

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**  
**ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**



**TRABAJO DE FIN DE GRADO**  
**GRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS DE COMUNICACIONES**

**ESTUDIO COMPARATIVO DE PRECODIFICADORES**  
**EFICIENTES EN ENERGÍA**

**AUTOR: ALEJANDRO VIANA LORA**

**TUTORA: MATILDE PILAR SÁNCHEZ FERNÁNDEZ**

**JUNIO DE 2014**



# Resumen

A lo largo de este Trabajo de Fin de Grado se realizará un estudio comparativo de dos esquemas que se enmarcan dentro de lo que se conoce como precodificación en aquellos sistemas multiusuario que emplean múltiples entradas en recepción y múltiples salidas en transmisión (*Multiple Input Multiple Output*) (MIMO).

El primero de estos esquemas fue propuesto en [1] y tiene como objetivo cancelar la interferencia mediante una generalización para MIMO del forzado de ceros (*Zero Forcing*) (ZF) en presencia de múltiples usuarios. El segundo esquema, propuesto en [2], tiene como principal objetivo minimizar la potencia en transmisión.

Ambos esquemas se valen de la diagonalización en bloques para lograr su objetivo, pero empleando procedimiento completamente distintos.

Estos esquemas parten de dos criterios de diseño muy distintos por lo que no resulta trivial su comparación. Para el desarrollo de este estudio ha sido necesaria la implementación de un banco de pruebas que permitiese realizar simulaciones con suficientes grados de libertad como para poder encontrar puntos en común en estos esquemas de objetivos tan distintos. Los métodos analíticos también han desempeñado su papel en el desarrollo de este trabajo y las principales conclusiones en materia de potencia y capacidad se han obtenido de ésta manera.

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**  
**ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**



**TRABAJO DE FIN DE GRADO**  
**GRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS DE COMUNICACIONES**

**ESTUDIO COMPARATIVO DE PRECODIFICADORES**  
**EFICIENTES EN ENERGÍA**  
**EXTENDED ABSTRACT**

**AUTOR: ALEJANDRO VIANA LORA**

**TUTORA: MATILDE PILAR SÁNCHEZ FERNÁNDEZ**

**JUNIO DE 2014**



Extended abstract.

## 1.1 Abstract

This Bachelor Thesis shows the result of a comparative study between two precoding schemes in systems employing multiple antennas for transmission and reception (MIMO). The first of these schemes was proposed in [1] and aims to cancel the interference by a generalization of the zero forcing (ZF) for MIMO systems. The second scheme was proposed in [2] and its main objective is to minimize the transmit power. Both schemes use block diagonalization to achieve their goal, but using completely different procedures. This study has required the development of a test that allows simulations with parameters of the two schemes. This test has been designed to have sufficient degrees of freedom to meet the requirements of the comparison. Analytical methods have also played a role in the development of this work. The main conclusions in terms of power and capacity have been obtained by these methods.

## 1.2 Introduction

In communication systems, MIMO techniques improve performance in many ways. The core of this technique is divided into three parts:

- The parameters that provide the diversity:
  - Considering the location, the diversity appears in reception or in transmission depending on where MIMO is used.
  - Considering the physical phenomenon that produces diversity, it may appear as: temporal, spatial, frequency, wavelength, polarization, etc.
- The characteristics of the communication system: directionality, number of links, number of receivers, channel characteristics, presence of noise, visibility, etc.
- The way these parameters and characteristics are treated to enhance the performance of a particular system

In conjunction with these categories, the features of the systems that employ non-MIMO also act. These characteristics, concerning this work are:

- Transmitter and receivers have perfect knowledge of the channel information (CSI).
- Transmitter has knowledge of the requirements of signal to noise ratio (SNR) of the receptors.

Given the above, MIMO has many applications and these applications increase in number when taking into account other aspects such as coordination, cooperation, macro diversity or MIMO routing [3]. These aspects are not fully detailed in this work.

This work shows the comparison of two MIMO precoding with multiple users in a narrowband downlink channel, with additive noise, without line of sight, with CSI and without interference from other transmitters.

A precoder is a generalization beamforming that allows the transmission to multiple receivers that employ MIMO. In a broadcast channel with multiple users, the precoder allows to transmit multiple data streams to receivers.

## 1.3 Motivation

In a historical approach to communications systems that employ MIMO it can be appreciated how this technique increasingly reveals its potential and, not being a novel technique, seems to have not completely unraveled the virtues it possesses. In [4–8] is presented some of the publications that originate this concept that has since been employed as a solution, or improvements to various problems arising in the field of communications. The main motivation for undertaking this project is precisely to help, as far as possible to unravel the virtues associated with the use of MIMO.

## 1.4 Objective

At present there are many publications that provide solutions to a common problem but respond to different considerations. The objective of this project is precisely to establish the differences between two precoding schemes, one better known, (BD-ZF) [1], and another novel which seeks to the minimization of power (POW-MIN) [2]. Clarifying these differences will decide which one is advantageous and what scenarios the precoder takes the lead, and what the penalties are associated with its use.

## 1.5 Conclusions

### 1.5.1 Power

The POW-MIN scheme truly minimizes the transmission power compared to BD-ZF. The inclusion of more antennas does better in this aspect and maintains this virtue with increasing the number of receivers.

Furthermore, POW-MIN is not designed to meet an upper limit of transmitted power. This absence of upper bound can lead to the transmitter to emit more power than that used by BD-ZF. The same mathematical artifact that facilitates energy resource economy



is the culprit that POW-MIN offers overpowering.

This must be taken into account when dealing with systems which plan energy resources. BD-ZF uses more power, but it follows a closed expression which can be evaluated beforehand. POW-MIN is subject to the conditions of the channel and this can be problematic for some kind of planning.

This behaviour is exacerbated when the SNR requirements of the receiving antennas increases. In a challenging environment, POW-MIN is at a clear disadvantage compared to BD-ZF. When the SNR requirements of each antenna, exceed 22 dB, energy efficiency is no longer feasible. However, for less demanding environments, POW-MIN gets considerably minimize the transmitted power without the lack of upper bound is revealed.

### 1.5.2 Capacity

POW-MIN does not offer the same sum of capacity that offers BD-ZF. Energy efficiency penalizes capacity reached. Another aspect is inequities between the receivers. The first of these receptors behaves in a similar way as it would in BD-ZF and this behaviour worsens when the receiver moves forward in its position on the list of the precoder.

The design of POW-MIN is not intended to maximize the transmitted rate. The behaviour of the equivalent channel receptors impairs all but the first and the situation worsens as the number of receivers increases. This is not the case in BD-ZF, capacity on the receivers depends only on the noise and channel conditions. However, POW-MIN provides a more stable capacity than BD-ZF. POW-MIN allows for better planning of capacity due to the inclusion of the SNR requirements during the calculation of the precoders.

### 1.5.3 Utility

Both schemes can be useful for a communication system that requires MIMO precoding. The choice of a scheme or other will obey the ability of each to adapt to system

requirements.

With respect to rate, the ordering of the receivers in the POWMIN scheme increases the capacity of the receivers. Choosing the correct order improves the problem of inequality of the receivers in POW-MIN.

If the rate is preferred versus power, or the power is completely obvious, BD-ZF is choice. Similarly, if there is necessity of freeing the rate of the number of receivers, or if it is intended to decouple the rate of the interference.

## 1.6 Future work

There are several possible ways to go deeper into comparison of these two schemes, or any other. The development of closed analytical expressions to conclude which is the transmitted power, the signal to interference and noise ratio or rate and allow to work with the parameters that have been used here would be a huge technical advance. With these expressions could design decision rules for deciding which scheme to choose and where schemes take their advantage.

The full development of precoders using prototyping environments like MATLAB, Simulink or other tools, would provide realism to the model. Its implementation in real physical devices, such as processors or digital signal processor (DSP), would enable their comparison in real terms.

The last step that is proposed as a possible improvement is to compare the results of both lines of research, analytical and experimental. This would allow making predictions using analytical expressions and validate them by experimental testing on real devices.



# Bibliography

- [1] Q. H. Spencer, A. L. Swindlehurst, and M. Haardt, “Zero-forcing methods for down-link spatial multiplexing in multiuser MIMO channels,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 2, pp. 461–471, 2004.
- [2] W. W. Ho and Y.-C. Liang, “Efficient power minimization for MIMO broadcast channels with BD-GMD,” in *IEEE International Conference on Communications. ICC’07.*, pp. 2791–2796, 2007.
- [3] M. Bansal and A. Trivedi, “Joint routing and stream control scheduling in mimo-based wmnns,” in *Computer Communications and Networks (ICCCN), 20th International Conference on*, pp. 1–6, 2011.
- [4] D. Shnidman, “A generalized Nyquist criterion and an optimum linear receiver for a pulse modulation system,” *Bell System Technical Journal*, vol. 46, no. 9, pp. 2163–2177, 1967.
- [5] A. Kaye and D. George, “Transmission of Multiplexed PAM Signals Over Multiple Channel and Diversity Systems,” *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. 18, pp. 520–526, October 1970.
- [6] L. Brandenburg and A. Wyner, “Capacity of the Gaussian channel with memory: The multivariate case,” *Bell System Technical Journal*, vol. 53, no. 5, pp. 745–778, 1974.

- [7] J. Salz, "Digital Transmission Over Cross-Coupled Linear Channels," *ATT Technical Journal*, vol. 64, no. 6, pp. 1147–1159, 1985.
- [8] N. Amitay and J. Salz, "Linear equalization theory in digital data transmission over dually polarized fading radio channels," *ATT Bell Laboratories Technical Journal*, vol. 63, pp. 2215–2259, Dec 1984.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>13</b>
1.1. Introducción . . . . .	13
1.2. Precodificación . . . . .	15
1.3. Motivación . . . . .	16
1.4. Objetivos . . . . .	16
1.5. Estructura del documento . . . . .	17
<b>2. Contexto</b>	<b>19</b>
2.1. Modelo de canal . . . . .	19
2.2. Principales precodificadores . . . . .	20
2.2.1. Decodificadores . . . . .	20
2.2.2. Precodificadores . . . . .	22
<b>3. Precodificadores a estudio</b>	<b>23</b>
3.1. POW-MIN BD-GMD . . . . .	23
3.1.1. BD-GMD . . . . .	23
3.1.2. POW-MIN . . . . .	25

3.2. BD-ZF . . . . .	26
<b>4. Métodos de comparación</b>	<b>29</b>
4.1. Métodos numéricos . . . . .	29
4.1.1. Implementación de los precodificadores . . . . .	29
4.1.2. Cálculo de la capacidad y de la SINR . . . . .	30
4.1.3. Cálculos varios . . . . .	30
4.1.4. Obtención de los resultados numéricos . . . . .	31
4.2. Métodos no numéricos . . . . .	33
<b>5. Resultados</b>	<b>35</b>
5.1. Potencia de transmisión . . . . .	35
5.2. SINR . . . . .	38
5.3. Suma de capacidad vs. Potencia en transmisión . . . . .	42
5.4. Cambios en la configuración de antenas . . . . .	46
5.5. Cambios en el número de receptores . . . . .	48
<b>6. Conclusiones y líneas futuras</b>	<b>51</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	51
6.1.1. Potencia . . . . .	51
6.1.2. Capacidad . . . . .	52
6.1.3. Utilidad . . . . .	53
6.2. Líneas futuras . . . . .	54
<b>7. Plan de proyecto</b>	<b>57</b>
7.1. Planificación . . . . .	57



7.2. Presupuesto . . . . .	59
<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>



# Lista de Figuras

5.1. Histograma de los resultados de la ecuación 5.8 para 10000 realizaciones . .	37
5.2. SINR obtenida con POW-MIN, $10 \times [2, 2, 2, 2, 2]$ $N_0 = 0,01$ $\gamma_i = 18dB \forall i$ . .	40
5.3. SINR obtenida con BD-ZF, $10 \times [2, 2, 2, 2, 2]$ . . . . .	41
5.4. SINR obtenida con POW-MIN, $12 \times [2, 2, 4, 2, 2]$ $N_0 = 0,01$ $\gamma_i = 18dB \forall i$ . .	41
5.5. SINR obtenida con BD-ZF, $12 \times [2, 2, 4, 2, 2]$ $N_0 = 0,01$ . . . . .	42
5.6. Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con $\gamma_i = 0dB$ . . . . .	43
5.7. Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con $\gamma_i = 3,125dB$ . . . . .	43
5.8. Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con $\gamma_i = 6,25dB$ . . . . .	43
5.9. Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con $\gamma_i = 9,375dB$ . . . . .	43
5.10. Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con $\gamma_i = 12,5dB$ . . . . .	44
5.11. Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con $\gamma_i = 15,625dB$ . . . . .	44

5.12. Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con $\gamma_i = 18,75dB$ . . . . .	44
5.13. Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con $\gamma_i = 21,875dB$ . . . . .	44
5.14. Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con $\gamma_i = 25dB$ . . . . .	45
5.15. Tanto por ciento de realizaciones de POW-MIN que superan en potencia a BD-ZF vs $\gamma_i$ dB . . . . .	45
5.16. Suma de capacidades a medida que aumenta el número de antenas trans- misoras . . . . .	45
5.17. Potencia a medida que aumenta el número de antenas transmisoras . . . . .	46
5.18. Suma de capacidades a medida que aumenta el número de antenas receptoras	47
5.19. Potencia a medida que aumenta el número de antenas receptoras . . . . .	48
5.20. Suma de capacidades a medida que aumenta el número de receptores . . . . .	49
5.21. Potencia a medida que aumenta el número de receptores . . . . .	49

## Notación

Se expone a continuación la notación que será empleada a lo largo de este documento.

Se denotarán en negrita y mayúsculas,  $\mathbf{X}$ , a las matrices con elementos individuales  $x_{i,j}$  con  $i = 1, \dots, k_i, j = 1, \dots, k_j$ . De ser una matriz compuesta por bloques, se denotarán dichos bloques en mayúsculas, negrita y un par de subíndices  $n = 1, \dots, k_n, m = 1, \dots, k_m$  que se corresponderán con la fila y la columna respectivamente de tal modo que el bloque de la  $n$ -ésima fila y la  $m$ -ésima columna de la matriz  $\mathbf{B}$  sea  $\mathbf{B}_{n,m}$ . En minúsculas y negrita,  $\mathbf{y}$ , cuando se trate de vectores cuyos elementos se denotarán en minúsculas y con un subíndice con  $i = 1, \dots, k_i$  tal que  $y_i$  se corresponda con el  $i$ -ésimo valor del vector  $\mathbf{y}$ .

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,k_j} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{k_i,1} & \dots & x_{k_i,k_j} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,1} & \dots & \mathbf{B}_{1,k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{B}_{k_n,1} & \dots & \mathbf{B}_{k_n,k_m} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = [y_1 \quad \dots \quad y_{k_i}]^T$$

Se denotará  $\mathbf{X}^T$  a la matriz traspuesta de  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{X}^H$  a la traspuesta y conjugada,  $\text{Tr}(\cdot)$  representará al operador traza,  $\text{diag}(a_1, \dots, a_k)$  hará referencia a la matriz cuya diagonal está formada por los elementos  $a_i$  con  $i = 1, \dots, k$ ,  $\text{blkdiag}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k)$  a la matriz cuya diagonal está formada por los bloques  $\mathbf{A}_i$  con  $i = 1, \dots, k$ ,  $|\cdot|$  o  $\det(\cdot)$  expresaran el determinante indistintamente y  $|\cdot|$  representará el módulo y  $\|\cdot\|$  la norma euclídea.

Cuando sea necesaria una notación concreta se presentará de manera adecuada.



# Introducción

## 1.1. Introducción

La técnica que recoge el uso de MIMO puede ser empleada con diversos enfoques, para distintas finalidades, persiguiendo distintos objetivos y en una gran cantidad de casos son notorias las ventajas de su utilización. El núcleo de la abstracción de esta tecnología se puede dividir en tres categorías: los parámetros que ofrecen diversidad, las características del sistema de comunicación y la manera en que se tratan estos parámetros con la finalidad de mejorar el desempeño de un sistema de comunicaciones concreto.

1. Las fuentes de diversidad pueden clasificarse:

- Atendiendo al lugar donde se aplica MIMO pueden obtenerse diversidad en recepción o en transmisión, con lo que se añaden dos subcategorías MISO (*Multiple Input Single Output*) y SIMO (*Single Input Multiple Output*), cuando la diversidad se produce en recepción y no en transmisión y viceversa respectivamente.
- Atendiendo al fenómeno físico en el que se produce la diversidad, se pueden encontrar diversidad espacial, temporal, frecuencial o las inherentes al fenómeno de la propagación como son la dirección del haz, la velocidad de propagación,

la polarización, etc.

2. Dependiendo de las características propias del sistema de comunicación la técnica MIMO puede emplearse para mejorar la transmisión de datos sobre medios compartidos o dedicados, según el número de transmisores o receptores, según el tipo de comunicación punto a punto, punto a multipunto, etc., según su direccionalidad, simplex, duplex, etc., atendiendo a los parámetros propios del medio que se utiliza, acústico, radioeléctrico, óptico, guiado, no guiado, con visión directa o no, etc. o tratando con la existencia de ruido o interferencias.
3. Considerando la manera en la que se tratan, en grupo o por separado, los distintos parámetros que ofrecen diversidad y el aprovechamiento de estos en conjunción con las características propias del sistema de manera que resulte beneficioso para el desempeño de la comunicación.

En concomitancia con estas categorías actúan factores comunes a los sistemas que no emplean MIMO y de los cuales se enumeran a continuación los necesarios para el desarrollo de este proyecto:

1. El conocimiento de las condiciones del canal (CSI, Channel State Information) por parte del transmisor y del receptor.
2. El conocimiento por parte del transmisor de los requisitos de relación señal a ruido (SNR, Signal to Noise Ratio) de cada uno de los receptores.

Las posibles aplicaciones de MIMO son muy numerosas si se atiende a lo expuesto y aumentan si se incluyen la coordinación de transmisores y/o receptores, la cooperación, la macrodiversidad o el enrutado mediante MIMO [3]. Por economía de espacio no se hace en este trabajo una revisión completa de todas ellas.

En este documento se comparan dos esquemas que se enmarcan dentro de lo que se conoce como precodificadores que emplean MIMO, en entornos multiusuario, en presencia de un canal descendente, de banda estrecha, ruido añadido, sin visión directa, con



conocimiento de las condiciones del canal (*Channel Estate Information*) (CSI) por parte de receptores y transmisor y sin interferencias de otros transmisores. No se harán consideraciones sobre pérdidas por propagación más allá de las modeladas en el canal canal equivalente, salvo para ciertas conclusiones, ni se tendrán en cuenta pérdidas en antenas o circuitos, estimación parcial del canal, o planificación de la transmisión de flujos de datos, de nuevo, salvo para ciertas conclusiones. Sólo se atenderá a lo relativo a los esquemas de precodificación que se estudian, considerando a lo restante, no accesorio, pero sí fuera de las competencias de este trabajo.

Los esquemas que se comparan se emplean en las condiciones mencionadas pero fueron desarrollados atendiendo a criterios de diseño distintos. De entre los esquemas propuestos en [4] se escoge el esquema precodificador de forzado de ceros que emplea diagonalización en bloques (*Block Diagonal-ZF*), (BD-ZF), que procura cancelar la interferencia entre las señales de los usuarios, y de [2] el precodificador eficiente en minimización de potencia que emplea BD-GMD (POW-MIN) , que procura la minimización de la potencia empleada en transmisión.

## 1.2. Precodificación

Se conoce como precodificación a la generalización del conformado de haz que permite transmitir múltiples flujos de datos en un entorno inalámbrico en el que se emplea MIMO. A diferencia del uso de la precodificación en un sistema punto a punto, en un canal de difusión, los distintos flujos de datos en transmisión no son para un sólo receptor sino para un conjunto de ellos donde cada uno de estos receptores posee una o varias antenas. Esto permitiría que el canal, una vez aplicado un esquema de precodificación óptimo, se comporte como un conjunto de enlaces independientes entre el transmisor y cada uno de los receptores.

Los precodificadores se pueden clasificar atendiendo a varios criterios. De entre ellos, se puede considerar principal al criterio de clasificación según la condición de óptimo, o no. También se pueden clasificar cómo lineales o no lineales atendiendo a si necesitan de

una rama de realimentación o no. Estos criterios, y otros, añaden grados de libertad al diseño de precodificadores, lo que permite aproximar la solución a la idónea para cada sistema, encontrando un compromiso entre complejidad y prestaciones.

### 1.3. Motivación

En una aproximación histórica a los sistemas de comunicaciones que emplean MIMO puede apreciarse cómo esta técnica revela cada vez más su potencial y, sin ser ya novedosa, parece que no se han desentrañado del todo las virtudes de que dispone. En [5-9] se presentan algunas de las publicaciones que originan el concepto que, desde entonces, ha sido empleado como solución, o mejora, a distintos problemas planteados en el ámbito de las comunicaciones.

La motivación principal para acometer este proyecto es precisamente ayudar, en la medida de lo posible, a desentrañar las virtudes asociadas a la utilización de MIMO.

### 1.4. Objetivos

En la actualidad existen multitud de publicaciones que dan soluciones a un problema común pero que atienden a consideraciones diferentes. El objetivo de este proyecto es precisamente establecer las diferencias entre dos esquemas de precodificación, uno más conocido, BD-ZF [1], y otro POW-MIN [2].

Esclarecer estas diferencias permitirá decidir cuál de ellos es ventajoso, y sobre qué escenarios toma su ventaja, y cuáles son las penalizaciones asociadas a su desempeño.

## 1.5. Estructura del documento

En el capítulo 2 se expondrá una explicación del modelo de canal que se emplea así como un breve revisión de los principales esquemas precodificadores existentes.

En el capítulo 3 se explican, a modo de resumen pero con cierto grado de detalle, los desarrollos de los precodificadores que serán comparados en este documento, POW-MIN y BD-ZF

En el capítulo 4 se detallan los métodos empleados para llevar a cabo el estudio comparativo. Se nombran las principales implementaciones realizadas así como el uso que se hace de ellas. En este capítulo también se justifica el empleo de métodos no numéricos en este documento así como lo que motivó su adopción.

En el capítulo 5 se exponen los resultados del análisis comparativo y de las simulaciones realizadas junto a sus gráficas asociadas.

En el capítulo 6 se discuten los resultados obtenidos en el capítulo 5 mediante reflexiones basadas en criterios de potencia, capacidad y utilidad. Completa el capítulo la redacción de las futuras investigaciones que se proponen como continuación de este Trabajo de Fin de Grado.

Finalizan el documento el capítulo 7, en el que se exponen la planificación de éste trabajo y el presupuesto del mismo, y la relación de citas que componen la bibliografía de la que se ha hecho uso.



# Capítulo 2

## Contexto

Se exponen a continuación el modelo de canal y, de manera muy superficial, los esquemas más representativos de la precodificación con MIMO y que aplican al modelo de canal que se emplea en este documento. Se expondrán en primer lugar el modelo de canal y a continuación los esquemas decodificadores y los precodificadores. [10]

### 2.1. Modelo de canal

El enlace que trataremos consta de un transmisor y  $N$  receptores, con  $N_r = \sum_{k=1}^N n_k$  el número total de antenas receptoras siendo  $n_k$  el número de antenas del usuario  $k$ -ésimo y  $N_t$  el número de antenas en el transmisor. En general se ha de cumplir que  $N_t > N_r$  por lo que se extiende esta restricción al resto del trabajo. A la configuración de antenas emisoras y receptoras para un canal descendente se la denotará como  $N_t \times [n_1, \dots, n_N]$ . La ecuación que modela el comportamiento del sistema es:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$  es la salida del canal y está compuesto de las señales recibidas por los  $N$  usuarios, tiene la forma  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_N^T]^T$  donde  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{C}^{n_k \times 1}$  es la parte del vector  $\mathbf{y}$  destinada al usuario  $k$ -ésimo,  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$  la señal transmitida,  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$  es la matriz equivalente del canal de la forma  $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1^T, \dots, \mathbf{H}_N^T]^T$  donde  $\mathbf{H}_k \in \mathbb{C}^{n_k \times N_t}$  es la parte de la

matriz que transmite desde las  $N_t$  antenas transmisoras hacia las  $n_k$  antenas receptoras del usuario  $k$ -ésimo.

En la matriz  $\mathbf{H}$ , cada  $h_{i,j}$  es una muestra de una variable aleatoria tal que  $h = (a+i \cdot b) \frac{1}{\sqrt{2}}$  donde  $a$  y  $b$  son muestras de variables aleatorias independientes  $A, B \sim \mathcal{N}(0, 1)$  y  $i \triangleq \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria. Por último  $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$  es el vector de ruido circular simétrico gaussiano de media cero.

La señal que se desea precodificar multiplica a la matriz del precodificador  $\mathbf{W}_{\text{tx}}$  creando un canal equivalente:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{H}\mathbf{W}_{\text{tx}}\mathbf{u} + \mathbf{n} \quad (2.2)$$

Mediante el decodificador en recepción  $\mathbf{W}_{\text{rx}}$ , el canal equivalente empleando toma la forma:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{W}_{\text{rx}}\mathbf{H}\mathbf{W}_{\text{tx}}\mathbf{u} + \mathbf{z} \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{z} = \mathbf{W}_{\text{rx}}\mathbf{n}$ .

## 2.2. Principales precodificadores

### 2.2.1. Decodificadores

#### Máxima verosimilitud

El decodificador máxima verosimilitud (ML) está diseñado para minimizar la probabilidad de error del sistema, el bloque decodificador se calcula para que la distancia entre el símbolo recibido y el deseado sea mínima. La complejidad de implementación es alta. La ecuación que origina este esquema es:

$$\hat{\mathbf{u}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}} (\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{W}_{\text{tx}}\mathbf{u}\|^2)$$

donde  $\hat{\mathbf{u}}$  es el conjunto de símbolos estimado,  $\mathbf{y}$  el conjunto de símbolos recibidos,  $\mathbf{u}$  el conjunto de símbolos transmitidos.

### Filtro adaptado

El bloque decodificador del filtro adaptado procura separar la señal deseada del ruido empleando la siguiente expresión:

$$\mathbf{W}_{\text{rx}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{W}_{\text{rx}}} \left( \frac{E[|\mathbf{u}\hat{\mathbf{u}}|^2]}{E[|\mathbf{W}_{\text{rx}}\mathbf{n}|^2]} \right)$$

De esta manera el filtro decodificador pasa a ser:

$$\mathbf{W}_{\text{rx}} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}} \mathbf{W}_{\text{tx}}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{-1}$$

donde  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}$  la matriz de correlación de la señal a transmitir y  $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$  la correlación del ruido.

### ZF

Este decodificador busca eliminar la interferencia intersimbólica sin preocuparse de los efectos que su decodificación tenga sobre el ruido que el canal introduce en las secuencias de símbolos recibidos lo que provocará, generalmente, que el ruido final no sea ruido blanco por lo que las prestaciones del sistema no serán óptimas. El diseño parte la siguiente expresión:

$$\mathbf{W}_{\text{rx}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{W}_{\text{rx}}} \left( E[|\mathbf{W}_{\text{rx}}\mathbf{n}|^2] \right)$$

con la restricción  $\mathbf{W}_{\text{rx}} \mathbf{H} \mathbf{W}_{\text{tx}} = \mathbf{I}$  El filtro en recepción es de la forma:

$$\mathbf{W}_{\text{rx}} = (\mathbf{W}_{\text{tx}}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{W}_{\text{tx}})^{-1} \mathbf{W}_{\text{tx}}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{-1}$$

### DFE

DFE, propuesto en [11] está orientado a eliminar la interferencia entre símbolos sin incurrir en las desventajas de los filtros previos (amplificación y coloreado de ruido). Para conseguirlo va a utilizar una estructura con realimentación, se va a tratar de una solución no lineal.

### 2.2.2. Precodificadores

#### DPC

El precodificador denominado DPC (del inglés Dirty Paper Coding, DPC) compara la transmisión en un canal con la escritura en un papel sucio. Esta técnica de precodificación tiene como objetivo reducir en extremo las interferencias haciendo uso del conocimiento del canal y de las señales que serán interferentes, lo que permite precancelar total o parcialmente estas señales. [12]

#### Mínimo error cuadrático medio

Este criterio trata de minimizar el error cuadrático medio del sistema. La expresión del precodificador es:

$$\mathbf{W}_{\text{tx}} = \left( \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{N_t}{\rho} \mathbf{I}_{N_t} \right)^{-1} \mathbf{H}^H$$

Donde  $\rho$  se calcula para satisfacer las condiciones relacionadas con la potencia de la señal y con la potencia de ruido.

#### Filtro adaptado

El diseño del filtro adaptado en transmisión sigue un diseño similar al filtro en recepción.

#### Tomlinson-Harashima Precoding

El diseño del precodificador propuesto por [13] y [14], busca minimizar el error cuadrático medio mediante un algoritmo que procura extraer los símbolos interferentes en la transmisión del propio símbolo empleando una rama de realimentación. Este precodificador es no lineal y requiere de CSI.



## Precodificadores a estudio

Se exponen en este capítulo, de manera resumida, los planteamientos y desarrollos matemáticos que se llevaron a cabo para diseñar los precodificadores que se comparan en este Trabajo de Fin de Grado.

### 3.1. POW-MIN BD-GMD

A continuación se detallará la construcción del precodificador POW-MIN propuesto en [2]. Éste precodificador está basado en BD-GMD y diseñado para minimizar la potencia transmitida por lo que se hará una breve descripción de BD-GMD en primer lugar seguida de la exposición de POW-MIN.

#### 3.1.1. BD-GMD

La descomposición por media geométrica (*Geometric Mean Decomposition*) (GMD) fue propuesta en [15] como método para descomponer un canal MIMO punto a punto en múltiples subcanales con SNRs idénticas ayudándose de codificación DPC o cancelación de interferencias. Esto permite utilizar modulaciones similares en cada uno de los subcanales, reduciendo la complejidad del transmisor, en lugar de utilizar modulaciones adaptadas

a las SNRs como ocurriría si la descomposición se llevase a cabo mediante otro método. La generalización para MIMO multiusuario (*Multi-User-MIMO*, (MU-MIMO)) en canal descendente propuesta en [4] emplea un criterio de diseño que proporciona subcanales de SNRs idénticos para cada usuario y separa a los usuarios empleando diagonalización en bloques. Este esquema necesita de CSI y no contempla en sí la coordinación entre transmisores.

El algoritmo BD-GMD propone la descomposición de la matriz de canal  $\mathbf{H}$  para que pueda expresarse como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{Q}^H \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_r}$  diagonal de bloques,  $\mathbf{P} = \text{blkdiag}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N)$  unitarios con dimensiones  $n_i \times n_i$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$  semiunitaria de tal manera que:  $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I}_{N_t}$  pero  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H \neq \mathbf{I}_{N_r}$  y  $\mathbf{L} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$  es una matriz triangular inferior con elementos diagonales idénticos. Para resolver el problema BD-GMD divide  $\mathbf{H}$  en bloques y opera de manera recursiva sobre cada bloque hasta llegar al último tal y como se explica a continuación.

En la primera iteración, tras la primera división:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \tilde{\mathcal{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{P}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & 0 \\ \Xi & \tilde{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^H \\ \tilde{\mathcal{Q}}^H \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

el canal queda compuesto por:  $\mathbf{H}_1$  con dimensiones  $n_1 \times N_t$  y  $\tilde{\mathcal{H}}$  los bloques restantes, y en lado derecho de la expresión,  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{L}_1$  y  $\mathbf{Q}_1^H$  son el ecualizador, el primer elemento de  $\mathbf{L}$  y el filtro transmisor del primer usuario respectivamente,  $\tilde{\mathcal{P}}$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}$  y  $\tilde{\mathcal{Q}}^H$  los restantes bloques de sus respectivas matrices y  $\Xi$  el primer elemento no diagonal de  $\mathbf{L}$ .

El primer bloque de  $\mathbf{H}_1$  queda:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{Q}_1^H \quad (3.3)$$

y los restantes:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{P}} \Xi \mathbf{Q}_1^H + \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathcal{L}} \tilde{\mathcal{Q}}^H \quad (3.4)$$

Una vez calculados mediante GMD los valores  $\mathbf{P}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{Q}_1$  y, por ser  $\mathbf{Q}_1$  y  $\tilde{\mathbf{Q}}$  ortonormales entre sí, se emplea la matriz de proyección  $\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^H$  para obtener la siguiente expresión:

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^H) = \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathcal{L}} \tilde{\mathcal{Q}}^H \quad (3.5)$$

y multiplicando por  $\tilde{\mathcal{P}}^H$  y  $\mathbf{Q}_1$  se obtiene:

$$\Xi = \mathcal{P}^H \tilde{\mathcal{H}} \mathbf{Q}_1 \quad (3.6)$$

Actuando en  $\tilde{\mathcal{H}}$  se inicia la siguiente iteración y así sucesivamente se completa la descomposición BD-GMD.

### 3.1.2. POW-MIN

Este es el método propuesto por [2] para minimizar la potencia transmitida en el canal descendente con MU-MIMO sin coordinación entre los transmisores y con CSI y que emplea BD-GMD. Siendo  $\mathbf{F}$  la matriz precodificadora el problema parte de:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \text{Tr}(\mathbf{F}^H \mathbf{F}) \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{B} \in \mathbb{L}, \mathbf{A} \in \mathbb{B} \\ & \mathbf{A} \mathbf{H} \mathbf{F} = \sqrt{N_0} \mathbf{\Gamma}^{1/2} \mathbf{B} \\ & \|\mathbf{A}(i, :)\| = 1 \quad \text{for } 1 \leq i \leq N_R \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{B}$  pertenece al conjunto  $\mathbb{L}$  de las matrices triangulares inferiores,  $\mathbf{A}$  al conjunto de las matrices de diagonales bloque  $\mathbb{B}$  y  $\mathbf{W}_{\text{tx}} = \mathbf{\Gamma}$  es una matriz diagonal que contiene los requisitos de SNR por antena receptora. Siguiendo la solución dada en el teorema 1 de [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \sqrt{N_0} \mathbf{\Gamma}^{1/2} \mathbf{\Lambda}^{-1}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{Q} \mathbf{\Omega}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}^H \end{aligned} \quad (3.8)$$

con las siguientes indicaciones:

$$\text{diag}(\mathbf{L}) = \mathbf{\Lambda} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \text{blkd}(\mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_N) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{\Lambda}_i = r_i \mathbf{I}_{n_i} \quad (3.11)$$

El filtro transmisor pasa a ser  $\mathbf{F}$ , el filtro receptor  $\mathbf{A}$  y el canal equivalente pasa a ser  $\mathbf{L}\mathbf{\Omega}$ . Se puede demostrar fácilmente que la potencia en transmisión es igual a:

$$E_s = \text{Tr}(\mathbf{F}^H \mathbf{F}) = \text{Tr}(\mathbf{\Omega}^2) \quad (3.12)$$

### 3.2. BD-ZF

El esquema propuesto por [1] es una implementación de forzado de ceros mediante diagonalización en bloques para enlaces MU-MIMO descendentes donde el canal y la interferencia debida a las señales transmitidas a otros usuarios es conocida en el transmisor.

Si  $\mathbf{H}$  se conoce perfectamente en el transmisor, la capacidad se logra eligiendo cada bloque de  $\mathbf{W}_{\text{tx}}$  como los vectores singulares por la derecha de los bloques de  $\mathbf{H}$  que intervienen, se describe el procedimiento para la búsqueda de  $\mathbf{W}_{\text{tx}}$ , y en el que se obtiene también el filtro en recepción  $\mathbf{W}_{\text{rx}}$ , de tal manera que toda la interferencia multiusuario sea nula. El producto resultante  $\mathbf{H}\mathbf{W}_{\text{tx}}$  será una matriz diagonal de bloques y sólo en el caso de  $n_i = 1$  la matriz será simplemente diagonal. El autor indica que la diagonalización podría ser completa para el caso en el que los receptores tienen más de una antena pero que, cumpliendo ciertas restricciones, no es del todo necesario.

Sean  $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1^T, \mathbf{H}_2^T, \dots, \mathbf{H}_N^T]^T$  donde  $\mathbf{H}_i \in \mathbb{C}^{n_i \times N_t}$ ,  $\mathbf{W}_{\text{tx}} = [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_{N_{tx}}]^T$ , donde  $\mathbf{W}_{i_{tx}} \in \mathbb{C}^{N_t \times n_i}$ .

Se denotará  $\check{\mathbf{H}}_i = [\mathbf{H}_1^T, \mathbf{H}_2^T, \dots, \mathbf{H}_{i-1}^T, \mathbf{H}_{i+1}^T, \dots, \mathbf{H}_N^T]^T$  y  $\check{n}_i = \sum_{j \neq i}^N n_j = N_t - n_i$

Para eliminar por completo la interferencia entre los usuarios el autor propone imponer la condición  $\mathbf{H}_j \mathbf{W}_{i_{tx}} = \mathbf{0}$  para  $i \neq j$ , condición que se satisface si se escogen las columnas de  $\mathbf{W}_{i_{tx}}$  de entre los vectores contenidos en el espacio nulo de  $\check{\mathbf{H}}_i \in \mathbb{C}^{\check{n}_i \times N_t}$ . El espacio nulo de  $\check{\mathbf{H}}_i$  ha de ser de dimensión mayor a cero, esto se satisface cuando el rango de

esta matriz es menor que el número de antenas en transmisión,  $\text{rank}(\check{\mathbf{H}}_i) < N_t$ . Esto es posible para cualquier  $\mathbf{H}$  si  $N_t > \max(\text{rank}(\check{\mathbf{H}}_i))$  para  $i = 1, \dots, N$ . Asumiendo esto y si  $\check{L}_i = \text{rank}(\check{\mathbf{H}}_i) \leq \check{n}_i$  aplicando una descomposición en valores singulares (*Singular Value Decomposition*), (SVD):

$$\check{\mathbf{H}}_i = \check{\mathbf{U}}_i \check{\mathbf{\Sigma}}_i \check{\mathbf{V}}_i^H \quad (3.13)$$

donde  $\check{\mathbf{V}}_i^H = [\check{\mathbf{V}}_i^{(1)} \ \check{\mathbf{V}}_i^{(0)}]^H$  y  $\check{\mathbf{V}}_i^{(1)}$  contiene los  $\check{L}_i$  primeros vectores singulares por la derecha y  $\check{\mathbf{V}}_i^{(0)}$  los restantes. La matriz  $\check{\mathbf{V}}_i^{(0)}$  forma una base ortogonal para el espacio nulo de  $\check{\mathbf{H}}_i$  lo que la hace candidata para ser usada en el cálculo de  $\mathbf{W}_{i_{tx}}$  y precisamente satisface:

$$\mathbf{H}_i \check{\mathbf{V}}_i^{(0)} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_i \times (N_t - \check{L}_i)} \quad (3.14)$$

Esto garantiza la diagonalización pero es necesario que pueda ser deshecho en transmisión con lo que procederemos a realizar una SVD:

$$\mathbf{H}_i \check{\mathbf{V}}_i^{(0)} = \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^H \quad (3.15)$$

si asumimos que  $\mathbf{H}_i$  tiene sus filas linealmente independientes y gracias a las dimensiones de las matrices, tomamos  $\check{\mathbf{V}}_i^{(2)} = \mathbf{V}_i$  y multiplicamos a la derecha en la expresión 3.15:

$$\mathbf{H} \check{\mathbf{V}}_i^{(0)} \check{\mathbf{V}}_i^{(2)} = \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^H \check{\mathbf{V}}_i^{(2)} = \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \quad (3.16)$$

para poder definir ahora el bloque para el usuario  $i$ -ésimo del filtro transmisor de la siguiente manera:

$$\mathbf{W}_{i_{tx}} = \check{\mathbf{V}}_i^{(0)} \check{\mathbf{V}}_i^{(2)} \quad (3.17)$$

y para el filtro receptor:

$$\mathbf{W}_{i_{rx}} = \mathbf{U}_i \quad (3.18)$$

lo que implica que se ha de conocer el canal también en el receptor.

Concluido el proceso por bloques el sistema de principio a fin será equivalente a:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{W}_{rx} \mathbf{H} \mathbf{W}_{tx} \mathbf{u} + \mathbf{W}_{rx} \mathbf{n} \quad (3.19)$$

y desarrollando el primer termino del lado izquierdo de la expresión anterior y aplicando las propiedades inherentes a la construcción de los filtros transmisores, es fácil ver

que  $\mathbf{W}_{rx}\mathbf{H}\mathbf{W}_{rx} = \text{blkdiag}(\boldsymbol{\Sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_N)$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_i = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i^{(1)}}, \dots, \sqrt{\lambda_i^{(n_i)}})$  que dependen de la realización de la matriz de canal  $\mathbf{H}$ .

Con lo anterior y suponiendo las matrices  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_i} = \sigma_{u_i}^2 \mathbf{I}_{n_i}$  y  $\mathbf{R}_{\mathbf{z}_i} = \sigma_{z_i}^2 \mathbf{I}_{n_i}$  se puede concluir que la capacidad es:

$$C_i = \sum_{k=1}^N \log_2 \left( 1 + \frac{\lambda_i^k}{\sigma_{z_i}^2} \sigma_{u_i}^2 \right) \quad (3.20)$$

y que sin realizar una optimización de la potencia transmitida, como podría ser una basada en Waterfilling [1] la potencia transmitida es:

$$P_{tx} = \text{Tr}(\mathbf{W}_{\mathbf{tx}}\mathbf{W}_{\mathbf{tx}}^H) = N_t \quad (3.21)$$

## Métodos de comparación

En este capítulo se detallarán, en la medida de lo posible, los métodos que se han utilizado para tratar de comparar los esquemas de precodificación BD-ZF y POW-MIN. Estos métodos se dividen en dos vertientes, métodos numéricos y métodos no numéricos.

En los métodos numéricos se incluyen las implementaciones en MATLAB de los esquemas de precodificación POW-MIN y BD-ZF y el diseño de un banco de pruebas que permite ejecutar simulaciones tal y como se explicará a lo largo de este capítulo.

Los métodos no numéricos se emplearán a lo largo del documento hasta donde sea factible, que no posible. A lo largo de este capítulo se hará una breve descripción de la motivación que llevó a tratar de adoptar este método.

### 4.1. Métodos numéricos

#### 4.1.1. Implementación de los precodificadores

Se ha partido de la implementación de BD-ZF de [16] en la que se han aplicado unas modificaciones para que la función calcule el filtro receptor y el algoritmo desempeñe su función sin problemas para una configuración no uniforme de antenas en recepción.

Se emplea la implementación del precodificador POW-MIN [17] con mínimas modifi-

caciones para que permita ser compilada con MATLAB Coder.

### 4.1.2. Cálculo de la capacidad y de la SINR

Se ha implementado en MATLAB una función que lleva a cabo el cálculo de la capacidad y de la SINR para cada receptor en una realización. La ecuación implementada para éste cálculo ha sido 4.1, donde  $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{W}_{rx}\mathbf{H}\mathbf{W}_{tx}$  y  $\mathbf{W}_{rx}$  y  $\mathbf{W}_{tx}$  se corresponden con los filtros en recepción y transmisión respectivamente y  $\mathbf{H}$  la matriz de canal,  $\mathbf{H}_{i,j} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$  la porción de matriz de canal correspondiente al  $i$ -ésimo receptor cuando  $i = j$  y el canal de interferencia producida por la señal del receptor  $i$  sobre la señal destinada al receptor  $j$  cuando  $i \neq j$ ,  $\mathbf{R}_{u_i}$  la matriz de auto-correlación de los símbolos transmitidos por el receptor  $i$ ,  $\mathbf{R}_{z_i}$  la matriz de auto-correlación del ruido. [18]

$$C_i = \log_2 \left( \left| \mathbf{I}_r + (\tilde{\mathbf{H}})_{i,i} \mathbf{R}_{u_i} (\tilde{\mathbf{H}})_{i,i}^H \left( \mathbf{R}_{z_i} + \sum_{k=1, k \neq i}^N (\tilde{\mathbf{H}})_{i,k} \mathbf{R}_{u_k} (\tilde{\mathbf{H}})_{i,i}^H \right)^{-1} \right| \right) \quad (4.1)$$

La relación señal a ruido e interferencia (*Signal to Interference and Noise Ratio*) (SINR) del receptor  $i$ -ésimo que se emplea en este documento ha sido hallada mediante la expresión 4.2.

$$\text{SINR}_i = \left| (\tilde{\mathbf{H}})_{i,i} \mathbf{R}_{u_i} (\tilde{\mathbf{H}})_{i,i}^H \left( \mathbf{R}_{z_i} + \sum_{k=1, k \neq i}^N (\tilde{\mathbf{H}})_{i,k} \mathbf{R}_{u_k} (\tilde{\mathbf{H}})_{i,i}^H \right)^{-1} \right| \quad (4.2)$$

### 4.1.3. Cálculos varios

Con el propósito de comparar los distintos resultados ofrecidos por los precodificadores ante variaciones en el canal, ya sea en la configuración de antenas, en sus requisitos de SNR o en la potencia de ruido, se han implementado de manera accesoria una variedad de funciones de las que no se harán descripciones completas ya que estarán implícitas en los enunciados de los resultados. Estas funciones, cuando han sido necesarias, han sido integradas en el cuerpo del banco de pruebas y han cumplido su función en la simulación. Ejemplo de estas funciones son las destinadas a representar las figuras o las destinadas



a calcular estadísticos varios o sumas de capacidades, por nombrar algunas. Del mismo modo se han implementado funciones destinadas a tratar de verificar las afirmaciones realizadas durante el desarrollo de los procedimientos no numéricos.

#### 4.1.4. Obtención de los resultados numéricos

Las simulaciones han sido llevadas a cabo en MATLAB mediante un banco de pruebas que permite tratar como parámetros al número de usuarios, a su configuración de antenas, a sus requisitos de SNR y a la potencia de ruido, pudiendo ser estos parámetros fijos o variables a lo largo de la simulación y pudiéndose definir el número de realizaciones en cada variación de un parámetro. De esta manera se pueden definir simulaciones que permitan estudiar el comportamiento de ambos esquemas de precodificación ante la variación de uno o varios parámetros calculando los filtros en transmisión y recepción, la potencia transmitida por ambos esquemas, así como las capacidades y SNRs para ambos filtros en cada una de las realizaciones para cada una de las variaciones, así como los procesos necesarios para tratar estos datos.

El algoritmo del banco de pruebas se puede condensar de esta manera:

- 1: Parámetros = Inicialización de parámetros fijos y variables
- 2: Realizaciones = Número de realizaciones
- 3: ResultadosPOW-MIN =()
- 4: ResultadosBD-ZF =()
- 5: **for** j = 1 a Longitud(Parámetros) **do**
- 6:     **for** i = 1 a Realizaciones **do**
- 7:         H = nuevo canal
- 8:         ResultadosPOW-MIN(j,i) = CálculosPOW-MIN(H,Parámetros(j))
- 9:         ResultadosBD-ZF(j,i) = CálculosBD-ZF(H,Parámetros(j))
- 10:     **end for**
- 11: **end for**

No se han explotado del todo las capacidades de MATLAB para tratar con matrices ya

que las funciones principales, las destinadas al cálculo de los filtros y la destinada al cálculo de la capacidad y la SNR, reciben sus parámetros para calcular una sola realización. La alternativa hubiese sido implementar dichas funciones para recibir parámetros de más de dos dimensiones, sin embargo esta pérdida de potencial se ha suplido mediante dos características integradas en el entorno MATLAB, MATLAB Coder y Parallel Computing Toolbox.

En primer lugar se compilaron con MATLAB Coder a modo de ejecutable `.mexw64` las funciones que más tiempo consumían durante su ejecución, estas funciones fueron las encargadas de realizar los algoritmos BD-GMD y BD-ZF. Estas funciones fueron traducidas a C y compiladas por MATLAB Coder empleando el compilador integrado en el paquete Windows SDK for Windows 7 and .NET Framework 4.

Con la función `matlabpool` de Parallel Computing Toolbox se estableció un grupo de servidores formado por dos instancias de MATLAB, una por procesador, que permitió paralelizar los cálculos realizados en el banco de pruebas. El bucle `for` empleado para calcular cada una de las realizaciones acometidas en cada iteración de la simulación fue sustituido por el bucle `parfor` que permite paralelizar los cálculos en el grupo de servidores establecido por `matlabpool`.

Emplear el ejecutable para calcular BD-GMD y el uso de bucles `parfor` permitió acortar drásticamente el tiempo empleado en cada simulación.

Se expone a continuación, a modo de tabla, los tiempos empleados en distintas implementaciones del banco de pruebas en una simulación de un punto, con 10000 realizaciones, para un enlace  $12 \times [2, 2, 4, 2, 2]$ , en la que se se calculan filtros, capacidades y SINRs por usuario para ambos esquemas de precodificación. Estas implementaciones son: el uso `defor` normal, el uso de `parfor`, la inclusión de los dos algoritmos compilados como ejecutables `.mexw64` llamados desde el bucle `parfor` y la inclusión del ejecutable para calcular BD-GMD llamado desde `parfor`.

Simulación realizada con	Tiempo [s]
<code>for</code>	86.366
<code>parfor</code>	46.393
<code>parfor + BD-GMD y BD-ZF .mexw64</code>	46.865
<code>parfor + BD-GMD.mexw64</code>	39.005

El uso del bucle `parfor` y del ejecutable `.mexw64` para calcular BD-GMD permite ahorrar, aproximadamente, 15 minutos, en una simulación de 20 puntos con 10000 realizaciones por punto.

## 4.2. Métodos no numéricos

La inspección ha sido el método no numérico más empleado. Todas las operaciones llevadas a cabo por los precodificadores sobre la matriz de canal equivalente no son más que operaciones llevadas a cabo sobre muestras que provienen de variables aleatorias gaussianas complejas de media cero y varianza unidad. Y pese a lo simple de la afirmación el resultado final alcanza una gran complejidad. Sin embargo, la fascinación y la intriga motivaron a que se intentara trabajar de manera analítica. Parte de esta motivación se debe a las conclusiones que se exponen en [19].

No se han podido obtener expresiones cerradas para la potencia en transmisión o la SINR, salvo para la potencia en BD-ZF por obvia. Pero se han realizado ciertos razonamientos bajo este enfoque y sus conclusiones parecen manifestarse en las simulaciones.

Estos análisis no numéricos se detallan y desarrollan en el capítulo 5.



# Capítulo 5

## Resultados

En este capítulo se expondrán los resultados obtenidos mediante el análisis de los esquemas a comparar y los resultados obtenidos mediante simulaciones. En las dos primeras secciones se mostrarán las principales diferencias encontradas entre BD-ZF y POW-MIN en lo que a potencia en transmisión y SINR se refiere apoyando estos resultados en simulaciones. En las restantes secciones se comparan las capacidades obtenidas por los esquemas frente a la potencia en transmisión que emplean.

### 5.1. Potencia de transmisión

El esquema de precodificación BD-ZF posee una expresión cerrada para la potencia en transmisión, ecuación 3.21. Esta expresión sólo depende del número de antenas transmisoras y huelga decir que dicha expresión es independiente de la realización del canal. Esto no ocurre así para el esquema POW-MIN. Por ser el tratamiento de la potencia una de las principales diferencias que se aprecian entre estos dos esquemas, en esta sección se tratará de esclarecer, en la medida de lo posible, cuan diferentes son en este sentido.

El algoritmo de minimización de potencia de [2] emplea un filtro en transmisión de la forma:

$$\mathbf{W}_{\text{tx}} = \mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{\Omega} \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{\Omega}$  es igual a:

$$\mathbf{\Omega} = \sqrt{N_0} \mathbf{\Gamma}^{1/2} \mathbf{\Lambda}^{-1} \quad (5.2)$$

la ecuación 5.3 muestra los requisitos de SNR por antena, con  $\gamma_i$  el requisito para la antena  $i$ -ésima,

$$\mathbf{\Gamma} = \text{blkd}(\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_N), \mathbf{\Gamma}_i = \gamma_i \mathbf{I}_{n_i} \quad (5.3)$$

y en mayor detalle se puede apreciar en [4] que  $\mathbf{\Lambda}$  es igual a:

$$\text{diag}(\mathbf{L}) = \mathbf{\Lambda} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \text{blkd}(\mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_N) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{\Lambda}_i = r_i \mathbf{I}_{n_i} \quad (5.6)$$

donde  $\mathbf{L}$  es la matriz de canal equivalente del esquema BD-GMD de [4] y que como confirma el autor cada uno de los  $r_i$  esta relacionado con la matriz de canal  $\mathbf{H}$  de la siguiente forma:

$$r_i = \sqrt[2n_i]{\det(\mathbf{\Lambda}_i^2)} = \sqrt[2n_i]{\frac{\det(\hat{\mathbf{H}}_i \hat{\mathbf{H}}_i^H)}{\det(\hat{\mathbf{H}}_{i-1} \hat{\mathbf{H}}_{i-1}^H)}} \quad (5.7)$$

donde  $\hat{\mathbf{H}}_i = [\hat{\mathbf{H}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{H}}_i^T]^T$ .

El producto de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$  donde cada valor de  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$  es de la forma  $a_{i,j} = a + ib$  con  $a, b \sim N(0, 1)$  se comporta como una matriz compleja de Wishart. El valor medio de su determinante se comporta como una variable aleatoria  $\chi_{2n}^2 \chi_{2(n-1)}^2 \dots \chi_{2(n-(m-1))}^2$ <sup>1</sup>[20], sabiendo que la media de una variable aleatoria con distribución  $\chi_k^2$  es  $k$ , el valor medio del determinante de la matriz en cuestión es igual a  $2^m \frac{n!}{(n-m)!}$ .

El determinante de la matriz  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  se comporta como una matriz compleja de Wishart como la ya descrita a excepción de una renormalización ya que los valores  $h = (a + ib)2^{-\frac{1}{2}}$  incorporan el termino  $2^{-\frac{1}{2}}$  que no se incluye en los valores  $a_{i,j}$ .

Por la misma razón los determinantes de la expresión 5.7 poseen un comportamiento aleatorio que permitiría calcular los estadísticos de  $\mathbf{\Omega}$ , dados unos requisitos de SNR por

<sup>1</sup>La notación se refiere a la distribución del producto de variables aleatorias con distribuciones  $\chi^2$ , en las que se indicada el grado de libertad en el subíndice

antena y una potencia de ruido en recepción, y que a su vez permitiría modelar la ecuación 5.8.

$$P_{tx} = \text{Tr}(\mathbf{F}^H \mathbf{F}) = \text{Tr}(\mathbf{\Omega}^2) \quad (5.8)$$

Esto obliga a tener en cuenta que, dados unos requisitos de SNR y un nivel de ruido, los valores de potencia en transmisión pueden hallarse minimizados empleando el algoritmo propuesto en [2], sin embargo, el carácter aleatorio de los auto-valores de la matriz de canal  $\mathbf{H}$  permite que dicho algoritmo pueda resultar en valores muy por encima de los que se obtendrían con esquemas que no economizan en potencia.

El desarrollo completo de la función de densidad de probabilidad que modela el comportamiento de los determinantes de la expresión 5.7 queda fuera de este trabajo.

Las simulaciones muestran el carácter aleatorio de la expresión 5.8 como puede comprobarse en la figura 5.1, en ella se representan en forma de histograma los resultados de la potencia en transmisión para un canal  $10 \times [2, 2, 2, 2, 2]$ ,  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_{10}$ ,  $N_0 = 1$ , en 10000 simulaciones. El eje horizontal se ha limitado por motivos estéticos.

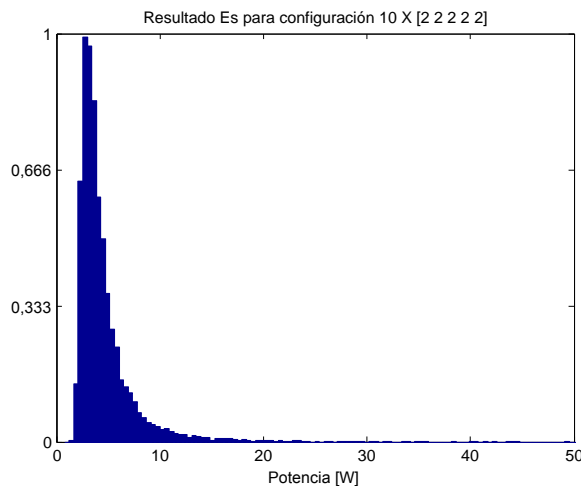


Figura 5.1: Histograma de los resultados de la ecuación 5.8 para 10000 realizaciones

## 5.2. SINR

El esquema BD-ZF procura cancelar en los receptores las interferencias producidas por las señales que transmite. Esto se traduce en un canal equivalente que se modela como una matriz diagonal de bloques tal y como se expresa en la ecuación 5.9.

$$\mathbf{W}_{rx}\mathbf{H}\mathbf{W}_{rx} = \text{blkdiag}(\boldsymbol{\Sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_N), \quad \boldsymbol{\Sigma}_i = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i^{(1)}}, \dots, \sqrt{\lambda_i^{(n_i)}}) \quad (5.9)$$

El esquema POW-MIN no ofrece la misma capacidad para cada receptor ya que no procura cancelar la interferencia que las señales destinadas a distintos receptores se producen entre sí. Como resultado obtenemos que, si consideramos  $N$  receptores, el primero de ellos no recibirá interferencia, el segundo recibirá interferencia del primer receptor, el tercer receptor recibirá interferencia del primer y del segundo receptor y así a lo largo de los  $N$  receptores y es fácil comprobar que esto es cierto ya que la matriz de canal equivalente del esquema POW-MIN es una matriz triangular inferior. Se realizarán análisis de las matrices de canal equivalente del algoritmo BD-GMD y del esquema POW-MIN para tratar de profundizar en este aspecto.

El canal equivalente en el esquema BD-GMD es  $\mathbf{L}$  tal que  $\mathbf{H} = \mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{Q}^H$  y el canal equivalente del esquema POW-MIN es  $\mathbf{L}\boldsymbol{\Omega}$ , como ya se detalló en la sección 3.1.

Para la primera iteración del algoritmo BD-GMD se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \tilde{\mathcal{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{P}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & 0 \\ \boldsymbol{\Xi} & \tilde{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^H \\ \tilde{\mathcal{Q}}^H \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

donde  $\boldsymbol{\Xi}$  es el primer elemento no diagonal de  $\mathbf{L}$  en la primera iteración y es el causante de la interferencia recibida por los  $N - 1$  receptores restantes y causada por el primer receptor. Su forma es:

$$\boldsymbol{\Xi} = \tilde{\mathcal{P}}^H \tilde{\mathcal{H}} \mathbf{Q}_1 \quad (5.11)$$

Desde este punto se denotará a la interferencia causada por el receptor  $j$  a los restantes  $k = j + 1, \dots, N$  cómo  $\boldsymbol{\Xi}_{(j)} \in \mathbb{C}^{\sum_{i=k}^N n_i \times n_j}$ .

Si tratamos de razonar cuál es la interferencia provocada por  $\boldsymbol{\Xi}_{(j)}$  nos encontramos



ante un problema matemático tan complicado como el planteado en la sección 5.1 para tratar de modelar la potencia en transmisión de POW-MIN.

Se puede afirmar sin embargo que, en BD-GMD para un canal descendente dado  $N_t \times [n_i], i = 1, \dots, N$ , los receptores reciben interferencia sólo por su orden de tal manera que el segundo receptor recibirá interferencia sólo del primer receptor y de una magnitud independiente de la cantidad de receptores restantes y así sucesivamente. Se puede afirmar de la misma manera que la interferencia aumenta en cada receptor pero no se puede afirmar que esto sea cierto para cualquier realización del canal.

Cuando se aplica POW-MIN no son válidas las afirmaciones anteriores. El canal equivalente del sistema pasa a ser  $\mathbf{L}\mathbf{\Omega}$  con lo que la interferencia causada por el receptor  $j$  a los restantes  $k = j + 1, \dots, N$  receptores es igual a  $\Xi_{(j)}\mathbf{\Omega}_i$  con  $\mathbf{\Omega}_i = \sqrt{N_0}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Lambda}_i^{-1}$  con  $\mathbf{\Gamma}_i$  y  $\mathbf{\Lambda}_i$  tal y como se detallan en la sección 5.1. Como la matriz  $\mathbf{\Lambda}_i$  es una diagonal compuesta por los elementos  $r_i$  de la ecuación 5.7 y estos elementos tienen un comportamiento estadístico como ya se ha descrito en la sección 5.1 cabe esperar que la interferencia que se causa tenga un comportamiento estadístico que podría ser modelado pero que dicho modelado queda fuera de este Trabajo de Fin de Grado. Sin embargo se puede simular el comportamiento de los valores  $r_i$  asociados al primer receptor concluyendo que en media, mediana y moda dicho valor aumenta a medida de que aumenta el número de receptores por lo que se puede esperar que la interferencia causada por la señal dirigida al primer receptor sobre las señales de los restantes receptores sea menor a medida de que aumenta el número de receptores. Del mismo modo no se puede afirmar que, para cualquier realización del canal, la interferencia en un receptor será mayor que la recibida por los receptores previos, exceptuando al segundo receptor ya que el primero no recibe interferencia.

A diferencia de la SINR en recepción que se obtiene en BD-ZF el esquema de precodificación POW-MIN no ofrece la misma calidad para cada receptor y se ve condicionada, la calidad, por la cantidad de receptores y por sus configuraciones de antenas. Las figuras 5.2 a 5.5 muestran a modo de histograma este hecho. Puede apreciarse como la SINR disminuye en cada receptor cuando se emplea POW-MIN y se mantiene constante en BD-ZF. Las figuras confirman que el primer receptor no recibe interferencias. Puede también

apreciarse que al introducir un receptor con más antenas, el tercero en estas simulaciones, el resultado empeora para los restantes receptores en POW-MIN, cuarto y quinto en las figuras, no pasando esto en BD-ZF. La flecha en la figura 5.4 apunta a la zona en la que se encuentran las SINR de los restantes receptores, puede apreciarse como estos valores están más concentrados que en la figura 5.2.

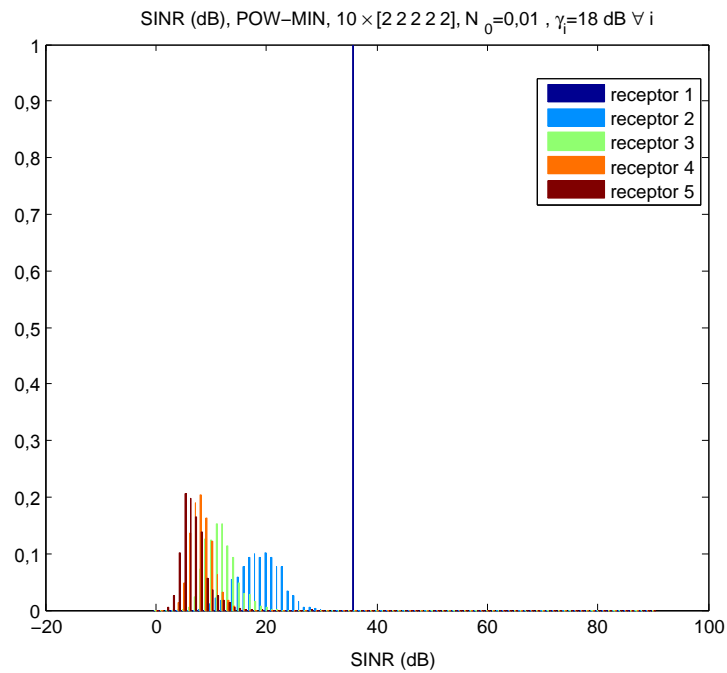


Figura 5.2: SINR obtenida con POW-MIN,  $10 \times [2, 2, 2, 2, 2]$   $N_0 = 0,01$   $\gamma_i = 18 \text{ dB} \forall i$

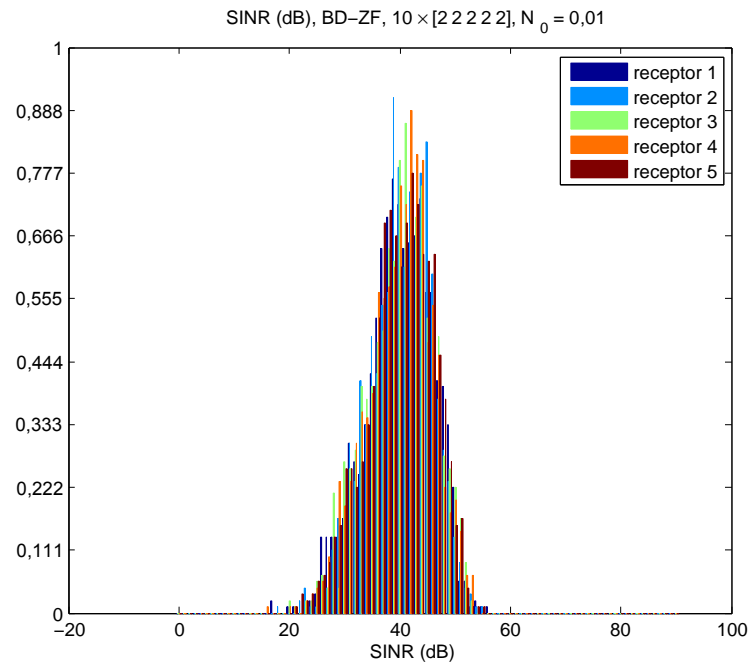


Figura 5.3: SINR obtenida con BD-ZF,  $10 \times [2, 2, 2, 2, 2]$

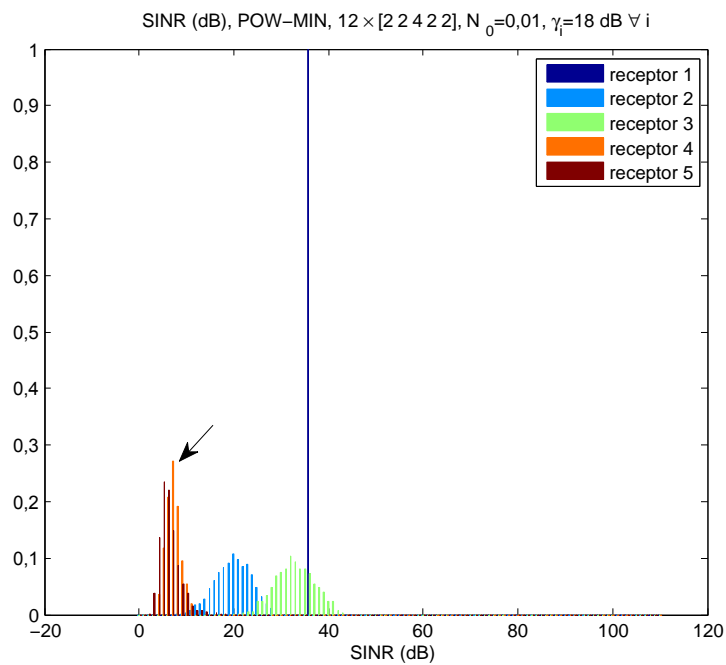


Figura 5.4: SINR obtenida con POW-MIN,  $12 \times [2, 2, 4, 2, 2]$   $N_0 = 0,01$   $\gamma_i = 18 \text{ dB } \forall i$

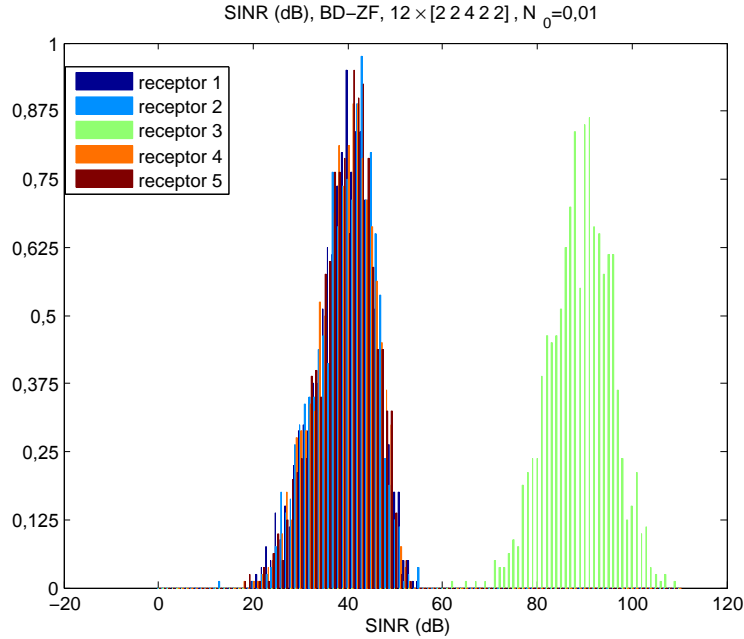


Figura 5.5: SINR obtenida con BD-ZF,  $12 \times [2, 2, 4, 2, 2]$   $N_0 = 0,01$

### 5.3. Suma de capacidad vs. Potencia en transmisión

A continuación se exponen los resultados para 1000 simulaciones  $10 \times [2, 2, 2, 2, 2]$  en las que se comparan las sumas de la capacidad de los receptores con la potencia en transmisión empleada, figuras de 5.6 a 5.13. La potencia de ruido es  $N_0 = 0,01$  y en las diferentes gráficas los requisitos  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_{N_r} \gamma_i$  donde  $\gamma_i$  evoluciona desde 0 dB a 25dB. Puede apreciarse como en efecto se minimiza la potencia en transmisión para el esquema POW-MIN a costa de una pérdida de capacidad. También puede apreciarse como para las realizaciones en las que POW-MIN utiliza más potencia los resultados de BD-ZF, para la misma realización, son bajos en capacidad. Estos puntos están indicados en las leyendas de las figuras como  $\text{POW-MIN}_{P_{MAX}}$  y  $\text{BD-ZF}_{P_{MAX}}$ . En la figura 5.15 puede apreciarse cómo aumenta el tanto por ciento de realizaciones en las que POW-MIN supera a BD-ZF en potencia.

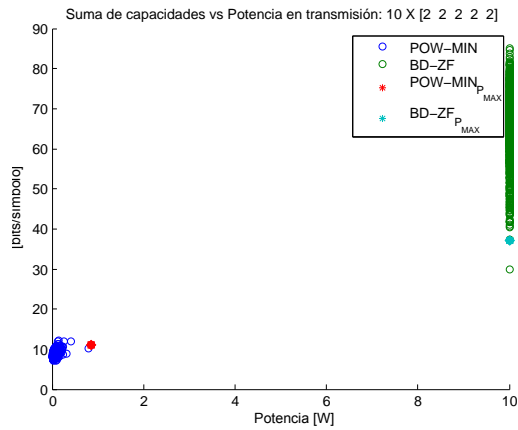


Figura 5.6: Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con  $\gamma_i = 0dB$

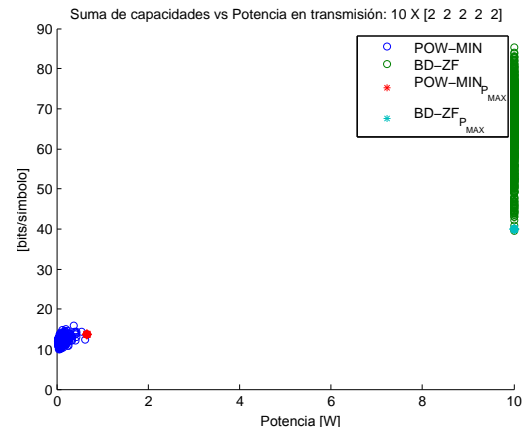


Figura 5.7: Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con  $\gamma_i = 3,125dB$

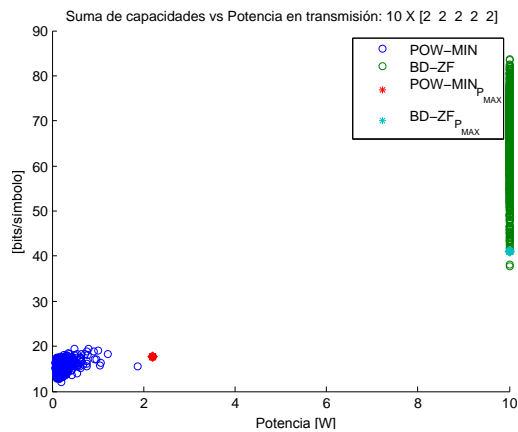


Figura 5.8: Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con  $\gamma_i = 6,25dB$

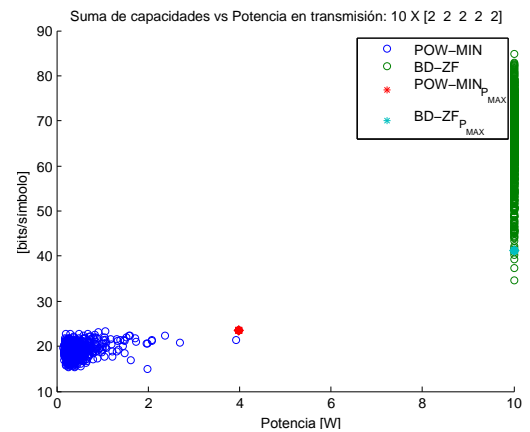


Figura 5.9: Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con  $\gamma_i = 9,375dB$

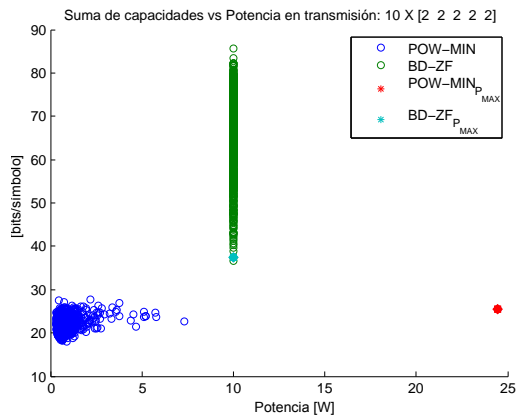


Figura 5.10: Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con  $\gamma_i = 12,5dB$

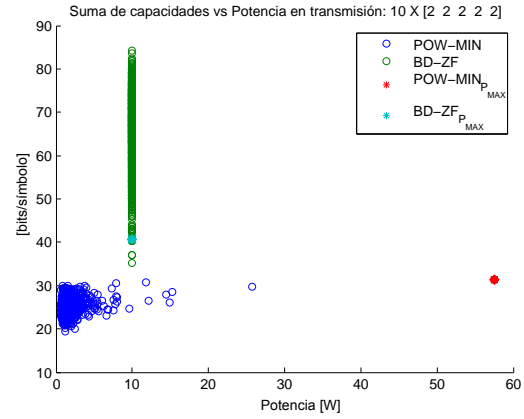


Figura 5.11: Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con  $\gamma_i = 15,625dB$

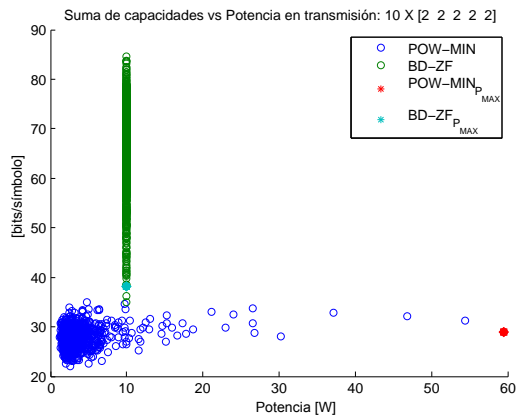


Figura 5.12: Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con  $\gamma_i = 18,75dB$

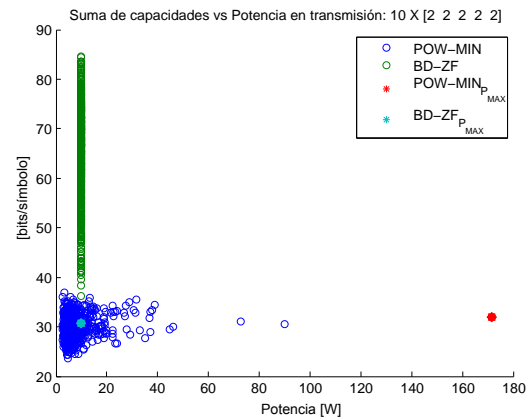


Figura 5.13: Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con  $\gamma_i = 21,875dB$

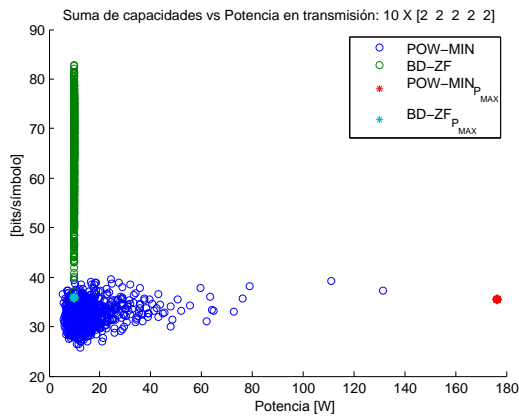


Figura 5.14: Suma de capacidades vs potencia en transmisión para BD-ZF y POW-MIN con  $\gamma_i = 25dB$

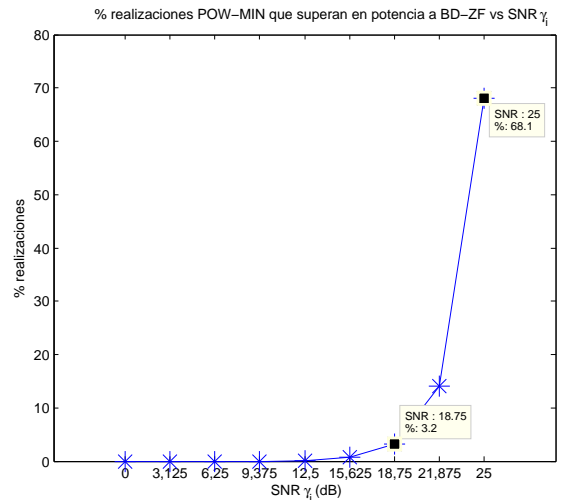


Figura 5.15: Tanto por ciento de realizaciones de POW-MIN que superan en potencia a BD-ZF vs  $\gamma_i$  dB

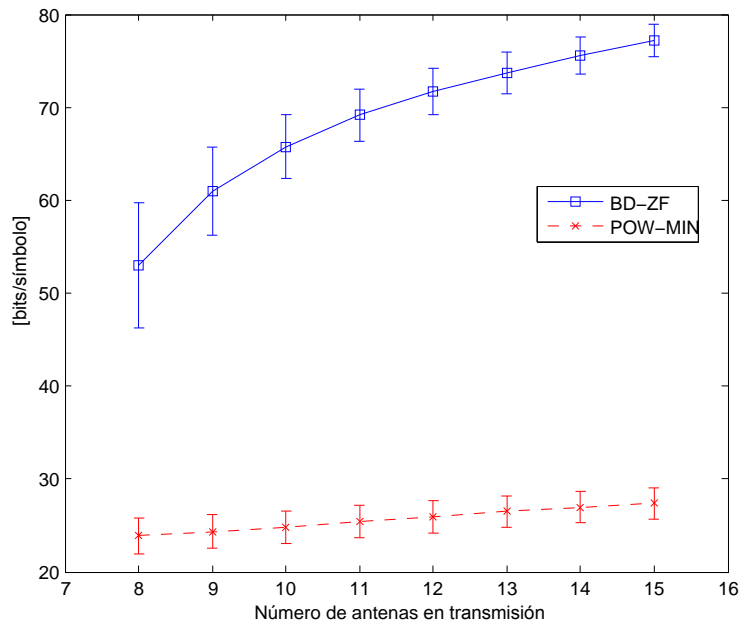


Figura 5.16: Suma de capacidades a medida que aumenta el número de antenas transmisoras

## 5.4. Cambios en la configuración de antenas

Se exponen a continuación un conjunto de resultados que ponen de manifiesto el comportamiento de los esquemas de precodificación a estudio ante distintas configuraciones de antenas. Los parámetros estudiados son, la suma de las capacidades de los receptores y la potencia en transmisión ante variaciones en el número de antenas en transmisión y en recepción.

En la figura 5.16 se muestra como evolucionan la media y la desviación típica de la suma de las capacidades de los receptores a medida de que aumenta el número de antenas en transmisión. La desviación típica se representa de manera vertical entorno al valor de la media. La configuración del canal es de 8 antenas en recepción distribuidas uniformemente entre los receptores, una potencia de ruido  $N_0 = 0,01$  y unos requisitos de 18 dB para las antenas receptoras. El número de antenas transmisoras varía de 8 a 15. Los datos han sido obtenidos mediante una simulación que emplea 2000 realizaciones por punto. Puede apreciarse cómo aumenta la suma de las capacidades por receptor en el esquema BD-ZF mientras en POW-MIN no.

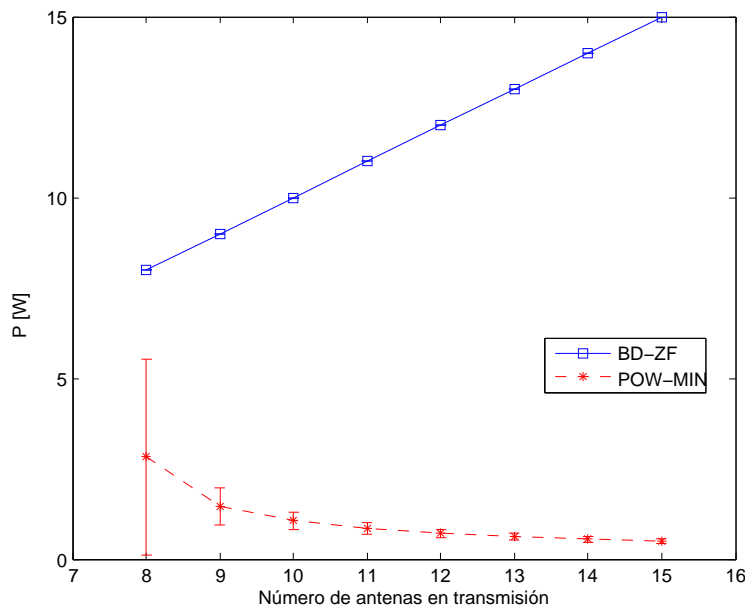


Figura 5.17: Potencia a medida que aumenta el número de antenas transmisoras



La figura 5.17 muestra los resultados de la evolución de la media y la desviación típica de la potencia a medida que aumenta el número de antenas en transmisión. Los parámetros son idénticos a los empleados en la simulación anterior. A diferencia de BD-ZF, se aprecia un descenso en la potencia empleada por POW-MIN.

En la figura 5.18 se muestra cómo evolucionan la media y la desviación típica a medida que aumenta el número de antenas en los receptores. Los datos han sido obtenidos mediante una simulación con parámetros idénticos a la anterior, salvo por el número de antenas en transmisión y en recepción. Estos parámetros han variado a lo largo de la simulación dando lugar a unas configuraciones de canal de la forma  $\sum_{i=1}^N n_i \times [n_i, n_i, n_i, n_i]$  con  $n_i = 2, 3, 4, 5$ . Puede apreciarse como la pendiente para BD-ZF es más inclinada.

En la figura 5.19 la evolución se muestra para la media y la desviación típica de la potencia en transmisión. Los datos provienen de la comentada en el párrafo anterior. Puede comprobarse que la potencia en POW-MIN desciende ligeramente.

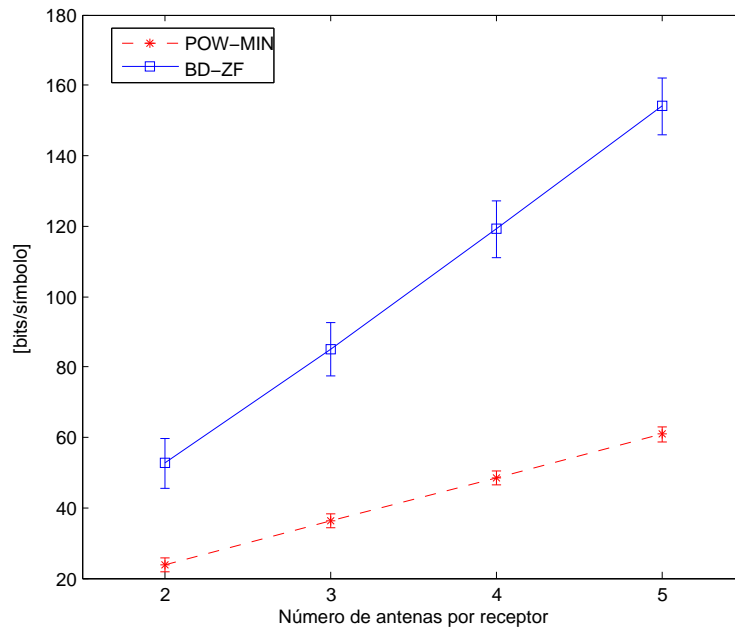


Figura 5.18: Suma de capacidades a medida que aumenta el número de antenas receptoras

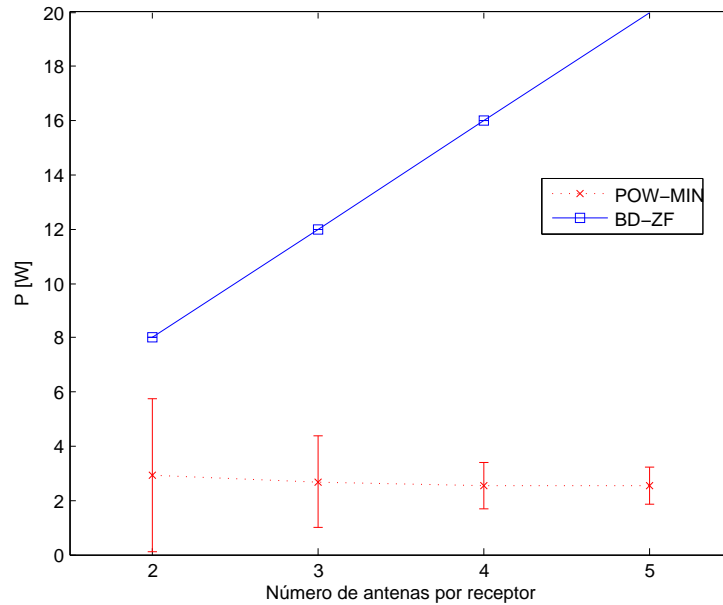


Figura 5.19: Potencia a medida que aumenta el número de antenas receptoras

## 5.5. Cambios en el número de receptores

A continuación se exponen los resultados en media y desviación típica de la suma de capacidades y la potencia en transmisión de ambos esquemas ante la variación del número de receptores.

La simulación se ha llevado a cabo con 2000 realizaciones para cada punto, una potencia de ruido de  $N_0 = 0,01$ , unos requisitos de SNR por antena de 18 dB y dos antenas por receptor. El número de receptores ha sido de 2, 4, 6, 8 y 10 y se han empleado las mismas antenas en transmisión que en recepción.

La figura 5.20 muestra los resultados para la capacidad y la figura 5.21 para la potencia.

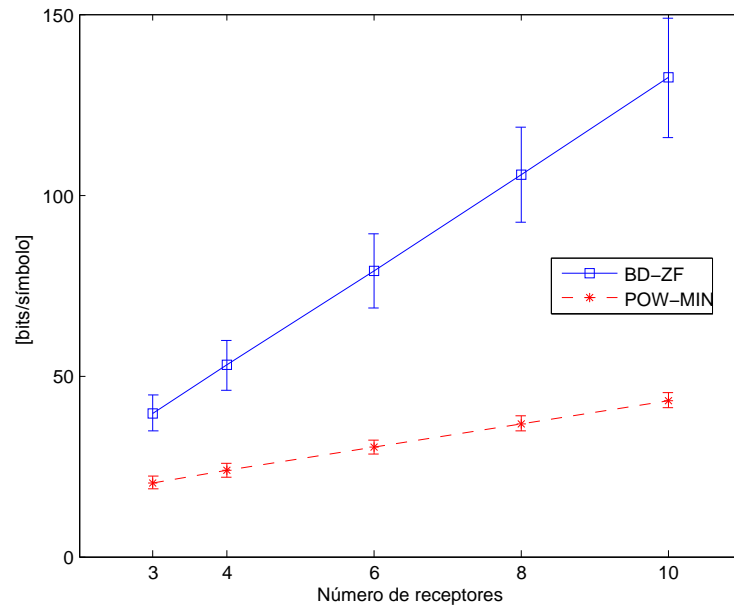


Figura 5.20: Suma de capacidades a medida que aumenta el número de receptores

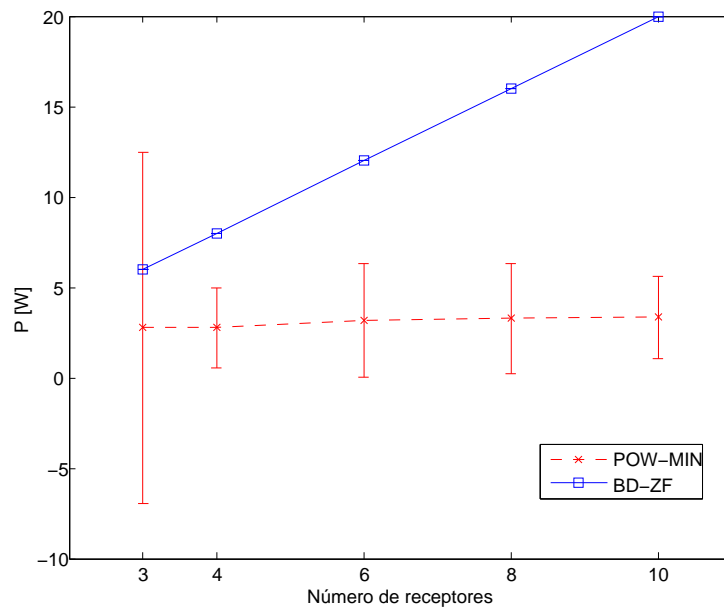


Figura 5.21: Potencia a medida que aumenta el número de receptores



## Conclusiones y líneas futuras

### 6.1. Conclusiones

Se discuten a continuación las conclusiones que se toman a la vista de los resultados, se exponen divididas en tres categorías que atienden a tres criterios, potencia, capacidad y utilidad.

#### 6.1.1. Potencia

Como ya se ha podido ver en los resultados, el esquema POW-MIN minimiza realmente la potencia de transmisión en comparación con BD-ZF. La inclusión de más antenas no lo hace si no mejor en ese aspecto y mantiene esta virtud con el aumento del número de receptores, las figuras 5.17 y 5.19 ilustran esta afirmación.

Como se comentó en el sección 5.1, pese a priorizar la eficiencia energética, POW-MIN no está diseñado para cumplir un límite superior de potencia transmitida. Esta falta de cota superior puede llevar al transmisor a emitir más potencia que la empleada por BD-ZF. El mismo artefacto matemático que facilita la economía del recurso energético es el culpable de que POW-MIN se vea afectado de estos excesos fortuitos potencia.

Esto ha de tenerse en cuenta si se trata con sistemas que planifican los recursos ener-

géticos. BD-ZF emplea más potencia, pero obedece a una expresión cerrada, que se puede evaluar de antemano. POW-MIN está sujeto a las condiciones del canal y esto puede ser problemático para una suerte de planificación.

Este comportamiento se agrava a medida que aumentan los requisitos de SNR por parte de las antenas receptoras. En un entorno exigente, POW-MIN está en clara desventaja frente a BD-ZF. Cuando los requisitos de SNR por antena superan los 22 dB, la eficiencia energética deja de ser factible tal y cómo puede apreciarse en la figura 5.13. Sin embargo, para entornos poco exigentes, POW-MIN consigue minimizar considerablemente la potencia transmitida sin que se manifieste la falta de límite superior, figuras 5.6 y aledañas.

### 6.1.2. Capacidad

POW-MIN no ofrece la misma capacidad en suma que BD-ZF. La prioridad de la eficiencia energética penaliza la capacidad alcanzada. A esto se añade la falta de equidad entre los receptores, haciendo que el primero se comporte de manera similar a como lo haría en BD-ZF y empeorando a medida que avanza en lista de receptores.

El diseño de POW-MIN no persigue maximizar la tasa transmitida. El comportamiento del canal equivalente, que matricialmente se puede expresar como una matriz triangular inferior, perjudica a cualquier receptor que no sea el primero y la situación se agrava a medida de que aumenta el número de receptores. Esto no ocurre así en BD-ZF, la capacidad de los receptores sólo depende del ruido y de las condiciones de canal, esto permite que en cualquiera de las figuras expuestas se aprecie como BD-ZF ofrece mucha mayor capacidad.

Sin embargo, POW-MIN ofrece una estabilidad en capacidad, y en suma de capacidad, que BD-ZF no consigue. Esta estabilidad es la contraparte del comportamiento que posee en potencia. Se aprecia en gran medida en las figuras de 5.6 y 5.13 así como en las representaciones de las desviaciones típicas de las figuras 5.16 , 5.18 y 5.20.

Desde la perspectiva de la planificación de recursos de capacidad, POW-MIN, pese a

no ofrece una expresión cerrada, ofrece unos resultados más acotados debido a la inclusión de los requisitos de SNR por antena durante el cálculo de los filtros transmisor y receptor.

### 6.1.3. Utilidad

Ambos esquemas pueden ser útiles para un sistema de comunicaciones que requiera de precodificación MIMO. La elección de un esquema u otro sólo puede obedecer a la capacidad de cada uno para adaptarse a los requisitos del sistema.

La ventaja de POW-MIN frente a BD-ZF es la potencia en transmisión. Si lo primordial de un sistema es la potencia en transmisión POW-MIN es el mejor candidato.

En lo que a tasa se refiere, el ordenamiento de los receptores en el esquema POW-MIN incrementa la capacidad de los receptores [2]. La elección del orden de los mismo atendiendo a criterios que no se han tenido en cuenta en este Trabajo de Fin de Grado, como son por ejemplo las pérdidas de propagación, puede aventajar a POW-MIN frente BD-ZF si los requisitos de tasa no son elevados.

Si se favorece la tasa frente a la potencia, o si se obvia por completo la potencia, BD-ZF es la elección. De la misma manera si se busca independizar la tasa de la cantidad de receptores o se pretende desligar la tasa de la interferencia.

El criterio económico es fundamental cuando se trata de elegir un sistema en detrimento de otro. Se expone a continuación una suerte de escenario para, desde unas miras muy reducidas, poder ilustrar un ejemplo de decisión basada en este criterio.

Se define un canal, con una potencia de ruido de  $N_0 = 0,01$ , con una configuración  $6 \times [2, 2, 2]$  y unos requisitos de SNR por antena de  $\gamma_i = 18$  dB, empleando los resultados de una simulación sin parámetros, con 2000 realizaciones. Se representa a continuación una tabla en la que se representan la media de la suma de capacidades y la potencia obtenidas:

ESQUEMA	MEDIA DE LA SUMA DE CAPACIDAD	POTENCIA
POW-MIN	20.41	2.76
BD-ZF	39.62	6

Si no se tienen en cuenta el reparto desigual de capacidad en POW-MIN, ya sea por inocuo o por solventado, ni las inversiones necesarias para implementar el sistema, podemos componer una regla, que aun siendo grosera en lo económico y en lo técnico, puede darnos una idea de cómo decidir entre estos esquemas atendiendo al gasto.

Si consideramos un gasto máximo por uso de  $G$ , una tasa objetivo  $R$ , un gasto asociado al uso del ancho de banda  $S_{BW}$  y un gasto asociado a la potencia  $S_{P_{tx}}$ , se puede expresar un criterio de decisión:

$$\frac{R}{C_i} S_{BW} + P_{tx} S_{P_{tx}} \leq G \quad (6.1)$$

Donde  $C_i$  es la media de la suma de las capacidades del esquema  $i$  y  $P_i$  la potencia media transmitida necesaria para alcanzar la capacidad. La elección será obvia si sólo uno de estos esquemas cumple el criterio, nula de no cumplirse por ninguno o elegir el más económico, de cumplirse por ambos.

## 6.2. Líneas futuras

Existen varias posibles vías para profundizar más en la comparación de estos dos esquemas o cualesquiera otros. El desarrollo analítico de expresiones cerradas que permitan concluir cuál es la potencia transmitida, la SINR o la tasa y que permitan trabajar con los parámetros que aquí se han empleado supondría un enorme avance técnico. Con estas expresiones se podrían diseñar criterios de decisión que permitan concluir directamente en qué sistemas toman los esquemas su ventaja.

La dificultad para encontrar estas expresiones hace que queden fuera del alcance del autor de este Trabajo de Fin de Grado. Quizá una aproximación o una función que se



ajuste a las simulaciones podría haber sido una gran mejora. En la literatura especializada se recogen multitud de soluciones a problemas similares al planteado en la sección 5.1. Una revisión más completa de estas publicaciones podría ofrecer líneas de investigación en un futuro.

El desarrollo completo de un modelo de transmisión en el que se incluyan modulación y detección podría arrojar resultados sobre la tasa de error de bit (Bit Error Rate, BER). Integrar en este modelo pérdidas de propagación, cómo la propuesta en [21], ofrecería mayor realismo al modelo.

El desarrollo completo de los precodificadores utilizando entornos de prototipado, como las herramientas integradas en el entorno MATLAB, Simulink, MATLAB Coder, u otras herramientas, no sólo dotaría de realismo al modelo sino que permitiría su implementación en dispositivos físicos reales, como procesadores o procesador digital de señal (*Digital Signal Processor*) (DSP), y su la comparación en condiciones reales.

El último paso que se propone como posible mejora es el de comparar los resultados de ambas líneas de investigación, la analítica y la experimental. Esto permitiría realizar predicciones por medio de las expresiones analíticas y validarlas posteriormente mediante comprobación experimental en dispositivos reales.



## Plan de proyecto

Con el fin de estimar los costes y el tiempo requeridos en el desarrollo y ejecución de este Trabajo de Fin de Grado, se detallan a continuación la planificación y el presupuesto del mismo.

### 7.1. Planificación

La ejecución del trabajo se divide en siete fases que se detallan a continuación:

- En la fase inicial se realiza un estudio de la bibliografía relacionada con los precodificadores, este estudio sirve a su vez como estudio de viabilidad del trabajo. Se inicia el 17 de enero de 2014 y concluye el 31 de enero del mismo año. Se emplean 50 horas en acometer esta fase y es estrictamente necesaria para el comienzo de las siguientes.
- En la segunda fase se realiza un estudio de las alternativas de implementación. Esta fase se inicia el 1 de febrero y concluye el día 2 del mismo mes. Se emplean 10 horas en realizar este estudio. La conclusión de esta fase permite iniciar la siguiente.
- En la tercera fase, una vez concluida la elección del entorno de desarrollo, se lleva a cabo la implementación de los precodificadores en dicho entorno. Se emplean 16

horas, repartidas entre el día 3 y el día 23 de febrero. La finalización de esta fase y de la fase de documentación de la prueba permiten el inicio de la fase de diseño de las pruebas.

- En la fase de documentación propia de las pruebas, la cuarta, se estudian las propuestas previas en materia de comparación. Se emplean 50 horas en este estudio, repartidas entre el día 3 y el día 23 de febrero. El término de esta fase y de la anterior permiten iniciar el diseño de las pruebas.
  
- En la quinta fase se diseñan y desarrollan las pruebas a realizar y se obtienen los datos que serán estudiados en la siguiente fase. Se emplean 32 horas en este desarrollo. Se inicia el día 24 de febrero y concluye el 4 de marzo. La ejecución completa de esta fase permite iniciar el desarrollo de los resultados y las conclusiones.
  
- En esta fase, la sexta, se estudian los datos de la fase anterior y se obtienen los resultados y las conclusiones. Se inicia el día 5 de marzo y concluye el día 16 de marzo. En esta fase se emplean 40 horas. Su resolución es necesaria para la conclusión de la fase de redacción.
  
- En la séptima fase se lleva a cabo la redacción de los documentos del trabajo. Esta fase consume 96 horas repartidas entre los días 17 de marzo y 18 de junio. La consumación de esta fase finaliza el trabajo realizado.

La siguiente tabla muestra de manera más condensada los recursos de tiempo empleados:

FASE	TIEMPO EN HORAS
PRIMERA	50
SEGUNDA	10
TERCERA	16
CUARTA	50
QUINTA	32
SEXTA	40
SÉPTIMA	96
<b>TOTAL</b>	<b>294 HORAS</b>

## 7.2. Presupuesto

Los recursos económicos necesarios para el desarrollo de este Trabajo de Fin de Grado son reparten en: recursos humanos y materiales.

Se emplean 294 horas de trabajo por parte del autor y 58 por parte del tutor. El gasto por parte del autor es de 30 euros la hora. Este valor se obtiene ponderando el gasto asociado a la cualificación necesaria para acometer las distintas subtarefas que componen el trabajo y al tiempo empleado en ellas. El gasto asociado al tutor se fija en 120 euros la hora. El resultado de este gasto en personal es de 15780 euros.

PERFIL	PRECIO POR HORA [€/h]	HORAS	TOTAL [€]
TUTOR	120	58	6960
AUTOR	30	294	8820
<b>TOTAL</b>			<b>15780 €</b>

Se emplean 2500 euros en materiales, repartidos en un ordenador y una licencia de MATLAB. Se detallan a continuación estos gastos a modo de tabla.

<b>MATERIAL</b>	<b>PRECIO €</b>
Ordenador	500
Licencia de MATLAB	2000
<b>TOTAL</b>	<b>2500 €</b>

El total presupuestado es de 18280 euros, que se obtienen como la suma de los gastos en recursos humanos y los gastos en materiales tal y como se muestra en la siguiente tabla.

<b>TIPO DE GASTO</b>	<b>GASTO €</b>
RECURSOS HUMANOS	15780
MATERIALES	2500
<b>TOTAL</b>	<b>18280 €</b>

# Bibliografía

- [1] Q. H. Spencer, A. L. Swindlehurst, and M. Haardt, “Zero-forcing methods for down-link spatial multiplexing in multiuser MIMO channels,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 2, pp. 461–471, 2004.
- [2] W. W. Ho and Y.-C. Liang, “Efficient power minimization for MIMO broadcast channels with BD-GMD,” en *IEEE International Conference on Communications. ICC’07.*, pp. 2791–2796, 2007.
- [3] M. Bansal and A. Trivedi, “Joint routing and stream control scheduling in mimo-based WMSs,” en *20th International Conference on Computer Communications and Networks (ICCCN)*, pp. 1–6, 2011.
- [4] S. Lin, W. W. Ho, and Y.-C. Liang, “Block-diagonal geometric mean decomposition (BD-GMD) for multiuser MIMO broadcast channels,” en *IEEE 17th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, pp. 1–5, 2006.
- [5] D. Shnidman, “A generalized Nyquist criterion and an optimum linear receiver for a pulse modulation system,” *Bell System Technical Journal*, vol. 46, no. 9, pp. 2163–2177, 1967.
- [6] A. Kaye and D. George, “Transmission of Multiplexed PAM Signals Over Multiple Channel and Diversity Systems,” *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. 18, pp. 520–526, October 1970.

- 
- [7] L. Brandenburg and A. Wyner, "Capacity of the Gaussian channel with memory: The multivariate case," *Bell System Technical Journal*, vol. 53, no. 5, pp. 745–778, 1974.
- [8] J. Salz, "Digital Transmission Over Cross-Coupled Linear Channels," *ATT Technical Journal*, vol. 64, no. 6, pp. 1147–1159, 1985.
- [9] N. Amitay and J. Salz, "Linear equalization theory in digital data transmission over dually polarized fading radio channels," *ATT Bell Laboratories Technical Journal*, vol. 63, pp. 2215–2259, Dec 1984.
- [10] D. Sánchez Herrera, "Estudio de dualidad transmisión-recepción en sistemas MIMO multiusuario," Proyecto Fin de Carrera, Universidad Carlos III de Madrid, 2009.
- [11] C. A. Belfiore and J. H. Park Jr, "Decision feedback equalization," *Proceedings of the IEEE*, vol. 67, no. 8, pp. 1143–1156, 1979.
- [12] C. B. Peel, "On "dirty-paper coding",", *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 20, no. 3, pp. 112–113, 2003.
- [13] M. Tomlinson, "New automatic equaliser employing modulo arithmetic," *Electronics letters*, vol. 7, no. 5, pp. 138–139, 1971.
- [14] H. Harashima and H. Miyakawa, "Matched-transmission technique for channels with intersymbol interference," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 20, no. 4, pp. 774–780, 1972.
- [15] Y. Jiang, J. Li, and W. W. Hager, "Joint transceiver design for MIMO communications using geometric mean decomposition," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 10, pp. 3791–3803, 2005.
- [16] O. I. Pérez Navarro, "Coordinación de múltiples antenas en redes celulares para alcanzar una alta eficiencia espectral," Proyecto Fin de Carrera, Universidad Carlos III de Madrid, 2008.



- 
- [17] E. González Sainz, “Optimización de la potencia transmitida en precodificadores para sistemas MIMO multiusuario,” Proyecto Fin de Carrera, Universidad Carlos III de Madrid, 2013.
- [18] F. Llinares López, “Clustering techniques for base station coordination in a wireless cellular system,” Proyecto Fin de Carrera, Universidad Carlos III de Madrid, 2012.
- [19] E. Telatar, “Capacity of Multi-antenna Gaussian Channels,” *European transactions on telecommunications*, vol. 10, no. 6, pp. 585–595, 1999.
- [20] A. Edelman, “Eigenvalues and condition numbers of random matrices,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 9, no. 4, pp. 543–560, 1988.
- [21] M. Hatay, “Empirical formula for propagation loss in land mobile radio services,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 29, no. 3, pp. 317–325, 1980.
- [22] Y. Jiang, J. Li, and W. W. Hager, “Transceiver design using generalized triangular decomposition for MIMO communications with QoS constraints,” en *IEEE Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2004.*, vol. 1, pp. 1154–1157, 2004.