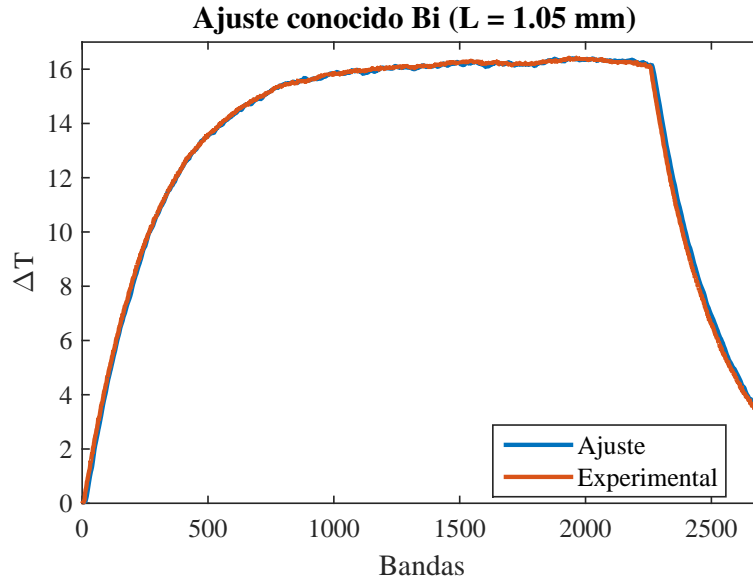


Figura 8.13: Perfil experimental para cara trasera junto perfil que proporciona el mejor ajuste conocido el número de Biot para la probeta de espesor 1,05mm.

8.5.2.3. Resumen de los parámetros térmicos obtenidos para el CFRP por los distintos métodos utilizados

La caracterización térmica del material CFRP se ha realizado mediante tres métodos distintos: método flash adaptado, método escalón ajustando simultáneamente los parámetros $\alpha - Bi$ y finalmente, método escalón esperando al estado estacionario para obtener de él el número de Biot y posteriormente hacer el ajuste a un sólo parámetro, a α . Los distintos valores para la difusividad térmica obtenidos por cada uno de los métodos se muestran en la tabla 8.5

Muestra \ Método	Flash adaptado	Ajuste $\alpha - Bi$	Ajuste solo α
$L = 2,4 \text{ mm}$	$6,6 \cdot 10^{-7}$	$4,45 \cdot 10^{-7}$	$6,64 \cdot 10^{-7}$
$L = 1,05 \text{ mm}$	$5,76 \cdot 10^{-7}$	$3,65 \cdot 10^{-7}$	$5,38 \cdot 10^{-7}$

Tabla 8.5: Resumen de los valores de difusividad térmica (en m^2/s) recuperados para cada una de las muestras estudiadas en cada uno de los casos. Las columnas segunda y tercera son resultados del método escalón; ajustando simultáneamente α y Bi (columna 2) o ajustando solo α y obteniendo Bi del estado estacionario (columna 3).

De los datos de la tabla 8.5 llaman la atención especialmente los obtenidos mediante lo que hemos llamado *ajuste $\alpha - Bi$* . Se puede apreciar que en ambos casos, los valores

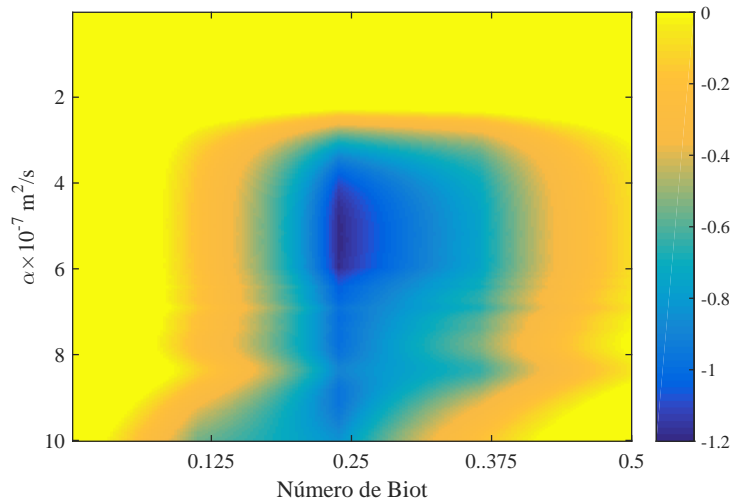


Figura 8.14: Logaritmos de los errores cuadráticos medios entre el perfil experimental a excitación escalón con ajuste simultáneo $\alpha - Bi$ para el espécimen de espesor $L = 2,4 \text{ mm}$ y los proporcionados por el modelo para distintos pares de valores $\alpha - Bi$.

de α son menores que los obtenidos con el método flash adaptado o el ajuste obteniendo el número de Biot en el estado estacionario. Para entender este comportamiento se ha realizado un estudio análogo al presentado en la figura 8.9. Es decir, se han calculado los errores cuadráticos entre los perfiles experimentales y los proporcionados por el modelo para cada par de valores $\alpha - Bi$. En la figura 8.14, al contrario que la figura 8.9, se puede ver que la región de errores mínimos se extiende en dirección vertical, lo que significa que el número de Biot estará relativamente bien definido, pero no así la difusividad térmica, que se determinará con menor precisión dado que el error cuadrático cambia poco para distintos valores de α , siempre que Bi esté en torno al valor correcto. Este efecto puede verse también en la tabla 8.3, en la que se muestran valores muy diferentes de difusividad térmica, mientras que el número de Biot es prácticamente el mismo en todos los casos estudiados.

8.6. Conclusiones

El calentamiento escalón es una de las técnicas de termografía activa menos exploradas, pero ofrece interés porque al tratarse de un tipo de excitación cuya potencia es baja, y que no altera las propiedades de los materiales si se aplica adecuadamente, es una técnica válida para materiales delicados, así como para muestras muy aislantes o gruesas que hacen que la técnica flash desarrollada en capítulos anteriores no sea suficiente para obtener una señal adecuada.

La baja potencia de la fuente en el calentamiento escalón exige medidas de larga duración, lo que hace más imprescindible aún que en el caso del flash el tratar los efectos de la convección (incluso para un valor tan pequeño como $Bi = 0,01$, se ha perdido el 20 % de la energía suministrada cuando $t^* = 20$, lo que equivale a unos 5 minutos en las muestras de este capítulo).

Al intentar ajustar los perfiles experimentales, nos encontramos con el problema de que las fuentes de excitación comerciales no proporcionan excitaciones *ideales* (figura 8.3), y, por tanto, si tratamos de usar un algoritmo iterativo utilizando como *input* un escalón ideal, los errores que se cometen en la recuperación de la difusividad térmica pueden ser del orden del 20 % (figura 8.4). Este problema fue tratado poniendo a punto un sistema de dos cámaras IR sincronizadas temporalmente y corregistradas espacialmente, denominado *sistema dual de perfiles térmicos* (SDPT, figura 8.5), que nos proporciona el valor de la temperatura en cada instante y para cada píxel. Este valor será utilizado como entrada para convolucionar con la *irf* y tener así una temperatura en cara trasera que es comparada con la experimental y cuyo error cuadrático mínimo nos proporciona el mejor valor de α y Bi .

Un problema práctico para realizar esta convolución es la divergencia en el origen propia de la *irf*. Esto nos llevó a la necesidad de estudiar cuál era el muestreo óptimo para el tiempo, encontrándose que no se trataba de una elección trivial, pero que pudo ser resuelta gracias a que el estado estacionario nos proporciona un patrón de comparación para los resultados de la convolución.

Disponer de la evolución de la temperatura por cara delantera y cara trasera para todo el perfil temporal, permitió hacer un doble enfoque en la recuperación de los parámetros térmicos α y Bi . El primero de ellos, con un ajuste de los dos parámetros simultáneamente y el segundo, obteniendo Bi del estado estacionario, ajustando iterativamente un único parámetro: α . Se encontró que este segundo caso proporcionaba mejores y más rápidos resultados, tal como resume la tabla 8.5.

Potencia de la excitación

RESUMEN: En este capítulo se afronta el *problema inverso*, o lo que es lo mismo, la recuperación de datos a los que no se tiene acceso y que son interesantes desde el punto de vista experimental y teórico como son la forma y la potencia de la excitación de la lámpara. De esta información se pueden obtener otros parámetros térmicos de interés, o puede ser usada como entrada al modelo si no se dispone de un sistema de dos cámaras que registren ambas caras del espécimen a lo largo del experimento.

9.1. Introducción

En el capítulo anterior se ha demostrado que se pueden obtener los parámetros térmicos α y Bi de una placa a partir de las medidas proporcionadas por el sistema de dos cámaras, sincronizadas temporalmente y corregistradas espacialmente (SDPT), adaptado específicamente para el caso que nos ocupa. La estrategia consistía en considerar la placa como un sistema lineal en el que la excitación es el perfil de temperaturas de la cara caliente $T(0, t)$ y la respuesta el perfil de la cara fría $T(L, t)$, obtenido por convolución de $T(0, t)$ con la función de respuesta a impulso en temperaturas de la placa. Como ésta depende de α y Bi , podemos establecer los valores de estos parámetros como aquellos que proporcionan un ajuste óptimo al perfil experimental de $T(L, t)$.

Esta estrategia tuvo que adoptarse porque se demostró que el desconocimiento del perfil exacto de la excitación radiante de la cara caliente por la lámpara, $\Phi(t)$, impedía determinar α con precisión (ver figura 8.4). Sin embargo, una vez determinados los parámetros térmicos de la placa, podemos usar este conocimiento para obtener este perfil. Esto nos va a llevar a enfrentarnos con un *problema inverso*.

En efecto, en todo sistema dinámico lineal, como ya sabemos, hay tres elementos: la excitación, la función de transferencia y la respuesta del sistema. Si conocemos dos de ellos, resolver el problema dinámico consiste en estimar el tercero. En el problema directo,

se obtiene la respuesta del sistema a partir de la excitación y la función de transferencia. Los problemas inversos son aquellos en los que a partir del conocimiento del sistema y de su respuesta (efecto) se estima la excitación (causa). Ese es justamente nuestro caso: nos proponemos averiguar el flujo incidente sobre la placa en función del tiempo (causa) conociendo la temperatura en la cara posterior (efecto) y las propiedades térmicas del sistema (su función de transferencia).

Los problemas inversos pertenecen a una clase muy interesante y común de problemas que se conocen como “mal condicionados”. Matemáticamente, un problema se considera “bien condicionado” si satisface los tres requisitos esenciales de *existencia, unicidad y estabilidad* de las soluciones. En el caso que nos ocupa, la existencia está asegurada por la física, pero es común en este tipo de problemas que exista más de una solución (lo que puede obligar a usar información adicional que garantice la unicidad de la solución estimada; un ejemplo es la restricción a soluciones compatibles con un modelo), y que ésta sea muy sensible a los efectos degenerativos del ruido en los datos de entrada o a las limitaciones impuestas por la precisión de los cálculos numéricos. En definitiva, un pequeño cambio en los datos de entrada puede producir un enorme cambio en la solución de salida [76]. Esta inestabilidad de las soluciones hizo que durante mucho tiempo se creyera que los problemas inversos no tenían mucha utilidad práctica y su estudio no llevaba a resultados matemáticos de interés. Esto fue así hasta 1943, cuando A. Tijonov [179] comprendió su importancia y propuso un método que encontraba una solución estable.

En los últimos años, el interés en los problemas inversos ha tenido un gran auge en varias ramas de la física, las matemáticas o la ingeniería, lo que ha llevado a desarrollar toda una teoría matemática que se ocupa de ellos [62], [63], [45], [124].

9.2. Planteamiento del problema inverso

Con la notación de la figura 5.1, la relación entre la entrada (o excitación) $x(t)$ y la correspondiente salida $y(t)$ de un sistema lineal se expresa, en el dominio de Laplace, como

$$\bar{y}(s) = ft(s) \cdot \bar{x}(s)$$

siendo $\bar{y}(s)$ y $\bar{x}(s)$ las respectivas transformadas de Laplace de $y(t)$ y $x(t)$, y $ft(s)$ la función de transferencia. Aplicando la transformada de Laplace inversa a ambos miembros,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [ft(s)] * x(t) \tag{9.1}$$

donde $\mathcal{L}^{-1} [ft(s)] \equiv irf(t)$ es la función de respuesta a impulso, y el asterisco indica el producto de convolución.

Podemos despejar $x(s)$ escribiendo:

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{ft(s)} \cdot \bar{y}(s)$$

y haciendo la transformada inversa,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{ft(s)} \right] * y(t) \quad (9.2)$$

En la ecuación (9.2) se han intercambiado la respuesta y la entrada respecto de (9.1); esto es, la respuesta es $x(t)$ y la entrada pasa a ser $y(t)$. Si en (9.1) obteníamos $y(t)$ por convolución con $x(t)$, se suele decir que en (9.2) estamos deconvolucionando $y(t)$ para obtener $x(t)$.

En el caso que nos interesa ahora, $x(t) = \Phi(t)$, la densidad de flujo radiante incidente sobre la cara caliente, mientras que $y(t) = T(L, t)$, la temperatura de la cara fría, pero no vamos a resolver (9.2) haciendo la transformada inversa de $\frac{1}{ft(s)}$. En primer lugar, porque no conocemos una expresión analítica para $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{ft(s)} \right]$, pero también por una razón más básica y general, que vamos a explicar a continuación.

9.2.1. Deconvolución: idea intuitiva

El problema de la deconvolución se plantea cada vez que un instrumento mide una señal s (que puede ser una función del tiempo, la longitud de onda o cualquier otra variable continua). La medida nunca es perfecta porque incluso en el mejor de los casos, introducirá dos efectos: una resolución limitada y un cierto nivel de ruido.

En el caso más sencillo, el instrumento se comporta como un sistema de medida lineal y el primer efecto puede describirse por una función de respuesta del instrumento, r . Por ejemplo, si la señal es un espectro $s(\nu)$, la función de respuesta $r(\nu)$ indicará la medida proporcionada por el instrumento para un espectro monocromático, es decir, cuando la señal es una delta de Dirac $\delta(\nu)$. A esta función de respuesta se le da nombres distintos según el contexto: en espectroscopía FTIR suele llamarse “forma de línea instrumental” (*instrumental lineshape, ILS*), para un monocromador es la “función rendija” (*slit function*), en la teoría de sistemas dinámicos lineales es la “función de respuesta a impulso” (*impulse response function, irf*), etc. Concretando en el caso de un espectro S , la medida será:

$$m(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\nu - \nu') s(\nu') d\nu' \quad (9.3)$$

es decir, el *producto de convolución* de la función de respuesta con el espectro original:

$$m = r * s$$

Intuitivamente parece claro que la convolución produce una “perdida de información”: por ejemplo, en un espectro, líneas muy finas y cercanas pueden confundirse. Sin embargo, haciendo la transformada de Fourier de los dos miembros de la ecuación anterior, obtenemos el producto ordinario de las transformadas, y podríamos obtener s despejando y haciendo una transformada inversa:

$$\mathbb{F}[m] = \mathbb{F}[r] \cdot \mathbb{F}[s] \Rightarrow s = \mathbb{F}^{-1} \left[\frac{\mathbb{F}[m]}{\mathbb{F}[r]} \right] \quad (9.4)$$

(ecuación análoga a la que encontramos en (9.2) usando la transformada de Laplace). Esta es la idea intuitiva de *deconvolucionar*: si conocemos la función de respuesta instrumental podemos reconstruir la señal original, corrigiendo la resolución finita del aparato.

Hay un problema evidente: para que esto funcione, $\mathbb{F}[r]$ no puede valer nunca cero: la función de respuesta debe contener todas las frecuencias. Esto ocurre en algunos casos (como una gaussiana, cuya transformada de Fourier es otra gaussiana, y por tanto nunca tiene un valor estrictamente cero) pero no en otros (como una función sinc, cuya transformada es una función rectángulo). En estos casos no podemos esperar en general una solución exacta, aunque sí soluciones aproximadas con técnicas más indirectas.

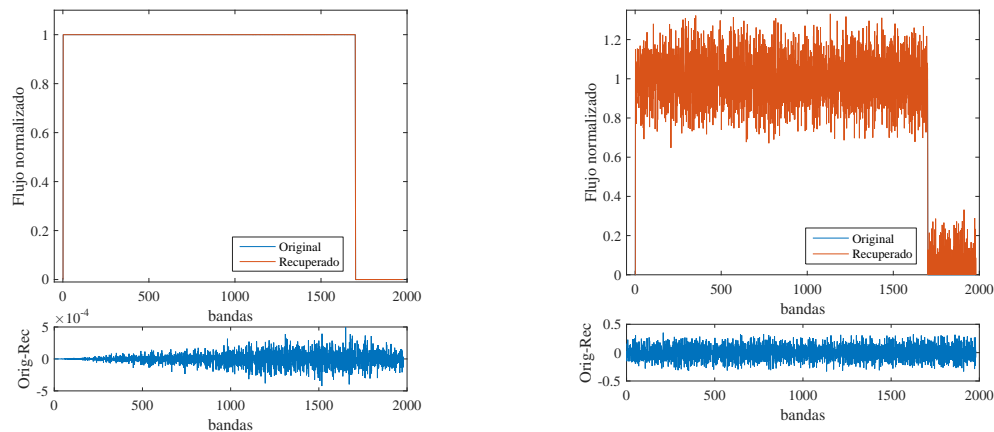
En la práctica, sin embargo, aunque $\mathbb{F}[r]$ nunca se haga cero siempre tendrá valores muy pequeños a frecuencias muy altas. Sólo si $\mathbb{F}[m]$ es más pequeño aún a esas frecuencias se evitarán las divergencias, y en general no tiene por qué serlo. En concreto, el ruido puede dar contribuciones importantes a $\mathbb{F}[m]$ para frecuencias altas, de modo que casi con seguridad aparecerán divergencias. El problema es, pues, inestable numéricamente y requerirá generalmente métodos más sofisticados que esta deconvolución “directa”.

9.2.2. Inestabilidad numérica

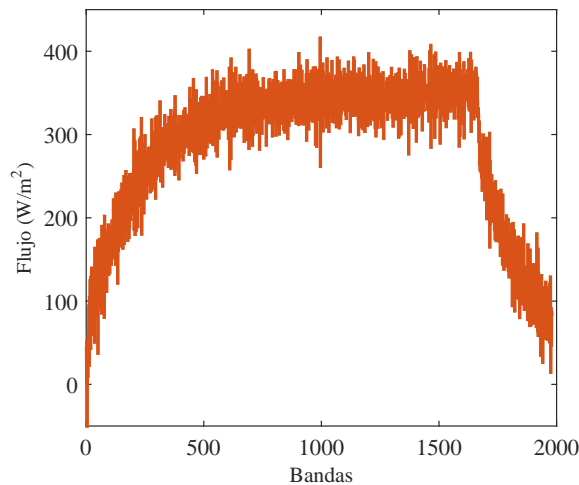
Podemos apreciar el problema más en concreto con el siguiente ejemplo, en el que calculamos la evolución de la temperatura $T(L, t)$ en la cara trasera de una placa en un experimento de calentamiento escalón con convección, convolucionando la correspondiente función de respuesta a impulso (5.36) con una función de excitación (escalón cuadrado) y queremos recuperar, a partir de $T(L, t)$, el perfil de la excitación, deconvolucionando el efecto de la *irf*.

El camino más directo para implementar esto es usar la función *ifft* de Matlab, que hace lo que se explicaba en el apartado anterior. También podemos usar otra función implementada en Matlab que es la función *deconv*. Se basa en que formalmente la convolución de dos señales discretas (vectores) es igual a la multiplicación de los polinomios que tienen por coeficientes los elementos de esos vectores, y, por consiguiente, la deconvolución equivale a la división de polinomios [52] [51].

En la figura 9.1 se comparan los resultados obtenidos con la función *deconv* para un perfil ideal y uno al que se le ha añadido ruido (los mismos cálculos se hicieron para la función *ifft* y los resultados fueron prácticamente idénticos). Pese a que en la figura 9.1a el resultado obtenido es casi perfecto, basta añadir un pequeño nivel de ruido a la entrada (en concreto, al ejemplo de la figura 9.1b se le ha introducido un error del 1%), para que el perfil recuperado empeore dramáticamente, como en la figura 9.1b.



(a) Arriba: entrada escalón recuperada con *deconv* para el caso ideal (sin ruido). Abajo: diferencias entre el escalón original y el recuperado. (b) Arriba: entrada escalón recuperada con *deconv* para el caso en el que se ha añadido ruido. Abajo: diferencias entre el escalón original y el recuperado.



(c) Reconstrucción test escalón experimental

Figura 9.1: Ejemplo de reconstrucción de la señal de entrada para una entrada ideal, una entrada teórico con ruido y una experimental usando la función de Matlab *deconv*.

Como comprobamos en la figura 9.1c, este efecto hace que la deconvolución directa

proporcionada por este método sea prácticamente inservible cuando se aplica a datos experimentales: aquí se muestra el resultado de aplicarlos a un perfil $T(L, t)$ experimental, obtenido en los experimentos del capítulo anterior (figura 8.10). Aunque aquí no conocemos el flujo incidente, el nivel de ruido en el perfil recuperado es tan grande que difícilmente podemos decir que hemos resuelto el problema.

Si, alternativamente, queremos deconvolucionar usando el método de (9.4), mediante la función *ifft* de Matlab, los resultados son igual de malos. En el apartado siguiente abordaremos un método menos directo, que va a permitirnos reconstruir mejor la señal de entrada.

9.3. Descomposición en valores singulares (SVD)

En la práctica, tanto la función de excitación como la respuesta están muestreadas; es decir, son vectores. El producto (9.1) es entonces una convolución discreta, que puede escribirse como un producto de matrices:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (9.5)$$

en el que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ son vectores que representan las señales de entrada y salida y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz de Toeplitz¹ [142] [194] obtenida a partir del muestreo de la función de respuesta a impulso (la construcción está implementada en el comando *convmtx* de Matlab). Debido a las propiedades de la convolución, $m > n$.

El problema de deconvolucionar es entonces el de resolver el sistema (9.5) de m ecuaciones con n incógnitas. Al ser mayor el número de ecuaciones que de incógnitas un sistema de este tipo generalmente no tiene solución exacta, pero podemos definir la mejor solución aproximada como aquella \mathbf{x} que minimiza el módulo del vector error, $\mathbf{e} \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}$. Esta es la “solución de mínimos cuadrados” del problema y la podemos denotar [63] como:

$$\mathbf{x}_{LSQ} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (9.6)$$

Un potente método matemático que proporciona \mathbf{x}_{LSQ} es la descomposición en valores singulares o *SVD* (de sus siglas en inglés Singular Value Decomposition) [62], [202], [1], [142].

¹Es decir, una matriz en la que cada diagonal descendente de izquierda a derecha es constante.

9.3.1. Enunciado de la SVD

Sea A una matriz real $m \times n$. Entonces existen :

- Una matriz ortogonal $U_{m \times m}$
- Una matriz diagonal $\Sigma_{m \times n}$ (en el sentido de que $\Sigma_{ij} = 0$ si $i \neq j$), cuyos elementos diagonales son números reales no negativos $\Sigma_{ii} = \sigma_i$, que supondremos ordenados en orden no creciente: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ (siendo $p = \min\{m, n\}$). Llamaremos a los σ_i *valores singulares* de X .
- Una matriz ortogonal $V_{n \times n}$

de modo que

$$A = U\Sigma V^T \quad (9.7)$$

El producto (9.7) es la *descomposición en valores singulares* (SVD) de A . En esquema tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A_{m \times n}} & \mathbb{R}^m \\
 \downarrow V_{n \times n}^T & & \uparrow U_{m \times m} \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Sigma_{m \times n}} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Los p valores singulares σ_i cumplen $\sigma_i^2 = \lambda_i$, siendo los λ_i los autovalores de la menor de las matrices $\{AA^T, A^T A\}$ (la de dimensión p). La mayor de esas matrices tiene p autovalores que son $\lambda_i = \sigma_i^2$, y el resto son cero².

La ecuación (9.7) puede escribirse como:

$$A = \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T \quad (9.8)$$

siendo $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ los vectores columna de U y V (llamados, respectivamente, vectores singulares izquierdos y derechos). Como los σ_i vienen dados en orden decreciente, cada sumando es menor que el anterior, y la expresión puede verse como un desarrollo en serie de A .

²Los valores σ_i están determinados unívocamente; es decir, la matriz Σ es única, pero las matrices U y V no lo son. En el caso de que la matriz X sea cuadrada, la matriz Σ es diagonal cuadrada, pero (9.7) no es una diagonalización de A , porque en general $U \neq V$.

Si todos los valores singulares de A son distintos de cero, la matriz tiene el rango máximo, p ; una matriz de rango no máximo tendrá al menos un valor singular igual a cero. En la práctica es frecuente, al operar numéricamente con matrices, que los errores de redondeo puedan alterar al rango de una matriz. Por eso tiene utilidad definir el *número de condición de la matriz* mediante:

$$\text{cond}(A) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$$

siendo $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ los valores singulares máximo y mínimo, respectivamente, que puede entenderse como una medida del grado de independencia lineal de las columnas de A : si $\text{cond}(A)$ es grande, las columnas son “casi dependientes” y si es cercano a 1, son “muy independientes”.

En álgebra numérica, si el número de condición de una matriz es tan grande que su inversa se aproxima a la precisión de punto flotante del programa utilizado, esa matriz es a efectos prácticos singular, y se dice que está “mal condicionada”. El hecho de que los problemas inversos estén más condicionados, en el sentido que introdujimos al principio del capítulo, se traduce a menudo en que la matriz A esté “mal condicionada” en el sentido específico de tener un número de condición muy grande

9.3.2. SVD y sistemas de ecuaciones lineales

Para nosotros, el interés de la SVD radica en su potencia para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Desarrollando $A = U\Sigma V^T$ y sustituyendo en (9.5)

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = U\Sigma V^T \mathbf{x}$$

Como las matrices U son ortogonales (su inversa es su traspuesta), y como Σ es diagonal (su inversa se obtendría cambiando los σ_i de la diagonal por sus inversos, al menos si fuera cuadrada), parece intuitivamente que podríamos despejar \mathbf{x} multiplicando sucesivamente por la izquierda en la ecuación anterior por U^T , una matriz diagonal cuyos elementos sean σ_i^{-1} , y V .

Esta intuición es en esencia correcta: se puede demostrar que, aunque en general (9.5) no tenga solución exacta, la solución de mínimos cuadrados es [142]:

$$\mathbf{x}_{LSQ} = \sqrt{\Sigma^{-1}} U^T \mathbf{y} \quad (9.9)$$

donde $\sqrt{\Sigma^{-1}}$ es una matriz diagonal $n \times m$ que tiene como elemento i -ésimo σ_i^{-1} , salvo cuando $\sigma_i = 0$, en cuyo caso es cero. Es decir, trasponemos Σ y reemplazamos los elementos diagonales por su inversa, pero si el elemento diagonal es cero, lo dejamos como cero.

Podemos escribir esta ecuación de forma vectorial, igual que hicimos con la ecuación original de la SVD, (9.7), para dejarla en la forma (9.8). Obtenemos así [65]:

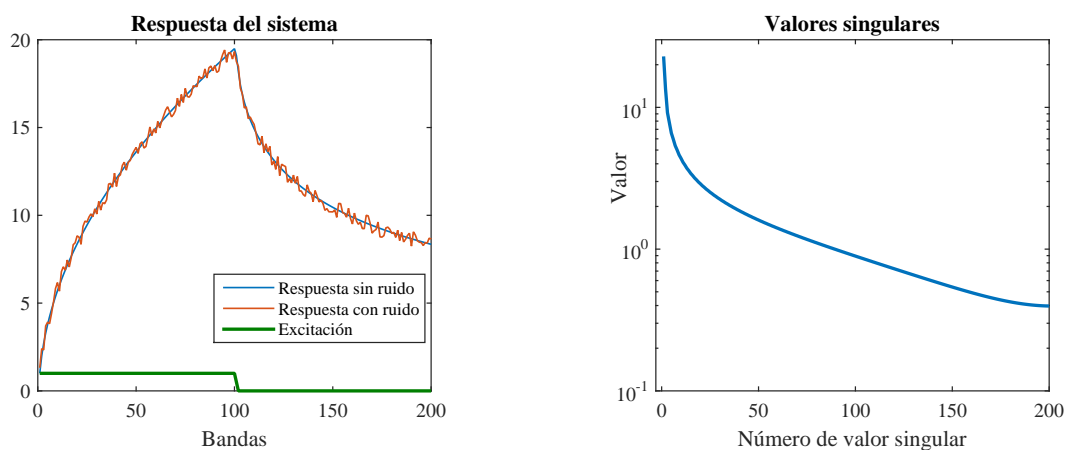
$$\mathbf{x}_{LSQ} = \sum_{i=1}^r \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (9.10)$$

(siendo r el número de valores singulares distintos de cero). Una vez más, esto puede interpretarse como un desarrollo en serie de \mathbf{x}_{LSQ} , expresado como combinación lineal de los \mathbf{v}_i , con coeficientes que son la proyección del vector \mathbf{y} sobre los \mathbf{u}_i .

Para que podamos interpretarlo así, las sucesivas contribuciones al sumatorio deberían ser decrecientes. Pero puesto que los valores singulares aparecen en el denominador en (9.10), los σ_i más pequeños darán una contribución mayor, salvo que la proyección $\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}$ decaiga aún más deprisa con i . Los vectores singulares \mathbf{u}_i presentan oscilaciones cuyo número crece con i , y si el vector \mathbf{y} no tiene ruido, su variación suave hará que el producto escalar $\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}$ sea muy pequeño y generalmente se cumpla esa condición. Sin embargo, la presencia de ruido introduce oscilaciones en \mathbf{y} de modo que los términos de i alto puedan tener una contribución muy grande, debida únicamente al ruido, y que estropea la reconstrucción de la señal. Por eso, en presencia de ruido puede ocurrir que reconstruyamos mejor la señal de excitación \mathbf{x} desechando la contribución de algunos valores singulares.

9.3.3. Resultados obtenidos con la SVD

Veamos cómo funciona la optimización mediante SVD en el siguiente ejemplo.

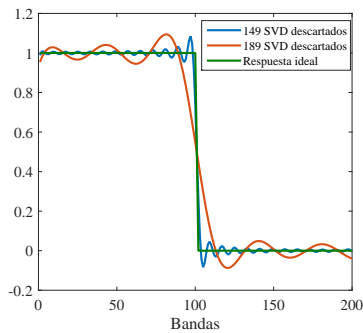


(a) Azul: Respuesta escalón ideal; Rojo: Respuesta escalón con ruido; Verde: Excitación ideal.

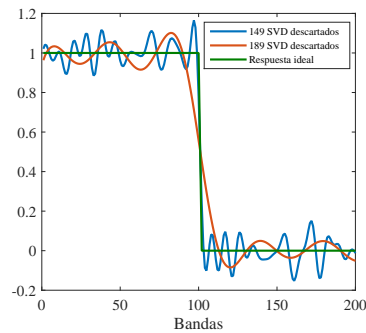
(b) Valores singulares

Figura 9.2: Perfiles introducidos y valores singulares obtenidos

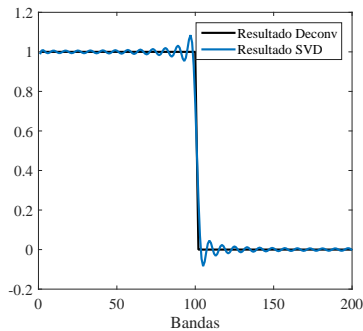
Supongamos que conocemos la temperatura en cara delantera (ideal -sin ruido- y con ruido) así como su respuesta a impulso y queremos conocer cuál es la función de entrada (flujo) que produjo esa respuesta. Para poder trabajar adecuadamente con la SVD, necesitamos poner la función de respuesta a impulso en forma de matriz (para ello, hacemos uso de la función de Matlab *convmtx*), y la excitación de entrada, que en este ejemplo será un pulso cuadrado ideal, como un vector. La excitación y las respuestas con y sin ruido se muestran en la figura 9.2a. En este caso, los vectores de excitación y respuesta tienen 200 elementos, por lo que hay 200 valores singulares posibles; se han representado en 9.2b, que permite apreciar que, como suele ocurrir, decrecen muy rápidamente.



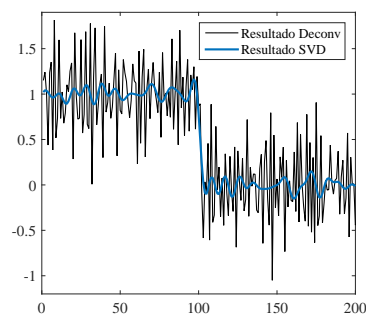
(a) Recuperación de la excitación mediante SVD para un perfil sin ruido



(b) Recuperación de la excitación mediante SVD para un perfil con ruido



(c) Comparación entre la función deconconv de Matlab y la SVD para un perfil sin ruido



(d) Comparación entre la función deconconv de Matlab y la SVD para un perfil con ruido

Figura 9.3: Perfiles recuperados para el caso de la SVD. Se presentan también la comparación con los resultados obtenidos con la función *deconv* de Matlab

Para el caso de perfil de salida sin ruido, la ecuación (9.10) reconstruye perfectamente la excitación si se utilizan los 200 valores singulares. Si no se usan todos los valores singulares en el sumatorio, la señal se reconstruye de manera más imperfecta, apareciendo oscilaciones. La figura 9.3a muestra los resultados obtenidos al descartar 149 y 189 valores

singulares. En contraste, para el perfil de salida con ruido, usar todos los σ_i proporciona una estimación sumamente ruidosa de la señal de excitación (esencialmente indistinguible de la marcada como “Resultado Deconv” en 9.3d; sin embargo, las reconstrucciones con unos pocos σ_i son casi igual de buenas que con ruido, como se aprecia en la figura 9.3b.

Se encuentra, pues, que cuando hay ruido descartar los valores singulares más pequeños proporciona una estimación mucho mejor de la solución del problema inverso que usarlos todos. El efecto dramático del ruido se muestra con claridad en las figuras 9.3c y 9.3d que comparan el resultado de la función *deconv* de Matlab con la recuperación mediante SVD (descartando 149 de los 200 valores singulares) en los casos sin ruido y con ruido. La SVD, descartando valores singulares pequeños, nos permite obtener una estimación razonablemente buena de la función de excitación en un caso en el que un pequeño nivel de ruido hace que la deconvolución directa sea prácticamente inútil.

9.4. Regularización.

El tratamiento riguroso de los problemas mal condicionados se debe a Tijonov, que desarrolló el método de la *regularización*. Para el caso en el que el problema puede ser formulado en la forma (9.5), la versión más sencilla de este método consiste en buscar una solución \mathbf{x}_λ que minimice no el vector error sino una combinación lineal de éste con el módulo de \mathbf{x} , es decir,

$$\mathbf{x}_\lambda = \operatorname{argmin}\{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\| + \lambda^2 \|\mathbf{x}\|\} \quad (9.11)$$

(en el caso general, $\|\mathbf{x}\|$ se puede sustituir por $\|L(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\|$ siendo L un operador lineal y \mathbf{x}^* una estimación inicial de la solución, pero aquí nos vamos a limitar al caso más sencillo). El *parámetro de regularización* λ controla el peso relativo que damos a la minimización de $\|\mathbf{x}\|$ en comparación con la minimización del vector error. Se demuestra que cuanto mayor es el valor de λ (es decir, cuanto mayor es la regularización), menos sensible es la solución a las perturbaciones de A e \mathbf{y} . En definitiva, cuanto mayor es λ más filtrados quedan los efectos del ruido, al precio de que el error cuadrático medio de \mathbf{Ax}_λ con el vector de la medida experimental y sea mayor.

Este compromiso puede visualizarse con la *curva-L*: para un problema dado, la gráfica logarítmica de $\|\mathbf{x}_\lambda\|$ frente a $\|\mathbf{Ax}_\lambda - \mathbf{y}\|$ tiene una característica forma de L; la aparición de una “esquina” en la curva muestra que existe un parámetro de regularización que en cierto sentido supone un compromiso óptimo entre dos objetivos de minimización (ver figura 9.4). La región marcada como “menos filtrado” corresponde a valores pequeños de λ , al aumentar λ se recorre la curva hacia la región de “más filtrado”.

Una propiedad atractiva de la solución regularizada dada por la ecuación (9.11) es que

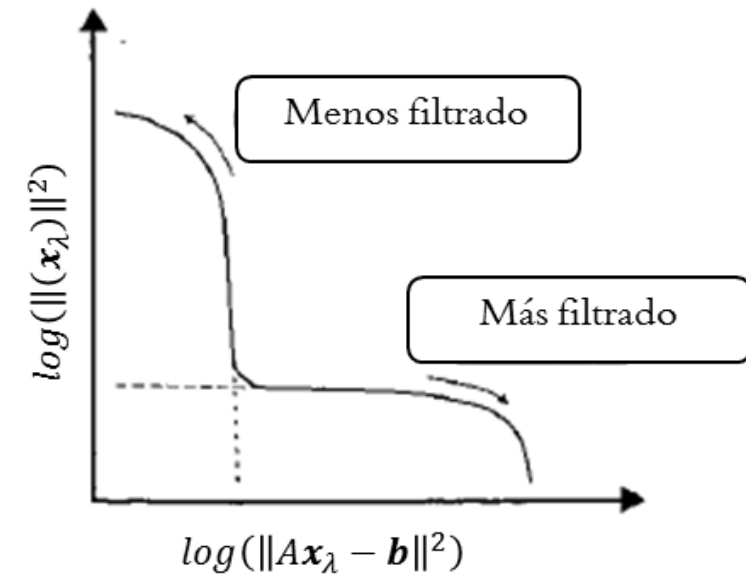


Figura 9.4: Curva-L genérica para la regularización de Tijonov en escala log-log. Figura adaptada de [62].

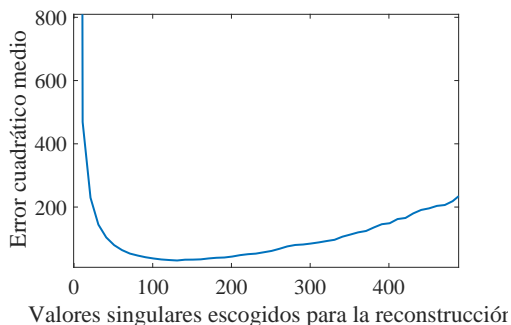
puede expresarse a partir de la solución de SVD del sistema (9.5) de forma muy sencilla. En [62] se demuestra que:

$$\mathbf{x}_\lambda = \sum_{i=1}^r f_i \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad \text{siendo} \quad f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \quad (9.12)$$

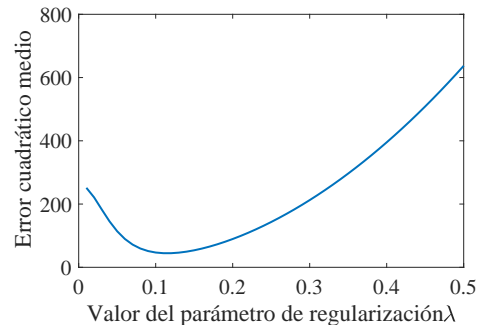
9.4.1. Resultados obtenidos con la regularización

Para la puesta a punto de este método se trabajará del siguiente modo: se generará un problema ideal conocido (una excitación escalón) al que se le añadirá un ruido aleatorio (gaussiano, con media cero y desviación estándar del 1% del valor del escalón). Después, como se ha explicado en el apartado anterior, y pudiendo expresar el problema de la forma (9.5), se calculará la descomposición en valores singulares de la matriz de coeficientes A.

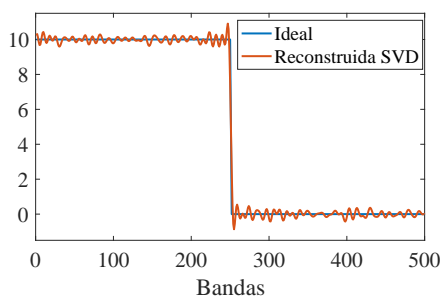
A continuación será necesario definir el parámetro de regularización λ . Se han usado diferentes valores de λ , siendo el valor máximo igual a 0.5, y el mínimo igual a 0.01. Para cada uno de estos valores recuperaremos un valor de *input* diferente, según la ecuación (9.12), y calcularemos cuál es el error cuadrático medio entre éste y la excitación de entrada ideal; los resultados pueden verse en la figura 9.5b. Haremos lo mismo para el caso de descomposición en valores singulares, mostrando cuál es el error cuadrático medio entre señal reconstruida y señal ideal en función del número de valores singulares retenidos en la figura 9.5a.



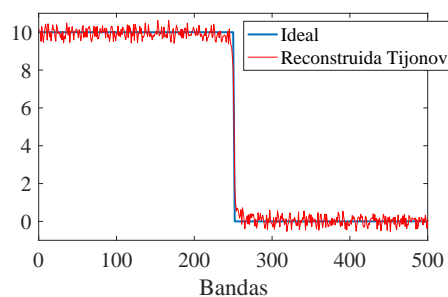
(a) Error cuadrático medio entre entrada ideal y recuperada para distintos valores de valores singulares descartados.



(b) Error cuadrático medio entre entrada ideal y recuperada para distintos valores parámetro de regularización λ .



(c) Recuperación de la señal de entrada para la combinación de valores singulares descartados para el cual el error cuadrático medio es mínimo junto a la excitación ideal.



(d) Recuperación de la señal de entrada para el parámetro de regularización λ para el cual el error cuadrático medio es mínimo junto a la excitación ideal.

Figura 9.5: Perfiles recuperados junto a error cuadrático medio para el método tradicional de error cuadrático medio así como para el método de regularización de Tijonov.

Analizadas estas curvas obtenidas, tanto para el caso de SVD como para el caso de regularización de Tijonov, se puede determinar cuáles son los parámetros óptimos (número de valores singulares descartados y parámetro λ , respectivamente) para los cuales se obtiene la excitación con un error cuadrático medio mínimo. En el primer caso, se obtiene un error cuadrático medio mínimo al usar 131 valores singulares para la reconstrucción, mientras que para el caso de la regularización de Tijonov, el valor de λ que ha proporcionado el menor error ha sido $\lambda = 0,11$. Analizando los valores de desviación estándar que hemos obtenido para cada uno de los casos que se muestran en las figuras 9.5c y 9.5d son respectivamente 0.18 y 0.25. Esto es, hemos pasado de tener un ruido de un 1% en la señal de entrada a un 1,8% y un 2,5% en la reconstrucción de la señal de salida. A pesar de que la desviación estándar obtenida en el caso de la regularización de Tijonov es mayor que en el caso de la SVD, cabe destacar que el ruido del perfil recuperado por Tijonov es

mucho más “natural” (que se debe a que estamos reteniendo, aunque muy atenuadas, las componentes de alta frecuencia en la ecuación 9.12 en lugar de eliminarlas del todo).

Excitación real Una vez puestas a punto cada una de las técnicas, en este apartado las aplicaremos a un experimento real. Este experimento será el mismo con el que se ha trabajado en el capítulo [8] en el caso de excitación escalón en muestras de CFRP, más concretamente el utilizado para obtener los parámetros térmicos de la muestra de CFRP de $2,4\text{ mm}$ del apartado [8.5.2.2]. Los perfiles usados para resolver el problema inverso en el caso experimental serán los de la figura 8.11a.

A partir de la evolución de la temperatura en cara delantera, es decir, a partir de $T(0, t)$ vamos a tratar de determinar el flujo $\Phi(t)$. Tenemos la muestra caracterizada a partir de las medidas experimentales de cara delantera $T(0, t)$ y de cara trasera $T(L, t)$. En el capítulo [8], hemos encontrado el valor del número de Biot a partir de las temperaturas del estado estacionario ($Bi = 0,235$) y el valor de la difusividad térmica α del ajuste de los perfiles ($\alpha = 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, ver tabla 8.5). Con más precisión, lo que hemos hecho es escribir $T(L, t) = irf_{T0,TL}(t) * T(0, t)$, donde $irf_{T0,TL}$ es la función de respuesta a impulso que se obtiene en el apartado [5.7.1] y que depende de α , variando ésta hasta que se logra el mejor ajuste con la curva experimental.

Sabemos que $T(L, t) = irf_{\Phi,T0}(t) * \Phi(t)$, donde $irf_{\Phi,T0}$ es la función de respuesta a impulso dada por la ecuación (5.35) o, implícitamente por la transformada inversa de Laplace de la ecuación (5.12) para $z = 0$. Podemos obtener $\Phi(t)$ deconvolucionando (aplicando la regularización de Tijonov) pero hay dos problemas:

- La función $irf_{\Phi,T0}$ depende de h, κ y α . Conocemos α y sabemos que $h = \frac{Bi\kappa}{L}$ pero nos falta conocer el valor de la conductividad térmica κ . Este valor ha sido obtenido de los estudios previos llevados a cabo en [174], para las mismas muestras analizadas y su valor numérico se ha tomado igual a $0,7 [W/(mK)]$.
- El segundo problema es que debido a la singularidad de las irf en el origen, estas convoluciones sólo van a dar resultados correctos si se eligen con cuidado t_{min} y t_{step} como se explicó en el apartado [8.5.1] del capítulo [8].

La puesta a punto del problema inverso se hizo basándonos en la física del estado estacionario que se explicó en el apartado [4.4]. A partir de las ecuaciones que lo determinan y del valor de κ mencionado, se obtuvo que el valor de potencia de excitación para la fuente que proporciona los valores de temperatura en el caso estacionario para la muestra de CFRP de $L = 2,4\text{ mm}$ de la figura 8.11a es igual a $1200 \text{ W}/\text{m}^2$. Conocido este dato, se pasó a determinar t_{min} y t_{step} de manera análoga al apartado [8.5.1], es decir, determinar buscando qué valores proporcionaban en el *problema directo* (es decir, convolucionando

con una excitación escalón ideal de duración igual a la experimental) la temperatura en estado estacionario igual a la obtenida experimentalmente. Este estudio concluyó que este par de valores ($t_{\min} - t_{\text{step}}$) era igual, en nuestro caso, a $(0,067 - 0,029)$ s o en unidades adimensionales de t^* igual a $(7 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-2})$, que está dentro del orden de magnitud obtenido en el apartado [8.5.1].

Podemos pasar, entonces, a calcular mediante el problema inverso con la regularización de Tijonov la forma de la excitación. Para obtener un valor dimensional de la potencia de la excitación será necesario dividir por el paso de tiempo experimental (en este caso, se generaron mediante interpolación perfiles experimentales cuyo paso era igual a t_{step} para no tener problemas a la hora de multiplicar matrices). La figura 9.6 muestra, finalmente, el resultado obtenido.

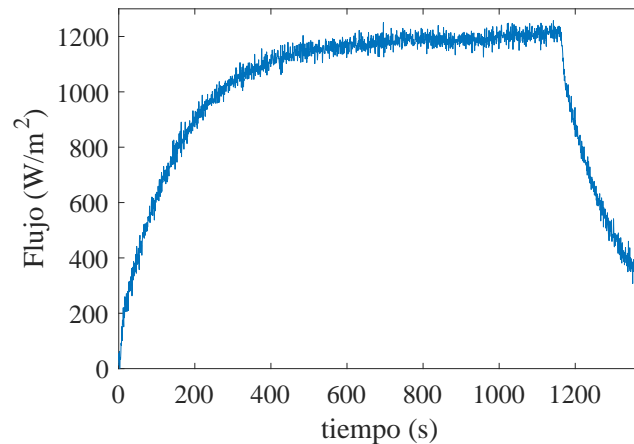


Figura 9.6: Forma y valor dimensionalizado recuperado mediante el problema inverso para la lámpara de excitación utilizada experimentalmente en el capítulo [8]

En el capítulo anterior encontramos que el desconocimiento del perfil real de la excitación escalón no permitía aplicar directamente las ecuaciones teóricas para caracterizar térmicamente el material, pero pudimos superar el problema introduciendo como entrada para nuestro modelo la temperatura de la cara delantera, en lugar del flujo incidente. Esto nos obligó a usar un sistema de medida sofisticado, el sistema dual de perfiles térmicos (SDPT), para registrar las temperaturas de ambas caras de la muestra.

Una vez caracterizada la muestra, sin embargo, el trabajo de este capítulo nos ha permitido obtener la forma y el valor de la densidad de flujo incidente. Hay que destacar el lento calentamiento que se puede apreciar en la curva recuperada, debido probablemente a que la lámpara utilizada contaba con una gruesa placa de metacrilato que actuaba como filtro para el infrarrojo y que produce este retraso en el calentamiento. Conocido el flujo, no es ya necesario usar dos cámaras para el registro de evolución de la temperatura, lo que

facilitará y agilizará la caracterización térmica, siempre que se use la misma configuración de medida y, por tanto, el mismo flujo incidente. Pero además, una caracterización de la fuente de excitación permite calcular el resto de parámetros térmicos, igual que ocurría en el método flash. Por ejemplo, si conocemos ϕ_0 y medimos $T(L, t)$, podemos determinar por el ajuste iterativo los valores de α y Bi , y las ecuaciones del estado estacionario (4.30) y (4.31) nos permiten determinar la temperatura de la cara caliente $T(0)$ en el estado estacionario y el valor de h . Conocido éste, es inmediato obtener la conductividad térmica como $\kappa = hL/Bi$.

9.5. Conclusiones

La adaptación y uso del SDPT para la caracterización térmica permitió en el capítulo [8] poner a punto un modelo de ajuste a partir de la temperatura en cara delantera sin necesidad de conocer la potencia y la forma de la lámpara. Sin embargo, una vez caracterizada la muestra es posible conocer la potencia y la forma de la lámpara hasta ahora desconocidas, resolviendo el *problema inverso*.

Para conseguirlo es necesario abordar técnicas matemáticas para resolver sistemas lineales mal condicionados. Destacamos el uso de la descomposición en valores singulares [sección 9.3] y regularización [sección 9.4]. Se ha comprobado que ambos funcionan bien, pero para casos experimentales, la *regularización* proporciona señales de entrada cuya forma es mucho más “natural” (figura 9.5).

La solución del problema inverso mediante la regularización, junto con la puesta a punto para el vector de tiempos que se estudió en la sección [8.5.1], han permitido recuperar la forma y potencia de la lámpara de excitación (figura 9.6) que se había utilizado en el capítulo [8].

Esta caracterización del flujo de entrada permitirá usar sólo una cámara para el registro de la evolución de la temperatura, lo que simplificará el proceso de caracterización térmica, además de poder obtener la conductividad térmica y el calor específico volumétrico, que hasta el momento (sin la potencia de la lámpara) nos son desconocidos e imposibles de calcular.

Parte III

MÉTODOS ESTADÍSTICOS

Componentes principales

RESUMEN: La última parte de esta tesis se centra en la reducción de la dimensionalidad de los datos. En este capítulo se propone usar el método estadístico de las componentes principales para agilizar el proceso de recuperación de los parámetros térmicos. A partir de una matriz de datos pre-calculadas, se estudiará la correlación entre las variables que entran en juego permitiendo una drástica reducción del volumen de datos.

10.1. Introducción

Debido a que las actuales cámaras IR cuentan cada vez con arrays de mayor tamaño y frecuencias de adquisición más elevadas, se presenta para la caracterización térmica una dificultad de naturaleza práctica relacionada con el gran volumen de datos a manejar, que conllevan además grandes tiempos de computación. Ya que $T(t)$ debe ser registrada para toda la imagen, los datos adquiridos para un sólo experimento puede alcanzar varios gigabytes si la dimensión temporal es grande. Este es el caso cuando se necesitan frecuencias de adquisición elevadas o largos tiempo de adquisición. El primer caso se da cuando, por ejemplo, el análisis de la temperatura en la muestra excitada por un flash se lleva a cabo en la cara delantera en lugar de la cara trasera [196]. El segundo caso es común cuando el método flash se aplica a muestras térmicamente aislantes, como las que se estudian en este trabajo y especialmente cuando se utiliza el calentamiento escalón que puede llevar a tiempos de adquisición de varios minutos. Además del gran volumen de datos, el proceso del ajuste iterativo requerido para recuperar los parámetros térmicos en la muestra completa puede ser muy exigente en términos de recursos de computación.

Con el fin de abordar este problema, en este capítulo se propone un método de recuperación para los parámetros térmicos α y B_i basado en el análisis estadístico de datos por componentes principales (PCA, del inglés *principal component analysis*). El análisis por componentes principales, explicado en la sección [10.2], es un método bien conocido

de reducción de dimensionalidad, cuya aplicación es estándar en los campos de la tele-detección (donde se usa habitualmente para comprimir la información de las imágenes multi e hiperespectrales) y la minería de datos, y que, aunque aplicado con mucha menos frecuencia, ya ha sido usado en el campo del análisis no destructivo para la detección de defectos, dándose en llamar PCT (del inglés, *principal component thermography*), [108],[56],[78],[133]. En este capítulo usaremos la técnica con ese fin en la sección [10.3], comparando su sensibilidad en la detección de defectos con la proporcionada por la medida directa de contrastes de temperatura, tanto en las secuencias de imágenes originales como en sus transformadas de Fourier temporales.

Si embargo, el principal objetivo del capítulo es demostrar una aplicación que no es meramente cualitativa. Nos proponemos usar el análisis por componentes principales para hacer más eficiente la recuperación de los parámetros térmicos α y B_i para cada punto de la muestra.

En capítulos anteriores [5],[6] y [7], estos parámetros eran recuperados calculando $T(t)$ en la parte trasera de la muestra como una función de α y B_i , y buscando iterativamente los valores que ajustaban mejor con los datos experimentales [162][161]. Este es un proceso muy lento, ya que en cada iteración la ecuación 1D del calor ha de ser solucionada (lo que implica, en particular, calcular numéricamente la transformada inversa de Laplace), y aquí se presenta un método diferente. Se han calculado aquellos perfiles teóricos $T(t)$ para un conjunto de parámetros (α, B_i) que cubren el intervalo de variación esperado de ambos parámetros para las muestras estudiadas. Con ellos, se construye un cubo de datos (*datacubo*) que almacena los valores de temperatura, en el que las direcciones (x, y, z) son, respectivamente, (α, B_i, t) . El análisis por componentes principales se aplica a este datacubo para reducir la dimensionalidad en la dirección z . En la sección [10.4], se muestra que en nuestro caso, la reducción es, de hecho, drástica: sólo 3 componentes principales (PCs) son suficientes para reproducir los perfiles teóricos $T(t)$ del datacubo con gran precisión y también los perfiles experimentales. Así, cada cada uno de estos estará definido sólo por 3 números, y los valores de α y B_i para él son fáciles de determinar encontrando la pareja (α, B_i) en el datacubo cuyas tres primeras componentes principales sean más similares, lo que conlleva una drástica reducción en el tiempo de computación.

Finalmente, en la sección [10.5] se mostrarán los resultados para dos muestras reales, una *nominalmente* homogénea y otra con inclusiones con localización conocida.

10.2. Principios básicos del PCA

El análisis por componentes principales (PCA del inglés *Principal Component Analysis*) es un procedimiento estándar para el estudio de conjuntos de datos multivariados [172],

[133], [73], [163], [148]. Cuando se practica un gran conjunto de medidas de muchas variables es frecuente que: (a) haya una fuerte correlación entre muchas de las variables (es decir, muchas de ellas son esencialmente redundantes) y (b) algunas de las variables tienen pequeña variabilidad sobre las diferentes medidas (es decir, contienen poca información). El PCA afronta estos dos problemas construyendo un nuevo conjunto de variables, relacionado linealmente con las originales, las cuales están descorrelacionadas y están ordenadas por variabilidad (varianza sobre el conjunto de medidas) decreciente. Estas nuevas variables son lo que se llaman *componentes principales* (PCs).

Desde nuestro punto de vista, la característica más importante del PCA es que proporciona un modo de comprimir la información, reduciendo, algunas veces drásticamente, el tamaño del conjunto de datos, con una mínima distorsión. Una aplicación clásica puede encontrarse en la transmisión y el procesado de imágenes multibanda provenientes de satélites, donde cada “medida” es un píxel y cada “variable” es la intensidad de la luz reflejada en una banda espectral. Ya que las reflectividades están normalmente muy correlacionadas para bandas que están espectralmente próximas, hay una gran redundancia en los datos y por ello pueden ser descritos con un pequeño número de componentes principales.

Para explicar el procedimiento, diremos que tenemos m bandas y n píxeles, y se asumirá que los datos están organizados en una *matriz de medidas* (o *datos*) X con m filas y n columnas. Cada columna (también llamado “vector de medida”) se puede entender como un punto en un *espacio de variables* m -dimensional, en el cual el conjunto de datos define una nube de n puntos. Las componentes principales serán unos nuevos ejes en este espacio.

Para obtener las componentes principales, el primer paso es “centrar las filas” de la matriz de medida (es decir, sustraer a cada fila su media) para obtener una matriz de datos centrada $X_c \equiv X - M$ (donde $M_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$). Esto equivale a desplazar el origen del espacio de variables al centro de masas de la nube de puntos. Entonces, la matriz de covarianza de la matriz de datos centrada puede ser calculada como $C = \frac{1}{n} X_c X_c^T$. En general, esta matriz no será diagonal (mostrando el hecho de que hay correlación entre variables), pero, puede ser diagonalizada seleccionando como nueva base un conjunto apropiado de vectores mutuamente ortogonales. Estos “vectores propios” de C son las componentes principales, que son ordenadas en función de sus “autovalores” $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ (que son los términos correspondientes de la diagonal de la matriz de covarianza en la nueva base) en orden decreciente. La varianza total de los datos viene dada por la suma de todos los autovalores: $\sigma_{total}^2 = \sum_{i=1}^m e_i$.

La matriz $A_{m \times m}$ cuyas filas son los autovectores (expresados en la base original) es una matriz ortogonal que permite el cambio de base a las componentes principales, ya

que multiplicando $A \cdot X_c \equiv X'_c$ se proyecta los vectores de medida en la base de las componentes principales. Los datos en su forma original pueden ser reconstruidos volviendo a proyectar de nuevo en la base original. Ya que A es ortogonal, esto se implemente simplemente multiplicando por A^T ; es decir, $X_c = A^T \cdot X'_c \equiv A^T \cdot A \cdot X_c$. Si, por el contrario, no se quiere proyectar sobre todo el conjunto completo de componentes principales sino en el subespacio comprendido por las r primeras de ellas, lo que se recupera es una aproximación de los datos originales.

Más explícitamente, si se define la matriz de autovectores reducida, A_R , idéntica a A en sus primeras r filas, pero con $A_{Rij} = 0$ si $i > r$, entonces $X_c \approx A_R^T \cdot A_R \cdot X_c$. Una aproximación X_R a los datos originales se obtiene añadiendo a la matriz las medias sustraídas anteriormente:

$$X_R = M + A_R^T \cdot A_R \cdot (X - M)$$

Nos referiremos a la matriz X_R como la *aproximación de PCA de orden r* . La varianza de los datos aproximados es $\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^r e_i$. La aproximación será correcta si esta es una parte importante de la varianza total, es decir, si $\sigma_R^2 / \sigma_{total}^2 \approx 1$. Ya que solamente las primeras r filas de A se usan para reconstruir el conjunto completo de datos, el número de variables efectivas es ahora r ; esto puede suponer una reducción muy grande si $r \ll (m, n)$. Más en detalle: la matriz $A_R \cdot (X - M)$ tiene solo las r primeras filas distintas de cero ($r \times n$ datos); la matriz A_R^T tiene solo las r primeras columnas distintas de cero ($m \times r$ datos), y la matriz M tiene todas sus columnas iguales (m datos). La proporción entre el número de datos necesarios para obtener X_R y el número de datos original es:

$$\frac{rn + rm + m}{nm} = \frac{r}{m} + \frac{r+1}{n}$$

10.3. PCA para detección de defectos

Una aplicación bastante directa del análisis de componentes principales a la termografía es la detección de defectos. Nos centraremos en el caso de la termografía flash aplicada a la muestra de baquelita descrita en el apartado [6.2.1.2], y compararemos los resultados obtenidos tanto en la configuración de reflexión (medidas por la *cara delantera*, iluminada por el flash) como la de transmisión (medidas por la *cara trasera*, la opuesta a la iluminada por el flash).

Ante todo, la secuencia de medidas de temperatura a lo largo del tiempo, que podemos visualizar como un cubo de datos (con los ejes $x - y$ espaciales y el eje z temporal) es recolocada en forma de matriz. Los datos cada imagen (frame) se colocan en filas sucesivas, de modo que una secuencia de n_t imágenes, cada una de $n_x \times n_y$ píxeles, da lugar a una matriz de datos X con $m = n_t$ filas y $n = n_x \times n_y$ columnas. Cada una de estas co-

lumnas, es decir, cada “vector de medida” es el perfil temporal $T(t)$ en el correspondiente píxel. Una vez centrada X y calculados los autovectores de su matriz de covarianza, se proyectan los vectores de medida (centrados) sobre estos autovectores. Obtenemos así sus componentes en la base de autovectores, que podemos disponer en forma de matriz (la matriz $X'_c = A \cdot X_c$ que introducimos en el apartado anterior). Reordenando las filas de esta matriz en el formato $n_x \times n_y$ tenemos las *imágenes de componentes principales*.

El conjunto de todas las imágenes de componentes principales (junto con el vector de medias) contiene toda la información de los datos originales, pero redistribuida de forma óptima: La varianza va decreciendo al crecer el orden de la componente, de manera que casi toda la información está en las primeras PCs, mientras que las de orden alto sólo contienen ruido. Generalmente, la imagen de PC1 es similar a un promedio de todas las imágenes de la secuencia, y las sucesivas PCs muestran aspectos distintos de la estructura de los datos, de forma que algunas entre las primeras imágenes de PCS permiten generalmente visualizar los defectos con una sensibilidad mucho mejor que las imágenes originales, e incluso mejor que imágenes procesadas con técnicas clásicas (como la transformada de Fourier de las señales temporales).

En esta sección vamos a comparar las sensibilidades de esas tres técnicas: medida del contraste en las imágenes de temperaturas, imágenes de componentes principales, y secuencia de imágenes obtenidas como transformada de Fourier (en módulo) de las secuencias temporales $T(t)$ en cada píxel (en este caso, la primera imagen será la correspondiente a la continua, la segunda a la componente de frecuencia más baja, y las sucesivas a frecuencias cada vez mayores).

Recordemos que la muestra que vamos a estudiar tiene unos rebajes cilíndricos de distintos diámetros (denotados por D_1, D_2, D_3 y D_4) y espesores (denotados por P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5), dispuestos en forma de matriz (ver figura 6.4), que consideraremos como “defectos”, siendo el material “sano” las regiones de la placa de espesor normal. En un experimento flash, la presencia de defecto se manifiesta por un contraste térmico con la región sana, contraste que varía a lo largo del tiempo y que debe ser superior, para poder ser detectado, al nivel de ruido espacial de la imagen. De acuerdo con esta idea, hemos definido la relación señal a ruido en la detección del defecto como

$$SNR = \frac{T_{\text{def}} - T_{\text{sano}}}{\sigma}$$

Siendo σ una medida del ruido espacial de la imagen, obtenida como la desviación estándar de los valores de temperatura de un cuadrado 10×10 en la zona entre defectos.

Esta SNR variará a lo largo del tiempo en las secuencias temporales, y variará también en las distintas imágenes de componentes principales, así como en las sucesivas imágenes de componentes de frecuencia obtenidas por transformada de Fourier temporal, y nos

permitirá comparar la sensibilidad de los tres métodos, aplicados, además, en las dos configuraciones de medida (cara delantera y cara trasera).

10.3.1. Cara delantera

Contraste en T: La variación con el tiempo de la SNR para el contraste en temperaturas para los defectos de espesor P_1 y P_2 se muestra en la figura 10.1 (los defectos de espesores mayores apenas eran detectables). Se aprecia que las regiones P_2 de mayor espesor (que simulan defectos más profundos) se detectan más tarde y con menor relación señal a ruido que las menos gruesas (equivalentes a defectos más superficiales). El menor diámetro también disminuye la SNR con la que se detecta el defecto, aunque el efecto es menor (recordemos que D_1 es el diámetro mayor, y este disminuye sucesivamente en D_2 , D_3 , etc.)¹.

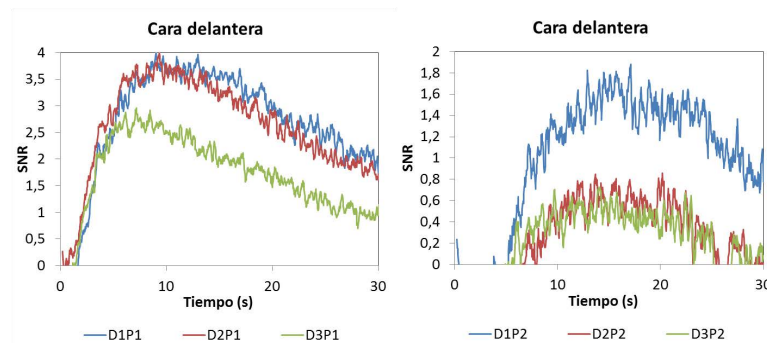


Figura 10.1: Contraste en temperatura para las profundidades P_1 (izquierda) y P_2 (derecha) por cara delantera.

Los valores de SNR máximos para cada uno de los puntos analizados se presentan en la tabla 10.1.

Temperaturas			
$SNR_{\text{máx}}$	D_1	D_2	D_3
P_1	3.8	3.8	2.8
P_2	1.7	0.7	0.5

Tabla 10.1: SNR máximos en contraste de T para cada uno de los puntos analizados por cara delantera.

¹Con el fin de facilitar la comparación con el esquema de la figura 6.4, todas las imágenes en este capítulo son el reflejo especular de las obtenidas por la cámara (que, naturalmente, observa la muestra por el lado liso)

Una imagen en temperatura que tiene una SNR cercana a la óptima para todos los defectos corresponde con $t = 13,3 s$ (como se puede ver en la figura 10.1) y se muestra en la figura 10.2.



Figura 10.2: Imagen en temperatura cuyo SNR es máximo para la cara delantera.

Imágenes de PCA: Una vez obtenidas las imágenes de componentes principales, se hace un tratamiento análogo al realizado con las imágenes originales de temperaturas para obtener la SNR. Los valores máximos se muestran en la tabla 10.2 (el valor máximo para la primera fila de defectos, con espesor P_1 , se obtiene en la imagen PC4; para la segunda fila, con espesor P_2 , en la PC5).

PCs			
$SNR_{\text{máx}}$	D_1	D_2	D_3
P_1	11.9	12.2	10.7
P_2	11.8	7.1	5.3

Tabla 10.2: SNR obtenidos con el formalismo de las componentes principales en el estudio por cara delantera para cada uno de los puntos estudiados.

Las tres primeras imágenes de PCs se muestran en la figura 10.3. La primera es similar a la imagen de temperaturas mostrada en la figura 10.2, y es patente que las imágenes PC2 y PC3 no contienen información sobre los defectos buscados, sino sobre el acabado de la superficie de la muestra. Sin embargo, en las imágenes correspondientes a las PC4 y PC5 (figura 10.4) los defectos se ven con mucha mayor nitidez, como queda claro en la tabla de los valores de SNR que son, para la segunda fila de defectos, casi 10 veces mayores que en las imágenes de temperaturas. La tercera fila de defectos puede apreciarse, pero la SNR es muy baja y no se ha registrado.

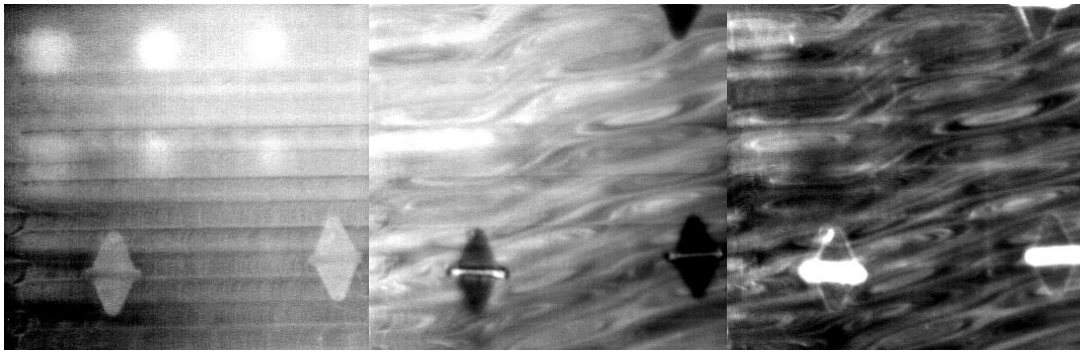


Figura 10.3: Tres primeras imágenes de PCs. Izquierda: PC1; central: PC2; derecha: PC3

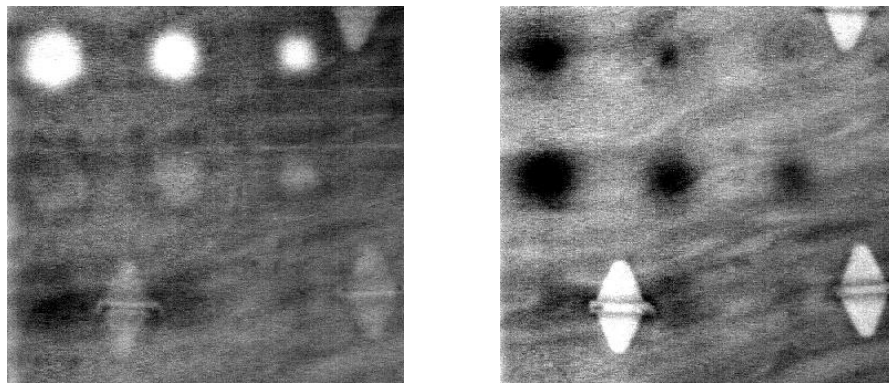


Figura 10.4: Imágenes de la cuarta y quinta componentes principales. Izquierda: PC4; derecha: PC5

Transformada de Fourier: Los resultados de SNR obtenidos con las imágenes obtenidas haciendo la transformada de Fourier (en módulo) a las secuencias temporales de cada píxel están recogidos en la tabla 10.3.

Módulo de la TF			
$SNR_{\text{máx}}$	D_1	D_2	D_3
P_1	11.6	9.3	6.5
P_2	9.1	7.5	5.1

Tabla 10.3: SNR obtenidos con el módulo de la transformada de Fourier en el estudio por cara delantera para cada uno de los puntos estudiados.

Como se ven, son un poco peores que los de las PCAS. Para P_1 , el máximo aparece en la componente DC mientras que para P_2 en la frecuencia más baja. Las imágenes son 10.5 (Izquierda) y 10.5 (Derecha), respectivamente.

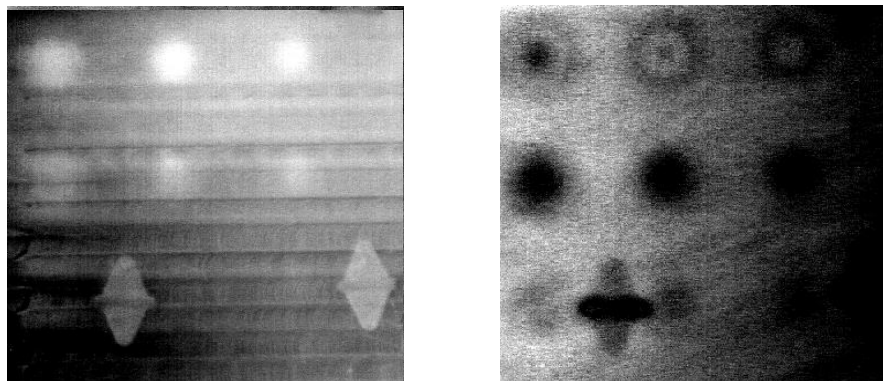


Figura 10.5: Imágenes de transformada de Fourier por cara delantera. Izquierda: Componente DC; derecha: Frecuencia más baja

Temperaturas				
$SNR_{\text{máx}}$	D_1	D_2	D_3	D_4
P_1	62.5	72.3	62.4	47.1
P_2	44.9	50.4	42.6	29.5
P_3	22.5	22.9	18.4	11.8
P_4	11.3	11.5	9.3	5.0

Tabla 10.4: SNR obtenidos con el contraste en T en el estudio por cara trasera para cada uno de los puntos estudiados.

10.3.2. Cara trasera

Contraste en T: Las gráficas que se obtienen para la SNR en función del tiempo se pueden ver en la figura 10.6.

Era de esperar que la observación por la cara trasera fuera más sensible a los defectos, puesto que la señal térmica tiene que atravesar la placa y se ve más afectada por ellos que cuando observamos por el mismo lado que hemos calentado. Sin embargo, la cuantificación del valor de SNR nos muestra lo grande que es el efecto: un factor de entre 16 y 22 para el espesor menor (P_1) y de entre 26 y 85 para el siguiente espesor (P_2); los defectos de espesor P_3 y P_4 , que antes no se detectaban, ahora se ven con claridad. Para un mismo espesor, la mejora en la SNR es más notable cuanto menor es el tamaño del defecto. Como en el análisis por la cara delantera, cuanto más grueso es el material, más tarda en alcanzarse el máximo de SNR. Estos resultados están resumidos en la tabla 10.4

Las imágenes 10.7 (izquierda) y 10.7 (derecha) muestran los SNR máximos para las profundidades P_1 y P_4 , respectivamente.

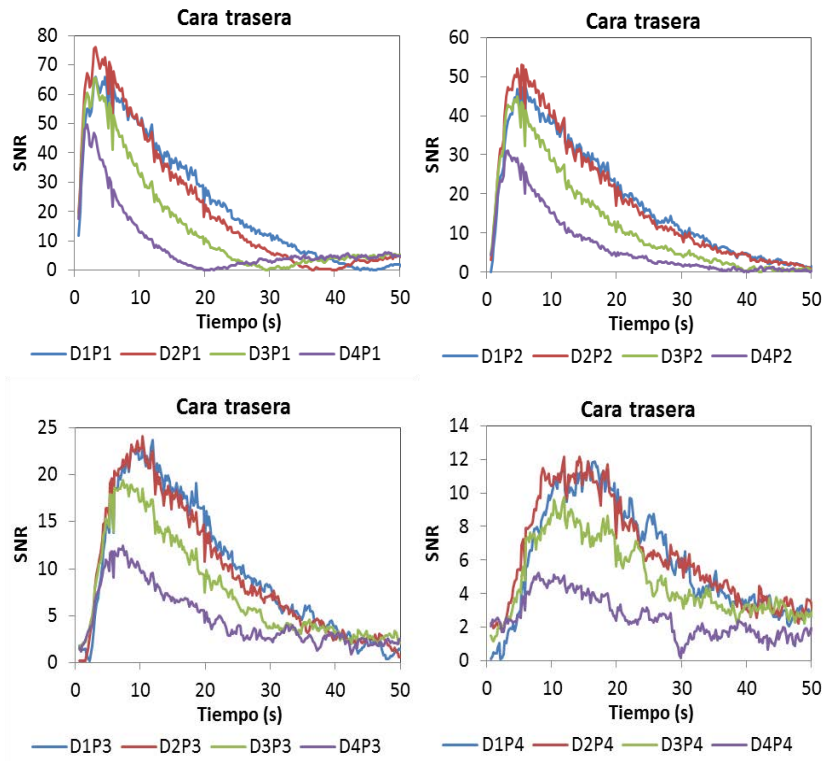


Figura 10.6: Evolución en función del tiempo del contraste de temperatura para cara trasera para las distintas profundidades.

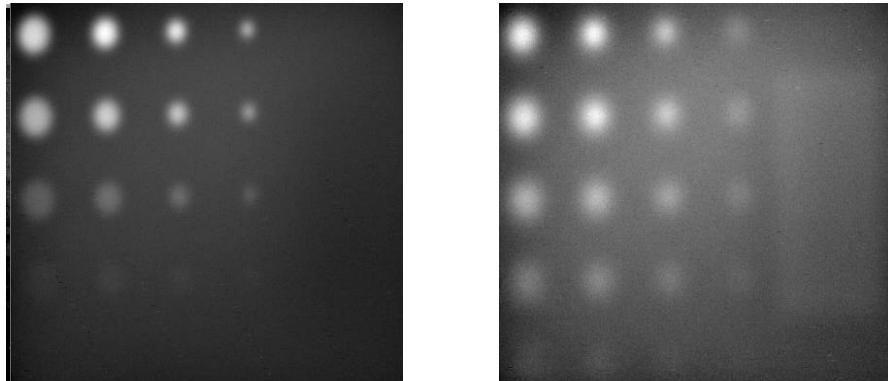


Figura 10.7: Izquierda: Imagen de SNR máximo en temperatura para la profundidad P_1 por cara trasera ($t \sim 3$ s); Derecha: Imagen de SNR máximo en temperatura para la profundidad P_4 por cara trasera ($t \sim 18$ s).

Imágenes de PCA: Los resultados obtenidos se pueden ver en la tabla 10.5 donde se aprecia que se detectan incluso los defectos de la última fila. La SNR mejora en un fac-

PCs				
$SNR_{\text{máx}}$	D_1	D_2	D_3	D_4
P_1	216.3	228.6	179.2	144.3
P_2	140.9	142.9	108.8	60.3
P_3	104.4	78.4	42.5	23.1
P_4	68.6	52.6	32.3	11.2
P_5	24.6	19.0	13.3	3.6

Tabla 10.5: SNR obtenidos con el formalismo de las componentes principales en el estudio por cara trasera para cada uno de los puntos estudiados.

tor entre ~ 2 y ~ 6 en comparación con las imágenes de temperaturas (ver figuras 10.8 (izquierda) y 10.8 (derecha)).

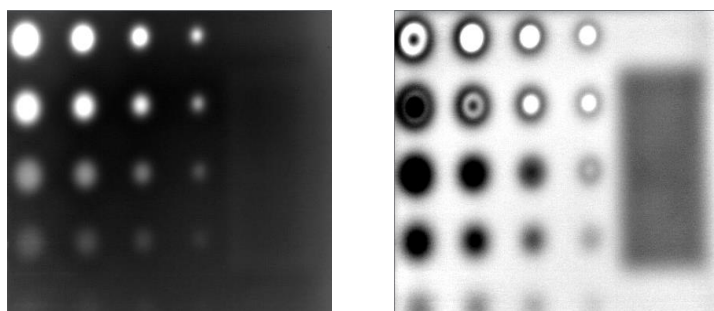


Figura 10.8: Izquierda: Imagen de PC2 por cara trasera; Derecha: Imagen de PC3 por cara trasera.

Transformada de Fourier: Los resultados de SNR obtenidos con las imágenes obtenidas haciendo la transformada de Fourier (en módulo) a las secuencias temporales de cada píxel están recogidos en la tabla 10.6.

Módulo de la TF				
$SNR_{\text{máx}}$	D_1	D_2	D_3	D_4
P_1	147.1	142.0	96.3	54.2
P_2	84.8	77.0	48.4	22.5
P_3	16.9	15.1	16.2	21.4
P_4	8.8	13.3	13.0	9.9

Tabla 10.6: SNR obtenidos con el módulo de la transformada de Fourier en el estudio por cara delantera para cada uno de los puntos estudiados.

Como se ven, los valores de SNR son bastante mayores que los del contraste de temperatura pero alcanzan valores que están típicamente sólo entre el 20 % y el 65 % de las PCAS. Las imágenes correspondientes son 10.9 (izquierda) y 10.9 (derecha) , respectivamente.

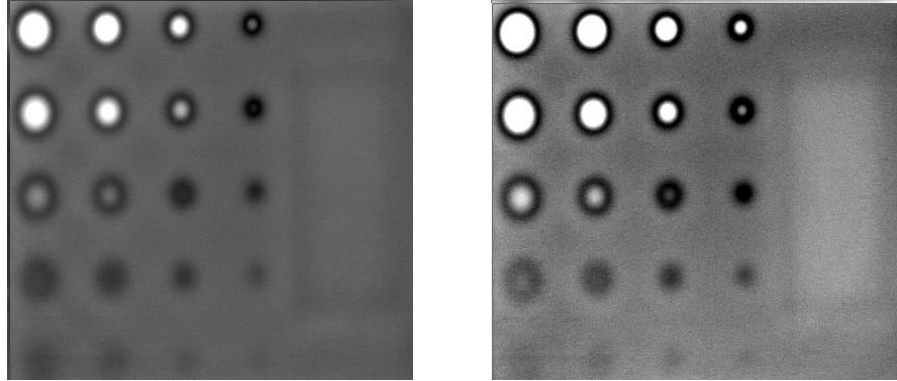


Figura 10.9: Izquierda: Imagen FFT frecuencia 2 por cara trasera; Derecha: Imagen FFT frecuencia 3 por cara trasera.

Con los resultados mostrados en esta sección, se ha demostrado que se puede detectar los defectos con una sensibilidad mucho mayor que la que proporciona el mero contraste térmico si se somete a la secuencia de imágenes a un procesamiento adecuado. El más clásico es el de la transformada de Fourier pero hemos probado que las imágenes obtenidas mediante el formalismo de las componentes principales proporcionan resultados superiores (mayor SNR, y, por tanto, mayor sensibilidad para la detección). Por último, comparando los resultados de cara delantera y cara trasera, hemos encontrado que la SNR obtenida es mucho mayor en la cara trasera que en la cara delantera para todos los casos estudiados.

10.4. PCA para caracterización térmica

El formalismo de las componentes principales será aplicado en nuestro caso como sigue. Consideremos que un conjunto de medidas han sido llevadas a cabo para diferentes condiciones térmicas en un espécimen plano sometido a un experimento flash. Las variables de medida son las temperaturas en la cara trasera en los diferentes tiempos de medida. Las condiciones térmicas vienen descritas por los diferentes valores de difusividad térmica y número de Biot. Para ser más específicos, se ha elegido variar la difusividad térmica desde 10^{-7} hasta $10 \cdot 10^{-7}$ en pasos de 10^{-8} [$m^2 s^{-1}$] y el número de Biot desde 0 hasta 0.05 en pasos de 0.005 [adimensional]. Estos valores han sido elegidos como razonables para una muestra de material compuesto reforzado de fibra de carbono de un espesor de 2.4 mm (este valor se ha mantenido fijo en todos los perfiles simulados). Para cada una de

estas condiciones, la respuesta térmica $T(t)$ en la cara trasera se ha calculado cada $0,01 s$, para una duración de $20 s$.

De este modo, se genera un datacubo de valores de temperatura simulados, cuyas dimensiones ($n_\alpha = 91, n_{Bi} = 11, n_t = 2000$) contienen la información de la respuesta térmica de la muestra para todo el intervalo abarcado por el conjunto de valores (α, Bi) . La idea es recuperar los parámetros térmicos para un experimento flash comparando los perfiles experimentales $T(t)$ con estos perfiles “pre-calculados”. La drástica reducción de dimensionalidad obtenida a partir de las componentes principales hace que esta comparación sea factible.

Para obtener las componentes principales, los datos son organizados en una matriz con $m = n_t = 2000$ filas y $n = n_\alpha \times n_{Bi} = 1001$ columnas (ver figura 10.10).

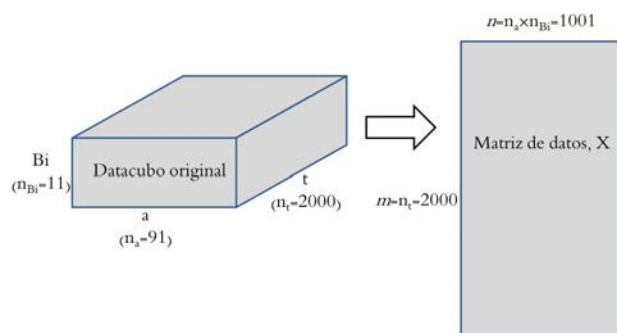


Figura 10.10: Reorganización de los datos del datacubo a un formato de matriz de datos. Los datos son las temperaturas $T(\alpha, Bi, t)$ en la cara trasera para un espécimen plano calculado con el modelo explicado en la sección [7.1].

El análisis de componentes principales ha sido implementado con la función *pca* disponible en MATLAB® [111] (cabe destacar que la entrada de la función *pca* es la traspuesta de nuestra matriz de datos X). Los primeros diez autovalores están representados en la

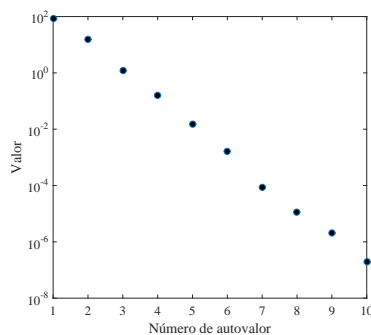


Figura 10.11: Primeros diez autovalores de la matriz de datos.

figura 10.11. Su decrecimiento es muy acusado, indicando que este conjunto de datos se va a poder ajustar muy bien con una aproximación de orden bajo de componentes principales. Más específicamente, los tres primeros autovalores dan $\approx 99,99\%$ de la varianza total. Se elegirá por eso un valor de $r = 3$, lo que significa que el número de variables que describe el perfil térmico $T(t)$ se reduce de 2000 a 3 y el número total de datos pasa de $n \times m = 1001 \cdot 2000 = 2 \cdot 10^6$ a $r(n + m) + m = 3(1001 + 2000) + 2000 = 11 \cdot 10^3$

La figura 10.12 muestra la comparación entre los perfiles originales $T(t)$ y los perfiles reconstruidos a partir de las tres primeras componentes principales para algunos valores representativos de α y Bi . De manera clara, se puede observar que la aproximación de tercer orden en componentes principales es cualitativamente muy buena en nuestro caso.

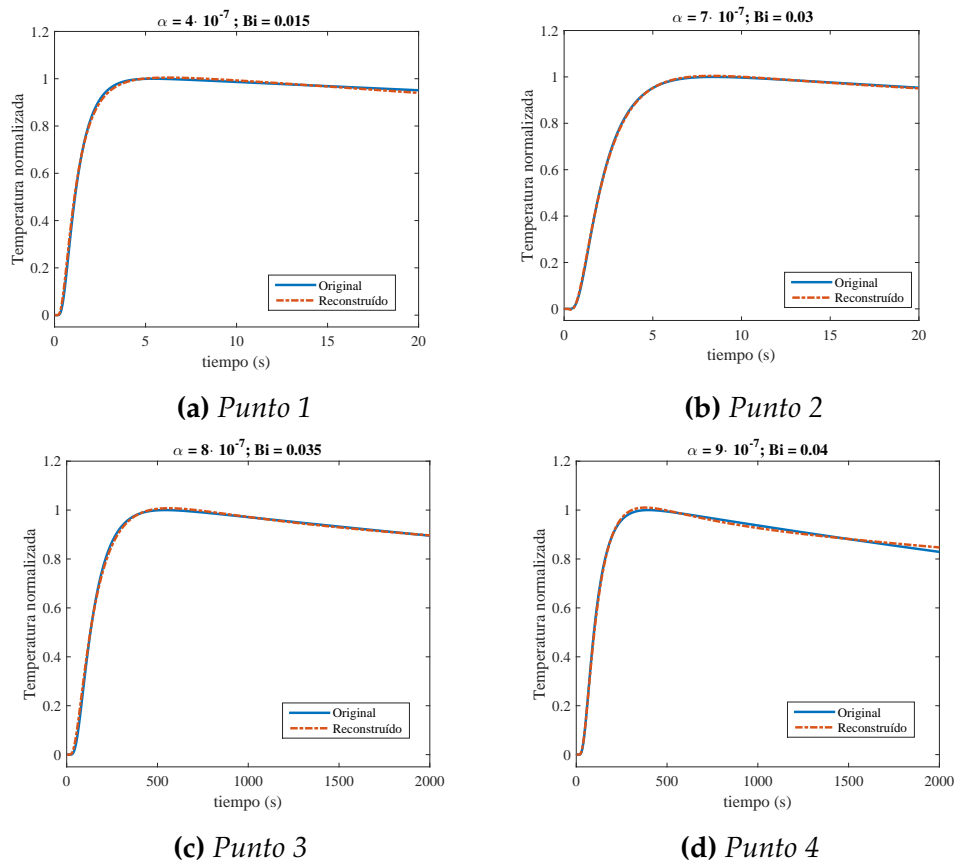


Figura 10.12: Comprobación de la aproximación a tercer orden para cuatro valores distintos de α y Bi . Los valores de α han sido dados en unidades del sistema internacional.

Un estudio más cuantitativo está representado en la figura 10.13, que muestra los valores del error cuadrático medio entre los perfiles originales normalizados entre 0 y 1 y los reconstruidos para todos los pares de valores (α, Bi) , donde el número de componentes principales incluidas en la reconstrucción va en aumento.

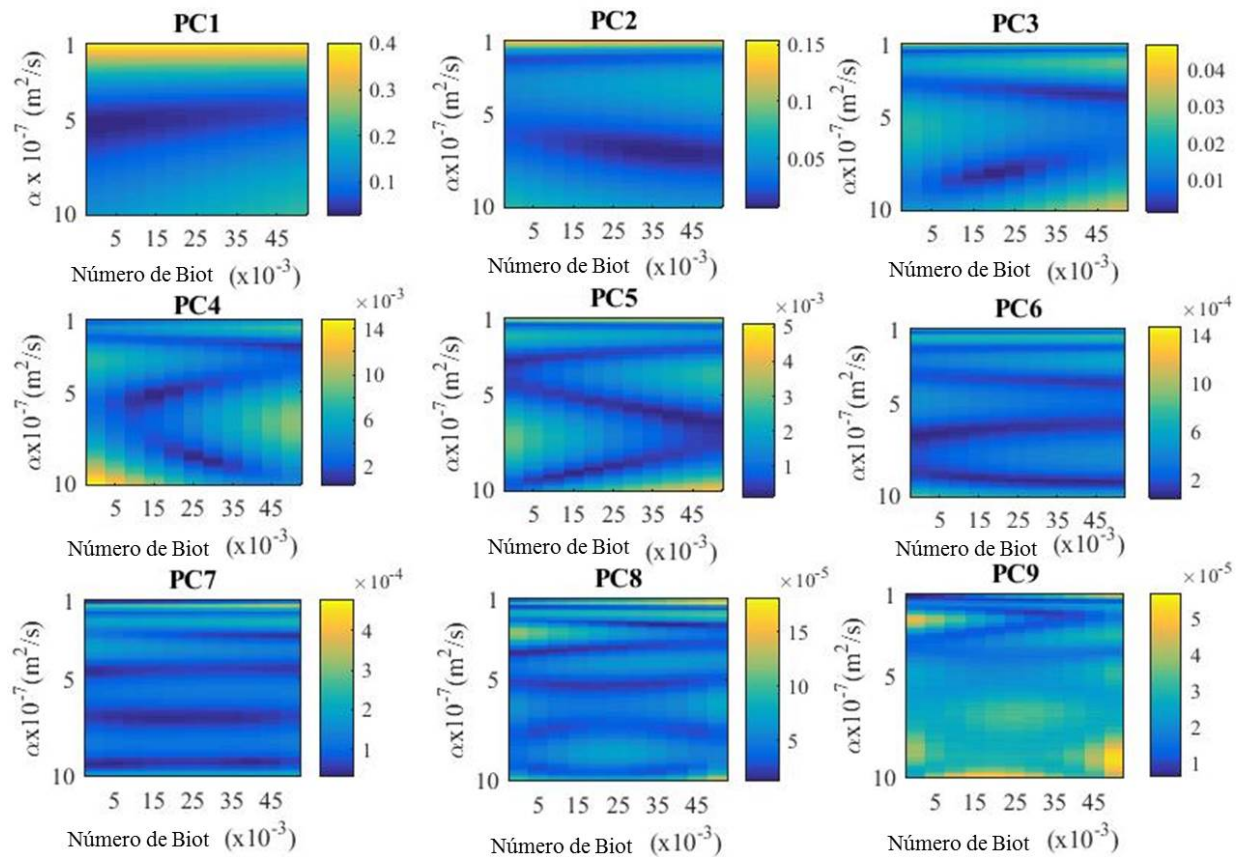


Figura 10.13: Imágenes de error versus $\alpha - Bi$ para 9 componentes principales diferentes (incrementales). Se representa el error cuadrático medio en temperatura normalizada entre el perfil original y el perfil reconstruido usando el número de componentes principales indicado.

Se ve claramente que cuanto mayor es el número de componentes principales usado, menor es la diferencia entre los perfiles originales y los reconstruidos. Con una componente principal (la primera), los errores son relativamente pequeños (menores a 0.1 en temperatura normalizada) para valores de α intermedios, pero muy grandes (cerca de 0.4) para difusividades pequeñas. La introducción de una componente principal adicional reduce en general los errores, pero sólo con 3 PCs el error para difusividad térmicas pequeñas es reducido drásticamente. La adición de más y más componentes principales reduce más y más el error, pero se ha decidido mantener el esquema lo más simple posible y elegir sólo tres componentes principales.

El proceso de ajuste cada vez mejor puede observarse en más detalle en la figura 10.14, que compara el perfil original con las reconstrucciones usando una, dos o tres componentes principales. Dos parejas de (α, Bi) están reflejados: en la primera columna valores pequeños de (α, Bi) , que, como se observa en la figura 10.13, dan errores grandes con

una y dos componentes principales; en la segunda columna, valores intermedios que da buenos resultados sólo con dos PCs.

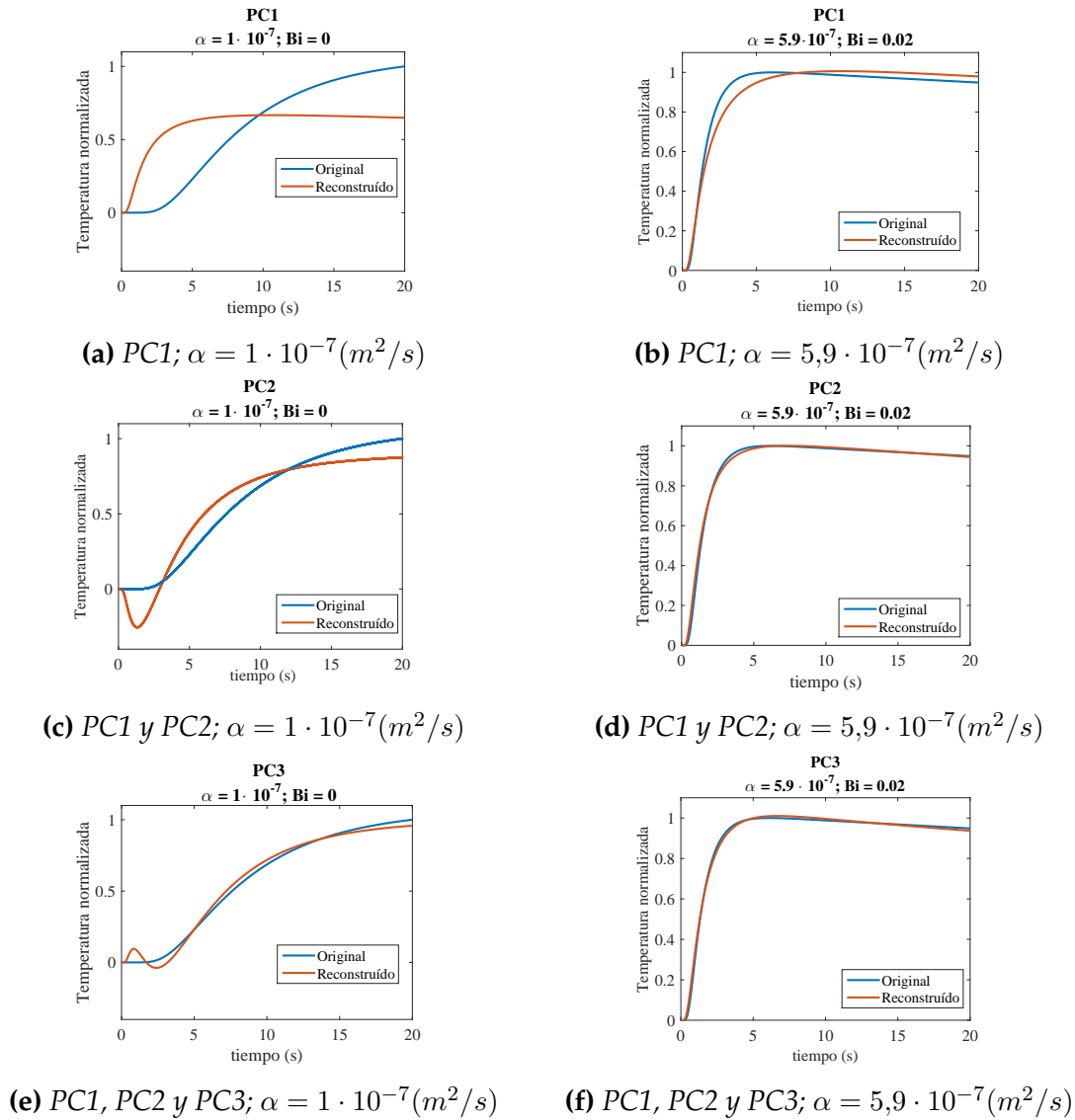


Figura 10.14: Ejemplo de ajuste hasta 3 PCs para dos pares de valores $\alpha - Bi$

Ya que los perfiles $T(t)$ aproximados están codificados por sólo tres valores de componentes principales, en lugar de los 2000 valores de temperatura originales, α y Bi para un perfil experimental específico pueden ser fácilmente recuperados proyectándolo en las tres primeras componentes principales del datacubo pre-calculado, y, después asignándole el valor de la pareja (α, Bi) del datacubo cuyas tres primeras componentes principales sean más similares. Para este proceso no es necesario ningún tipo de iteración por lo que el tiempo de computación necesario se reduce drásticamente: la recuperación de α y Bi para una imagen completa (como la que veremos en la sección [10.5]) requiere menos de

10 segundos en un ordenador portátil usando las componentes principales como se ha propuesto, mientras que un ajuste iterativo requiere más de 200 horas.

Esta reducción de tiempo en cálculo en varios órdenes de magnitud permite que aplicar el ajuste simultáneo de α y Bi a toda la imagen de una muestra sea un procedimiento viable en la práctica e incluso sencillo (una vez que se ha realizado el trabajo previo de calcular el cubo de datos con los perfiles teóricos de α y Bi).

10.5. Resultados experimentales

10.5.1. Muestra homogénea

La verificación experimental se llevó a cabo en una muestra de composite con fibra de carbono y resina epoxy cuyas dimensiones eran $300 \times 300 \times 2,4 \text{ mm}^3$. El montaje experimental fue el típico usado para el método flash [138]. La muestra fue inspeccionada usando una lámpara flash convencional para termografía, que podía suministrar hasta 6 kJ de energía mediante una unidad de condensadores. Se usó una cámara con un detector infrarrojo de InSb de Thermosensorik GmbH con una lente de 50 mm. Se adquirieron 2000 imágenes a una frecuencia de 100Hz (un tiempo total de observación de 20 segundos).

La muestra se supone homogénea y se ha intentado que la excitación sea lo más uniforme posible. Algunos perfiles experimentales se muestran en la figura 10.15.

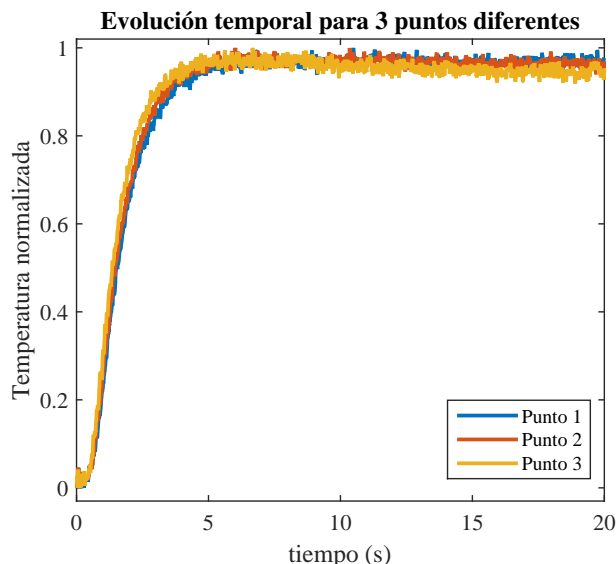


Figura 10.15: Evolución de la temperatura experimental para tres puntos diferentes. Pese a que se ha normalizado a 1, siempre queda por debajo de este valor, ya que se ha normalizado al máximo conteniendo el ruido.

El método que acabamos de exponer nos va a permitir obtener un mapa de $(\alpha - Bi)$ para toda la muestra. Es decir, vamos a pasar de caracterizar la muestra puntualmente a hacerlo bidimensionalmente. Los resultados obtenidos son similares a los del capítulo [8], es decir se tienen valores en torno a $6 \cdot 10^{-7} m^2/s$ para la difusividad térmica de la muestra tal como se puede ver en la figura 10.16.

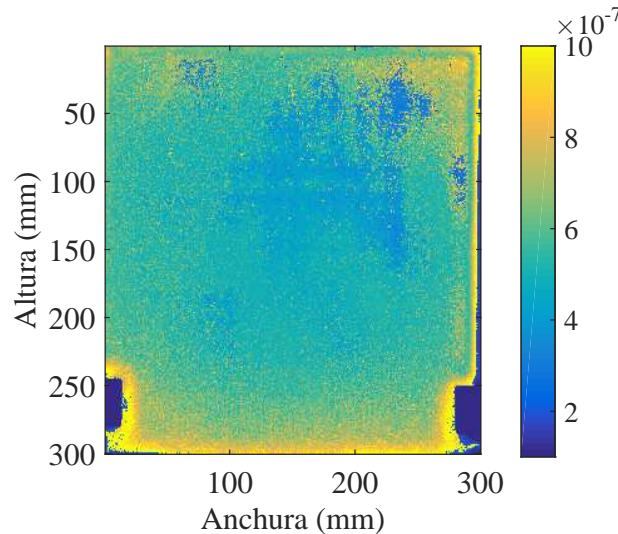


Figura 10.16: Imagen de difusividad térmica (en m^2/s) obtenida proyectando 3 PCs. Los recuadros azules oscuros que se ven a ambos lados inferiores de la imagen corresponden con los soportes utilizados para la sujeción de la muestra durante la realización de los experimentos.

Se aprecia una tendencia a recuperar valores más altos de la difusividad en la periferia de la muestra, debido probablemente a los efectos de borde (no tenidos en cuenta en un modelo 1D) o a la falta de uniformidad de la muestra (a simple vista se aprecia algo más fina por los bordes). Por otra parte, aunque la muestra es nominalmente homogénea, hay variaciones apreciables de α y/o espesor en distintas regiones.

Los buenos resultados obtenidos nos llevan a plantearnos llevar a cabo un estudio cuantitativo de los defectos: tener el mapa de α permite no solo encontrarlos, sino medir su α efectivo que estará directamente relacionado con sus propiedades físicas.

10.5.2. Muestra con inclusiones

Para mostrar la potencia de esta técnica, hemos aplicado este método a una probeta con inclusiones, supuestas todas del mismo espesor y misma naturaleza, pero que se encuentran a diferentes profundidades. El resultado se muestra en la figura 10.17.

Como ya se ha anticipado, el valor del parámetro térmico obtenido (en este caso, la difusividad térmica) estará asociado a la naturaleza del material, y por tanto, a las características del defecto, ya sea su profundidad o bien el tipo de material (es decir, si la

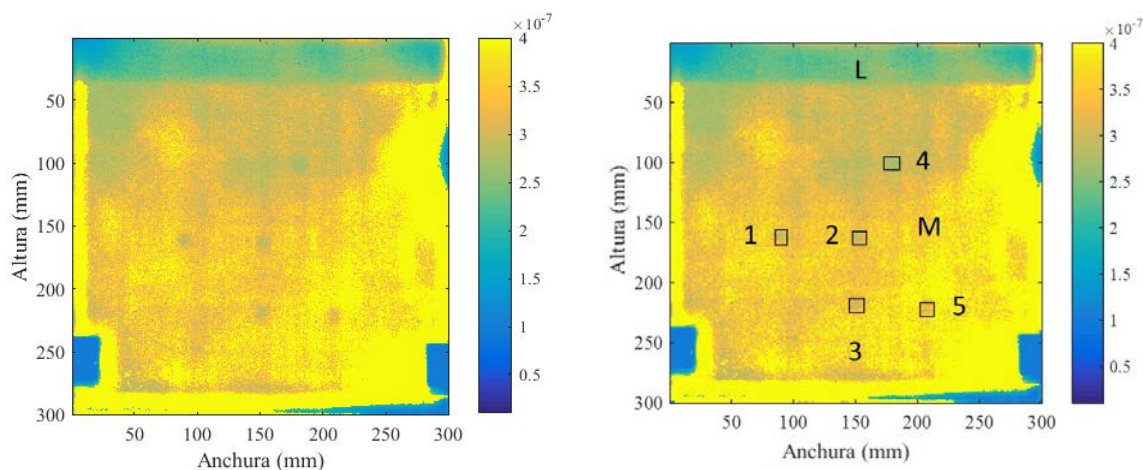


Figura 10.17: Izquierda: imagen de difusividad térmica de una probeta con inclusiones ocultas. Derecha: localización de los puntos escogidos para el análisis cuantitativo en la probeta con inclusiones experimental. La escala muestra el valor de la difusividad térmica en m^2/s .

inclusión es más o menos aislante que el material de la matriz principal). Esta probeta ha sido analizada mediante ultrasonidos, técnica mediante la cual se ha obtenido la profundidad del defecto, que se presenta junto a los valores de difusividad térmica obtenidos mediante la técnica de recuperación por componentes principales.

Los puntos a los que se hace referencia, en la tabla 10.7, , están marcados en la figura 10.17 (derecha).

Punto	Profundidad/ Espesor (mm)	$\alpha(m^2/s)$
M	2.4	$3,5 \cdot 10^{-7}$
1	1.4	$2,9 \cdot 10^{-7}$
2	1.6	$3,0 \cdot 10^{-7}$
3	1.2	$3,0 \cdot 10^{-7}$
4	1.1	$2,8 \cdot 10^{-7}$
5	1.8	$3,3 \cdot 10^{-7}$
L	1.1	$2,5 \cdot 10^{-7}$

Tabla 10.7: Valores de difusividad térmica junto a los valores de profundidad (referidas a la cara delantera o cara de excitación) obtenidos mediante técnicas de ultrasonidos. Para las zonas M y L se considerará espesor en lugar de profundidad. La zona M es la matriz y la zona L es una gran inclusión, más gruesa que las demás, recubierta de una fina capa de resina, cuyo espesor total es de 1.1 mm.

En la figura 10.18 se han representado los valores de difusividad térmica frente a la profundidad en todos los puntos analizados para la probeta con inclusiones experimen-

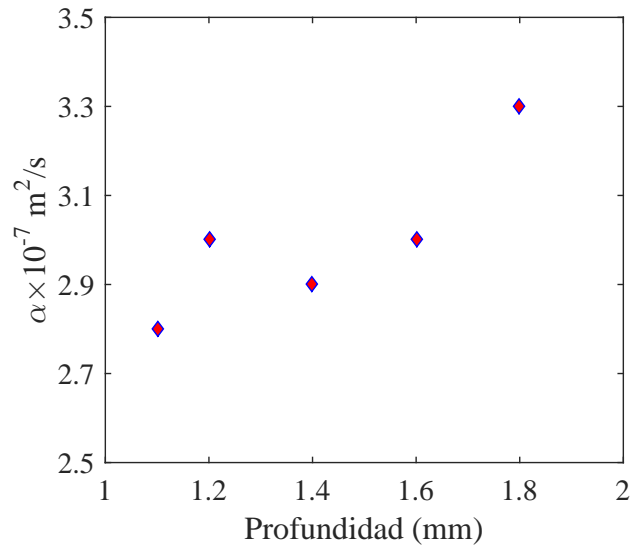


Figura 10.18: Difusividad térmica frente a profundidad (en mm) obtenidos del análisis de la probeta con inclusiones experimental. En esta gráfica no se han incluido los valores relativos a los puntos M y L por no considerarlos inclusiones propiamente dichas.

tal. Recordemos que los valores de α posibles son discretos y vienen dados por aquellos introducidos en el datacubo pre-calculado que varían en saltos de $10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$. Se aprecia cómo la difusividad térmica es mayor para zonas sin defecto (zona M) y aumenta en líneas generales con la profundidad del defecto. Salvo por un punto anómalo en la figura 10.18 se ve que hay una relación entre la difusividad térmica eficaz que medimos y la profundidad del defecto, y que eso permitiría usar nuestro método para dar una información cuantitativa sobre profundidad, bien usando una muestra patrón de calibración (como se hace en ultrasonidos) o bien haciendo un modelo más complejo que permita predecir el valor de la difusividad térmica eficaz en función de la profundidad, el tamaño y la difusividad térmica real del defecto (tendría que ser como mínimo un modelo 1D en el que se consideraran tres capas, pero quizá habría que tener en cuenta los efectos 3D. No lo hemos abordado debido a esta complejidad, pero sería una posible línea de trabajo futuro).

Clasificación de defectos. A pesar de que las inclusiones se aprecian claramente en la imagen 10.17, el fondo sin defecto tiene variaciones del α aparente, debido probablemente a que el espesor de la placa no es del todo uniforme. Una posible manera de evitar este efecto es compara los valores de α recuperados con el método de Parker y los recuperados mediante el método descrito en este capítulo, pues previsiblemente, el efecto de las variaciones será similar en ambos.

La figura 10.19a muestra el dispersograma (o *Scatterplot*) en el que cada punto corres-

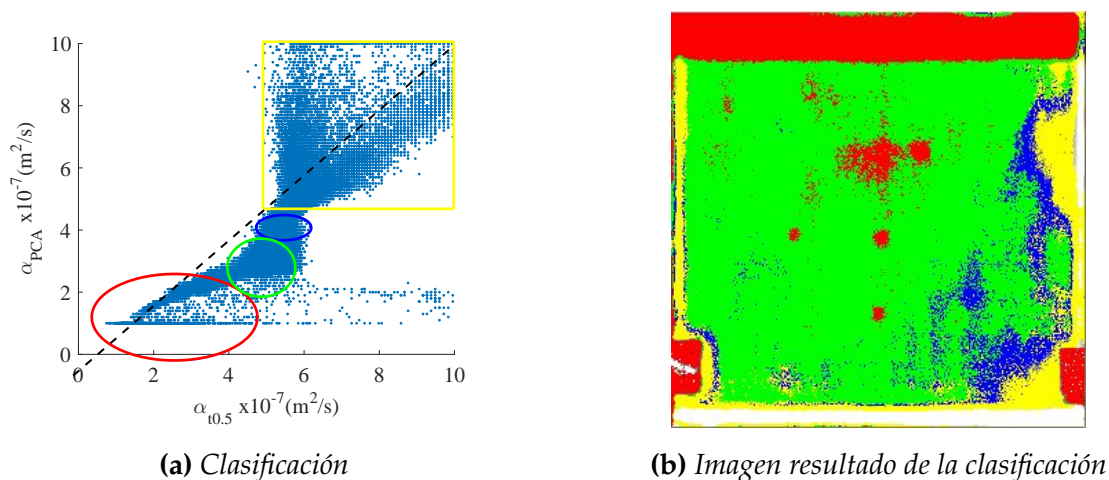


Figura 10.19: Detección de defectos en la probeta con inclusiones con dos diferentes clasificaciones.

ponde a un píxel, cuya posición (x, y) viene dada por los respectivos valores de α con uno y otro método. Como ya sabíamos, el método de Parker sobreestima las difusividades, y por eso la mayor parte de los puntos quedan por debajo de la diagonal. Marcando en diferentes colores las regiones señaladas en 10.19a, encontramos que en la figura 10.19b quedan claramente clasificados los defectos (en rojo), las zonas en las que son importantes los efectos de borde (en amarillo) y la parte principal de la placa sin defectos (en verde y azul).

10.5.3. Muestra sometida a fuego

El principal interés práctico del método expuesto es que permite obtener de manera rápida mapas de difusividades en una muestra plana. Además de la detección cuantitativa de defectos, que hemos visto en el ejemplo del apartado anterior, esto tiene una aplicación inmediata al estudio del dañado en muestras que se han visto sometidas a procesos que las degradan mecánica o composicionalmente. Un ejemplo importante son las muestras que se someten a la acción de una llama en ensayos de resistencia al fuego. En este apartado hemos aplicado nuestra metodología a una probeta de material compuesto reforzada con resina epoxy que ha sido sometida a fuego durante 10 minutos [161].

El resultado de imagen de difusividad térmica obtenido con el método de componentes principales se presenta en la figura 10.20.

Se puede observar, que la zona central de la muestra que ha sido impactada directamente por la llama, ha sufrido una degradación mayor, que correspondería a valores de α un orden de magnitud menores que la muestra sin degradar, es decir $\alpha \sim 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$.

En la periferia, sin embargo, se alcanzan valores del orden de $4 - 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, es decir, similares a los valores de α obtenidos para la muestra sin degradar, por lo que se puede

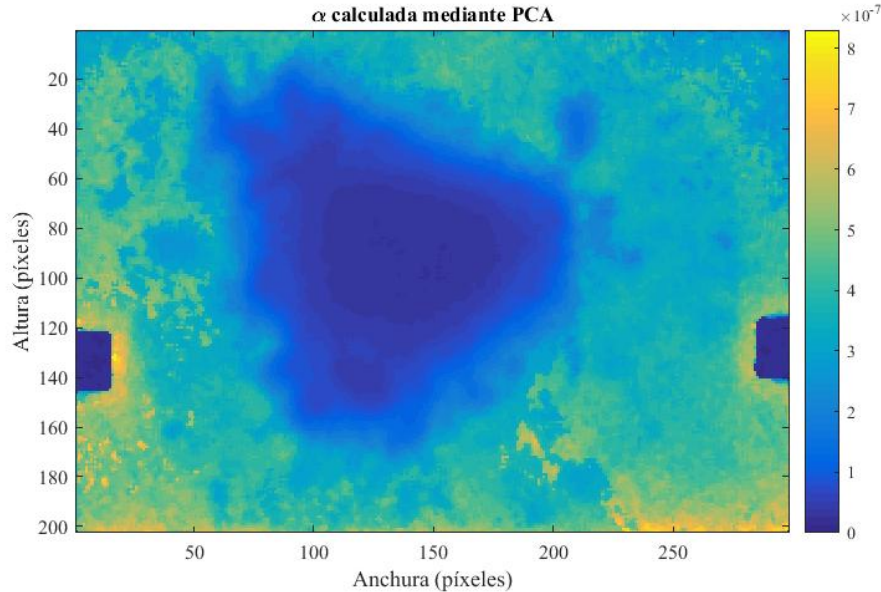


Figura 10.20: Imagen de difusividad térmica obtenida mediante el método de las componentes principales para una muestra de material compuesto sometida a fuego durante 10 minutos.

concluir que en esas áreas la muestra ha sufrido poca o ninguna degradación.

En conclusión, el método presentado permite disponer en pocos segundos de análisis de una imagen de difusividad térmica con la que se puede caracterizar el daño o degradación que ha sufrido la muestra, tanto de manera cualitativa como de manera cuantitativa, lo cual resulta de gran utilidad para entender cómo se ha degradado la muestra y si está puede seguir o no en servicio.

10.6. Conclusiones

Comenzamos estudiando el *uso del análisis por componentes principales para la detección de defectos* (sección [10.3]). Se ha demostrado, comparando tres diferentes técnicas de tratamiento de imagen (sección [10.3]): contraste en temperatura, en PCAs y FFT, que las componentes principales proporcionan la mejor relación señal a ruido. Asimismo, se ha estudiado este tratamiento por cara delantera y por cara trasera, llegando a la conclusión que los resultados obtenidos por cara trasera permiten detectar defectos más pequeños y a mayor profundidad (tabla 10.2 frente a tabla 10.5).

La aplicación que nos proponemos aquí va más allá de la mera detección de defectos: buscamos la caracterización térmica de manera cuantitativa que permita *obtener parámetros los térmicos para cada punto de la muestra*, usando las diferencias entre estos parámetros para

caracterizar los defectos. Para poder aplicar este formalismo a la caracterización térmica, fue necesario generar una matriz con perfiles de temperatura $T(t)$ precalculados para un conjunto de pares de valores $\alpha - Bi$, sobre cuyos autovectores se proyectarán los perfiles experimentales para obtener las componentes principales.

Se encontró que podían reproducirse los perfiles de temperatura con sólo tres componentes principales (ver figura 10.12), reduciendo el número de variables de manera drástica, lo que se traduce en la capacidad de obtener mapas bidimensionales de parámetros térmicos en unos pocos segundos, cuando, de otra manera y por métodos de ajuste iterativos podía llegar a tardarse del orden de cientos de horas.

La verificación experimental se llevó a cabo en dos muestras distintas. La primera de ellas, una muestra de CFRP considerada homogénea, reveló mediante mapa de difusividades térmicas que pese a tener un valor de α medio del orden de los obtenidos en el capítulo [8], éramos capaces de distinguir inhomogeneidades, tal como se mostró en la figura 10.16, en tiempos de pocos segundos.

La segunda probeta experimental que se analizó fue igualmente una muestra de CFRP, pero que tenía inclusiones de un material diferente a distintas profundidades. El análisis mediante PCAs, no sólo mostró la localización y tamaño de estos defectos (figura 10.17), sino que con el valor añadido de proporcionar un valor cuantitativo de α , se vio que, salvo en uno de los puntos analizados, había una relación entre la profundidad del defecto y el valor de difusividad térmica recuperado (figura 10.18). Si bien esta relación no ha podido ser validada, queda como un trabajo futuro que puede resolverse bien mediante patrones calibrados, bien mediante modelos 3D más sofisticados.

Ajuste multivariable

RESUMEN: El análisis por componentes principales ha demostrado ser un método efectivo para la reducción de datos y proporcionar valores aproximados de los parámetros térmicos α y Bi . Pero, al necesitar de una matriz de valores pre-calculados, hace que los únicos valores que puedan recuperarse sean los que están dentro de esa matriz. Por ello, se propone, a partir de las componentes principales, obtener una función que proporcione valores continuos de los parámetros térmicos mediante un ajuste polinómico.

11.1. Casos de estudio

En el capítulo [10] se ha mostrado la gran capacidad de las componentes principales para obtener los parámetros térmicos (α y Bi) con una reducción de tiempo importante. Aunque esto supone un gran avance, el tener que disponer de una matriz pre-calculada de valores discretos hace que, por un lado, sólo se puedan estimar parámetros térmicos incluidos dentro de ese intervalo de valores previamente calculados y, por otro lado, que los valores obtenidos tengan como precisión máxima el valor del paso con el que se ha calculado la matriz para cada uno de los parámetros térmicos. Hasta ahora, tenemos que encontrar α y Bi buscando cuáles son los valores de nuestra matriz precalculada que dan unas componentes principales PC1, PC2 y PC3 más parecidas a las experimentales; esto es un método indirecto que sólo es rápido gracias a que tres componentes principales es un número pequeño y programas como Matlab son capaces de hacer un cálculo rápido, pero en definitiva lo que tenemos es una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$(\alpha, Bi) \xrightarrow{f} (PC1, PC2, PC3)$$

y buscamos la inversa por tanteo. Aquí nos proponemos encontrar la inversa (o al menos una aproximación a ella) de modo explícito; es decir, buscamos una función $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$(PC1, PC2, PC3) \xrightarrow{f^{-1}} (\alpha, Bi)$$

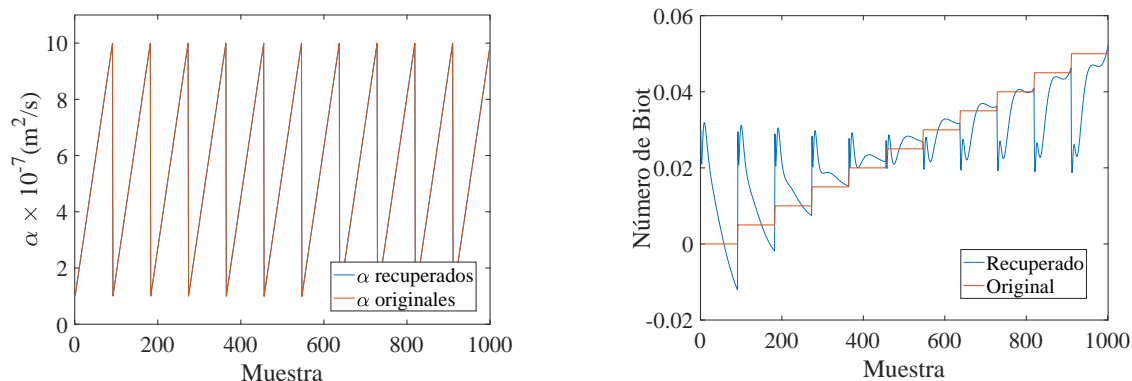
Aunque existen diferentes métodos para hacer esto como pueden ser la SVD o el uso de redes neuronales [154], se ha demostrado que un ajuste polinómico funciona mejor pese a ser más simple conceptualmente [26]. Por este motivo surge la necesidad de un “ajuste multivariable”, es decir, buscar una función explícita de unas pocas componentes principales que nos proporcione los parámetros buscados. Más concretamente, después de haber demostrado que con únicamente las tres primeras componentes principales se puede obtener una precisa reconstrucción de los perfiles, se va a trabajar con estas como variables independientes. Buscaremos dos funciones independientes, una para Bi y otra para α , ambas en la forma de polinomios de grado n en las variables $PC1$, $PC2$ y $PC3$

Para llevar a cabo este ajuste se ha hecho uso del paquete de funciones de Matlab relacionadas con el ajuste multivariable llamado *polyfitn*. Este conjunto de funciones se basa en resolver un sistema del tipo $Ax = b$ mediante una descomposición ortogonal triangular. Lo que nos proporcionan son los coeficientes de las funciones multidimensionales de orden n que han sido propuestas para ser usadas en el ajuste además de otros parámetros que nos muestran la bondad del ajuste como es el parámetro R^2 , que puede ser tomado con el sentido que se hace en el caso de una regresión lineal. En resumen, dado un perfil $T(t)$, el procedimiento para obtener (α, Bi) consistirá, en primer lugar, en obtener sus tres primeras componentes principales (proyectando sobre los tres primeros autovectores de la matriz de datos, tal como explicó en la sección [10.4]). Tenemos entonces el perfil térmico “codificado” por tres números, $PC1$, $PC2$ y $PC3$. Obtendremos α y Bi sustituyendo esos valores en las respectivas funciones polinómicas.

11.1.1. Ajuste multivariable con dos componentes principales

Hemos demostrado en el capítulo [10] la necesidad de incluir la tercera componente principal para reproducir correctamente la evolución de la temperatura a lo largo del tiempo, sobre todo para valores pequeños de α . Vamos a ver a continuación que la necesidad de incluir a $PC3$ aparece al intentar recuperar el número de Biot y que en cambio, sí serían suficientes dos componentes principales para recuperar correctamente los valores de difusividad térmica. Los resultados obtenidos mediante un ajuste polinómico que usa sólo dos componentes principales se muestran en las figuras 11.1a y 11.1b superpuestos a los valores reales.

Se observa que α se recupera con una precisión excelente a pesar de la sencillez del ajuste y de usar sólo 2 PCs. Sin embargo, para la recuperación del número de Biot, se aprecia claramente que un polinomio de orden 3 no es suficiente. Si probamos con un polinomio de grado 4, el resultado es casi idéntico al de grado 3, por lo que no se observa una mejoría. Concluimos que al codificar el perfil temporal con sólo dos componentes principales se pierde información necesaria para recuperar Bi , por lo que habrá que introducir



(a) Recuperación de los valores de difusividad térmica

(b) Recuperación de los valores de número de Biot

Figura 11.1: Recuperación de los parámetros térmicos α y Bi a partir de PC1 y PC2 como variables independientes, con un polinomio de grado 3. La variable “muestra” se refiere a la pareja (α, Bi) : un total de 1001 valores (91 para α y 11 para Bi). Las muestras 1 a 91 corresponden a todos los valores de α para el primer valor de Bi ; las 92 a 182 al segundo valor de Bi , etc.

una tercera componente principal.

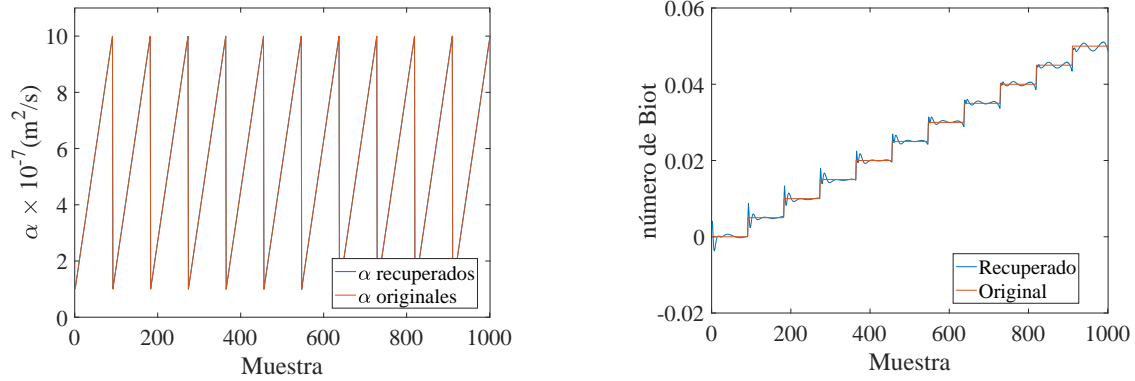
11.1.2. Ajuste multivariable con tres componentes principales

A la vista de los resultados anteriores, se ha realizado el mismo estudio para obtener dos funciones polinómicas que nos proporcionen la difusividad térmica y el número de Biot usando como variables independientes las tres primeras componentes principales.

Gráficamente, los resultados de la recuperación de los datos para α y Bi están representados en las figuras 11.2a y 11.2b.

De nuevo, α se recupera muy bien, pero el número de Biot tiene grandes diferencias. Probemos a ajustar a un polinomio de orden mayor, en este caso, de orden 4. El resultado, mucho mejor, se puede ver en la figura 11.3.

Lo interesante de este método es que no sólo acelera la recuperación de los valores de α y Bi , al sustituir un proceso de búsqueda iterativa por una función explícita, sino que proporciona la capacidad de obtener valores continuos. Es decir, ya no nos limitamos únicamente a los valores discretos de α y Bi de la matriz pre-calculada, sino que la función polinómica da resultados que interpolan entre esos valores, proporcionando una mejor resolución. No sólo eso, sino que también tiene capacidad de extrapolación, aunque como siempre ocurre en estos casos hay que tener cierta prudencia ante los resultados proporcionados por la función para valores de $(\alpha - Bi)$ fuera de los usados para construirla. Se han comprobado varios pares, alternando difusividad térmica fuera de rango con Biot



(a) Recuperación de los valores de difusividad térmica

(b) Recuperación de los valores de número de Biot

Figura 11.2: Recuperación de los parámetros térmicos α y Bi a partir de PC1, PC2 y PC3 como variables independientes, con un polinomio de grado 3.

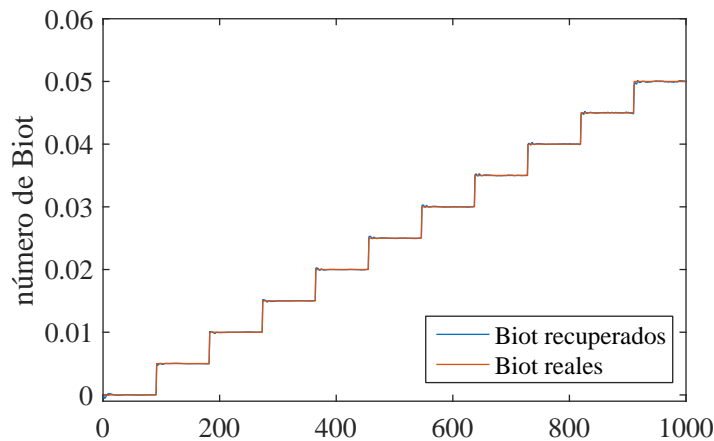


Figura 11.3: Recuperación de los valores de número de Biot a partir de PC1, PC2 y PC3 como variables independientes a partir de un ajuste a un polinomio de grado 4.

fuera de rango y los resultados obtenidos con respecto a los originales se presentan en la tabla 11.1.

Como se podía observar en la figura 11.2b, y como se aprecia en la tabla 11.1, el ajuste para la recuperación de Biot a un polinomio de orden 3 produce errores muy grandes para valores fuera del rango para el que se ha calculado el ajuste polinómico (recordemos que α variaba entre 10^{-7} y $10 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2$, en pasos de 10^{-8} m/s^2 y Bi variaba entre 0 y 0,05 en pasos de 0,005). Si probamos con los mismos valores, pero recuperando los datos con un polinomio de orden 4, los resultados obtenidos son los que se aprecian en la tabla 11.2 y en la figura 11.3.

α -Bi originales	α recuperado	Diferencia (%)	Bi recuperado	Diferencia (%)
$9,00 \cdot 10^{-8} - 0.010$	$9,51 \cdot 10^{-8}$	5.67	-0.003	130.00
$9,00 \cdot 10^{-8} - 0.060$	$8,87 \cdot 10^{-8}$	-1.44	0.038	36.83
$1,10 \cdot 10^{-6} - 0.010$	$1,09 \cdot 10^{-6}$	-0.91	0.097	3.00
$1,10 \cdot 10^{-6} - 0.060$	$1,11 \cdot 10^{-6}$	0.91	0.051	14.67
$5,00 \cdot 10^{-7} - 0.010$	$5,01 \cdot 10^{-7}$	0.20	0.010	0.00
$5,00 \cdot 10^{-7} - 0.060$	$5,01 \cdot 10^{-7}$	0.20	0.058	3.33

Tabla 11.1: Recuperación de datos de difusividad térmica y número de Biot con ajuste a polinomios de orden 3 usando como variables las tres primeras componentes principales.

α -Bi originales	Bi recuperado	Diferencia (%)
$9,00 \cdot 10^{-8} - 0.010$	0.0097	-3.00
$9,00 \cdot 10^{-8} - 0.060$	0.0573	-4.50
$1,10 \cdot 10^{-6} - 0.010$	0.0102	2.00
$1,10 \cdot 10^{-6} - 0.060$	0.05599	-0.17
$5,00 \cdot 10^{-7} - 0.010$	0.0101	1.00
$5,00 \cdot 10^{-7} - 0.060$	0.0600	0.00

Tabla 11.2: Recuperación de datos de número de Biot con ajuste a polinomio de orden 4 usando como variables las tres primeras componentes principales. Los valores de α recuperados y las diferencias en % son los mismos que los de la tabla 11.1

11.1.3. Aplicación del ajuste multivariable

Como se vio en la figura 10.18 del apartado [10.5.2] del capítulo [10], parece existir una relación entre la difusividad térmica efectiva y la profundidad a la que se encuentra el defecto. Recordemos, que en caso del análisis por componentes principales, los posibles valores recuperados eran aquellos que estaban contenidos en la matriz pre-calculada, lo que podía llevar a tener errores mayores a los esperables para una buena identificación de los parámetros, como se puede apreciar en la gráfica 10.18. Por ello, vamos a estudiar esta misma probeta desde el punto de vista del ajuste multivariable. Los resultados obtenidos para el valor de difusividad térmica con este método se presentan en la tabla 11.3 junto a los valores ya presentados en el capítulo anterior en la tabla 10.7. Para una mejor comparación, se presentan superpuestos ambos resultados obviando los valores correspondiente al espesor completo ($L = 2,4 \text{ mm}$) así como los valores correspondientes a lo que en el ca-

pítulo anterior denominábamos zona L (primera fila de $L = 1,1 \text{ mm}$). Esta superposición puede verse en la figura 11.4. A pesar de que seguimos teniendo un punto con un comportamiento un tanto anómalo, la caracterización llevada a cabo con el método del ajuste multivariable, nos proporciona valores que siguen una tendencia más suave (ya que hemos pasado de disponer únicamente de valores discretos de la matriz pre-calculada del capítulo anterior a valores continuos).

Profundidad (mm)	$\alpha_{\text{PCA}} \times 10^{-7} (\text{m}^2/\text{s})$	$\alpha_{\text{multivariable}} \times 10^{-7} (\text{m}^2/\text{s})$
1.1	2.5	2.83
1.1	2.8	2.84
1.2	3.0	2.93
1.4	2.9	2.95
1.6	3.0	3.17
1.8	3.3	3.34
2.4	3.5	3.65

Tabla 11.3: Recuperación de datos de difusividad térmica con dos métodos distintos: PCA y multivariable para la probeta de inclusiones experimental.

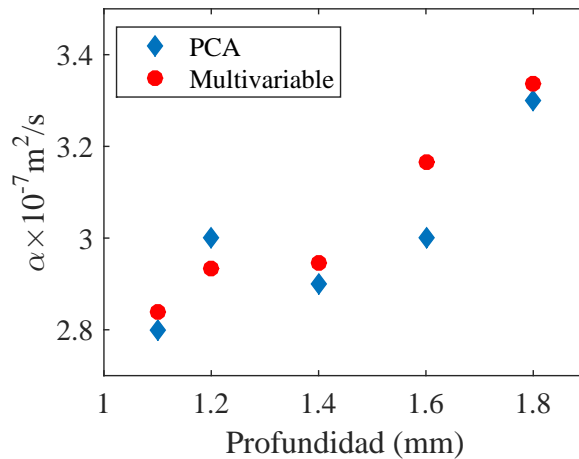


Figura 11.4: Difusividad térmica frente a profundidad resultado de cada uno de los métodos estudiados para la probeta de inclusiones experimental.

La figura 11.4, muestra que el ajuste multivariable es prometedor. Sin embargo, para poder obtener la profundidad del defecto tendríamos que saber el valor de la difusividad

térmica α de las inclusiones o viceversa. Con esta idea, se propone, de manera cualitativa, hacer uso de la simulación 3D en elementos finitos del programa COMSOL Multiphysics.

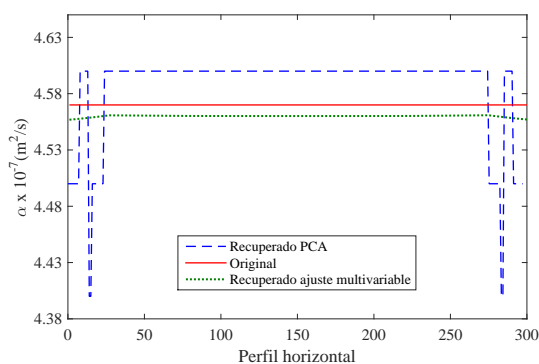
11.2. Validación con un modelo 3D

Para comprobar la validez de la recuperación de los parámetros térmicos con la metodología desarrollada y explicada anteriormente, múltiples simulaciones 3D del comportamiento térmico de placas planas, homogéneas y con defectos, han sido llevadas a cabo con COMSOL Multiphysics [126], un software comercial basado en elementos finitos. Tanto la geometría como los parámetros térmicos de las muestras simuladas se han elegido de las mismas dimensiones que aquellas que han sido analizadas experimentalmente en la sección [10.5]; es decir, tamaño = $300 \times 300 \times 2,4 \text{ mm}^3$, $\alpha = 4,57 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ y $Bi = 0,032$; el tiempo de las simulaciones (duración total y paso) fue, también, el mismo que en los experimentos.

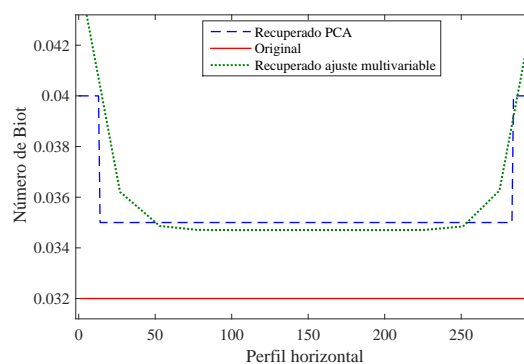
Los tres casos que se van a desarrollar a continuación resumen la problemática de la tridimensionalidad: excitación uniforme, excitación gaussiana y probeta con inclusiones.

11.2.1. Material homogéneo 3D

Excitación flash uniforme En esta simulación, la muestra era homogénea y excitada con un pulso flash homogéneo en toda la cara delantera.



(a) Valores de difusividad térmica



(b) Valores de número de Biot

Figura 11.5: Izquierda: Recuperación de los valores de la difusividad térmica en el caso de un material 3D homogéneo con excitación uniforme. Derecha: Recuperación de los valores de número de Biot. Rojo: original. Azul: valores recuperados mediante el método de las componentes principales. Verde: valores recuperados mediante el método del ajuste multivariable. En ambas figuras el eje horizontal está en mm.

Los resultados recuperados para el número de Biot y la difusividad térmica se muestran en la figura 11.5. A la vista de los resultados obtenidos se puede afirmar que los va-

lores recuperados a partir del ajuste multivariable se aproximan más al valor real y tienen un comportamiento más estable que aquellos obtenidos mediante las componentes principales, que estaban limitados a valores discretos. En este caso, se presenta, como ejemplo, también el número de Biot recuperado.

En el centro de la muestra, los valores recuperados, son muy próximos a los valores introducidos (es decir, $\alpha = 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ y $Bi = 0,035$). Cerca de los bordes, sin embargo, aparecen pequeñas desviaciones, las cuales son esperables ya que el modelo 1D no tiene en cuenta los efectos tridimensionales.

Excitación flash tipo gaussiana Otra posible fuente de error en nuestro método es la no uniformidad de la excitación, ya que esto puede generar flujos de calor en el plano que no se tienen en cuenta en un modelo 1D. Este efecto ha sido estudiado simulando un material homogéneo (el mismo que en apartado anterior) pero con una excitación flash con distribución gaussiana (ver figura [11.6]).

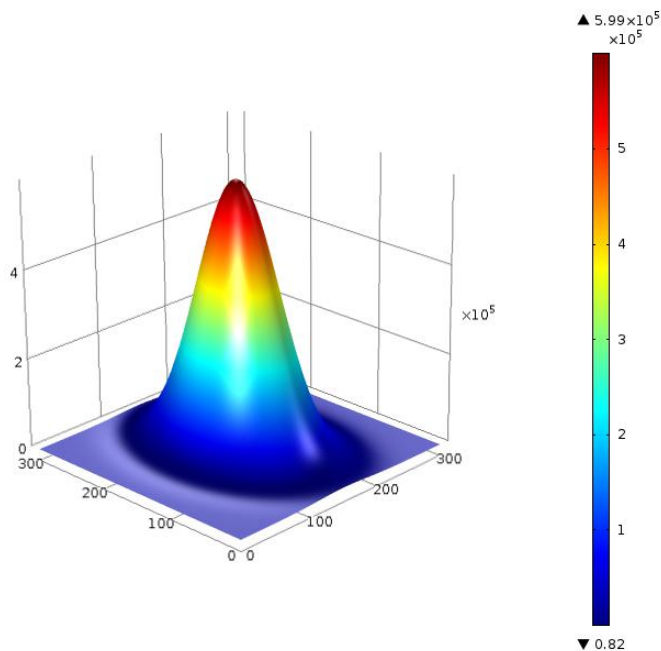


Figura 11.6: Aspecto bidimensional espacial gaussiano de la excitación flash. Los ejes horizontales representan las dimensiones de la probeta en $[\text{mm}]$, mientras que en el eje vertical se ha representado el valor de la potencia del flash en $[\text{W}/\text{m}^2]$.

Los resultados de difusividad obtenida con el método de ajuste multivariable, junto a los valores reales así como a los recuperados por el método de componentes principales para una probeta 3D homogénea con excitación gaussiana se presentan en la figura 11.7.

La gaussiana tenía su máximo en el centro de la muestra y una anchura dada por $\sigma = 30 \text{ mm}$.

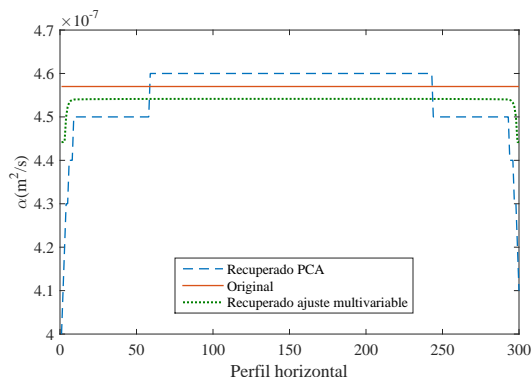


Figura 11.7: Recuperación de los valores de la difusividad térmica en el caso de un material 3D homogéneo con excitación gaussiana. Rojo: original. Azul: valores recuperados mediante el método de las componentes principales. Verde: valores recuperados mediante el método del ajuste multivariable. El eje horizontal viene dado en mm.

De nuevo, el mejor valor posible es recuperado en el centro, y las desviaciones aparecen cerca de los bordes. Estas desviaciones están más marcadas que en caso previo pero son todavía muy pequeñas. Se puede concluir, entonces, que los efectos del calentamiento no uniforme son bastante pequeños. Es decir, la inhomogeneidad de la excitación no se traduce en una alteración de los valores recuperados.

11.2.2. Material inhomogéneo con excitación flash uniforme

Material con una inclusión de difusividad térmica el doble. El modelo 1D puede inducir errores cuando la muestra no es homogénea, ya que los efectos 3D pueden ser muy importantes. En este caso, se asume que la excitación es uniforme, pero en contraste con la simulación en [11.2.1], se considera un defecto: una inclusión cilíndrica en el centro de la muestra con diferentes parámetros térmicos (en este caso, la difusividad térmica de la inclusión es el doble que la del resto del material). La geometría en este caso está representado en la figura [11.8].

Por último y como ejemplo de un material con defectos, se presentan los resultados obtenidos en la recuperación de los valores de difusividad térmica para el caso de un material 3D con una inclusión central de difusividad térmica el doble que la matriz principal (ver figura 11.9).

Los valores recuperados reproducen bien los del material simulado, aunque el cambio brusco en la frontera de la inclusión resulta suavizado, lo que significa que, como era de

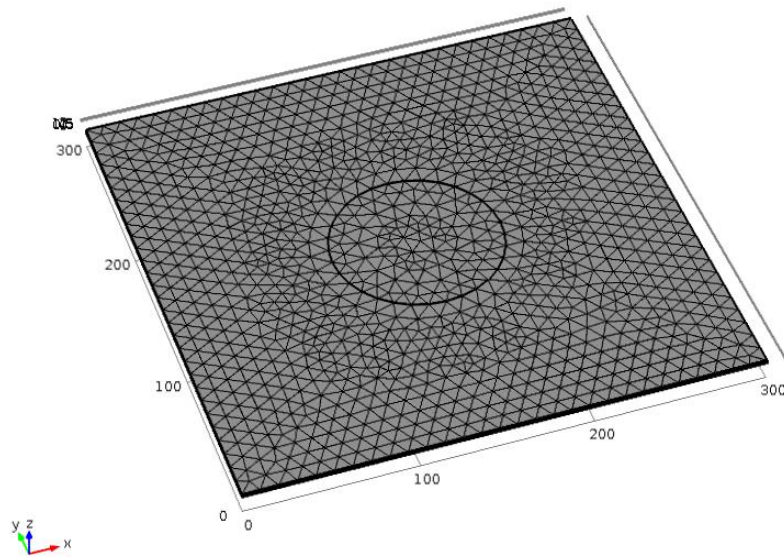


Figura 11.8: Mallado y geometría (en mm) para las simulaciones de un material 3D inhomogéneo.

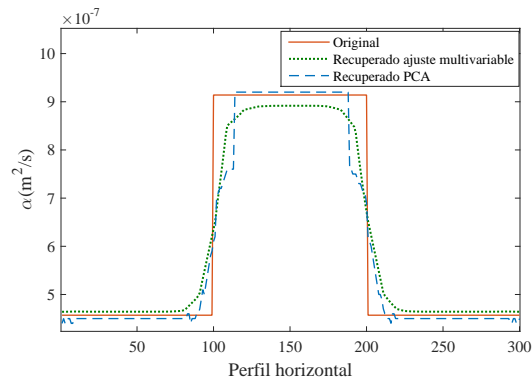


Figura 11.9: Recuperación de los valores de la difusividad térmica en el caso de un material 3D con inclusión con α el doble que la matriz principal con excitación uniforme. Rojo: original. Azul: valores recuperados mediante el método de las componentes principales. Verde: valores recuperados mediante el método del ajuste multivariable. El valor del eje horizontal viene dado en mm.

esperar, los efectos de difusión del calor reducen la resolución, funcionando como un filtro paso bajo espacial.

En resumen, los valores obtenidos en las figuras 11.7 y 11.9 correspondientes, respectivamente a un material homogéneo con excitación no uniforme (gaussiana) y a un material no homogéneo con excitación uniforme ambas obtenidas mediante simulación, demuestran que el método de ajuste multivariable es adecuado incluso cuando se presentan ano-

malías o efectos típicos de la tridimensionalidad.

11.3. Simulación 3D de probeta con inclusiones

A partir de simulaciones en COMSOL Multiphysics se van a estudiar los efectos producidos en la recuperación de la difusividad térmica con el método de las componentes principales y el del ajuste multivariable. Además, se estudiará cómo se modifica la difusividad térmica recuperada no sólo por la profundidad a la que se encuentre el defecto, sino por la naturaleza de éste; es decir, si el defecto tiene mayor o menor difusividad térmica que la matriz principal (siendo la difusividad térmica de la matriz igual a $5,38 \cdot 10^{-7} m^2/s$). Por tanto, este estudio nos ayudará a determinar si existe una relación de la difusividad

Defectos difusividad mitad		
Profundidad (mm)	$\alpha_{\text{PCA}} \times 10^{-7} (m^2/s)$	$\alpha_{\text{multivariable}} \times 10^{-7} (m^2/s)$
1.1	4.5	4.49
1.2	4.5	4.49
1.4	4.5	4.50
1.6	4.6	4.53
1.8	4.7	4.61
2.4	5.2	5.38
Defectos difusividad doble		
Profundidad (mm)	$\alpha_{\text{PCA}} \times 10^{-7} (m^2/s)$	$\alpha_{\text{multivariable}} \times 10^{-7} (m^2/s)$
1.1	5.6	5.64
1.2	5.6	5.63
1.4	5.6	5.62
1.6	5.6	5.59
1.8	5.5	5.51
2.4	5.4	5.38

Tabla 11.4: Recuperación de datos de difusividad térmica con dos métodos distintos: PCA y multivariable para defectos con difusividad térmica mitad o doble respecto a la matriz resultado de la simulación.

térmica recuperada con la profundidad del defecto así como a determinar la naturaleza del defecto detectado. Se ha simulado una probeta en la que las inclusiones se encuentran a las mismas profundidades que las nominales de la muestra estudiada en el apartado [10.5.2]. Se ha asignado a los defectos un espesor de $0,3 \text{ mm}$ (valor que hemos considera-

do realista pero no verificado) y se han estudiado dos casos: difusividad del defecto mitad que la probeta y difusividad el doble. Los resultados obtenidos por cada uno de los métodos mencionados así como para cada uno de los casos supuestos (inclusiones con α el doble que la matriz e inclusiones con α la mitad que la matriz) se presentan en la tabla 11.4.

Gráficamente, los resultados obtenidos para los dos tipos de simulaciones y para cada uno de los dos métodos estudiados se puede ver en la figura 11.10. Los resultados obte-

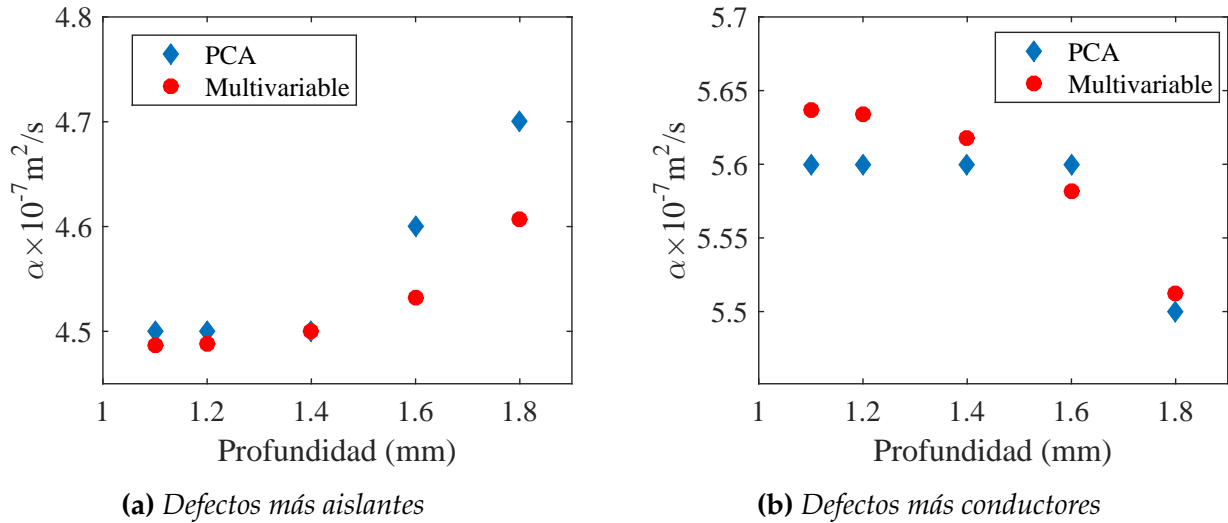


Figura 11.10: Difusividad térmica ($\times 10^{-7}$) frente a profundidad resultado de cada uno de los métodos estudiados. Izquierda: defectos con difusividad mitad de la matriz. Derecha: defectos con difusividad doble de la matriz. En ambos casos, la difusividad de la matriz es $5,38 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

nidos de las simulaciones realizadas muestran una relación entre la difusividad térmica y la profundidad así como con la naturaleza del defecto. Comparando con la figura 10.18 encontramos que las inclusiones en la muestra allí estudiadas deben corresponder a un material con difusividad térmica menor que la matriz, ya que presenta un comportamiento similar al de la figura 11.10 (izquierda).

11.4. Conclusiones

El método expuesto en el capítulo [10] sólo permite recuperar los valores discretos de α y Bi que estén en la matriz pre-calculada que habíamos generado. Aquí nos proponemos pasar de valores discretos a valores continuos.

Se planteó la resolución de este problema mediante lo que denominamos *ajuste multivariable*. Es decir, la búsqueda de funciones explícitas que dependan de unas pocas componentes principales y que nos den los parámetros térmicos α y Bi .

Tal como era de esperar, por los resultados obtenidos en el capítulo anterior, una función que dependa de las tres primeras componentes principales permite recuperar con precisión los valores de α y Bi ; en el primer caso, con polinomios de grado 3, y en el segundo, con polinomios de grado 4, como se muestra en las tablas 11.1 y 11.2.

Se ha aplicado la función multivariable obtenida para la difusividad térmica para caracterizar la probeta de inclusiones del capítulo anterior. En este caso, al obtener valores continuos, la relación que obtenemos de α y profundidad vuelve a mostrar una dependencia clara (figura 11.4).

Con objeto de verificar que existe una relación entre α y profundidad se realizaron simulaciones 3D con el software COMSOL Multiphysics, estudiando inclusiones con difusividades térmicas mayores y menores, llegando a que la difusividad recuperada para inclusiones más aislantes crece con la profundidad, mientras que decrece para defectos más conductores (figura 11.10)

Parte IV

CONCLUSIONES

Resumen y conclusiones

En este último capítulo recopilamos las secciones de “conclusiones” que hemos incluido en los capítulos anteriores, con el objetivo de sintetizar los hitos alcanzados y las contribuciones realizadas en la presente tesis doctoral. Se incluyen, para terminar unas *conclusiones finales* que evaluarán el cumplimiento de los objetivos enunciados en el capítulo [1].

Parte I. Introducción

Los capítulos [2] al [4] han servido para exponer los fundamentos físicos y el estado del arte de la termografía IR aplicada al análisis no destructivo de materiales. Los hitos más importantes conseguidos en el capítulo siguiente (capítulo [5]) se detallan a continuación:

Capítulo 5. Transmisión del calor. Soluciones exactas en una dimensión

- Aunque en determinadas situaciones ciertas aproximaciones a la solución de la ecuación del calor pueden dar resultados válidos, hay a menudo problemas prácticos en los que es imprescindible tener una solución exacta. Esto es cierto para la mayoría de las técnicas de termografía activa y en particular para las que se han usado en esta tesis doctoral: termografía pulsada y excitación escalón. Por ello, se ha resuelto la ecuación del calor unidimensional para distintos casos de estudio.
- Se ha hecho una detallada y extensa recopilación de resultados dispersos en la literatura para la termografía pulsada, encontrando las expresiones analíticas de la evolución de la temperatura en los casos que nos interesan.
- Se ha resuelto la ecuación del calor para el caso de excitación flash mediante el método de la transformada de Laplace, tratando el problema dentro del marco de la teoría de sistemas lineales, lo que permite obtener la temperatura de cualquiera de las caras del espécimen objeto de estudio sin más que convolucionar la función de

respuesta a impulso (*impulse response function, irf*) adecuada con la excitación arbitraria que se desee.

- Aunque las soluciones analíticas encontradas en la literatura proporcionan la *irf* en muchos casos de interés, finalmente se ha optado por una solución numérica, que proporciona resultados igualmente válidos, y que nos permite resolver cualquier problema para el que tengamos la función de transferencia, por lo que es más versátil. Esto ha permitido resolver el problema de la evolución de la temperatura en la cara trasera de una placa cuando el *input* no es el flujo sobre la cara delantera, sino la temperatura de ésta, lo que a su vez ha sido indispensable para resolver el problema planteado en el capítulo [8].

Parte II. Caracterización térmica

En los cuatros capítulos que comprenden esta segunda parte en la que se ha estructurado la tesis se exponen los estudios realizados sobre la caracterización térmica mediante termografía pulsada (capítulos [6] y [7]) y calentamiento escalón (capítulo [8]). El capítulo [8], último de esta parte, se dedica a caracterizar la fuente de excitación usada en el capítulo anterior, mediante la resolución del problema inverso.

Capítulo 6. Termografía pulsada con pérdidas de calor: métodos aproximados

- La solución exacta de la ecuación del calor con convección, encontrada en el capítulo [5], nos permite demostrar que si no se tienen en cuenta las pérdidas térmicas, el *método clásico de Parker* [138] para determinar α por termografía flash (basado en la medida del tiempo $t_{0,5}$ que tarda en alcanzarse en la cara trasera un incremento de temperatura igual a la mitad del máximo T_{max}) da errores considerables, incluso para valores pequeños del número de Biot (un 8 % para $Bi = 0, 1$, figura 6.1).
- Sin embargo, pueden obtenerse valores de α mucho más precisos con *aproximaciones que no tienen en cuenta las pérdidas*, si las usamos para ajustar los primeros segundos de calentamiento (*ajuste temprano*). Se han deducido dos aproximaciones, una para la cara delantera (basada en la solución de [135] y otra para la cara trasera (que no hemos encontrado publicada en la literatura, ecuación (6.6)).
- Ambas soluciones aproximadas se han aplicado a *medidas experimentales* realizadas sobre una muestra test de baquelita, demostrándose que la técnica del ajuste temprano permite recuperar valores de α más aproximados de manera sencilla y fiable.

- Finalmente, se ha construido una *solución aproximada con pérdidas*, pero no se ha encontrado que proporcione una ventaja significativa respecto de la solución exacta.

Capítulo 7. Termografía pulsada con pérdidas de calor: soluciones exactas

- Se ha utilizado la solución exacta unidimensional con pérdidas para analizar las medidas experimentales por la *cara delantera* de la placa estudiada en el capítulo anterior, encontrándose los valores de α y Bi que proporcionan el mejor ajuste.
- La solución exacta para la *cara trasera* se ha usado estudiar los *errores sistemáticos* de los ajustes aproximados sin convección. En la literatura se ha sostenido que para eliminarlos era necesario estimar cuál sería la temperatura T_{lim} que se alcanzaría en la cara trasera si no hubiera pérdidas; este valor se obtenía a partir de T_{max} y otros datos del perfil experimental mediante ecuaciones específicas [12]. Se ha demostrado, sin embargo, que el ajuste temprano aquí propuesto da errores similares (pero de signo contrario) sin necesidad de esa corrección (figura 7.6).
- Disponer de la solución exacta para $T(t)$ en función de α y Bi nos permite recuperar los valores de estos parámetros mediante el ajuste iterativo de los perfiles experimentales, hasta minimizar el error cuadrático medio. Este *método flash adaptado* se expone en la sección [7.2.2], donde se muestra también que, conocido Bi , hay una relación entre T_{max} y T_{lim} extremadamente sencilla (ecuación (7.5)), que no había sido publicada previamente. Conocida la densidad de energía depositada por el flash, esta relación permite determinar, además de α y Bi , el calor específico volumétrico y la conductividad térmica del material.
- Se ha encontrado que, pese a ser el modelo más completo físicamente de los usados hasta aquí, los ajustes a la evolución de la temperatura a lo largo de la evolución de todo el experimento en la cara trasera no son satisfactorios. Las discrepancias se han explicado por los *efectos tridimensionales* no tenidos en cuenta en el modelo unidimensional. Se ha encontrado que *el ajuste es mucho mejor si se limita a los tiempos anteriores a alcanzar el máximo de temperaturas*, dado que estos efectos se acentúan con la difusión del calor al transcurrir el tiempo.
- Se ha estudiado el problema con un *modelo tridimensional de elementos finitos*, implementado con el software COMSOL Multiphysics, encontrándose un acuerdo cualitativamente mucho mejor, lo que confirma la atribución a los efectos tridimensionales

de los problemas descritos en el punto anterior. No obstante, este modelo tiene un alto coste computacional que no permite usarlo de manera iterativa como herramienta para la obtención de los parámetros térmicos.

Capítulo 8. Método escalón

- El calentamiento escalón es una de las técnicas de termografía activa menos exploradas, pero ofrece interés porque al tratarse de un tipo de excitación cuya potencia es baja, y que no altera las propiedades de los materiales si se aplica adecuadamente, es una técnica válida para materiales delicados, así como para muestras muy aislantes o con un espesor elevado que hacen que la técnica flash desarrollada en capítulos anteriores no sea suficiente para obtener una señal adecuada.
- La baja potencia de la fuente en el calentamiento escalón exige medidas de larga duración, lo que hace más imprescindible aún que en el caso del flash el tratar los efectos de la convección (incluso para un valor tan pequeño como $Bi = 0,01$, se ha perdido el 20 % de la energía suministrada cuando $t^* = 20$, lo que equivale a unos 5 minutos en las muestras de este capítulo).
- Al intentar ajustar los perfiles experimentales, nos encontramos con el problema de que las fuentes de excitación comerciales no proporcionan excitaciones *ideales* (figura 8.3), y, por tanto, si tratamos de usar un algoritmo iterativo utilizando como *input* un escalón ideal, los errores que se cometen en la recuperación de la difusividad térmica pueden ser del orden del 20 % (figura 8.4). Este problema fue tratado poniendo a punto un sistema de dos cámaras IR sincronizadas temporalmente y coregistradas espacialmente, denominado *sistema dual de perfiles térmicos* (SDPT, figura 8.5), que nos proporciona el valor de la temperatura en cada instante y para cada píxel. Este valor será utilizado como entrada para convolucionar con la *irf* y tener así una temperatura en cara trasera que es comparada con la experimental y cuyo error cuadrático mínimo nos proporciona el mejor valor de α y Bi .
- Un problema práctico para realizar esta convolución es la divergencia en el origen propia de la *irf*. Esto nos llevó a la necesidad de estudiar cuál era el muestreo óptimo para el tiempo, encontrándose que no se trataba de una elección trivial, pero que pudo ser resuelta gracias a que el estado estacionario nos proporciona un patrón de comparación para los resultados de la convolución.
- Disponer de la evolución de la temperatura por cara delantera y cara trasera para todo el perfil temporal, permitió hacer un doble enfoque en la recuperación de los parámetros térmicos α y Bi . El primero de ellos, con un ajuste de los dos parámetros

simultáneamente y el segundo, obteniendo B_i del estado estacionario, ajustando iterativamente un único parámetro: α . Se encontró que este segundo caso proporcionaba mejores y más rápidos resultados, tal como resume la tabla 8.5.

Capítulo 9. Potencia de la excitación

- La adaptación y uso del SDPT para la caracterización térmica permitió en el capítulo [8] poner a punto un modelo de ajuste a partir de la temperatura en cara delantera sin necesidad de conocer la potencia y la forma de la lámpara. Sin embargo, una vez caracterizada la muestra es posible conocer la potencia y la forma de la lámpara hasta ahora desconocidas, resolviendo el *problema inverso*.
- Para conseguirlo es necesario abordar técnicas matemáticas para resolver sistemas lineales mal condicionados. Destacamos el uso de la descomposición en valores singulares [sección 9.3] y [sección 9.4]. Se ha comprobado que ambos funcionan bien, pero para casos experimentales, la *regularización* proporciona señales de entrada cuya forma es mucho más “natural” (figura 9.5).
- La solución del problema inverso mediante la regularización, junto con la puesta a punto para el vector de tiempos que se estudió en la sección [8.5.1], han permitido recuperar la forma y potencia de la lámpara de excitación (figura 9.6) que se había utilizado en el capítulo [8].
- Esta caracterización del flujo de entrada permitirá usar sólo una cámara para el registro de la evolución de la temperatura, lo que simplificará el proceso de caracterización térmica, además de poder obtener la conductividad térmica y el calor específico volumétrico, que hasta el momento (sin la potencia de la lámpara) nos son desconocidos e imposibles de calcular.

Parte III. Métodos estadísticos

El gran volumen de datos obtenidos con las actuales cámaras IR nos llevó a la necesidad de hacer un tratamiento estadístico de estos para reducir la dimensionalidad y poder obtener los parámetros térmicos α y B_i de manera más eficiente. El primero de los capítulos de esta parte se destinó al análisis estadístico de datos por componentes principales. Demostrada la validez de este método, se trata en el capítulo siguiente una generalización del método que ofrezca valores continuos mediante un *ajuste multivariable*.

Capítulo 10. Componentes principales

- Comenzamos estudiando el *uso del análisis por componentes principales para la detección de defectos* (sección [10.3]). Se ha demostrado, comparando tres diferentes técnicas de tratamiento de imagen (sección [10.3]): contraste en temperatura, en PCAs y FFT, que las componentes principales proporcionan la mejor relación señal a ruido. Asimismo, se ha estudiado este tratamiento por cara delantera y por cara trasera, llegando a la conclusión que los resultados obtenidos por cara trasera permiten detectar defectos más pequeños y a mayor profundidad (tabla 10.2 frente a tabla 10.5).
- La aplicación que nos proponemos aquí va más allá de la mera detección de defectos: buscamos la caracterización térmica de manera cuantitativa que permita *obtener parámetros los térmicos para cada punto de la muestra*, usando las diferencias entre estos parámetros para caracterizar los defectos. Para poder aplicar este formalismo a la caracterización térmica, fue necesario generar una matriz con perfiles de temperatura $T(t)$ precalculados para un conjunto de pares de valores $\alpha - Bi$, sobre cuyos autovectores se proyectarán los perfiles experimentales para obtener las componentes principales.
- Se encontró que podían reproducirse los perfiles de temperatura con sólo tres componentes principales (ver figura 10.12), reduciendo el número de variables de manera drástica, lo que se traduce en la capacidad de obtener mapas bidimensionales de parámetros térmicos en unos pocos segundos, cuando, de otra manera y por métodos de ajuste iterativos podía llegar a tardarse del orden de cientos de horas.
- La verificación experimental se llevó a cabo en dos muestras distintas. La primera de ellas, una muestra de CFRP considerada homogénea, reveló mediante mapa de difusividades térmicas que pese a tener un valor de α medio del orden de los obtenidos en el capítulo [8], éramos capaces de distinguir inhomogeneidades, tal como se mostró en la figura 10.16, en tiempos de pocos segundos.
- La segunda probeta experimental que se analizó fue igualmente una muestra de CFRP, pero que tenía inclusiones de un material diferente a distintas profundidades. El análisis mediante PCAs, no sólo mostró la localización y tamaño de estos defectos (figura 10.17), sino que con el valor añadido de proporcionar un valor cuantitativo de α , se vio que, salvo en uno de los puntos analizados, había una relación entre la profundidad del defecto y el valor de difusividad térmica recuperado (figura 10.18). Si bien esta relación no ha podido ser validada, queda como un trabajo futuro que puede resolverse bien mediante patrones calibrados, bien mediante modelos 3D más sofisticados.

Capítulo 11. Ajuste multivariable

- El método expuesto en el capítulo [10] sólo permite recuperar los valores discretos de α y B_i que estén en la matriz pre-calculada que habíamos generado. Aquí nos proponemos pasar de valores discretos a valores continuos.
- Se planteó la resolución de este problema mediante lo que denominamos *ajuste multivariable*. Es decir, la búsqueda de funciones explícitas que dependan de unas pocas componentes principales y que nos den los parámetros térmicos α y B_i .
- Tal como era de esperar, por los resultados obtenidos en el capítulo anterior, una función que dependa de las tres primeras componentes principales permite recuperar con precisión los valores de α y B_i ; en el primer caso, con polinomios de grado 3, y en el segundo, con polinomios de grado 4, como se muestra en las tablas 11.1 y 11.2.
- Se ha aplicado la función multivariable obtenida para la difusividad térmica para caracterizar la probeta de inclusiones del capítulo anterior. En este caso, al obtener valores continuos, la relación que obtenemos de α y profundidad vuelve a mostrar una dependencia clara (figura 11.4).
- Con objeto de verificar que existe una relación entre α y profundidad se realizaron simulaciones 3D con el software COMSOL Multiphysics, estudiando inclusiones con difusividades térmicas mayores y menores, llegando a que la difusividad recuperada para inclusiones más aislantes crece con la profundidad, mientras que decrece para defectos más conductores (figura 11.10)

Conclusiones finales

A la vista de los resultados obtenidos, podemos concluir que los objetivos iniciales descritos en el comienzo de esta memoria han sido satisfechos. Las principales contribuciones de esta tesis son:

1. Termografía pulsada con pérdidas de calor:

- Se ha reunido la información dispersa en la bibliografía sobre esta técnica, proporcionando un marco teórico que permite resolver la ecuación del calor con pérdidas para una muestra plana (1D) sometida a una excitación térmica arbitraria en una cara.
- Se han propuesto métodos aproximados para obtener la difusividad térmica α basados en la medida temprana de la evolución térmica $T(t)$, tanto por la cara sometida a excitación (“cara delantera”) como por la opuesta (“cara trasera”), y se han aplicado a medidas experimentales.
- Se ha utilizado la solución exacta de la ecuación del calor para ajustar iterativamente los perfiles térmicos $T(t)$, proporcionando α y el número de Biot Bi . Este *método flash adaptado* proporciona también la conductividad térmica y el calor específico volúmico si se conoce la densidad de energía suministrada por el flash. Se ha evaluado comparativamente con los métodos aproximados encontrándose que, cuando son importantes los efectos tridimensionales, la detección temprana puede ser una ventaja pese a no tener en cuenta la convección.
- Como conclusión en relación a este objetivo, al haber resuelto las pérdidas por convección, no es necesario disponer de muestras con espesores ideales y el tiempo de ensayo deja de ser crucial.

2. Caracterización térmica a partir de la excitación escalón:

- Una vez resueltas las pérdidas por convección se abre la puerta a ensayos de larga duración en muestras gruesas, para lo que es apropiado el calentamiento escalón. Se han resuelto los problemas debidos al desconocimiento de la forma y/o potencia de la excitación mediante el uso de un sistema de dos cámaras que miden la evolución térmica de las dos caras de la muestra de manera sincronizada y corregistrada.
- La física del estado estacionario permite obtener directamente el valor de Bi , haciendo que el modelo de ajuste se reduzca a un sólo parámetro, mejorando

los resultados y reduciendo drásticamente los tiempos de computación en la obtención de la α .

- La resolución del problema inverso, una vez conocidos los parámetros térmicos de la muestra, permite conocer la forma y la potencia de la lámpara, haciendo posible la medida con una sólo cámara.

3. Reducción de datos por métodos estadísticos:

- La comprobación de que con pocas componentes principales se reproducen con adecuada precisión los perfiles térmicos, permite una gran reducción del tiempo de procesado en la recuperación de los valores de α y B_i en las medidas flash.
- Esto hace viable la obtención de imágenes de difusividad térmica para una muestra completa, pudiendo no sólo detectar los defectos sino cuantificarlos a través de sus parámetros térmicos efectivos, asociados a propiedades como la profundidad o espesor.
- El ajuste multivariable aplicado al método de recuperación de parámetros térmicos por componentes principales permite mejorar la precisión, pasando de valores discretos a valores continuos.

A modo de reflexión final, estas contribuciones pueden considerarse como un intento de solventar algunas de las principales dificultades inherentes al análisis no destructivo infrarrojo: por un lado, la caracterización de muestras aislantes de grandes espesores y de grandes dimensiones a las que no siempre son aplicables las técnicas estándar de NDT-IR; y, por otro lado, solucionar el manejo del gran volumen de datos adquiridos con la actual tecnología, que sólo puede hacerse de manera eficaz con métodos estadísticos. Creemos que los resultados obtenidos en este trabajo de tesis significarán una aportación relevante para la extensión de las técnicas NDT-IR como apoyo a los métodos de caracterización y control en la fabricación de materiales compuestos y similares.

Parte V
APÉNDICES

Calibración de sistemas de imagen IR

La termografía infrarroja es una tecnología rápida, limpia y segura que, como se ha expuesto en capítulos anteriores, puede ser usada en una gran variedad de aplicaciones. La mayoría de éstas se basan en la medida, o la simple detección, de contrastes de temperatura [182]. En particular, el análisis no destructivo parte de la base de que materiales distintos tendrán diferentes respuestas térmicas, por lo que estos contrastes serán los que den información de la presencia de defectos, delaminaciones, porosidad, etc, pero a menudo no importará cuál sea la temperatura absoluta de cada zona.

Si lo que se busca es una caracterización térmica de los materiales, habrá técnicas que permitan obtener los parámetros térmicos sin conocer la temperatura absoluta y otras para las que el conocimiento de ésta sí que sea importante. Por ejemplo, en el método flash clásico (apartado [5.4.1]) se obtiene la difusividad térmica del material sin necesidad de conocer cuál es la temperatura alcanzada, simplemente calculando cuál es el tiempo que tarda en llegar la cara no iluminada a la mitad de su temperatura máxima, sea ésta la que sea. En cambio, si lo que nos interesa es obtener el resto de parámetros térmicos como pueden ser la conductividad térmica (κ) o el calor específico volumétrico (ρc), sí será necesario conocer el incremento de temperatura alcanzado, como se explica en la sección [7.2.2]. En el caso del calentamiento escalón, desarrollado extensamente en el capítulo [8], conocer adecuadamente la temperatura será imprescindible si se quiere usar como entrada al modelo el perfil de temperatura de la cara delantera (ver sección [8.3]). Como vimos, este modo de trabajar supone una mejora significativa en medidas de larga duración en las que las pérdidas por convección son determinantes, o bien si no se dispone de fuentes de excitación ideales.

Para obtener un correcto valor de temperatura, será necesaria una correcta calibración de los sistemas de detección que se utilicen. Cualquier sensor infrarrojo, desde un sencillo monodetector a un sistema de imagen hiperespectral, es susceptible de ser calibrado radiométricamente. En este capítulo vamos a ocuparnos sólo de la calibración de cámaras IR, es decir, de sistemas de imagen que no tienen resolución espectral. Como se explicó en la sección [3.3], el problema es determinar los parámetros *Gain* y *Offset* de la ecuación

(3.6), en los que se resume el modelo del sensor, que nos permiten obtener, a partir del nivel digital medido, la radiancia incidente¹. Veamos a continuación cómo se hace esto en la práctica.

A.1. Calibración estándar

Para un sistema de imagen IR trabajando dentro del rango lineal del detector, basta en teoría tomar dos imágenes de referencia de un CN extenso a dos temperaturas, “fría” y “caliente”. Considerando que la temperatura del cuerpo negro es uniforme, tendremos una radiancia entrante (calculada integrando la Ley de Planck en el intervalo espectral de la cámara) asociada a los valores de referencia fría y referencia caliente. Asumiendo la respuesta lineal, calcularemos una ganancia y offset de calibración, con las que posteriormente podremos obtener la radiancia y la temperatura de un escenario a temperaturas intermedias entre los dos valores de referencia. Veamos cuál es el protocolo.

A.1.1. Calibración de la cámara

El protocolo de calibración de la cámara será el siguiente:

1. La calibración debe hacerse para el sistema IR completo, en la configuración que vaya a usarse: lente, filtro, tiempo de integración, etc. Cada cambio en la configuración del sistema, conllevará a una calibración nueva.
2. Se requiere un cuerpo negro extenso con buena uniformidad espacial y temperatura conocida y estable. El cuerpo negro debe estar situado a una distancia suficientemente pequeña para que el efecto de la absorción atmosférica sea despreciable (esto generalmente no será un problema, porque la cámara trabajará en una ventana atmosférica) pero suficientemente grande para que no caliente a la cámara.
3. Determinación del rango de operación de la cámara. Al calibrar supondremos que se está trabajando dentro del rango lineal, por lo que sería suficiente tomar únicamente dos puntos (dos valores de temperatura de cuerpo negro), pero es aconsejable trabajar con un conjunto de puntos dentro del intervalo de trabajo para minimizar errores (y asegurarse de que, en efecto, la respuesta es lineal).
4. Obtención de los valores de *Gain* y *Offset*. Para cada temperatura del cuerpo negro (una vez dejado pasar un tiempo para garantizar su estabilidad) se calcula la radiancia emitida haciendo uso de la ley de Planck integrada en el intervalo espectral

¹Que será igual a la radiancia saliente del objeto, por el principio de invariancia de la radiancia [130]

de trabajo. Estas radiancias deberían tener una relación lineal con los niveles digitales medidos, de modo que se obtienen los parámetros Gain y Offset del detector mediante un ajuste lineal.

5. Idealmente, este proceso debería realizarse en una cámara climática (cuya temperatura es regulable y estable) y para todo un intervalo de temperaturas ambiente, por lo que tomaría mucho tiempo; sin embargo, si el detector está refrigerado o al menos tiene una estabilización termoeléctrica (como ocurre en la mayoría de las cámaras) el efecto de la temperatura ambiente debería ser muy pequeño.

A.1.2. Relación radiancia-temperatura

El proceso de calibración propiamente dicho termina cuando, una vez conocidos Gain y Offset, podemos obtener la radiancia incidente L_{in} invirtiendo la ecuación (3.6). Si, como es habitual, queremos saber la temperatura del objeto que emite esa radiancia, el primer paso es conocer ε_{obj} y T_{amb} , para poder despejar de la ecuación (3.9):

$$L^{CN}(T_{obj}) = \frac{L_{in} - (1 - \varepsilon_{obj})L_{CN}(T_{amb})}{\varepsilon_{obj}} \quad (\text{A.1})$$

Para obtener la temperatura T_{obj} es necesario invertir $L^{CN}(T)$, y para ello hay que conocer su forma funcional. Si la cámara fuera sensible en todo el espectro, esta vendría dada por la ley de Stefan-Boltzmann:

$$L^{CN}(T) = cT^4 \quad (\text{A.2})$$

donde $c = \sigma/\pi$; el factor π aparece porque estamos trabajando con radiancias [$Wm^{-2}sr^{-1}$] en lugar de con exitancias [Wm^{-2}].

En la práctica, la cámara sólo será sensible en una ventana espectral, de λ_i a λ_f y la función, que se obtendrá integrando la Ley de Planck en esa ventana, será más complicada. Una buena aproximación a su inversa, siempre que el intervalo espectral no sea muy ancho es una función del tipo:

$$T = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{L_{in}}\right) + F} \quad (\text{A.3})$$

donde B es el factor espectral, R el factor de respuesta y F es el factor de forma. Los parámetros (B, R, F) deben determinarse para cada ventana espectral y rango de temperatura de trabajo. Para garantizar que la función de calibrado $f(T)$ (definida en [3.3.2]) sea una aproximación lo mejor posible a la integral de la función de Planck, se construye la siguiente expresión:

$$\text{error relativo} = \frac{1}{T_f - T_i} \int_{T_i}^{T_f} \frac{f^{-1}[L_D(T, \lambda_i, \lambda_f), B, R, F] - T}{T} dt \quad (\text{A.4})$$

y se buscan los valores que la minimizan. Como ejemplo, para el rango de medida de $3 - 5\mu m$, estos parámetros vienen dados en la tabla A.1.

	$3 - 5\mu m$
B [K]	3596.97
R [$W m^{-2} sr^{-1}$]	232608.68
F (adimensional)	1

Tabla A.1: Parámetros B, R y F de la función de calibrado para el rango de trabajo de $3 - 5\mu m$

Una alternativa es ajustar a una función polinómica:

$$T = a + b \cdot L_{in} + c \cdot L_{in}^2 + d \cdot L_{in}^3 + e \cdot L_{in}^4$$

Por lo general, con un polinomio de orden 4, será suficiente; pero hay que tener cuidado de no extrapolar la función más allá del intervalo de temperaturas para el que se ha ajustado, porque los errores pueden ser importantes.

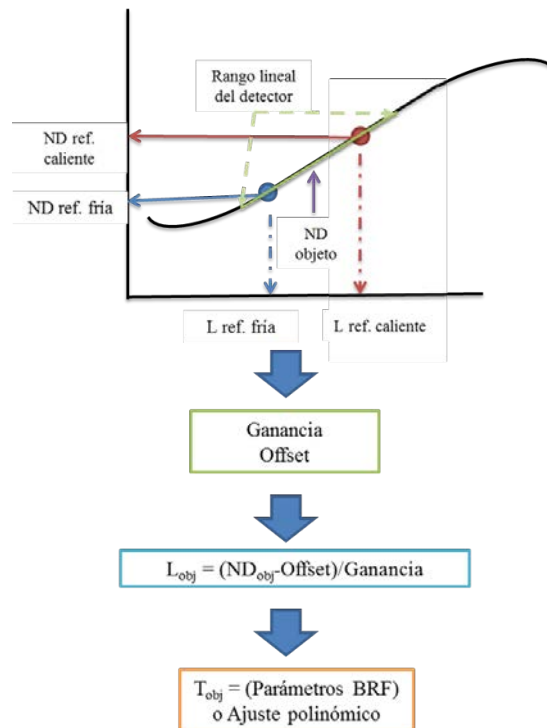


Figura A.1: Esquema en el que se detallan todos los pasos a seguir en una calibración estándar de una cámara infrarroja para llegar a obtener la temperatura del objeto.

A modo de ejemplo, la figura A.1 resume el proceso de la calibración estándar, incluyendo la obtención de la temperatura del objeto.

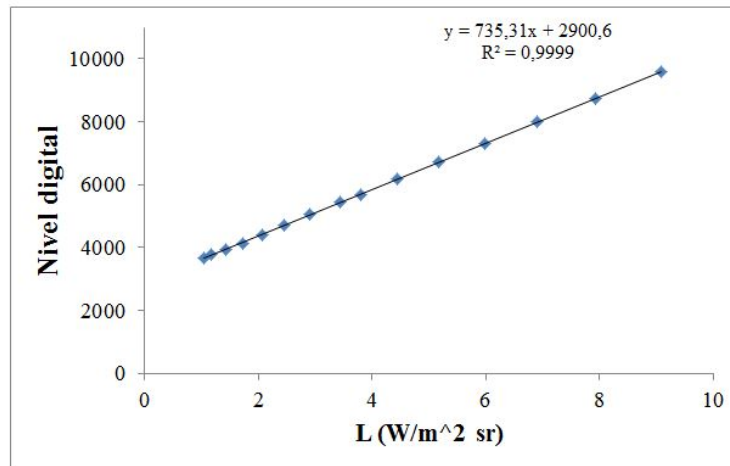


Figura A.2: Ejemplo de respuesta de zona lineal de un detector trabajando de $3\mu\text{m}$ a $5\mu\text{m}$. Representando Nivel Digital frente a radiancia se obtienen los valores de Gain y Offset para una configuración determinada del detector.

En el ejemplo de la figura A.2, se ha obtenido una $\text{Gain} = 735,31[\text{m}^2\text{srW}^{-1}]$ y un valor de $\text{Offset} = 2900,6$. Para una cámara de InSb de Thermosensorik trabajando de $3 - 5\mu\text{m}$, se ha calibrado desde el rango de 12 hasta 80°C y los valores obtenidos se presentan en la tabla A.2.

$T^{CN}(^\circ\text{C})$	12	20	30	40	50	60	70	80
Nivel digital	3668	3941	4415	5043	5668	6714	7981	9585

Tabla A.2: Valores de Nivel digital obtenidos para los valores de temperatura de cuerpo negro seleccionados

Este planteamiento permite resolver el problema de la medida de temperaturas para el caso sencillo del modelo radiométrico de la figura 3.2, pero en configuraciones genéricas de teledetección el problema puede ser más difícil (hace falta un modelo radiométrico más complicado). Hay que señalar además que por exacta que sea la calibración, la temperatura recuperada depende de la emisividad atribuida al objeto y de la temperatura del ambiente, lo que puede dar lugar a errores sistemáticos como se explicó en la sección [3.3].

A.2. Calibración: no idealidades

Lo que hemos denominado como *calibración estándar* en la sección anterior, es una presentación idealizada que no considera los problemas que plantean la falta de uniformidad de los detectores y sus desviaciones de la linealidad. Estos factores son importantes para conseguir medidas precisas de temperatura en situaciones reales.

La realización del calibrado *ideal* que hemos explicado hasta aquí para un FPA se traduce, debido a la no uniformidad de los detectores, en la determinación de una matriz de valores de *Gain* y otra de *Offset*. Eso exige un cuerpo negro extenso y uniforme lo que no es fácil de conseguir. Por eso vamos a estudiar cuáles son los efectos de dos tipos de calibraciones. Primero, asumiremos que disponemos de él y luego vamos a ver qué hacer si no tenemos un cuerpo negro extenso ideal, lo que dará lugar a la distinción entre *calibración directa* y *calibración con uniformización*. Encontraremos que para el caso de respuesta lineal a ambos métodos dan el mismo resultado, y simularemos en el apartado [A.2.1] el efecto de la no linealidad.

Calibración directa Suponemos que la radiancia es igual para cada uno de los detectores que componen el FPA, pero tienen respuestas diferentes (ver esquema de la figura A.3)

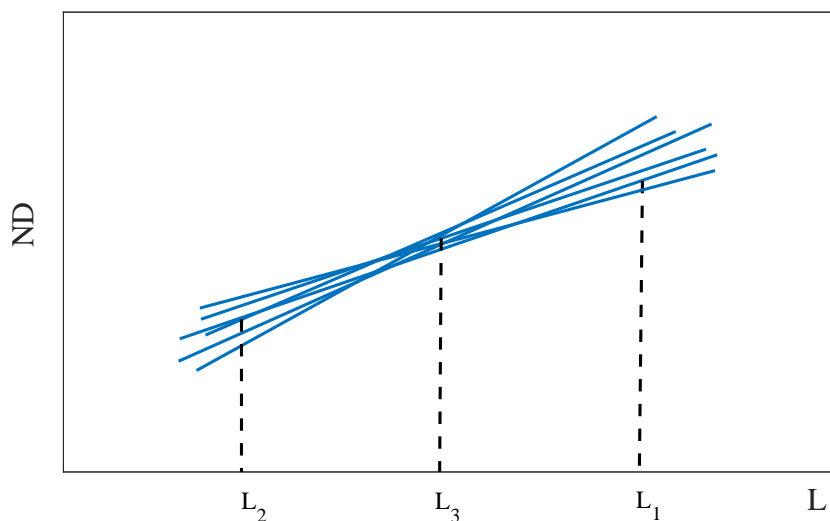


Figura A.3: Esquema de respuesta de los diferentes detectores que componen un FPA. Para la misma radiancia, sus respuestas son diferentes.

Suponemos respuesta lineal entre L_1 y L_2 para todos los detectores, y L_3 será una radiancia comprendida entre L_1 y L_2 . Además supondremos que L_1 y L_2 corresponden a

las radiancias de las referencias fría y caliente que son conocidas, por lo que los niveles digitales asociados a éstas en un píxel genérico i serán:

$$\begin{aligned} ND_{i1} &= Gain_i^{Det} L_1 + Off_i^{Det} \\ ND_{i2} &= Gain_i^{Det} L_2 + Off_i^{Det} \end{aligned}$$

Donde $Gain_i^{Det}$ y Off_i^{Det} son, respectivamente, la ganancia y el offset del detector i . Estos parámetros se pueden obtener despejando, o alternativamente por un ajuste lineal. Por sencillez, escribiremos simplemente:

$$Gain_i^{Det} = \frac{ND_{i1} - ND_{i2}}{L_1 - L_2} \quad (\text{A.5})$$

$$Off_i^{Det} = ND_{i2} - Gain_i^{Det} L_2 \quad (\text{A.6})$$

Expresiones con las que podremos obtener la radiancia desconocida L_3 :

$$L_3 = \frac{ND_{i3} - Off_i^{Det}}{Gain_i^{Det}} \quad (\text{A.7})$$

Esto es, analíticamente, lo que hemos denominado el *calibrado estándar* en el apartado anterior, y nos proporciona las matrices $Gain_i^{Det}$ y Off_i^{Det} si conocemos los valores L_1 y L_2 , iguales para todos los detectores.

Calibración con uniformización Si no disponemos de un CN extenso uniforme, generalmente sí tendremos dos referencias, fría y caliente uniformes pero con radiancias L_1 y L_2 desconocidas (por ejemplo, obteniendo imágenes de dos placas que situamos desenfocadas muy cerca del objetivo de la cámara). Podemos usar los valores promedio de número digital, $\langle ND_{i1} \rangle$ y $\langle ND_{i2} \rangle$ como sustitutos de L_1 y L_2 escribiendo:

$$\begin{aligned} ND_{i1} &= Gain_i^{Unif} \langle ND_{i1} \rangle + Off_i^{Unif} \\ ND_{i2} &= Gain_i^{Unif} \langle ND_{i2} \rangle + Off_i^{Unif} \end{aligned}$$

En este caso, lo que obtendremos serán lo que denominamos matrices de *ganancia* y *offset de uniformización* definidas como:

$$Gain_i^{Unif} = \frac{ND_{i1} - ND_{i2}}{\langle ND_{i1} \rangle - \langle ND_{i2} \rangle} \quad (\text{A.8})$$

$$Off_i^{Unif} = ND_{i2} - Gain_i^{Unif} \langle ND_{i2} \rangle \quad (\text{A.9})$$

Matrices a partir de las cuales podremos obtener un número digital uniformizado correspondiente a L_3 :

$$ND_{i3}^{Unif} = \frac{ND_{i3} - Off_i^{Unif}}{Gain_i^{Unif}} \quad (\text{A.10})$$

Este valor es una estimación del nivel promedio de ND correspondiente a la radiancia L_3 .

A continuación, vamos a demostrar que efectivamente, $ND_{i3}^{Unif} = \langle ND_{i3} \rangle$ y, por tanto, es igual para todo píxel i . Sabemos que:

$$ND_{i3} = Gain_i^{Det} L_3 + Off_i^{Det}$$

Usando (A.5) y (A.6), esto puede escribirse como:

$$ND_{i3} = \frac{ND_{i1} - ND_{i2}}{L_1 - L_2} (L_3 - L_2) + ND_{i2} \quad (\text{A.11})$$

Por tanto, la manera rigurosa de calcular $\langle ND_{i3} \rangle$ es

$$\langle ND_{i3} \rangle = (\langle ND_{i1} \rangle - \langle ND_{i2} \rangle) \frac{L_3 - L_2}{L_1 - L_2} + \langle ND_{i2} \rangle \quad (\text{A.12})$$

Mientras que nuestra estimación de $\langle ND_{i3} \rangle$ es:

$$ND_{i3}^{Unif} = \frac{ND_{i3} - Off_i^{Unif}}{Gain_i^{Unif}}$$

Sustituyendo aquí las expresiones (A.8) y (A.9) de $Gain_i^{Unif}$ y Off_i^{Unif} y la expresión (A.11) para ND_{i3} , encontramos que:

$$ND_{i3}^{Unif} = \frac{\frac{ND_{i1} - ND_{i2}}{L_1 - L_2} (L_3 - L_2)}{\frac{ND_{i1} - ND_{i2}}{\langle ND_{i1} \rangle - \langle ND_{i2} \rangle}} + \langle ND_{i2} \rangle$$

que simplificando se convierte en lo obtenido en la ecuación (A.12). Con esto demostramos que $Gain_i^{Unif}$ y Off_i^{Unif} permiten uniformizar la imagen, haciendo que el ND_{i3}^{Unif} sea igual para todo píxel i y tenga el valor igual a $\langle ND_{i3} \rangle$ para todo L_3 comprendido entre L_1 y L_2 .

Después de esta primera etapa de uniformización, definimos ahora un calibrado en promedio; que vendrá dado por $Gain^E$ y Off^E , que serán escalares, es decir:

$$\begin{aligned} \langle ND_{i1} \rangle &= Gain^E L_1 + Off^E \\ \langle ND_{i2} \rangle &= Gain^E L_2 + Off^E \end{aligned}$$

La idea es que gracias a haber realizado la uniformización, va a ser posible calibrar todo el array usando un cuerpo negro de área pequeña. Éste proporcionará los valores de L_1 y L_2 y los valores de $\langle ND_{i1} \rangle$ y $\langle ND_{i2} \rangle$ que introduciríamos aquí serían en realidad los de ND_1^{Unif} y ND_2^{Unif} obtenidos usando $Gain^{Unif}$ y Off^{Unif} como en la ecuación (A.10) en la región iluminada por el CN. Los valores de ganancia y offset escalares se obtienen despejando:

$$Gain^E = \frac{\langle ND_{i1} \rangle - \langle ND_{i2} \rangle}{L_1 - L_2} \quad (\text{A.13})$$

$$Off^E = \langle ND_{i2} \rangle - Gain^E L_2 \quad (\text{A.14})$$

(lo que demuestra que $Gain^E$ y Off^E son los valores promedio, respectivamente, de $Gain_i^{Det}$ y Off_i^{Det})

Con estos valores de ganancia y offset estimaremos la radiancia L_3 como:

$$\widehat{L}_3 = \frac{\langle ND_{i3} \rangle - Off^E}{Gain^E} \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo ahora las expresiones (A.13) y (A.14) para $Gain^E$ y Off^E , y el valor (A.12) de $\langle ND_{i3} \rangle$, se demuestra que esta estimación da verdaderamente L_3 :

$$\widehat{L}_3 = \frac{\left[(\langle ND_{i1} \rangle - \langle ND_{i2} \rangle) \frac{L_3 - L_2}{L_1 - L_2} + \langle ND_{i2} \rangle \right] - \langle ND_{i2} \rangle}{\frac{\langle ND_{i1} \rangle - \langle ND_{i2} \rangle}{L_1 - L_2}} - L_2 = L_3$$

Conclusión: Si L_1 , L_2 y L_3 están en la región lineal de los detectores, es equivalente calibrar en una etapa con $Gain_i^{Det}$ y Off_i^{Det} que en dos etapas, haciendo primero una uniformización con $Gain_i^{Unif}$ y Off_i^{Unif} y luego calibrado escalar con $Gain^E$ y Off^E .

El primer procedimiento se resume en la ecuación (A.7) y el segundo en la ecuación (A.15). Hay que señalar con respecto a esta última dos puntos importantes:

- Los valores de $Gain^E$ y Off^E no dependen de las temperaturas de las referencias fría y caliente porque, como hemos visto, son los promedios de $Gain_i^{Det}$ y Off_i^{Det} .
- En la práctica, en lugar de $\langle ND_{i3} \rangle$ introduciremos en (A.15) el valor uniformizado, ND_{i3}^{Unif} , dado por la ecuación (A.10).

La viabilidad práctica del calibrado en dos etapas depende de estos dos puntos cuya validez, a su vez, reposa en el carácter lineal de todas las relaciones de calibrado.

En el siguiente apartado se plantea la cuestión del comportamiento de ambos métodos en condiciones no ideales, en las que hay desviaciones de la linealidad en la respuesta de los detectores.

A.2.1. Comprobación de la calibración en imágenes simuladas

Para la comparación de los distintos modos de calibración se han construido *imágenes simuladas* de una escena uniforme utilizando los siguientes datos:

- Se ha considerado un FPA de tamaño $m \times n = 50 \times 50$. Cada píxel tiene una ganancia y offset diferentes con los siguientes valores de media y desviación típica:

$$\begin{aligned}\langle Gain \rangle &= 899, & \sigma_{Gain} &= 10 \\ \langle Offset \rangle &= 2500, & \sigma_{Offset} &= 2\end{aligned}$$

(por simplicidad se han tomado unidades arbitrarias). Las imágenes correspondientes a la ganancia y offset intrínsecos se han generado, por tanto, siguiendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}Gain_i &= \sigma_{Gain} \cdot randn(n, m) + \langle Gain \rangle \\ Offset_i &= \sigma_{Offset} \cdot randn(n, m) + \langle Offset \rangle\end{aligned}$$

Donde $randn(n, m)$ es una matriz de tamaño $n \times m$ de números aleatorios de distribución normal estándar.

- Se ha definido un intervalo de respuesta lineal, el mismo para todos los detectores, entre dos valores L_{min} y L_{max} de radiancia de modo que la respuesta para una radiancia L es:

$$\begin{aligned}ND &= Gain_i \cdot L + Offset_i + c_1 \cdot (Heaviside(L_{min} - L) \cdot (L - L_{min}))^2 \\ &\quad - c_2 \cdot (Heaviside(L - L_{max}) \cdot (L - L_{max}))^2 \quad (A.16)\end{aligned}$$

El significado de cada uno de los argumentos que definen la función de respuesta del detector vienen explicados en la tabla [A.3](#).

En la figura [A.4](#) se puede ver la respuesta del detector obtenida a partir de la expresión (A.16) con los datos de la tabla [A.3](#).

- En cada caso de los que expondremos a continuación, se trabajará con dos referencias: una fría y otra caliente (que pertenecerán o no al rango lineal según el caso que estemos estudiando); y dos *escenarios*, es decir, dos posibles valores de radiancia a recuperar: uno dentro de rango lineal y otro fuera. Los valores utilizados se presentan en la tabla [A.4](#).

Símbolo	Valor
x	Valores de radiancia para los que se calcula la respuesta ($[0 : 0,1 : 20]$)
L_{min}	Valor mínimo de radiancia con respuesta lineal (=1)
c_1	Coefficiente de no linealidad en la región de baja señal (= 20)
L_{max}	Valor máximo de radiancia con respuesta lineal (=3)
c_2	Coefficiente de no linealidad en la región de alta señal (= 20)
<i>Heaviside</i>	Función escalón

Tabla A.3: Valores utilizados para la generación de la respuesta del detector incluyendo una zona lineal.

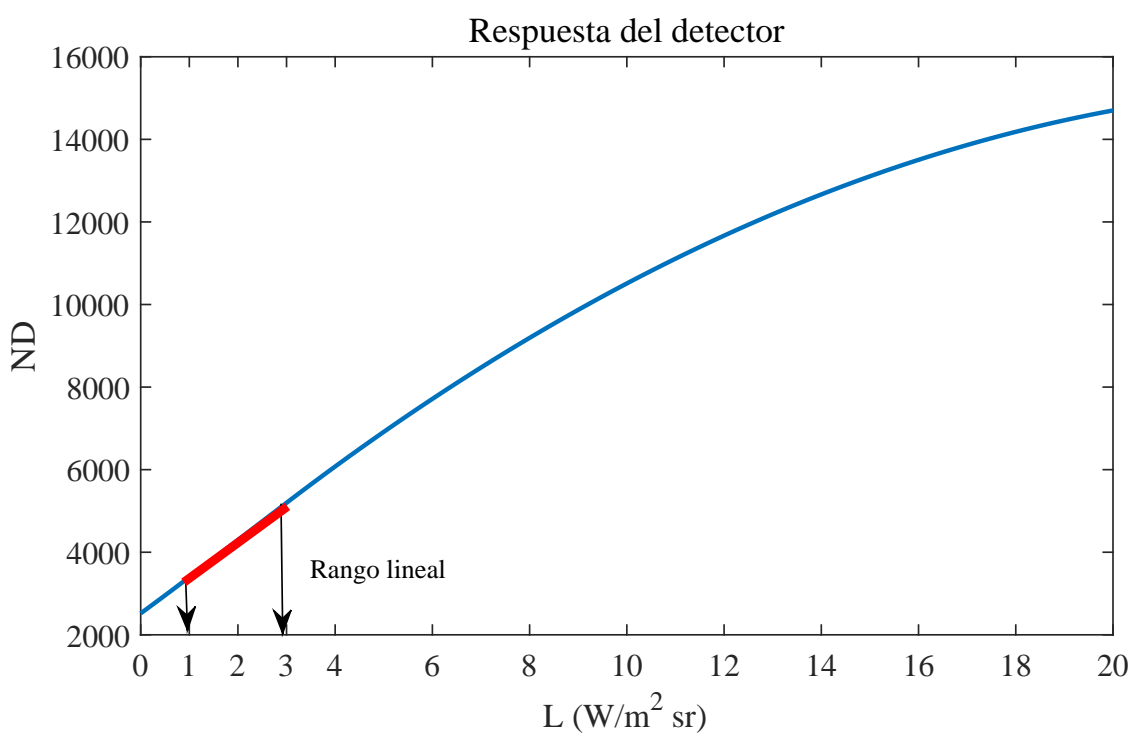


Figura A.4: Representación gráfica de la respuesta del detector correspondiente a la ecuación (A.16) con los parámetros que aparecen en la tabla A.3

- Las comprobaciones se dividirán en dos grandes grupos: sin uniformización, es decir, utilizando matrices de ganancia y offset de calibración (calibración directa); y con uniformización, esto es, utilizando primero matrices de uniformización y después calibrando en radiancia a partir de valores escalares de ganancia y offset. El nombre con el que se refiere a cada caso viene resumido en la tabla A.5.
- Esquemáticamente, el proceso que se llevará a cabo en cada una de las calibraciones

	$L(W/m^2sr)$
Escenario dentro rango lineal	2
Escenario fuera rango lineal	7
Referencia fría dentro rango lineal	1.5
Referencia caliente dentro rango lineal	2.5
Referencia fría fuera rango lineal	0.5
Referencia caliente dentro rango lineal	8

Tabla A.4: Valores de radiancia para los escenarios y las referencias utilizados en cada uno de los casos en la comprobación de las calibraciones.

		Escenario	
		Dentro de rango	Fuera de rango
Directa	Referencias dentro de rango	1a	1b
	Referencias fuera de rango	2a	2b
Con uniformización	Referencias dentro de rango	3a	3b
	Referencias fuera de rango	4a	4b

Tabla A.5: Resumen de los nombres asignados a cada uno de los casos en los que se ha trabajado.

será:

- **Calibración directa:** considerando que la T^{CN} es uniforme, tendremos una radiancias L_1 y L_2 (calculadas integrando la ley de Planck en el intervalo de trabajo del detector) asociadas a las referencias fría y caliente tomadas (ya sean dentro o fuera del rango lineal). Para cada píxel calcularemos el ND mediante la ecuación (A.16) y las correspondientes matrices $Gain_i^{Det}$ y Off_i^{Det} mediante las expresiones (A.5) y (A.6). A partir de estos valores, podremos calcular la radiancia del escenario con la ecuación (A.7) (fuera o dentro del rango lineal) (ver parte izquierda de la figura A.5).
- **Calibración con uniformización:** En este caso no conoceremos las temperaturas asociadas a las referencias fría y caliente (igualmente, ya estén fuera o dentro de rango lineal), por lo que lo que obtendremos será una ganancia y offset de uniformización (matrices $Gain_i^{Unif}$ y Off_i^{Unif}) y unos valores de ganancia y offset efectivos (escalares $Gain^E$ y Off^E) que nos permitirán calcular la radiancia del escenario (dentro o fuera del rango lineal) (ver parte derecha de la figura A.5). Tanto en un caso como en otro, si conocemos la emisividad y la relación

radiancia-temperatura podremos obtener la temperatura del escenario.

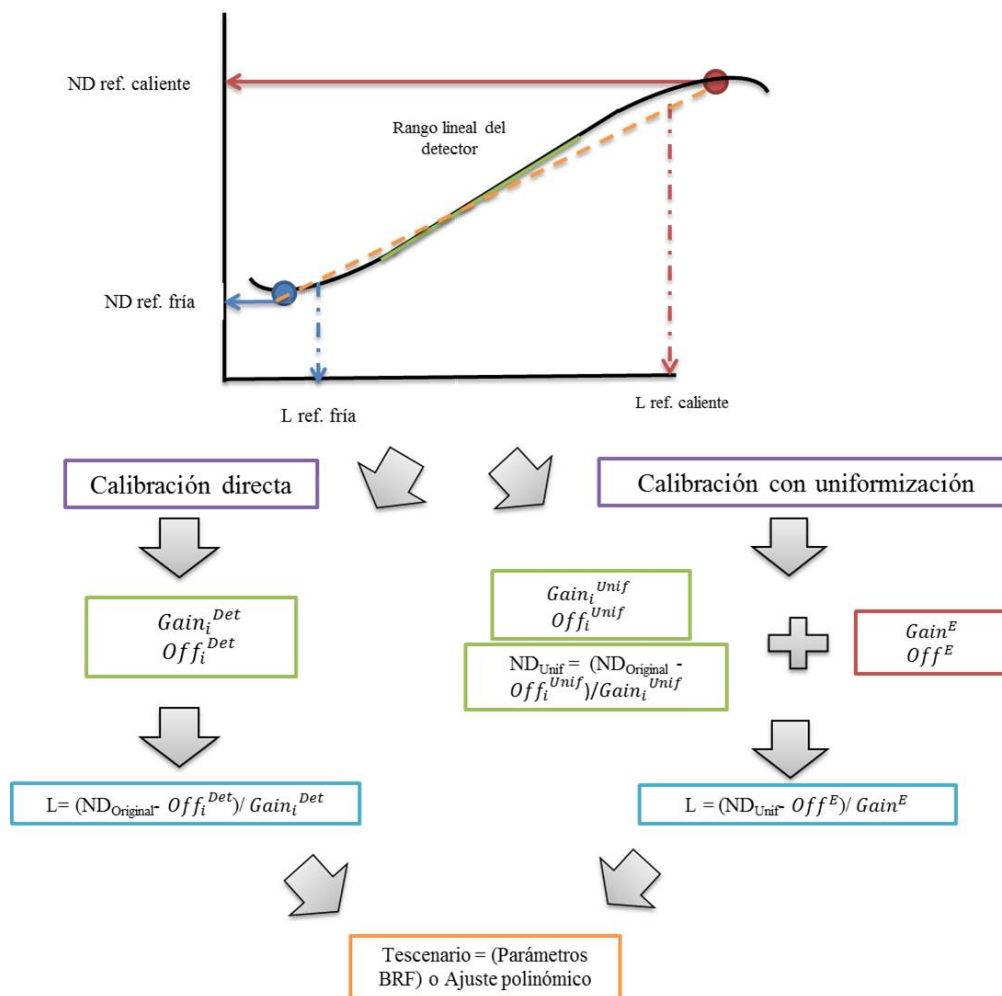
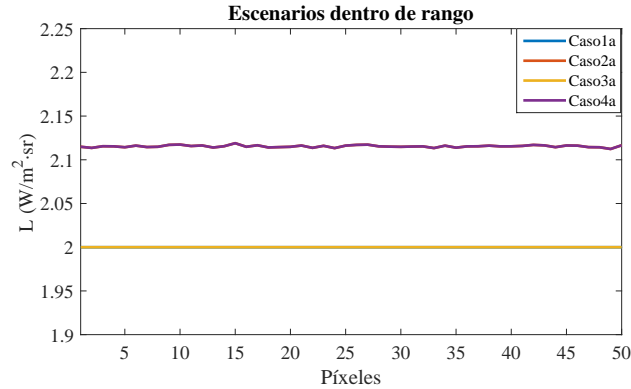


Figura A.5: Esquema en el que se detallan todos los pasos a seguir en una calibración no ideal

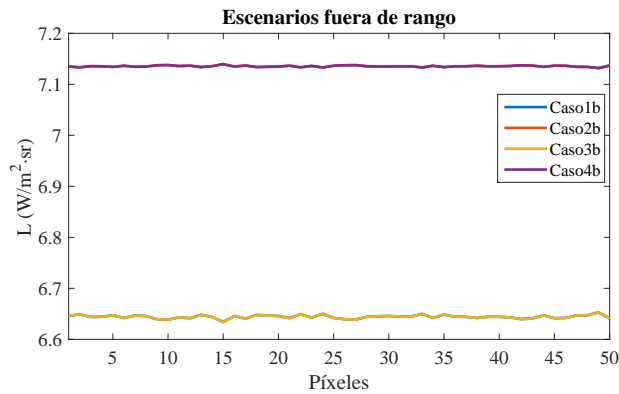
Comparaciones. A fin de compara los resultados en cuanto a grado de uniformización y exactitud del valor recuperado de radiancia, mostramos en la figura A.6 un perfil horizontal de la imagen de radiancia obtenido para cada caso: en (a) para los 4 casos en los que se ha analizado la imagen escenario dentro de rango lineal (casos a) y en (b) para los 4 casos en los que se ha analizado la imagen escenario fuera de rango lineal (casos b) .

Si en lugar de perfiles horizontales, tenemos una imagen, podemos comprobar que sólo en el caso 1a (que sería el caso de calibración ideal), la imagen se ha uniformizado correctamente, dando para todos los píxeles el mismo valor de radiancia para una misma temperatura. Se puede apreciar la diferencia en las dos imágenes de la figura A.7.

En la tabla A.6 se muestra cuál era la dispersión de los datos antes y después de realizar las calibraciones.



(a) Líneas horizontales para los 4 casos en los que la imagen escenario estaba dentro del rango lineal. Los casos 1a y 3a coinciden y proporcionan el valor correcto y uniforme. Los casos 2a y 4a coinciden pero al tener las referencias fuera de rango no recuperan el valor correcto de radiancia y lo hacen con ruido.



(b) Líneas horizontales para los 4 casos en los que la imagen escenario estaba fuera del rango lineal. Los casos 1b y 3b coinciden, así como los 2b y 4b, pero ahora en ningún caso se recupera el valor correcto y tampoco se consigue uniformizar.

Figura A.6: Resumen de las uniformizaciones-calibraciones obtenidas para cada uno de los casos analizados

Para diferenciar los resultados obtenidos, dividiremos las conclusiones por un lado los casos a (escenario dentro de rango lineal) y por otro lado, los casos b (escenario fuera de rango lineal):

- **Escenario dentro de rango lineal:** Los casos 1a y 3a, cuyas referencias están dentro de rango lineal, reproducen prácticamente error (0%) los valores esperables de radiancia, que en este caso era $L = 2W/m^2 \cdot sr$. En cambio, si se utilizan referencias fuera de rango lineal (casos 2a y 4a) aunque el escenario esté dentro de rango lineal, los errores cometidos en la recuperación del valor esperado aumentan considerablemente y en ambos casos, se recupera una sobreestimación de la radiancia (+5,77%).
- **Escenario fuera de rango lineal:** En estos cuatro casos no se recupera en ninguna

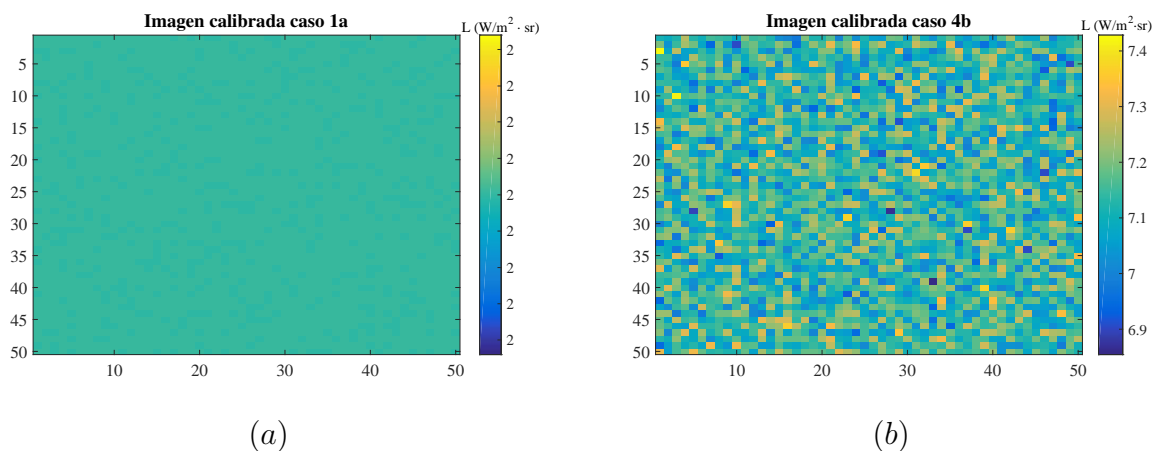


Figura A.7: Ejemplo de imágenes de calibración. (a) Caso 1a; (b) Caso 4b

	σ_{ND}	$(\sigma_{ND} / \langle ND \rangle) \times 100$	σ_L	$(\frac{\langle L \rangle - L_{esperable}}{L_{esperable}}) \times 100 (\%)$
Caso 1a	2.22	$5,51 \cdot 10^{-4}$	$4,97 \cdot 10^{-17}$	0
Caso 2a			$1,58 \cdot 10^{-4}$	+ 5.77
Caso 3a			$6,87 \cdot 10^{-17}$	0
Caso 4a			$1,58 \cdot 10^{-4}$	+5.77
Caso 1b	7.65	$9,03 \cdot 10^{-4}$	$4,50 \cdot 10^{-4}$	-5.08
Caso 2b			$1,85 \cdot 10^{-4}$	+1.94
Caso 3b			$4,50 \cdot 10^{-4}$	-5.08
Caso 4b			$1,85 \cdot 10^{-4}$	+1.94

Tabla A.6: Desviación estándar y tantos por ciento en la dispersión de los valores de la imagen antes y después de la calibración. El subíndice ND se refiere a las imágenes antes de procesar mientras que el subíndice L a las imágenes una vez procesadas.

simulación la radiancia esperada. Aunque se puede apreciar que los casos que dan valores más cercanos son el 2b y el 4b, que son con los que se ha trabajado también (al igual que el escenario) con referencias fuera de rango lineal; siendo +1,94 % los porcentajes obtenidos en ambos casos.

En resumen, en vista de los resultados obtenidos se puede afirmar que no se aprecia ninguna diferencia entre el calibrado con uniformización y el calibrado directo

A.2.2. Comprobación de la calibración en imágenes experimentales

Una vez hechas las comprobaciones en imágenes simuladas, vamos a ver qué ocurre con imágenes reales. La cámara que se ha utilizado para este estudio es la misma que la usada a lo largo de toda la tesis, es decir una cámara multispectral refrigerada de Thermosensorik, modelo 640, trabajando en el rango de $3 - 5 \mu m$.

Para obtener la respuesta del detector en el laboratorio, vamos a hacer uso de dos cuerpos negros extensos diferentes: uno para temperaturas desde $12^{\circ}C$ hasta $45^{\circ}C$ (al que llamaremos *cuerpo negro pequeño*) y otro para temperaturas desde $50^{\circ}C$ hasta $80^{\circ}C$ (que denominaremos *cuerpo negro grande*). Los casos que estudiaremos serán los mismos que en el apartado [A.2.1].

La respuesta del detector para varios píxeles en un área central es la que viene dada por la curva representada en la figura A.8.

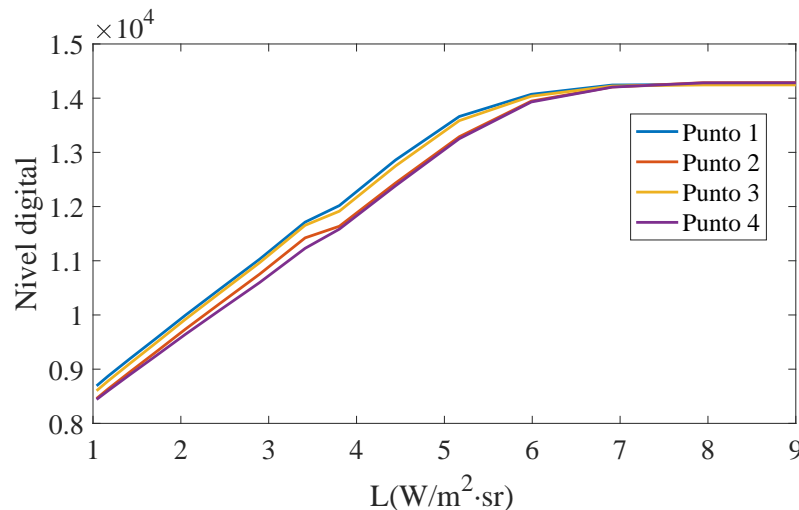


Figura A.8: Curvas de respuesta del detector para una cámara IR trabajando en el rango de $3 - 5 \mu m$. Se representa nivel digital frente a radiancia integrada para cuatro puntos distintos del detector.

Como se puede apreciar, para valores grandes de la radiancia, la respuesta del detector no es lineal. Esto nos servirá para poder hacer las suposiciones que se hicieron en el

apartado [A.2.1] y comprobar qué mejoras presenta cada tipo de calibración de un modo experimental.

Cuerpo negro grande: Para obtener imágenes y referencias dentro y fuera del rango lineal, en los casos que se mostrarán a continuación, se ha trabajado con lo que llamamos *cuerpo negro grande*. Éste es igualmente un cuerpo negro extenso pero que alcanza mayores temperaturas, por lo que podremos llevar al detector a regímenes de trabajo no lineales y así poder comprobar todos los casos de manera análoga al apartado [A.2.1] de las imágenes simuladas. El estudio de la respuesta de un píxel cualquiera nos da la curva que se

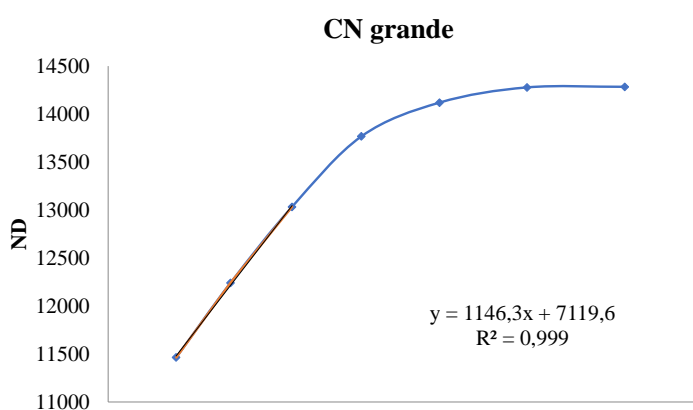


Figura A.9: Respuesta del detector para el rango de temperaturas con el que se ha trabajado con el CN grande. En rojo, la zona lineal junto a los valores escalares de ganancia y offset.

presenta en la figura A.9. Para este CN se han tomado las siguientes temperaturas: 50, 55, 60, 65, 70, 75 y 80 °C. Como se puede observar, existe un rango lineal que corresponde a la región comprendida entre los 50 y los 60°C y que en la figura está representado en color rojo y un rango claramente no lineal (color azul). Los valores utilizados para cada caso aparecen en la tabla A.7.

Comparaciones: En la figura A.10 se presentan los resultados obtenidos para todos los casos cuando el escenario estaba dentro de rango lineal (casos a) y cuando el escenario estaba fuera de rango lineal (casos b).

Por último, en la tabla A.8, se presentan las desviaciones típicas y las desviaciones en % para cada uno de los casos.

	T (°C)
Escenario dentro rango lineal	55
Escenario fuera rango lineal	70
Referencia fría dentro rango lineal	50
Referencia caliente dentro rango lineal	60
Referencia fría fuera rango lineal	50
Referencia caliente dentro rango lineal	75

Tabla A.7: Valores de temperatura escogidos para los escenarios y las referencias utilizados en cada uno de los casos en la comprobación de las calibraciones.

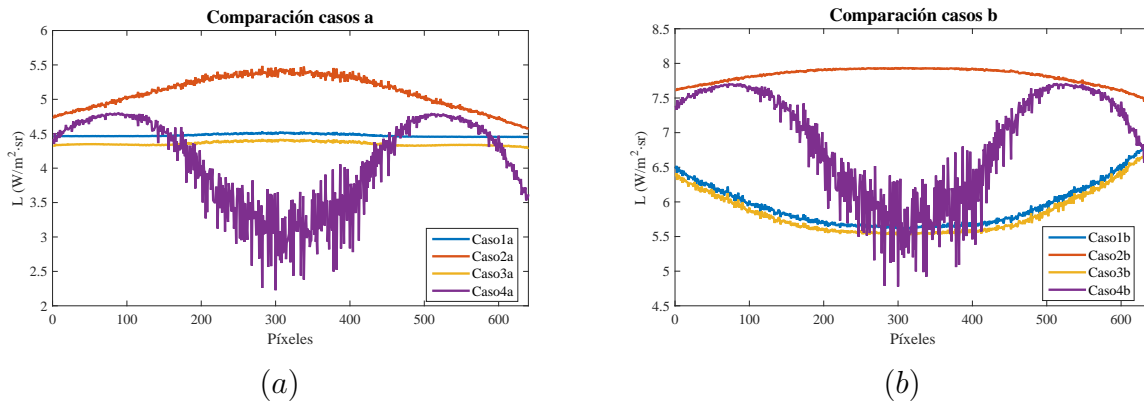


Figura A.10: (a) Comparación de los 4 casos estudiados para escenario dentro de rango lineal; (b) Comparación de los 4 casos estudiados para escenario fuera de rango lineal.

	σ_{ND}	$(\sigma_{ND}/\langle ND \rangle) \times 100$	σ_L	$(\sigma_L/\langle L \rangle)(\%)$
Caso 1a	435.01	3.49	0.02	0.45
Caso 2a			0.24	4.69
Caso 3a			0.03	0.65
Caso 4a			0.64	15.65
Caso 1b	117.698	0.8296	0.32	5.38
Caso 2b			0.12	1.54
Caso 3b			0.32	5.45
Caso 4b			0.75	10.94

Tabla A.8: Desviación estándar y tantos por ciento en la dispersión de los valores de la imagen antes y después de la calibración. El subíndice ND se refiere a las imágenes antes de procesar mientras que el subíndice L a las imágenes una vez procesadas.

Curriculum Vitæ y contribuciones

Curriculum Vitæ

Celeste Beatriz Justo María es Licenciada en Física por la Universidad Complutense de Madrid (2010). En el año 2013 cursó el Máster en Ciencia e Ingeniería de Materiales en la Universidad Carlos III de Madrid, que proporciona acceso directo al Programa de Doctorado en Ciencia en Ingeniería de Materiales. Desde el año 2011 forma parte del grupo de investigación del Laboratorio de Sensores, Teledetección e Imagen IR, dentro del Departamento de Física de la Universidad Carlos III de Madrid y, desde el año 2013, desempeña sus tareas en base a un contrato para Personal Investigador Pre-doctoral en Formación (PIPF).

Publicaciones científicas

- S. Sánchez-Carballido, C. Justo-María, J. Meléndez, and F. López. Measurement of the thermal parameters of composite materials during fire tests with quantitative infrared imaging. *Fire Technology*, (2017).
- S. Sánchez-Carballido, C. Justo-María, J. Meléndez, and F. López. A Quantitative Infrared Imaging System for In Situ Characterization of Composite Materials in Fire Tests. *Fire Technology*, 1-23, (2016).
- S. Sánchez-Carballido, C. Justo-María, J. Meléndez, F. Cortés and F. López, F.J. López. del Cerro. Experimental Determination of the Thermal Parameters of Carbon Fibre Composite Materials Exposed to Fire by Infrared Imaging Pulse Thermography. *International Journal of Thermophysics*, Vol 34, pp 1606-16016, Ed. Science+Business Media, New York, (2013).

Contribuciones a congresos científicos

- C. Justo-María, S. Sánchez-Carballido, J. Meléndez and F. López. Thermal characterization by statistical analysis of IR thermographic images. *19th International conference on photoacoustic and photothermal phenomena* (2017).

- C. Justo-María, S. Sánchez-Carballido, J. Meléndez and F. López. Detección y cuantificación de porosidad en materiales compuestos mediante técnicas de análisis no destructivo infrarrojo. *XIII Congreso nacional de ensayos no destructivos* (2015).
- C. Justo-María, S. Sánchez-Carballido, J. Meléndez and F. López. Thermal characterization of composite materials exposed to fire: Quantitative comparison between classic and infrared-nondestructive methods. *12th QIRT Conference* (2014).
- C. Justo-María, S. Sánchez-Carballido, J. Meléndez and F. López. A validated tool for thermal design and the forecasting of behaviour of composite materials exposed to high thermal loads. *12th QIRT Conference* (2014).
- S. Sánchez-Carballido, C. Justo-María and F. López. Contactless thermal parameters characterization based on infrared image methods: Uncertainly improvement of flash method for thin samples. *11th European Conference on Non-Destructive Testing (ECNDT)* (2014).
- C. Justo-María, S. Sánchez-Carballido and F. López. A novel methodology for thermal characterization of composite materials at high temperature: Application to thermal shields. *6th International Symposium on NDT in Aerospace* (2014).
- C. Justo-María, S. Sánchez-Carballido, and F. López. Termografía multibanda: un procedimiento para la medida precisa y sin contacto de la temperatura. *5º Congreso español de metrología (CEM)* (2013).
- C. Justo-María, S. Sánchez-Carballido and F. López. Active thermography: finding and characterizing hidden defects inside materials. *10º Congreso nacional del color* (2013).
- S. Sánchez-Carballido, C. Justo-María and F. López. A tool to buried defects characterization in materials. *International workshop on reliability engineering in scientific installations* (2012).
- C. Justo-María, S. Sánchez-Carballido and F. López. Termografía infrarroja para la caracterización térmica sincontacto de materiales aislantes mediante la adaptación del método flash clásico. *10ª Reunión nacional de óptica* (2012).
- S. Sánchez-Carballido, C. Justo-María, F. Cortés, J. Meléndez, F. López and F.J. López del Cerro. Infrared thermography for non-invasive characterization of thermal properties of CFR-Composite materials exposed to fire. *11th QIRT Conference* (2012).

- S. Sánchez-Carballido, C. Justo-María, F. Cortés, J. Meléndez, F. López and F.J. López del Cerro. Experimental determination of thermal parameters of insulating and conductive plates by infrared imaging pulse thermography. *16th International conference on photoacoustic and photothermal phenomena* (2011).

Participación en Proyectos de I+D competitivos financiados en convocatorias públicas

Los proyectos de investigación más destacados en los que la autora de este trabajo ha participado, como miembro del grupo LIR-UC3M, son:

- **SENSOR DE POLVO MARCIANO MEIGA-METNET BASADO EN UN MICRO-SENSOR ESPECTRAL INFRARROJO Y EN UN BARREDOR DE POLVO**
Organismo financiador: Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN). AYA2011-29967-C05-03.
Entidades participantes: INTA, UCM, Universidad Carlos III de Madrid, Universidad de Sevilla, U.P. Cataluña.
Período de ejecución previsto: enero 2012-diciembre 2014.
Investigador responsable: Fernando López.
Número de investigadores participantes: 9.
- **CREACIÓN DE UN SISTEMA MULTICARRIL DE DETECCIÓN DE LAS EMISIONES Y CONSUMOS DEL TRÁFICO CIRCULANTE**
Organismo financiador: Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN). IPT-310000-2010-31.
Entidades participantes: OPIs: Universidad Carlos III de Madrid, CIEMAT; Empresas; Technet, TEVA, TELVENT.
Período de ejecución previsto: 2010-2013.
Investigador Principal: Fernando López.
Número de investigadores participantes: 5

Participación en Proyectos de I+D de especial relevancia con empresas

- **CHARACTERIZATION OF THERMO-MECHANICAL BEHAVIOUR OF COMPOSITE MATERIALS IN FIRE AND EMPIRICAL DETERMINATION OF THEIR PROPERTIES**

Tipo de contrato: I+D.

Entidad financiadora: AIRBUS GROUP DEFENCE AND SPACE S.A.U

Duración: Año 2017

Investigador Responsable: Fernando López.

Número de investigadores participantes: 8

■ **CARACTERIZACIÓN DE CONDUCTIVIDAD TÉRMICA.**

Tipo de contrato: I+D.

Entidad financiadora: AIRBUS GROUP DEFENCE AND SPACE S.A.U

Duración: Año 2016

Investigador Responsable: Fernando López.

Número de investigadores participantes: 8

■ **OBTAINING EMPIRICALLY THERMAL DIFFUSIVITY, THERMAL CONDUCTIVITY AND SPECIFIC CAPACITY OF COMPOSITE SPECIMENS IN FIRE. VALIDATION THROUGH MODELS.**

Tipo de contrato: I+D.

Entidad financiadora: AIRBUS GROUP DEFENCE AND SPACE S.A.U

Duración: Año 2015

Investigador Responsable: Fernando López.

Número de investigadores participantes: 14

■ **PROYECTO DE INVESTIGACIÓN EN SISTEMAS AVANZADOS PARA UN AVIÓN MÁS ECO-EFICIENTE PROSAVE-OBTENCIÓN EMPÍRICA DE LA DIFUSIVIDAD, CAPACIDAD CALORÍFICA, CONDUCTIVIDAD Y CALOR ESPECÍFICO DE ESPECÍMENES PLANOS SOMETIDOS A FUEGO. VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS.**

Tipo de contrato: I+D.

Empresa/Administración financiadora: AIRBUS.

Entidades participantes: Universidad Carlos III de Madrid.

Duración: 2013-2014.

Investigador Responsable: Fernando López.

Número de investigadores participantes: 13

■ **OBTENCIÓN EMPÍRICA DE LA DIFUSIVIDAD, CAPACIDAD CALORÍFICA, CONDUCTIVIDAD Y CALOR ESPECÍFICO DE ESPECÍMENES PLANOS SOMETIDOS A FUEGO.**

Tipo de contrato: I+D.

Empresa/Administración financiadora: AIRBUS.

Entidades participantes: Universidad Carlos III de Madrid.

Duración: Año 2012.

Investigador Responsable: Fernando López.

Número de investigadores participantes: 7

■ **OBTENCIÓN EMPÍRICA DE PARÁMETROS PARA VALIDAR MÉTODOS DE CÁLCULO QUE DETERMINAN EL COMPORTAMIENTO DE ESPECÍMENES SOMETIDOS A FUEGO.**

Tipo de contrato: I+D.

Empresa/ Administración financiadora: AIRBUS.

Entidades participantes: Universidad Carlos III de Madrid.

Duración: Año 2011.

Investigador Responsable: Fernando López.

Número de investigadores participantes: 5

Glosario de términos

Lista de acrónimos

amb	Ambiente
CFRP	Polímeros reforzados de fibra de carbono (del inglés <i>Carbon Fiber Reinforced Polymers</i>)
CN	Cuerpo Negro
FFT	Transformada rápida de Fourier (del inglés <i>Fast Fourier Transform</i>)
FPA	Matriz de plano focal (del inglés <i>Focal Plane Array</i>)
<i>ft</i>	Función de transferencia
GFRC	Polímeros reforzados de fibra de vidrio (del inglés <i>Glass Fiber Reinforced Polymers</i>)
IR	Infrarrojo
<i>ir.f</i>	Función de respuesta a impulso (del inglés <i>Impulse Response Function</i>)
MIR	Infrarrojo medio (del inglés <i>Mid InfraRed</i>)
ND	Nivel Digital
NDT	Análisis no destructivo (del inglés <i>Non-Destructive Testing</i>)
NDT-IR	Análisis no destructivo infrarrojo (del inglés <i>Non-Destructive Testing InfraRed</i>)
NIR	Infrarrojo cercano (del inglés <i>Near InfraRed</i>)
obj	Objeto

- PCA Análisis por componentes principales
(del inglés *Principal Component Analysis*)
- PCs Componentes Principales
(del inglés *Principal Components*)
- PCT Termografía por componentes principales
(del inglés *Principal Component Thermography*)
- PT Termografía pulsada
(del inglés *Pulsed Thermography*)
- SDPT Sistema Dual de Perfiles Térmicos
- SNR Relación señal a ruido
(del inglés *Signal Noise Ratio*)
- SWIR Infrarrojo de onda corta
(del inglés *Short Wavelength InfraRed*)
- TF Transformada de Fourier
- TIR Infrarrojo térmico
(del inglés *Thermal Infrared*)

Símbolos

α	Difusividad térmica (m^2/s)
α_{adaptado}	Difusividad térmica obtenida mediante el método flash adaptado
$\alpha_{\text{multivariable}}$	Difusividad térmica obtenida mediante el ajuste multivariable
α_{PCA}	Difusividad térmica obtenida mediante el análisis de componentes principales
$\alpha_{t_{0,5}}$	Difusividad térmica obtenida mediante el método flash clásico
Bi	Número de biot (adimensional)
c_p	Calor específico (J/kgK)
C_r	Contraste relativo
ε	Emisividad (adimensional)
$\vec{\phi}$	Vector de densidad de flujo de calor (W/m^2)
ϕ_0	Densidad de flujo externo de radiación (W/m^2)
h	Coefficiente de transferencia de calor (W/m^2K)
h_D	Coefficiente de transferencia de calor para la cara delantera (W/m^2K)
h^{ef}	Coefficiente de convección eficaz (W/m^2K)
h_T	Coefficiente de transferencia de calor para la cara trasera (W/m^2K)
κ	Conductividad térmica (W/mK)
\dot{q}	Tasa de transferencia de calor (W)
Q_0	Energía por unidad de área (J/m^2)
ρc_p	Calor específico volumétrico (J/m^3K)
s	Variable de la Transformada de Laplace en el dominio de la frecuencia

t^*	t estrella: tiempo adimensional o <i>número de Fourier</i>
t_{fin}	Duración de la excitación escalón (s)
t_{max}	tiempo que tarda la muestra en alcanzar la T_{max} (s)
t_{min}^*	Valor mínimo del vector de tiempos para la convolución (adimensional)
t_{step}^*	Valor del paso del vector de tiempos para la convolución (adimensional)
$t_{0,5}$	tiempo que tarda la muestra en alcanzar la mitad de su T_{max} (s)
T^*	Temperatura normalizada
T_{def}	Temperatura en zona de defecto
$T(L)$	Temperatura en cara trasera medida respecto al ambiente (K)
T_{lim}	Temperatura adiabática final
T_{max}	Temperatura máxima alcanzada
T_{sano}	Temperatura en zona sin defecto
$T_{semi-inf}$	Temperatura del sólido semiinfinito
$T(0)$	Temperatura en cara delantera medida respecto al ambiente (K)
$U(L, t)$	Evolución de la temperatura normalizada a T_{lim} en cara trasera

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

- [1] W. Al Hadad, D. Maillet, A. Stéphane, and B. Rémy. Regularization using truncated singular value decomposition for estimating the Fourier spectrum of a noise space distribution over an extended support. *Computer assisted methods in engineering and science*, 21:211–222, 2014.
- [2] D.P. Almond, R.J. Ball, A. Dillenz, G. Busse, J.C. Krapez, F. Galmiche, and X.P.V. Maldague. Round robin comparison II of the capabilities of various thermographic techniques in the detection of defects in carbon fibre composites. In *Proceedings of Quantitative Infrared Conference 00*. QIRT, 2000.
- [3] J.M Aranda, A.J. de Castro, J. Meléndez, F. Cortés, I. Fernández-Gómez, and F. López. The design of an infrared sensor for the measurement of martian surface temperature and gas concentration. In *Proceedings of the 2009 spanish conference of electron devices*, pages 301–304. IEEE, 2009.
- [4] R.W. Arndt. Square pulse thermography in frequency domain as adaptation of pulsed phase thermography for qualitative and quantitative applications in cultural heritage and civil engineering. *Infrared physics technology*, 53:246–53, 2010.
- [5] V.S. Arpaci and P.S. Larsen. *Convection heat transfer*. Prentice Hall, 1984.
- [6] T. Baba and A. Ono. Improvement of the laser flash method to reduce uncertainty in thermal diffusivity measurements. *Measurement Science and Technology*, 12:2046–2057, 2001.
- [7] A.A. Badghaish and D.C. Fleming. Non-destructive inspection of composites using step heating thermography. *Journal of Composite Materials*, 42(13):1337–21, 2008.
- [8] A.A. Badghaish and D.C. Fleming. Quantitative characterization of resistive defects in thick composites using step heating thermography. *Thermosense XXX*, 6939, 2008.
- [9] D. Balageas. Personal thoughts on the occasions of the Xth QIRT conference. In *Proceedings of 10th Quantitative Infrared Conference*, page 10. QIRT, 2010.
- [10] D. Balageas. Defense and illustration of time-resolved pulsed thermography for NDE. *Thermosense: Thermal infrared applications XXXIII*, 8013, 2013.

- [11] D. Balageas, X. Maldague, D. Burleigh, V.P. Vavilov, B. Oswald-Tranta, J.M. Roche, C. Pradere, and G.M. Carlomagno. Thermal IR and other NDT techniques for improved material inspection. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 35(18), 2016.
- [12] D.L. Balageas. Nouvelle méthode d'interprétation des thermogrammes pour la détermination de la diffusivité thermique par la méthode impulsionnelle (méthode "flash"). *Revue de physique appliquée*, 17(4):227–237, 1982.
- [13] D.L. Balageas. Thermal diffusivity measurement by pulsed methods. In *11th ETPC, Umea*, 1988.
- [14] D.L. Balageas. Thickness or diffusivity measurements from front-face flash experiments using the TSR (thermographic signal reconstruction) approach. In *Proceedings of 10th Quantitative Infrared Conference*, page 8. QIRT, 2010.
- [15] D.L. Balageas. In search of early time: An original approach in the thermographic identification of thermophysical properties and defects. *Advances in Optical Technologies*, 1(2):85 – 91, 2013.
- [16] D.L. Balageas, B. Chapuis, G. Deban, and F. Passilly. Quantitative assessment of the improvement of the detection of defects by pulse thermography thanks to the TSR approach in the case of a smart composite repair patch. In *Proceedings of 10th Quantitative Infrared Conference*, page 8. QIRT, 2010.
- [17] D.L. Balageas and J.M. Roche. Common tools for quantitative time-resolved pulse and step-heating thermography-part I: theoretical basis. *Quantitative InfraRed Thermography Journal*, 11(1), 2014.
- [18] D.L. Balageas and J.M. Roche. Common tools for quantitative time-resolved pulse and step-heating thermography-part II: experimental validation. *Quantitative Infra-Red Thermography Journal*, 11(1), 2014.
- [19] D.L. Balageas, J.M. Roche, and F.H. Leroy. Quantitative assessment of defect characterisation using TSR coefficient images. In *Proceedings of the Quantitative Infrared Conference Asia 2015*, page 10. QIRT, 2015.
- [20] J.V. Beck, B. Blackwell, and A. Haji-Sheikh. Comparison of some inverse heat conduction methods using experimental data. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(17):3649–3657, 1996.
- [21] C. Berge, N. Froloff, R.K.R. Kalathur, M. Maumy, O. Poch, W. Raffelsberger, and N. Wicker. Multidimensional fitting for multivariate data analysis. *Journal of computational biology*, 17(5):723–732, 2010.

- [22] E.A. Birt and E.A. Smith. A review of NDE methods for porosity measurement in fibre-reinforced polymer composites. *Insight - Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*, 46(11):681–686, 2004.
- [23] P.G. Bison, S. Marinetti, A. Mazzoldi, E. Grinzato, and C. Bressan. Cross-comparison of thermal diffusivity measurements by thermal methods. *Infrared Physics & Technology*, 43:127–132, 2002.
- [24] R.R. Bittle and R.E. Taylor. Step-heating technique for thermal diffusivity measurements of large-grained heterogeneous materials. *Journal of Am. Ceram. Soc.*, 67:186–190, 1984.
- [25] R.R. Bittle and R.E. Taylor. Thermal diffusivity of heterogeneous materials and non-fibrous insulators. *Thermal conductivity*, 18:379–390, 1985.
- [26] M. Bordallo. *Reducción de la dimensionalidad y modelado de datos a partir de la señal obtenida por un equipo de imagen hiperespectral*, 2017. Universidad Carlos III de Madrid. Proyecto Fin de Carrera.
- [27] C. Boué and S. Holé. Infrared thermography protocol for simple measurements of thermal diffusivity and conductivity. *Infrared Physics & Technology*, 55:376–379, 2012.
- [28] A.I. Brown and S.M. Marco. *Introduction to heat transfer*. McGraw-Hill book company, 1958.
- [29] H. Budzier and G. Gerlach. Calibration of uncooled thermal infrared cameras. *Journal of Sensors and Sensor Systems*, 4:187–197, 2015.
- [30] G. Busse. Nondestructive evaluation of polymer materials. *NDT&E*, 24:253–262, 1994.
- [31] G. Busse. Lockin thermography: principles, NDE applications and trends. In *Proceedings of Quantitative Infrared Conference 2014*. QIRT, 2014.
- [32] H.S. Carslaw and J.C. Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Oxford and the clarendon press, 1959.
- [33] F. Cernuschi, L. Lorenzoni, P. Bianchi, and A. Figari. The effects of sample surface treatments on laser flash thermal diffusivity measurements. *Infrared Physics & Technology*, 43:133–138, 2002.
- [34] F. Cernuschi, A. Russo, L. Lorenzoni, and A. Figari. In-plane thermal diffusivity evaluation by infrared thermography. *Review of Scientific instruments*, 27(10), 2001.

- [35] T.P. Chu, S.S. Russell, J.L. Walker, and P.M. Munafo. Porosity measurement in laminated composites by thermography and FEA. In *Proceedings of 2001 society for experimental stress analysis spring conference, Portland, OR, USA*, 2001.
- [36] A. Ciliberto, G. Cavaccini, O. Salvetti, M. Chimenti, L. Azzarelli, P.G. Bison, S. Marinetti, A. Freda, and E. Grinzato. Porosity detection in composite aeronautical structures. *Infrared Physics & Technology*, 43:139–143, 2002.
- [37] M.J. Colaço, H.R.B. Orlande, and G.S. Dulikravich. Inverse and optimization problems in heat transfer. *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci & Eng.*, 28, 2006.
- [38] M.P. Connolly. The measurement of porosity in composite materials using infrared thermography. *Journal of reinforced plastics and composites*, 11(12):1367–1375, 1992.
- [39] K.E. Cramer and W.P. Winfree. The application of infrared thermographic inspection techniques to the space shuttle thermal protection system. In *5th Regional conference on Non destructive and structural testing*, 2005.
- [40] R. Cuppens. Sur un problème de R. Shimizu. *Journal of multivariate analysis*, 1:276–287, 1971.
- [41] W.M. Daniel. Conduction heat transfer. Notes for MECH 7210. Technical report, Mechanical engineering department, 2016.
- [42] P. Daryabor and M.S. Safizadeh. Investigation of defect characteristics and heat transfer in step heating thermography of metal plates repaired with composite patches. *Infrared Physics & Technology*, 76:608–620, 2016.
- [43] A. Degiovanni. Diffusivité et méthode flash. *Rev. Gén. Therm. Fr.*, 185:420–442, 1977.
- [44] A.P. Dempster. An overview of multivariable analysis. *Journal of multivariate analysis*, 1:316–346, 1971.
- [45] Z.L. Deng and X.M. Yang. A discretized tikhonov regularization method for a fractional backward heat conduction problem. *Abstract and applied analysis*, 2014, 2014.
- [46] A.B. Donaldson and R.E. Taylor. Thermal diffusivity measurement by a radial heat flow method. *Journal of applied physics*, 46(10):4584–4589, 1975.
- [47] Y. Duan, P. Servais, M. Genest, C. Ibarra-Castanedo, and X.P.V. Maldague. Thermopod: A reliability study on active infrared thermography for the inspection of composite materials. *Journal of mechanical science and technology*, 26(7):1985–1991, 2012.

- [48] P. Duda. Numerical and experimental verification of two methods for solving an inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 84:1101–1112, 2015.
- [49] J. Dumoulin, L. Ibos, A. Mazioud, and M. Marchetti. Detection of non emergent defects in asphalt pavement samples by long pulse and pulse phase infrared thermography. *Eur J Environ Civ Eng*, 15(4):557–74, 2011.
- [50] ENVI. *version 4.5*. ITT Visual information solutions., 2008.
- [51] B.J. Evans. <https://library.seg.org/doi/pdf/10.1190/tle14101039.1>.
- [52] B.J. Evans. Long division solves the mathematics of inverse convolution. *The Leading Edge*, 14(5):321–322, 1995.
- [53] A.P. Fernandes. *Função transferência analítica aplicada à solução de problema inverso em condução de calor*. PhD thesis, Universidade federal de Uberlândia, 2013.
- [54] A.P. Fernandes, M. Braga dos Santos, and G. Guimarães. An analytical transfer function method to solve inverse heat conduction problems. *Applied mathematical modelling*, 39:6897–6914, 2015.
- [55] V. Feuillet, N. Dujardin, M. Fois, L. Ibos, C. Poilâne, and Y. Candau. Pulsed thermography: A useful tool to determine porosity in composite materials. In *Proceedings of the 11th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography, Naples, Italy*, volume 1114, page 9, 2012.
- [56] V. Feuillet, L. Ibos, M. Fois, J. Dumoulin, and Y. Candau. Defect detection and characterization in composite materials using square pulse thermography coupled with singular value decomposition analysis and thermal quadrupole modeling. *NDT & E International*, 51:58 – 67, 2012.
- [57] P. Flusser. A generalization of a theorem by M.V. Tamhankar. *Journal of multivariate analysis*, 1:288–293, 1971.
- [58] N.A. Golsorkhi and H.A. Tehrani. Levenberg-Marquardt method for solving the inverse heat transfer problems. *Journal of mathematics and computer science*, 13:300–310, 2014.
- [59] D. Griefahn, J. Wollnack, and W. Hintze. Principal component analysis for fast and automated thermographic inspection of internal structures in sandwich parts. *Journal of Sensors and Sensor Systems*, 3(1):105–111, 2014.

- [60] A. Griesinger, W. Hurler, and M. Pietralla. A photothermal method with step heating for measuring the thermal diffusivity of anisotropic solids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(13):3049–3058, 1997.
- [61] R. Gupta and S. Tuli. Electro-thermal modelling and analysis for estimation of defect parameters by stepped infrared thermography. *NDT & E*, 38:11–19, 2005.
- [62] C. Hansen. The truncated SVD as method for regularization. Technical report, Computer Science department, Stanford University, 1986.
- [63] C. Hansen. Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equations of the first kind. *Inverse problem*, 8:849–872, 1992.
- [64] C. Hansen. Deconvolution and regularization with Toeplitz matrices. *Numerical Algorithms*, 29:323–378, 2002.
- [65] C. Hansen. Regularization tools version 4.0 for Matlab 7.3. *Numer Algor*, 46:189–194, 2007.
- [66] T. Hatakeyama and F.X. Quinn. *Thermal analysis: Fundamentals and Applications to Polymer Science*. Wiley, 2 edition, 1999.
- [67] B. Hay, J.R. Filtz, J. Hameury, and L. Rongione. Uncertainty of thermal diffusivity measurements by laser flash method. *International Journal of Thermophysics*, 26(6):1883–1898, 2005.
- [68] F. Hemberger, H.P. Ebert, and Fricke J. Determination of the local thermal diffusivity of inhomogeneous samples by a modified laser-flash method. *International Journal of Thermophysics*, 28(5):1509–1520, 2007.
- [69] G. Hendorfer, G. Mayr, G. Zauner, M. Haslhofer, and R. Pree. Quantitative determination of porosity by active thermography. In *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation; Volume 26 A(AIP Conference Proceedings Volume 894)*, volume 894, pages 702–708, 2007.
- [70] R. Hidalgo-Gato, J.R. Andrés, J.M. López-Higuera, and F.J. Madruga. Quantification by signal to noise ratio of active infrared thermography data processing techniques. *Optics and photonics journal*, 3:20–26, 2013.
- [71] G.C. Holst. *Common sense approach to thermal imaging*. SPIE Optical Engineering Press & JCD publishing, 2000.

- [72] Y.C. Hon and T. Wei. A fundamental solution method for inverse heat conduction problem. *Engineering analysis with boundary elements*, 28:489–495, 2015.
- [73] H. Hotelling. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 4(6):417–441, 1933.
- [74] C.H. Huang and S.P. Wang. A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42:3387–3403, 1999.
- [75] C.H. Huang and J.Y. Yan. An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(18):3433–3441, 1995.
- [76] M.S. Hussein. *Coefficient identification problems in heat transfer*. PhD thesis, The university of leeds. Department of applied mathematics, 2016.
- [77] H. Hyötyniemi. Multivariate regression. Technical report, Control engineering laboratory, Helsinki university of technology, 2001.
- [78] C. Ibarra-Castanedo, D. Gonzalez, M. Klein, M. Pilla, S. Vallerand, and X. Maldague. Infrared image processing and data analysis. *Infrared physics & technology*, 46(1):75–83, 2004.
- [79] C. Ibarra-Castanedo, J.R. Tarpani, and X.P.V. Maldague. Nondestructive testing with thermography. *European journal of physics*, 34:91–109, 2013.
- [80] R.A. Johnson and D.W. Wichern. *Applied multivariate statistical analysis*. Pearson education international, 7 edition, 2007.
- [81] R. Joven. Thermal properties of carbon fiber/epoxy composites with different fabric weaves. In *SAMPE International Symposium*. SAMPE, 2012.
- [82] L. Junyan, L. Liqiang, and W. Yang. Experimental study on active infrared thermography as a NDI tool for carbon-carbon composites. *Composites: Part B*, 45:138–145, 2013.
- [83] H. Kaplan. *Practical applications of infrared thermal sensing and imaging equipment*. SPIE Optical Engineering Press, 1999.
- [84] H. Kato, T. Baba, and M. Okaji. Anisotropic thermal-diffusivity measurement by a new laser-spot-heating technique. *Measurement Science and Technology*, 12:2074–2080, 2001.

- [85] P.G. Klemens. Thermal conductivity of inhomogeneous media. *High Temperatures - High Pressures*, 23:241–248, 1991.
- [86] R. Krankenhagen and C. Maierhofer. Measurement of the radiative energy output of flash lamps by means of thermal thin probes. *Infrared Physics & Technology*, 67:363–370, 2014.
- [87] J.C. Krapez and D. Balageas. Early detection of thermal contrast in pulsed stimulated infrared thermography. In *Proceedings of Quantitative Infrared Conference 94. QIRT*, 1994.
- [88] P.R. Krishnalah and V.B. Waikar. Exact joint distribution of any few orderer roots of a class of random matrices. *Journal of multivariate analysis*, 1:308–315, 1971.
- [89] M. Krishnapillai, R. Jones, I.H. Marshall, M. Bannister, and N. Rajic. Thermography as a tool for damage assessment. *Composite Structures*, 67(2):149–155, 2005.
- [90] P.W. Kruse and D.D. Skartud. Uncooled infrared imaging arrays and systems. Technical report, San Diego: Academic, 1997.
- [91] K.L. Kuhlman. Review of inverse Laplace transform algorithms for Laplace-space numerical approaches. *Numer Algor*, 2012.
- [92] A. Kuznetsov. On the convergence of the Gaver-Stehfest algorithm. *Siam J. Numer. Anal*, 51(6):2984–2998, 2013.
- [93] B. Lane and E.P. Whitenton. Calibration and measurement procedures for a high magnification thermal camera. Technical report, National institute of standards and technology, 2015.
- [94] K.B. Larson and Koyama K. Correction for finite-pulse-time effects in very thin samples using the flash method of measuring thermal diffusivity. *Journal of applied physics*, 38(2):465–474, 1967.
- [95] K.B. Larson and Koyama K. Measurement by the flash method of thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity in two-layer composite samples. *Journal of applied physics*, 39(9):4408–4416, 1968.
- [96] J.M. Laskar, S. Bagavathiappan, M. Sardar, T. Jayakumar, J. Philip, and Raj B. Measurement of thermal diffusivity of solids using infrared thermography. *Materials Letters*, 62:2740–2742, 2008.

- [97] H. Levinstein and J. Mudar. Infrared detectors in remote sensing. In *Proceedings IEEE 63*, pages 6–14. IEEE, 1975.
- [98] F. Lopez, V. Nicolau, C. Ibarra-Castanedo, and X. Maldague. Thermal-numerical model and computational simulation of pulsed thermography inspection of carbon fiber-reinforced composites. *International Journal of Thermal Sciences*, 86:325–340, 2014.
- [99] N. Ludwig and P. Teruzzi. Heat losses and 3D diffusion phenomena for defect sizing procedures in video pulse thermography. *Infrared Physics & Technology*, 43:297–301, 2002.
- [100] G. Machin, R. Simpson, and M. Broussely. Calibration and validation of thermal imagers. In *Proceedings of 9th Quantitative Infrared Conference*, page 8. QIRT, 2008.
- [101] F.J. Madruga, C. Ibarra-Castanedo, O.M. Conde, J.M. López-Higuera, and X. Maldague. Infrared thermography processing based on higher-order statistics. *NDT&E*, 43:661–666, 2010.
- [102] C. Maierhofer, P. Myrach, M. Reischel, H. Steinfurth, M. Röllig, and M. Kunert. Characterizing damage in CFRP structures using flash thermography in reflection and transmission configurations. *Composites Part B: Engineering*, 57:35–46, 2014.
- [103] Ch. Maierhofer, A. Brink, M. Röllig, and H. Wiggenhauser. Transient thermography for structural investigation of concrete and composites in the near surface region. *Infrared Physics & Technology*, 43:271–278, 2002.
- [104] X. Maldague, F. Galmiche, and A. Ziadi. Advances in pulsed phase thermography. *Infrared Physics & Technology*, 43:175–181, 2002.
- [105] X. Maldague, A. Ziadi, and M. Klein. Double pulse infrared thermography. *{NDT} & E International*, 37(7):559 – 564, 2004.
- [106] X.P.V. Maldague. *Theory and practice of infrared technology for nondestructive testing*. Wiley, New York, 2001.
- [107] S. Manzhos, K. Yamashita, and T.Jr. Carrington. Fitting sparse multidimensional data with low-dimensional terms. *Computer Physics communications*, 180(1):2002–2012, 2009.
- [108] S. Marinetti, E. Grinzato, P.G. Bison, E. Bozzi, M. Chimenti, G. Pieri, and O. Salvetti. Statistical analysis of ir thermographic sequences by pca. *Infrared Physics &*

- Technology*, 46(1–2):85 – 91, 2004. Workshop on Advanced Infrared Technology and Application.
- [109] S. Marinetti, E. Grinzato, P.G. Bison, E. Bozzi, M. Chimenti, G. Pieri, and O. Salvetti. Statistical analysis of IR thermographic sequences by PCA. *Infrared Physics & Technology*, 46:85–91, 2004.
- [110] Wolfram Mathematica. *version 10.2.0.0*. Wolfram Research, Inc., 2015.
- [111] MATLAB. *version 8.5.0.197613 (R2015a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2015.
- [112] G. Mayr, G. Hendorfer, B. Plank, and J. Sekelja. Porosity determination in CFRP specimens by means of pulsed thermography combined with effective thermal diffusivity models. *Review of Quantitative nondestructive evaluation*, 29, 2010.
- [113] G. Mayr and G. Hendorfer. Porosity determination of pulsed thermography in reflection mode. In *Proceedings of 12th Quantitative Infrared Conference*, page 10. QIRT, 2014.
- [114] G. Mayr, B. Plank, J. Gruber, J. Sekelja, and G. Hendorfer. Quantitative evaluation of the effective thermal diffusivity for model-based porosity prediction in CFRP. *Quantitative InfraRed Thermography Journal*, 13(1):70–82, 2016.
- [115] G. Mayr, B. Plank, J. Sekelja, and G. Hendorfer. Active thermography as a quantitative method for non-destructive evaluation of porous carbon fiber reinforced polymers. *NDT & E International*, 44(7):537–543, 2011.
- [116] R.L. McMasters and R.B. Dinwiddie. Anisotropic thermal diffusivity measurement using the flash method. *Journal of thermophysics and heat transfer*, 2014.
- [117] J. Meléndez. Curso de técnicas de medida e instrumentación IR, 2017. Sin publicar.
- [118] J. Meléndez, A. Foronda, J.M. Aranda, F. López, and F.J. López del Cerro. Infrared thermography of solid surfaces in a fire. *Measurement Science and Technology*, 21:10, 2010.
- [119] A.Z. Memon and M. Okamoto. Asymptotic expansion of the distribution of the Z statistic in discriminant analysis. *Journal of multivariate analysis*, 1:294–307, 1971.
- [120] C. Meola, G M. Carlomagno, A. Squillace, and G. Giorleo. Non-destructive control of industrial materials by means of lock-in thermography. *Measurement Science and Technology*, 13(10):1583, 2002.

- [121] C. Meola and G.M. Carlomagno. Recent advances in the use of infrared thermography. *Measurement Science and Technology*, 15(4):27–58, 2004.
- [122] C. Meola and G.M. Carlomagno. Impact damage in GFRP: New insights with infrared thermography. *Composites: Part A*, 41:1839–1847, 2010.
- [123] C. Meola and C. Toscano. Flash thermography to evaluate porosity in carbon fiber reinforced polymer (CFRPs). *Materials*, 7(3):1483–1501, 2014.
- [124] T. Min, B. Geng, and J. Ren. Inverse estimation of the initial condition for the heat equation. *International journal of pure and applied mathematics*, 82, 2012.
- [125] V.A. Mozorov. On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet Mathematics Doklady*, 7(1):414–414, 1966.
- [126] COMSOL MULTIPHYSICS. *version 5.0.1.276*. COMSOL AB, 2014.
- [127] J.C. Murphy, L.C. Aamodt, and J.W. Maclachlan Spicer. Principles of photothermal detection in solids. *Principles and perspectives of photothermal and photoacoustic phenomena*, pages 41–94, 1992.
- [128] NASA. Discovery of infrared light. Technical report, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology.
- [129] NASA. An inverse problem in thermal imaging. Technical report, Institute for computer applications in science and engineering, 1994.
- [130] F.E. Nicodemus. Radiance. Technical report, Defense Technical Information Center, 1962.
- [131] P. Norton, J. Campbell, S. Horn, and D. Reago. Third generation infrared imagers. In *IS&T/SPIE Electronic Imaging*, pages 226–236. International Society for Optics and Photonics, 2000.
- [132] M.A. Omar, R. Parvataneni, and Y. Zhou. A combined approach of self-referencing and principal component thermography for transient, steady, and selective heating scenarios. *Infrared Physics & Technology*, 53:358–362, 2010.
- [133] M.A. Omar, R. Parvataneni, and Y. Zhou. A combined approach of self-referencing and principle component thermography for transient, steady, and selective heating scenarios. *Infrared Physics & Technology*, 53(5):358 – 362, 2010.
- [134] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer. *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, 1975.

- [135] R. Osiander and J.W.M. Spicer. Time-resolved infrared radiometry with step heating. A review. *Rev. Gén. Therm.*, 37:680–692, 1998.
- [136] R. Osiander, J.W.M. Spicer, and J.C. Murphy. Analysis methods for full-field time-resolved infrared radiometry. *Proc. SPIE*, 2766:218–227, 1996.
- [137] B. Oswald-Tranta and S.M. Shepard. Comparison of pulse phase and thermographic signal reconstruction processing methods. *Thermosense: Thermal infrared applications XXXV*, 8705, 2013.
- [138] W.J. Parker, R.J. Jenkins, C.P. Butler, and G.L. Abbott. Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity. *Journal of applied physics*, 32(9):1679–1684, 1961.
- [139] K. Pearson. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine Series 6*, 2(11):559–572, 1901.
- [140] J.F. Pelletier and X. Maldague. Shape from heating: a two dimensional approach for shape extraction in infrared images. *Optical Engineering*, 36(2):370–375, 1997.
- [141] Z. Perkowski. A thermal diffusivity determination method using thermography: theoretical background and verification. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54:2126–2135, 2011.
- [142] William H Press. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007.
- [143] C. Radhakrishna Rao. Estimation of variance and covariance components - MINQUE Theory. *Journal of multivariate analysis*, 1:257–275, 1971.
- [144] N. Rajic. Principal component thermography for flaw contrast enhancement and flaw depth characterisation in composite structures. *Composite Structures*, 58(4):521–528, 2002.
- [145] S. Ranjit and W. Kim. Research on defects detection by image processing of thermographic images. *International journal of composites*, 7(5):1849–1855, 2015.
- [146] P. Ranut. *Optimization and inverse problems in heat transfer*. PhD thesis, Università degli studi di Udine, 2015.
- [147] T.H. Reeve. *The method of fundamental solutions for some direct and inverse problems*. PhD thesis, School of mathematics. Engineering and physical sciences. University of Birmingham, 2013.

- [148] J.A. Richards and X. Jia. *Remote Sensing digital image analysis: an introduction*. Springer, Berlin, 3 edición edition, 1999.
- [149] H.I. Ringermacher and B. N. Cassenti. Dethermalization theory: Thermal/dielectric analogy for heat flow through porosity in composites. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 32(4):418–422, 2013.
- [150] H.I. Ringermacher, D.J. Maytron, D.R. Howard, and B. N. Cassenti. Towards a flat bottom hole standard for thermal imaging. *Review of progress in Quantitative NDE*, 17A:425–431, 1998.
- [151] J.M. Roche and D. Balageas. Advanced thermal imaging techniques for quantitative damage mapping of composite materials. In *Proceedings of the 6th International Symposium on NDT in Aerospace*, 2014.
- [152] J.M. Roche, F. Passilly, and D. Balageas. A TSR-based quantitative processing procedure to synthesize thermal d-scans of real-life damage in composite structures. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 2015.
- [153] C. Rodiet, M. Niezgodá, B. Remy, and A. Degiovanni. New estimation method based on integral transforms for the thermal diffusivity measurement of anisotropic materials. In *Proceedings of th 15th International Heat Transfer Conference*. IHTC, 2014.
- [154] M.A. Rodríguez-Conejo. *Teledetección de fases mediante imagen hiperespectral por transformada de Fourier en el infrarrojo medio. Una contribución al problema de la cuantificación y la reducción de la dimensionalidad*. PhD thesis, Universidad Carlos III de Madrid, 2016.
- [155] A. Rogalski. Competitive technologies of third generation infrared photon detectors. *Opto-electron. Rev.*, 14:87–101, 2006.
- [156] Z.M. Ryu and J.A. Pearce. Thermographic calibration of graybody objects. In *Proceedings of SPIE - The international society for optical engineering*, pages 282–289. SPIE, 1990.
- [157] T. Sakagami and S. Kubo. Applications of pulse heating thermography and lock-in thermography to quantitative nondestructive evaluation. *Infrared Physics & Technology*, 43:211–218, 2002.
- [158] A. Salazar, R. Fuente, E. Apiñaniz, and A. Mendioroz. Thermal diffusivity of nonflat plates using the flash method. *The Review of scientific instruments*, 82(1):014902, jan 2011.

- [159] A. Salazar, A. Sánchez-Lavega, and J.M. Terrón. Effective thermal diffusivity of layered materials measured by modulated photothermal techniques. *Journal of applied physics*, 84(6):3031–3041, 1998.
- [160] A. Salazar, A. Sánchez-Lavega, A. Ocariz, J. Guitonny, G.C. Pandey, D. Fournier, and A.C. Boccara. Thermal diffusivity of anisotropic materials by photothermal methods. *Journal of applied physics*, 79(8):3985–3993, 1996.
- [161] S. Sánchez-Carballido, C. Justo-María, J. Meléndez, F. Cortés, and F. López. A quantitative infrared imaging system for in situ characterization of composite materials in fire test. *Fire Technology*, 53(3):1309–1331, 2017.
- [162] S. Sánchez-Carballido, C. Justo-María, J. Meléndez, F. Cortés, F. López, and F. J. López del Cerro. Experimental determination of the thermal parameters of carbon fiber-composite materials exposed to fire by infrared imaging pulse thermography. *International Journal of Thermophysics*, 34(8):1606–1616, 2013.
- [163] J.R. Schott. *Remote Sensing: the image chain approach*. Oxford University Press, New York, 1997.
- [164] Skeptical Science. Behind the lines: Herschel’s discovery of infrared, 2013. <https://static.skepticalscience.com/pics/HerschelExperiment.jpg>.
- [165] S. Sfarra, N. P. Avdelidis, C. Ibarra-Castanedo, C. Santulli, P. Theodorakeas, A. Bendada, D. Paoletti, M. Kouli, and X. Maldague. Surface and subsurface defects detection in impacted composite materials made by natural fibers, using nondestructive testing methods. *International Journal of Composite Materials*, 4(5A):1–9, 2014.
- [166] S. Sfarra, A. Bendada, A. Paoletti, D. Paoletti, D. Ambrosini, and C. Ibarra-Castanedo. Square pulse thermography SPT and digital speckle photography DSP: Non destructive testing NDT techniques applied to the defects detection in aerospace materials. In *Proceedings of the 2th International Symposium on NDT in Aerospace*, 2010.
- [167] A.M. Shahrezaee and M. Rostamian. Determination of a source term and boundary heat flux in an inverse heat equation. *Journal of information and computing science*, 8(2):103–114, 2013.
- [168] S.Y. Shen. A numerical study of inverse heat conduction problems. *Computers and mathematics with applications*, 38:173–188, 1999.

- [169] S.M. Shepard, J.R. Lhota, T. Ahmed, B.A. Rubadeux, and Wang D. Quantification and automation of pulse thermographic NDE. *Nondestructive Evaluation of Materials and Composites*, 4336:73–78, 2001.
- [170] S.M. Shepard, J.R. Lhota, B.A. Rubadeux, D. Wang, and T. Ahmed. Reconstruction and enhancement of active thermographic image sequences. *Optical Engineering*, 42(5):1337–1342, 2003.
- [171] S.M. Shepard, J.R. Lhota, B.A. Rubadeux, D. Wang, and T. Ahmed. Reconstruction and enhancement of active thermographic image sequences. *Optical Engineering*, 42(5):1337–1342, 2003.
- [172] J. Shlens. A tutorial on principal component analysis. 51, 04 2014.
- [173] S.K. Singh, M.K. Yadav, R. Sonawane, and S. Khandekar. Estimation of time-dependent wall heat flux from single thermocouple data. *International Journal of Thermal Sciences*, 115:1–15, 2017.
- [174] S. Sánchez-Carballido. *Sistema de imagen infrarroja para la caracterización in-situ del comportamiento a fuego de materiales compuestos*. PhD thesis, Universidad Carlos III de Madrid, 2017.
- [175] S. Soloman. *Sensors Handbook*. McGraw Hill Professional, 1998.
- [176] J. Sousa, L. Villafane, S. Lavagnoli, and G. Paniagua. Inverse heat flux evaluation using conjugate gradient methods from infrared imaging. In *Proceedings of 11th Quantitative Infrared Conference*, page 10. QIRT, 2012.
- [177] M.S. Spiegel and L. Abellanas. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*. McGraw Hill / Interamericana de España, 1988.
- [178] H. Stehfest. Algorithm 368: numerical inversion of Laplace transforms. *Communications of the ACM*, 13(1):47–49, January 1970.
- [179] A. N. Tikhonov. On the stability of inverse problems. *Doklady Akademii Nauk, SSSR*, 39:195–198, 1943.
- [180] C. Toscano, C. Meola, and G.M. Carlomagno. Porosity distribution in composite structures with infrared thermography. *Journal of Composites*, 2013, 2013.
- [181] C. Toscano, C. Meola, M.C. Iorio, and G.M. Carlomagno. Porosity and inclusion detection in CFRP by infrared thermography. *Advances in Optical Technologies*, 2012, 2012.

- [182] R. Usamentiaga, P. Venegas, J. Guerediaga, L. Vega, J. Molleda, and F.G. Bulnes. Infrared thermography for temperature measurement and non-destructive testing. *Journal of sensors*, 14:12305–12348, 2014.
- [183] V. Vavilov. Thermal nondestructive testing: short history and state-of-art. In *Proceedings of Quantitative Infrared Conference 92*. QIRT, 1992.
- [184] V.P. Vavilov. Pulsed thermal NDT of materials: back to the basis. *Nondestructive Testing and Evaluation*, 22:177–197, 2007.
- [185] V.P. Vavilov. Modeling and characterizing impact damage in carbon fiber composites by thermal/infrared non-destructive testing. *Composites: Part B*, 61:1–10, 2014.
- [186] V.P. Vavilov, D.P. Almond, G. Busse, E. Grinzato, J.C. Krapez, and X.P.V. Maldague. Infrared thermographic detection and characterization of impact damage in carbon fiber composites: results of the round robin test. In *Proceedings of Quantitative Infrared Conference 98*. QIRT, 1998.
- [187] V.P. Vavilov and D.D. Burleigh. Review of pulsed thermal ndt: Physical principles, theory and data processing. *NDT & E International*, 73:28 – 52, 2015.
- [188] M. Vollmer and K.P. Möllmann. *Infrared thermal imaging. Fundamentals, research and applications*. Wiley-VCH, 1996.
- [189] L. Vozár and T. Srámková. Simultaneous measurement of axial and radial thermal diffusivities of anisotropic media by the radial-heat-flow step-heating method. *High Temperatures - High Pressures*, 29:183–190, 1997.
- [190] L. Vozár and T. Srámková. Step heating method for thermal diffusivity measurement. In *Proceedings of the XIV IMEKO World Congress*, pages 179–184, 1997.
- [191] L. Vozár and T. Srámková. Two data reduction methods for evaluation of thermal diffusivity from step-heating measurements. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(7):1647–1655, 1995.
- [192] M. Wang, J. Wang, N. Pan, S. Chen, and J. He. Three-dimensional effect on the effective thermal conductivity of porous media. *Journal of physics D: Applied physics*, 40:260–265, 2007.
- [193] H. Wiggensauser. Active IR-applications in civil engineering. *Infrared Physics & Technology*, 43:233–238, 2002.

- [194] Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Toeplitz_matrix#Discrete_convolution.
- [195] Wikipedia. Linear time-invariant theory, 2009. https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_time-invariant_theory.
- [196] W.P. Winfree and J.N. Zalameda. Single sided thermal diffusivity imaging with a shuttered thermographic inspection system. *AIP Conference Proceedings*, 615(1):544–551, 2002.
- [197] W.L. Wolfe. *Introduction to Infrared System Design*. SPIE Optical Engineering Press, 1996.
- [198] G. Wróbel, S. Pawlak, and G. Muzia. Thermal diffusivity measurements of selected fiber reinforced polymer composites using heat pulse method. *Journal of achievements in materials science and engineering*, 48(1):25–32, 2011.
- [199] G. Wróbel, Z. Rdzawski, G. Muzia, and S. Pawlak. Determination of thermal diffusivity of carbon/epoxy composites with different fiber content using transient thermography. *Journal of achievements in materials and manufacturing engineering*, 37(2):518–525, 2009.
- [200] B. Xiangzhi, Z. Fugen, and X. Bindang. Infrared image enhancement through contrast enhancement by using multiscale new top-hat transform. *Infrared Physics & Technology*, 54(2):61 – 69, 2011.
- [201] X.T. Xiong, X.H. Liu, Y.M. Yan, and H.B. Guo. A numerical method for identifying heat transfer coefficient. *Applied mathematical modelling*, 34:1930–1938, 2010.
- [202] P. Xu. Truncated SVD methods for discrete linear ill-posed problems. *Geophys. J. Int.*, 135:505–514, 1998.
- [203] L. Yan, C.L. Fu, and F.L. Yang. The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem. *Engineering analysis with boundary elements*, 32:216–222, 2008.
- [204] J.N. Zalameda. Measured through-the-thickness thermal diffusivity of carbon fiber reinforced composite materials. *Journal of composites technology & research*, 21(2):98–102, 1999.
- [205] J.N. Zalameda and W.P. Winfree. Thermal diffusivity measurements on composite porosity samples. In *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, pages 1541–1548. Springer, 1990.

- [206] G. Zauner, G. Mayr, and G. Hendorfer. Comparative defect evaluation of aircraft components by active thermography. In *IS&T/SPIE Electronic Imaging*, pages 72510J–72510J. International Society for Optics and Photonics, 2009.
- [207] J.W. Zeller, H. Efstathiadis, G. Bhowmik, P. Haldar, N.K. Dhar, J. Lewis, P. Wijewarnasuriya, Y. R. Puri, and A. K. Sood. Development of Ge PIN photodetectors on 300 mm Si wafers for near-infrared sensing. *Int. J. Engr. Res. Tech*, 8:23–33, 2015.