



**ANÁLISIS DE VIGAS  
CON MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS**

---

**Autor:**

**Sara Martínez-Murillo Alejano**

**Tutor:**

**Dr. Enrique Barbero Pozuelo**



*"Art without engineering is dreaming.  
Engineering without art is calculating."*

Steven Roberts



# Resumen

Una de las aplicaciones más importantes de las estructuras inteligentes es la modelar el comportamiento. El objetivo de este Trabajo Fin de Grado es analizar la capacidad de control que tienen los materiales inteligentes con respecto a una estructura sometida a requerimientos externos. Se va a realizar un estudio analítico del comportamiento de una viga de material compuesto, de tipo laminado, en el que además habrá láminas de material piezoeléctrico. Se estudiará la capacidad de control que tienen estas láminas sobre el conjunto, introduciendo un campo eléctrico variable a lo largo del espesor del laminado, que estará siendo a su vez sometido a cargas externas. Se probarán también distintos laminados para ver la influencia de la posición de estas láminas en el resultado final.

Además, se introducirá una variación de temperaturas entre la cara superior y la inferior para analizar los efectos térmicos a los que la viga dará lugar. También se ha llevado a cabo un estudio del efecto de ambos campos a la vez. Estos campos podrán tener una distribución lineal o cúbica a lo largo del espesor.

El objetivo fundamental de este trabajo era el de alcanzar las expresiones más generales posibles de este problema, para ello se han utilizado las hipótesis de Kirchhoff combinadas con la Teoría Clásica del Laminado.



# Contenido

## **1. Introducción**

- 1.1 Motivación
- 1.2 Contenido
- 1.3 Descripción del Proyecto

## **2. Materiales Compuestos y Estructuras Inteligentes**

### 2.1 Materiales compuestos

#### 2.1.1 Introducción

#### 2.1.2 Clasificación

Matriz Orgánica

Fibras

#### 2.1.3 Aplicaciones

Industria Aeroespacial

Aviación

Industria naval

Transporte terrestre

Construcción

### 2.2 Materiales y Estructuras Inteligentes

#### 2.2.1 Introducción

#### 2.2.2 Materiales Inteligentes

Materiales con Efecto Magnetoestrictivo

Fluidos Reológicos

Materiales con Memoria de forma

#### 2.2.3 Materiales Piezoeléctricos

Base Física

Materiales

Historia

Aplicaciones

#### 2.2.4 Estructuras Inteligentes

### **3. Descripción del Modelo**

- 3.1 Introducción
- 3.2 Análisis macro-mecánico de una lámina
- 3.3 Desplazamientos tensiones y deformaciones
- 3.4 Campo eléctrico y variación de temperatura
- 3.5 Teorema de trabajos virtuales
- 3.6 Ecuaciones Constitutivas

### **4. Aplicación del Modelo**

- 4.1 Introducción
- 4.2 Ecuaciones generales
- 4.3 Descripción del problema

### **5. Análisis de Resultados**

- 5.1 Introducción
- 5.2 Control del movimiento
  - 5.2.1 Variación de voltaje
  - 5.2.2 Variación de Temperatura
  - 5.2.3 Variación de Temperatura y Voltaje
- 5.3. Análisis de Distintas secuencias de apilamiento

### **6. Conclusiones y Estudios Futuros**

- 6.1 Resumen y Conclusiones
- 6.2 Estudios Futuros

### **Bibliografía**

# Lista de figuras

Figura 1.1: Adaptación de forma en la naturaleza (NASA)

Figura 2.1: Clasificación de los materiales

Figura 2.3: Evolución del peso y las emisiones de los vehículos

Figura 2.4: Polímero con memoria de forma

Figura 2.5: Geometría interna piezoeléctrico

Figura 2.6: Geometría de una viga laminada de tres capas

Figura 2.7: Lámina compuesta simétrica

Figura 2.8: Estudio de vigas con parches actuadores

Figura 3.1: Lámina en un estado plano de tensión

Figura 3.2: Geometría deformada y sin deformar de un eje bajo que cumple las hipótesis de Kirchhoff

Figura 4.1: Geometría viga de cantilever con una carga puntual en el extremo

Figura 4.2: Ejes y esquema de la viga

Figura 5.1: Desplazamiento máximo de la viga con laminado  $[\text{piezo}/-45/45]_{2s}$  en función del un campo eléctrico lineal

Figura 5.2: Desplazamiento máximo de la viga en función de la temperatura real para el laminado  $[\text{piezo}/-45/45]_{2s}$

Figura 5.3: Desplazamiento máximo de la viga con laminado  $[\text{piezo}/-45/45]_{2s}$  en función del un campo eléctrico y un incremento de temperatura lineal

# Lista de tablas

Tabla 4.1: Propiedades de los materiales utilizados

Tabla 5.1: Desplazamiento laminado [piezo/-45/45]<sub>2s</sub> con  $V_s = -350$  y  $0$  kV

Tabla 5.2: Desplazamiento laminado [piezo/-45/45]<sub>2s</sub> con  $T_s = 90$  y  $120^\circ\text{C}$

Tabla 5.3: Desplazamiento laminado [piezo/-45/45]<sub>2s</sub> con  $T_s = 90$  y  $120^\circ\text{C}$  y  $V_s = -350$  y  $0$  kV

Tabla 5.4: Desplazamiento distintas secuencias de apilamiento

Tabla 5.5: Desplazamiento distintas secuencias de apilamiento con  $V_s = -350\text{kV}$  y  $P_1 = 0$

Tabla 5.6: Desplazamiento distintas secuencias de apilamiento con  $V_s = -350\text{kV}$  y  $P_1 = 1e16$  y  $1e17$

Tabla 5.7: Desplazamiento distintas secuencias de apilamiento con  $T_s = 90^\circ\text{C}$  y  $A_3 = 0$

Tabla 5.8: Desplazamiento distintas secuencias de apilamiento con  $T_s = 90^\circ\text{C}$  y  $A_3 = 1e11$  y  $1e12$



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación

Las estructuras inteligentes son uno de los puntos de mayor interés para la comunidad científica mundial en la actualidad. Antes de la aparición de estas, el criterio de diseño estructural se basaba en elegir un material y una geometría que garantizaran que la estructura sería capaz de aguantar los esfuerzos a los que sería sometida a lo largo de su vida útil. Este empezó a cambiar con la aparición de las estructuras inteligentes ya que estas son capaces de reaccionar ante estímulos externos adaptándose en cada momento a las condiciones de trabajo.

Según la definición de Ahmad, una estructura inteligente es todo sistema o material que es capaz de actuar de una manera determinada, en respuesta a un estímulo externo recibido a través de sensores construidos o intrínsecos, actuadores o mecanismos de control volviendo a su estado original tan pronto como el estímulo desaparece.

El uso de una estructura inteligente puede tener dos objetivos. El primer objetivo sería la monitorización de esta, es decir, que la estructura pueda “avisar” si aparece algún problema, estaría enfocado a la seguridad y mantenimiento de esta. Como segundo caso, se puede decidir usar este tipo de estructuras para poder variar en momentos concretos, las propiedades elasto-mecánicas del material como la forma, la rigidez o su vibración, consiguiendo condiciones óptimas de trabajo reduciendo el peso.

Se define como material inteligente aquél capaz de responder ante un estímulo concreto variando alguna de sus propiedades físicas como su rigidez, viscosidad, forma, color... Estos materiales se pueden clasificar según el cambio que experimentan o según el estímulo ante el que reaccionan. Dependiendo del tipo de estímulo se pueden encontrar materiales electro y magnetoactivos, que reaccionan ante campos eléctricos o magnéticos o

materiales fotoactivos que son aquellos que sufren un cambio debido a la incidencia de luz sobre estos.

Por otro lado se pueden encontrar materiales con memoria de forma, aquellos que reaccionan variando su forma y al eliminar el estímulo recuperan la anterior o materiales cromóactivos que son aquellos capaces de variar su color como consecuencia de un estímulo externo.

Dentro de los materiales inteligentes electroactivos, aquellos que varían sus propiedades físicas cuando se produce una variación en el campo eléctrico, se pueden encontrar los materiales piezoeléctricos. Cuando un campo eléctrico actúa sobre uno de estos materiales, este crea tensiones mecánicas que hacen que este se deforme, volviendo a su situación original cuando el campo desaparece. Puede ser considerado también como un material con memoria de forma. En el caso de que se apliquen ciertas cargas sobre el material dando lugar a unas tensiones, este creará un campo eléctrico. Así este material puede usarse para monitorizar el estado de la estructura sometida a cargas midiendo el campo eléctrico o para variar las propiedades mecánicas de este, haciendo que varíe su forma según la necesidad de cada momento. Esto podría utilizarse por ejemplo para adaptar la posición de las alas de un avión durante el vuelo, haciendo que se asemeje así al máximo a la forma de volar de los pájaros.

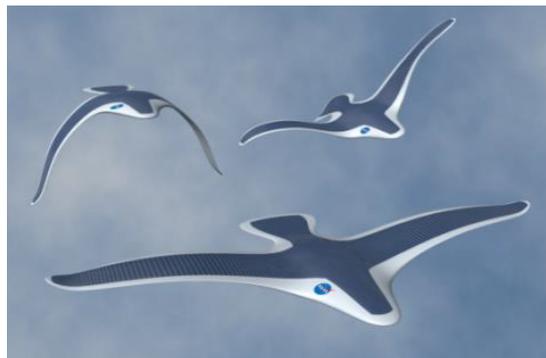


Figura 1.1: Adaptación de forma en la naturaleza (NASA)

La naturaleza está compuesta de infinidad de seres vivos y elementos inertes que trabajan en perfecta sincronía y equilibrio. Todos estos elementos se complementan entre ellos, creando así un sistema óptimo de producción y consumo de energía. Esta perfecta sincronía es lo que busca la ciencia en la actualidad, se pretende encontrar la máxima comodidad reduciendo el coste, la dificultad y la contaminación. Para conseguir este objetivo se ha tomado como modelo la naturaleza. En el caso de la industria aeronáutica, por ejemplo, se busca asemejar los aviones todo lo posible a las aves, ya que estas son capaces de cambiar rápidamente la configuración de sus alas para adaptarse a las condiciones de vuelo en crucero, realizar rápidas maniobras o descensos muy precisos (Barbarino et al, 2011).

Las estructuras inteligentes para usos industriales se encuentran todavía en fase de desarrollo e investigación, sin embargo los materiales compuestos supusieron un gran cambio en la concepción del diseño estructural y están siendo ya aplicados en muchos campos de la ingeniería. Estos materiales están formados por la combinación de dos o más materiales con el objetivo de que estos sumen sus propiedades y reaccionen mejor de lo que lo harían por separado. Estos materiales dependiendo de su proceso de fabricación pueden tratarse de compuestos reforzados con fibras o partículas, compuestos laminados y estructurales. Entre estas categorías el más utilizado es el laminado, que está fabricado a partir de láminas de material reforzado con fibra apiladas en distintas direcciones, creando así una estructura con gran resistencia y rigidez con un peso muy reducido. Están compuestos por fibras de gran dureza como carbono o vidrio introducidos en una matriz metálica, cerámica o polimérica. El uso de estos materiales está extendido en campos como la navegación, la construcción o la bioingeniería pero el campo en el que ha tenido un mayor impacto ha sido en el aeronáutico ya que permite disminuir de forma radical el peso de la estructura, reduciendo así el consumo de combustible de forma drástica. Además de la gran resistencia y rigidez, los materiales compuestos tienen buena resistencia a la temperatura, a la fatiga, a la corrosión y al desgaste.

Existen tres formas para abordar el estudio de cualquier problema mecánico el basado en la experimentación, los modelos analíticos y los modelos numéricos. La experimentación, a pesar de que resulta en ocasiones difícil y costosa por los equipos a utilizar y el propio material, siempre es necesaria ya que permite entender el problema y validar los modelos planteados. Los modelos analíticos permiten reproducir el comportamiento del sistema mediante ecuaciones simplificadas, dando una explicación rápida y sencilla a la física del problema estudiando los parámetros más significativos necesitando por lo general un bajo coste computacional. Los modelos numéricos se utilizarán cuando el problema resulte tan complejo que sea imposible de abordar de forma analítica. Dichos modelos suelen conllevar un alto coste computacional y hacen necesario un profundo conocimiento del problema para poder realizar las simplificaciones adecuadas y analizar los resultados correctamente. En este Trabajo de Fin de Grado se ha abordado el problema mediante un modelo analítico para facilitar su estudio y hacer una primera aproximación al problema planteado que en trabajos futuros podrá aumentarse con alguno de los otros dos métodos.

Muchos componentes estructurales fabricados tanto con materiales compuestos como por materiales isótropos, tales como palas de aerogeneradores, rotores de helicópteros, brazos de robots, ejes de transmisión, álabes de turbinas, etc. Están formados por elementos tipo vigas sometidos a cargas que originan principalmente esfuerzos de flexión (Demakos, 2003). Por eso se ha elegido el estudio de una viga sometida a este tipo de esfuerzos.

## 1.2 Contenido

El objetivo de este trabajo es analizar de la forma más general posible, el comportamiento de una viga de material compuesto con material piezoeléctrico, sometido a un problema de cargas estáticas, además de a un campo eléctrico y a una variación de temperatura. En trabajos de fin de grado anteriores ya se ha analizado este problema utilizando campos eléctricos, cargas y variaciones de temperatura sencillas, con los que el problema se simplifica notablemente. Por lo que el objetivo principal de este trabajo es obtener las ecuaciones más generales posibles haciendo así que estas sean aplicables a cualquier caso. Una vez se hayan obtenido estas ecuaciones, se escogerá un caso concreto y se analizarán los resultados obtenidos. Para conseguir esto principal, se han propuesto los siguientes objetivos parciales:

Establecimiento de los pasos a seguir y las ecuaciones necesarias para resolver el problema.

Desarrollo de un modelo analítico para el cálculo del momento, fuerza de cortadura, desplazamiento vertical y giro de cualquier sección de la viga sometida a unas condiciones a elegir.

Implementación de dichas ecuaciones en una herramienta de cálculo matemático, Matlab © y selección de casos concretos a estudiar.

Estudio de respuesta de la viga en los casos seleccionados. Estudio detallado del papel del material piezoeléctrico dentro de esta respuesta.

Así, este trabajo tiene dos objetivos fundamentales. El primer objetivo será obtener las ecuaciones más generales posibles para el caso de una viga de material compuesto con material piezoeléctrico sometida a cargas, un campo eléctrico y una variación de temperatura generales. El segundo consistirá en analizar el comportamiento de una viga de estas características en un caso concreto, estudiando así la labor de monitorización que puede realizar el material piezoeléctrico o el cambio de forma que puede producir en la estructura.

## 1.3 Descripción del Proyecto

Este proyecto estará dividido en seis capítulos siendo el primero de ellos la introducción.

El segundo será dedicado a un primer acercamiento teórico tanto a los materiales compuestos como a las estructuras inteligentes. Se llevará a cabo una descripción del punto en el que se encuentran actualmente los estudios sobre estos y su implicación en la industria. Se explicarán también sus principales características y clasificaciones, poniendo ejemplos de cada categoría. En el caso de los materiales inteligentes, se hará especial hincapié en los piezoeléctricos ya que serán sobre los que se realizará el estudio posterior.

El tercer capítulo introducirá las primeras ecuaciones, en él se explicarán las teorías que se utilizan a la hora de obtener modelos matemáticos para estudiar el comportamiento mecánico de los materiales compuestos, se definirá la teoría a utilizar durante el estudio y se plantean las principales ecuaciones de forma totalmente general.

En el cuarto capítulo, partiendo de las ecuaciones planteadas anteriormente, se obtendrá un modelo matemático general para el estudio de una viga de material compuesto con láminas piezoeléctricas, tratándose de un laminado simétrico, sometido a una carga distribuida y a una fuerza puntual, con un campo eléctrico y una distribución de temperaturas a convenir.

En el quinto capítulo se llevará a cabo el estudio de algunos casos concretos partiendo de las ecuaciones anteriores. Se establecerá el tipo de viga a estudiar y las condiciones de trabajo, de las que se irán variando ciertos parámetros para así analizar su respuesta ante distintas situaciones.

En el sexto y último capítulo se realizará un análisis de los resultados obtenidos a lo largo de todo el proyecto además de plantear las posibles líneas de investigación futuras.

Se podrá encontrar además una lista con las referencias bibliográficas utilizadas para la realización del trabajo.

# Capítulo 2

## Materiales compuestos y estructuras inteligentes

### 2.1 Materiales compuestos

#### 2.1.1 Introducción

Un material compuesto o “composite” es un conjunto material integrado por una combinación de dos o más micro o macro estructuras que difieren en forma y composición química y son insolubles entre sí. Estos mantienen, al menos parcialmente, las propiedades de sus estructuras constituyentes y se diseñan para que presenten la combinación de propiedades más favorable. En todo material compuesto se distinguen dos componentes:

- La matriz, componente presentado en fase continua que actúa como ligante.
- El refuerzo, en fase discontinua, se trata del elemento más resistente.

Hay ejemplos sencillos y muy conocidos de este tipo de materiales como el hormigón o los neumáticos, pero este trabajo se centrará en el estudio de materiales compuestos avanzados, que son aquellos utilizados para la fabricación de elementos estructurales.

Actualmente en el mundo de la industria, no hay un material claramente predominante frente al resto, sino que gracias a la tecnología se han obtenido materiales de todos los tipos con muy buenas propiedades, como cerámicas de alta tecnología, fibras ópticas, superaleaciones o tecnopolímeros. La gran ventaja de los materiales compuestos frente a cualquier otro es que con ellos se

pueden mezclar las propiedades que resulten más interesantes de cada uno de ellos, obteniendo así soluciones mucho más óptimas para cada caso.

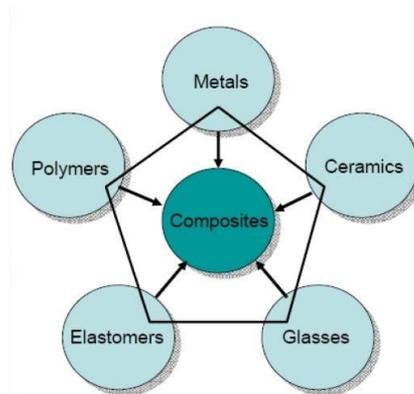


Figura 2.1: Clasificación de los materiales

## 2.1.2 Clasificación

Existen dos formas básicas de clasificar estos materiales.

Según la matriz:

- Matriz metálica o MMC (Metal Matrix Composites)
- Matriz cerámica o CMC (Ceramic Matrix Composites)
- Matriz de carbón
- Matriz orgánica o RP (Reinforced Plastics)

Según el tipo de refuerzo:

- Partículas, no supone un gran avance respecto al material isótropo.
- Plaquetas alternativa a los “wiskers” (fibras cortas monocristalinas sin defectos, peligrosos para la salud)
- Fibras cortas orientadas o con orientación aleatoria
- Fibras largas, elementos con forma de hilo en los que la relación  $L/D > 100$ . Suelen utilizarse en forma de tejidos para laminados.

Los materiales compuestos más utilizados son los de matriz orgánica y refuerzos en forma de fibra.

## **Matriz Orgánica**

Las funciones principales de una matriz son transferir los esfuerzos al refuerzo para dar estabilidad a la estructura, proteger el refuerzo del deterioro químico y mecánico y evitar la propagación de grietas.

Las matrices orgánicas (más vulgarmente conocidas como plásticos) pueden ser:

Termoplásticos, en general eran usadas en aplicaciones de bajos requisitos, aunque se están empezando a emplear termoplásticos avanzados para altas prestaciones.

Elastómeros, utilizadas en neumáticos y cintas transportadoras,

Duroplásticos o termoestables, las más empleadas en materiales compuestos de altas prestaciones. Todos ellos necesitan un proceso de curado para alcanzar su estructura reticulada por lo que también se les puede llamar resinas, entre ellas se puede destacar el uso de las Epoxis, que son las de uso más general en altas prestaciones, con una temperatura máxima de uso en torno a los 170°C.

## **Fibras**

Los principales tipos de fibras utilizados, en lo que al material del que están fabricadas se refiere, destacan:

Fibras de vidrio, de gran resistencia a tracción, duras, resistentes al ataque químico y flexibles. Se elaboran a partir de la sílice (del 50% al 70% de su composición) y se le añaden otros componentes en función de las propiedades deseadas, distinguiéndose:

Fibras de carbonos, de muy alta resistencia y rigidez, por la estructura cristalográfica del grafito.

Fibras cerámicas, de cuarzo o sílice. Flexibles y con muy bajo alargamiento y gran resistencia al choque térmico. Se utilizan en estructuras de radio transparentes.

Fibras orgánicas, obtenidas a partir de polímeros. La más utilizada es el Kevlar, se trata de fibras muy rígidas con un coeficiente de dilatación térmica longitudinal nulo, baja densidad, excelente resistencia al impacto...

Dejando a un lado el material utilizado para fabricar estas fibras, estas pueden estar agrupadas de diferentes maneras:

Hilos, conjunto de fibras asociadas en un cilindro de diámetro uniforme y longitud indefinida. Dos o más hilos se pueden retorcer sobre sí mismos y formar hilos más gruesos.

Cintas o "Tapes", hilos dispuestos paralelos en forma unidireccional. Sólo se presentan en forma de preimpregnados, en los que el refuerzo viene impregnado en resina sin polimerizar en estado semilíquido y sirve como ligante de los hilos.

Fieltros, hilos continuos o cortados depositados de forma multidireccional, aleatoriamente.

Tejidos o "Fabrics", productos en los que los hilos se entrelazan perpendicularmente. Según la disposición de los hilos se puede hablar de fibras unidireccionales, tejidos como satén, esterilla o sarga, híbridos o tridimensionales.

### **2.1.3 Aplicaciones**

#### **Industria Aeroespacial**

La alta rigidez y el peso de los materiales juegan un papel extremadamente importante en esta industria. Poner 1 kg de materia en órbita puede llegar a costar 10.000 € por lo tanto cualquier reducción en el peso es muy significativo. Reduciendo el peso se reduce la cantidad de combustible necesario.

#### **Aviación**

Los composites comenzaron a utilizarse en la aviación militar en cantidades significativas, aplicándose en radomos y en estructuras secundarias. Empezando a desarrollarse las estructuras primarias con la aparición de los refuerzos de fibra de carbono. Hoy en día estos materiales son ampliamente utilizados, siendo el resultado de una sustitución gradual y directa de los componentes metálicos, seguido y apoyado por el desarrollo de diseños integrales con materiales compuestos.

En la imagen que aparece a continuación (Figura XX) se puede observar la evolución de la utilización de los materiales en los distintos modelos de avión fabricados por Airbus Group en las últimas décadas.

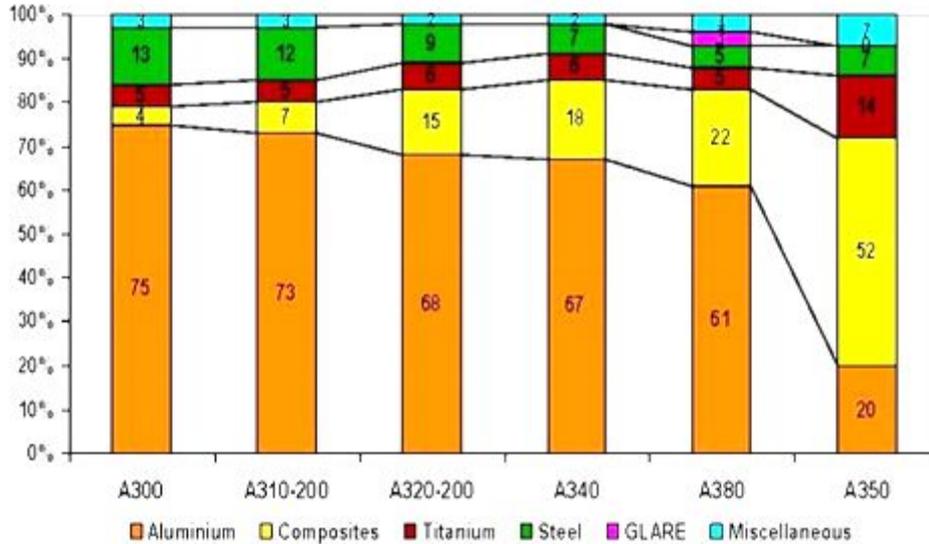


Figura 2.2: Materiales utilizados en los modelos de aviones de Airbus Group

Además de reducir el peso de la aeronave mejorando las condiciones de vuelo y el consumo de combustible, se han podido consolidar muchas partes que antes debían ser fabricadas por separado reduciendo así la mano de obra y el tiempo de fabricación.

## Industria naval

Gracias a estos materiales se ha conseguido aumentar la resistencia, disminuir el número de partes y reducir el coste de mantenimiento de las embarcaciones. Para los buques de recreo y competición se utiliza fibra de vidrio para fabricar los cascos, los mástiles, las velas... En el caso de los buques civiles se utilizan para estructuras interiores y si se trata de buques militares pequeños, el casco puede fabricarse con un laminado tipo sandwich.

## Transporte terrestre

Actualmente se pueden encontrar composites en las estructuras de los frenos, en turismos híbridos o eléctricos, en la Fórmula 1, también son muy utilizados en vehículos industriales como furgonetas y en algunas partes de los trenes. La industria del automóvil ha crecido ampliamente creando así retos en esta industria como son el aumento de la eficiencia y la seguridad que se suman a las tradicionales exigencias de competitividad, diseño y servicio, teniendo siempre en cuenta la necesidad de cuidar el medio ambiente reduciendo las emisiones de CO2. La respuesta más clara hace pensar en los materiales: cómo reducir el peso sin la consecuente pérdida de potencia. Es donde entra en escena el desarrollo de nuevos materiales compuestos como la fibra de

carbono. En la siguiente gráfica se puede observar la relación entre las emisiones y el peso del coche desde 1990 hasta el 2010 marcando también donde estaría situado un vehículo de composite.

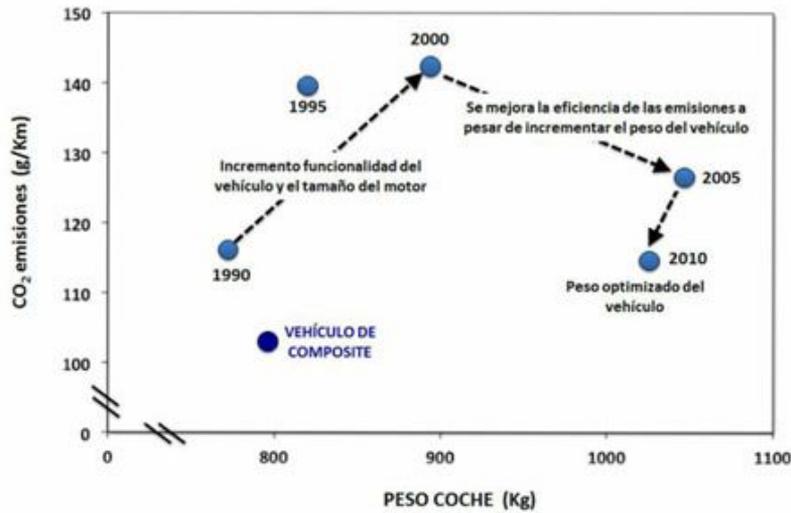


Figura 2.3: Evolución del peso y las emisiones de los vehículos

Hace un tiempo se planteó la construcción de un coche 100% composite, pero se acabó descartando esa idea debido al alto coste que iba a suponer y la baja resistencia al impacto que tendría a pesar de ser muy ligero y ser muy bueno aerodinámicamente. A medida que avance la investigación y el desarrollo de estos materiales, se podrá volver a plantear la idea.

## Construcción

Dentro de la construcción a estos materiales se les pueden dar distintos usos. Pueden ser utilizados para aplicaciones no estructurales como revestimientos de fachadas para aislamiento, un ejemplo de esto es el techo de las estaciones de Metro de Madrid.

Entre las aplicaciones estructurales que pueden dárseles destacan para reparaciones, como refuerzo estructural del hormigón. También pueden utilizarse para sustituir los cables de acero de los puentes colgantes que tienen baja resistencia por fibra de carbono, permitiendo así hacer puentes mucho más largos.

## 2.2 Materiales y Estructuras Inteligentes

### 2.2.1 Introducción

Actualmente se define como material inteligente, todo aquel que es capaz de recibir, transmitir o procesar estímulos y responder a ellos modificando de forma significativa una o varias propiedades de forma predecible y reproducible. Estos materiales pueden ser la base de una estructura inteligente o ser utilizados para el diseño de sensores y actuadores.

Los sensores realizados con materiales inteligentes emplean como señal de entrada campos mecánicos y en base al correspondiente fenómeno físico se transforman en señales de salida en forma de campos eléctricos o campos magnéticos . Por otro lado, los actuadores emplean como señales de entrada campos eléctricos, térmicos o magnéticos y mediante las propiedades del material activo se transforman en una señal de salida mecánica (López et al 2004).

Una estructura inteligente puede definirse como aquella capaz de responder a cambios en su entorno, auto-adaptándose, variando características como su geometría, rigidez, elasticidad o sus movimientos. El concepto de la auto-adaptación o “*morphing*” ha suscitado interés de distintos sectores de la industria. Se trata de un gran avance hacia la posibilidad de desarrollar estructuras cuyo comportamiento sea lo más parecido posible al de una estructura biológica, la cual puede responder ante cambios en la operación en el ambiente o en los objetivos de forma adecuada y automática. Siendo un ejemplo de una estructura inteligente la estructura flexible o piel que formaría el ala de un avión.

## 2.2.2 Materiales Inteligentes

Los materiales inteligentes pueden clasificarse de diferentes formas, en este caso se utilizará la referida a su fundamento físico. Según esta clasificación pueden ser divididos en tres grupos básicos: materiales con memoria de forma, materiales foto y como activos y materiales electro y magnetoactivos.

### **Materiales con Efecto Magnetostrictivo**

Estos materiales se deforman en presencia de un campo magnético exterior. Los materiales ferromagnéticos son un material de este tipo. Este material se utiliza desde hace tiempo en la industria aeronáutica para activar superficies sustentadoras o para el control de vibraciones (López et al 2004). De aquí se puede deducir que no todos los materiales inteligentes son de reciente aparición, aún así se están investigando nuevas formas de utilizarlos, siendo una de ellas la inclusión de estos en estructuras adaptativas.

### **Fluidos Reológicos**

Son aquellos cuyas propiedades varían en presencia de un campo eléctrico (electroreológicos) o magnético (magneto reológicos). Estos fluidos contienen partículas en suspensión que forman cadenas en presencia de campos exteriores y permanecen inactivas cuando no se aplica ningún campo, pudiendo entonces considerarse fluidos newtonianos. Pueden ser fluidos de distinta naturaleza y la respuesta consiste en un aumento o disminución rápida de la viscosidad bajo la actuación de estos campos externos. Entre las aplicaciones de los fluidos reológicos se encuentran las relacionadas con amortiguamiento y actuadores para el control de vibraciones.

### **Materiales con Memoria de forma**

Los materiales de memoria de forma son aquellos capaces de recordar su tamaño y forma originales y que pueden volver a ella incluso después de haber sido deformados. No debe confundirse el efecto de memoria de forma, donde el material recupera su forma original en presencia del estímulo adecuado, con el efecto de cambio de forma, donde el material recupera su forma original cuando el estímulo que le hacía mantener la forma temporal cesa (Wu et al 2013).

Bajo el término de materiales con memoria de forma existen cuatro clases diferentes, según la naturaleza, o del estímulo externo al que responden:

## Aleaciones con Memoria de Forma

El efecto de memoria de forma se basa en la transición que se produce entre dos fases sólidas, una de baja temperatura o martensítica y otra de alta temperatura o austenítica. El material se deforma en la fase martensítica y recupera de forma reversible sus dimensiones originales mediante el calentamiento por encima de una temperatura crítica de transición.

Sin embargo, estas aleaciones presentan una respuesta relativamente lenta a los cambios, alcanzan un valor moderado de la variación de rigidez y presentan limitada vida en fatiga e histéresis. Esto hace que las aleaciones con memoria de forma no estén jugando un papel fundamental en las investigaciones relacionadas con el efecto de cambio de forma según (Kuder et al, 2013) tanto como lo están haciendo los materiales que se describen a continuación.

## Polímeros con Memoria de Forma

Los polímeros con memoria de forma son materiales poliméricos con la capacidad de recordar su forma original. Este efecto está relacionado con la combinación de la estructura y la morfología del polímero junto con el proceso y tecnología de programación de inclusión de la forma empleado. Es necesario un entrenamiento del material para que recuerde una forma determinada. El primer paso es procesar el polímero para grabar su forma permanente y seguidamente el polímero es deformado fijándose, de ese modo, la forma temporal. Durante los últimos años ha aumentado considerablemente el interés en el estudio de estos gracias a las enormes variaciones en el módulo de elasticidad y gran capacidad de deformación que presentan (Gandhi y Kang 2007).

El mecanismo del efecto de memoria de forma en los polímeros puede producirse por temperatura, por luz o por reacciones químicas.

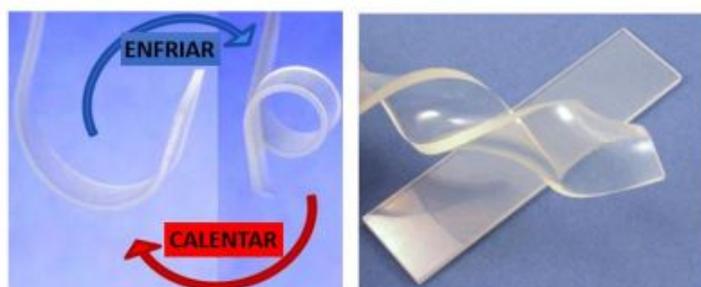


Figura 2.4: Polímero con memoria de forma

Hay ciertos aspectos de estos materiales como la incertidumbre en su comportamiento y fiabilidad a largo plazo que están aún en estudio. Debe tenerse en cuenta además su baja rigidez a altas temperaturas, su baja capacidad conductiva y que la velocidad a la que tienen lugar los cambios es

relativamente lenta comparada con la de otros materiales. Los polímeros de memoria de forma son aptos para aplicaciones donde los cambios deben producirse de manera lenta y progresiva pero donde se necesiten grandes variaciones de rigidez (Gandhi y Kang 2007).

Para poder utilizar estos materiales en un rango mayor de aplicaciones será necesario reforzarlos, pudiendo crear materiales compuestos adaptativos que incluyan materiales con memoria de forma entre sus componentes.

### **2.2.3 Materiales Piezoeléctricos**

Este es el último tipo de materiales inteligentes que se va a describir y ya que estos materiales serán los utilizados en el posterior estudio, se va a dedicar una especial atención a su descripción.

#### **Base Física**

La piezoelectricidad es un fenómeno presente en algunos tipos de cristales que hace que al aplicar una tensión mecánica sobre ellos, su masa se polarice dando lugar a una diferencia de potencial. Este fenómeno también es recíproco, es decir, si se le aplica una diferencia de potencial al cristal, este se deformará ya que este campo eléctrico hará que aparezcan fuerzas internas en toda su masa. Por lo general se trata de un efecto reversible ya que cuando se elimina el estímulo externo desaparece tanto el campo eléctrico como la deformación existentes.

Los materiales piezoeléctricos tienen la particularidad de no tener centro de simetría en su estructura. El efecto de una tensión de tracción o de compresión produce la disociación de los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas, cuando esto ocurre empiezan a crearse dipolos elementales los cuales fomentan que cargas de signo contrario se sitúen en sus caras. Este efecto es denominado polarización neta. La polarización es directamente proporcional a la tensión aplicada, del mismo modo la tensión que aparecerá en el cristal será directamente proporcional al campo eléctrico aplicado.

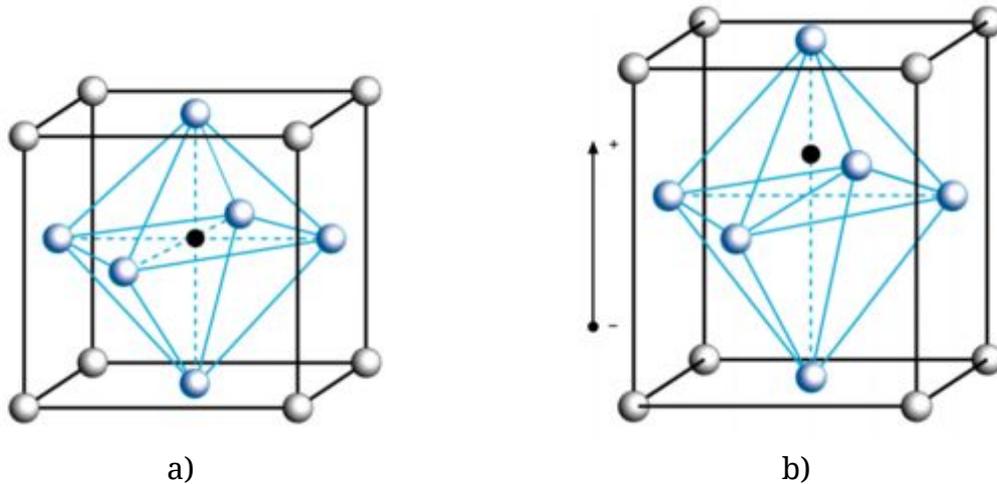


Figura 2.5: a) Geometría cúbica (Por encima de la temperatura de Curie  
b) Geometría tetragonal (Por debajo de la temperatura de Curie)

En la imagen se puede ver una celda elemental de un material cerámico piezoeléctrico denominado PZT (Lead Zirconate Titanate), que será el utilizado para el estudio. Los materiales cerámicos piezoeléctricos son los más utilizados por su fuerza y resistencia a cambios químicos, además de que su coste de fabricación es relativamente bajo. Dentro de los materiales cerámicos piezoeléctricos el PZT es uno de los más utilizados. El PZT está formado por pequeños cristales que tienen una estructura cristalina llamada Perovskite. Esta estructura puede ser tetragonal, romboédrica o cúbica dependiendo de la temperatura a la que se encuentre el material. El efecto piezoeléctrico fue descubierto en 1880 por Pierre y Jacques Curie, así la temperatura a la que el cristal pasa a tener estructura tetragonal se denomina la temperatura de Curie. Cuando esto ocurre el centro de simetría de las cargas positivas deja de coincidir con el de las cargas negativas, creando el dipolo eléctrico.

Al principio la orientación de los dipolos creados no es aleatoria sino que algunos se van alineando con otros cercanos creando grupos alineados entre ellos, estas áreas son conocidas como dominios de Weiss. A pesar de que existan estos dominios, estos no estarán alineados entre ellos, por lo que es necesario polarizarlos. Para polarizarlos se le aplicará un alto campo eléctrico a una temperatura alrededor de la de Curie para que solidifiquen en estas condiciones. De esta manera todos los dipolos del material se alinearán, cuando desaparezca el campo eléctrico los dipolos quedarán alineados creando en el material una polarización y deformación definitivas. El tratamiento de polarización suele ser aplicado en el último paso de fabricación del PZT.

Una vez el material ha sido polarizado por debajo de la temperatura de Curie, este mantendrá sus dipolos orientados a no ser que se le aplique un campo eléctrico muy elevado, una tensión mecánica muy alta o una temperatura por encima de la de Curie. Si se diera alguno de estos tres casos el material perdería sus propiedades piezoeléctricas.

## **Materiales**

Dentro de los materiales piezoeléctricos se pueden distinguir dos grupos:

Los de naturaleza piezoeléctrica primigenia: cuarzo, turmalina...

Los denominados ferroeléctricos: tantalato de litio, nitrato de litio, berlinita, en forma de materiales monocristalinos y cerámicos o polímeros polares, que tras ser sometidos a polarización adquieren propiedades piezoeléctricas, ya como microcristales orientados.

## **Historia**

Como ya se ha mencionado en el apartado anterior, la propiedad de la piezoelectricidad fue observada por Pierre y Jacques Curie en 1880. Este descubrimiento fue precedido por Coulomb que en 1815 descubrió que la electricidad podía producirse por la aplicación de una presión. Años después, en 1820, Becquerel planteó que cualquier carga producida por compresión vendría dada por la fricción.

El descubrimiento de los hermanos Curie vino por la combinación de las investigaciones de Becquerel y Coulomb sumados a su conocimiento en el campo de la pyroelectricidad. Así descubrieron que existían ciertos cristales que no solo producen un dipolo eléctrico cuando eran sometidos a variaciones de temperatura sino también cuando eran sometidos a presión.

A partir de su descubrimiento se empezó a indagar para comprender este comportamiento, así un año después, en 1881, Gabriel Lippmann observó que el fenómeno tenía lugar también de forma opuesta. Si se aplica un campo eléctrico, se crea una tensión mecánica proporcional al voltaje. En 1882 los hermanos Curie demostraron experimentalmente que el comportamiento observado por Lippmann tenía un coeficiente de conversión exactamente igual al directo.

En 1893, Kelvin desarrolló modelos teóricos que explican el efecto piezoeléctrico y Voigt en 1910 publicó las ecuaciones y los tensores que gobernaban los materiales piezoeléctricos. Finalmente, en 1940 Manson

extendió el modelo de Kelvin aplicándolo a la deformación del cristal. (Voigt,W, 1910)

## Aplicaciones

Las primeras aplicaciones de estos materiales se hicieron durante la Primera Guerra Mundial, cuando Langevin desarrollo un transductor piezoeléctrico para detectar submarinos que era capaz de detectar las señales ultrasónicas que estos emitían. En 1920 Joseph Valasek descubrió la ferroelectricidad en la sal de la Rochelle, hasta ese momento solo se había observado este fenómeno en el cuarzo.

Durante la Segunda Guerra Mundial grupos de investigadores de ambos bandos tenían el objetivo común de aumentar la eficiencia de los materiales condensadores, llegando a cerámicas sintéticas las cuales tenían propiedades piezo y dieléctricas cien veces mayores que las de los materiales piezoeléctricos naturales. Esto supuso una revolución en la investigación de dispositivos que utilizan esta tecnología.

En 1945 comenzó la comercialización de los materiales piezoeléctricos cuando se descubrió que el Titanato de Bario ( $BaTiO_3$ ) tenía unas altas constantes piezoeléctricas además de poder ser fabricado fácilmente.

A partir de ese momento hasta hoy en día la utilización de este tipo de materiales ha ido en aumento. Actualmente se utilizan en alta tecnología dentro de la cual cabe destacar la ingeniería mecánica y aeroespacial e incluso la tecnología médica, pero también están presentes en el día a día pudiendo trabajar como:

**Generadores:** Convierten energía mecánica en energía eléctrica. Un ejemplo de esto puede ser el generador PTZ presente en los mecheros automáticos.

**Sensores:** Convierten movimiento mecánico en una señal eléctrica. Se pueden encontrar estos sensores en elementos de la industria aeroespacial como giroscopios, aceleradores...

**Actuadores:** Transforman señales eléctricas en desplazamientos mecánico. Se pueden distinguir tres tipos de actuadores PTZ: axiales, transversales o a flexión.

## 2.2.4 Estructuras Inteligentes

A pesar del gran avance que supusieron las cerámicas piezoeléctricas respecto a sus propiedades electromecánicas, existían problemas como la falta de flexibilidad, fragilidad o la dificultad para adaptarse a superficies curvas que reducían en gran medida sus usos potenciales. Así se introdujeron los materiales compuestos piezoeléctricos en los que los materiales piezoeléctricos son algunas de las fibras del material compuesto quedando inmersos en una matriz polimérica.

Las amplias propiedades de los materiales piezoeléctricos sumados a las del material compuesto han permitido que se utilicen para muchas más cosas. Algunos ejemplos de esto se muestran a continuación.

En la industria automotriz son utilizados para el control activo de la suspensión. Toyota ha desarrollado el sistema TEMS (Toyota Electronic Modulated Suspension) que busca la mejora del manejo y la estabilidad del vehículo. Se añaden cinco láminas de material compuesto piezoeléctrico a la barra del pistón amortiguador de choques para detectar la tensión causada por un choque, enviando el voltaje producido a un actuador hecho de 88 capas de material piezoeléctrico (Smart Structures, 1998).

Los materiales compuestos piezoeléctricos también se utilizan para el control del estado de estructuras. Se han hecho estudios como el de (Alaimoa et al., 2013), que demostró la utilidad de la piezoelectricidad en el control de la “salud” de las estructuras. En este estudio se demostró que estos materiales eran capaces de medir la tensión del material a lo largo de un proceso de delaminación.

Estas aplicaciones industriales son algunos ejemplos del reciente interés en las capacidades y propiedades de los materiales tanto piezoeléctricos como inteligentes en general, reflejan la importancia que tienen y sobretodo tendrán, en el desarrollo de estructuras con mejores características que harán que la industria evolucione.

Además de las aplicaciones industriales, es necesario hacer un repaso sobre las investigaciones que se han llevado a cabo sobre este tipo de materiales en los últimos años.

En 1970 Crawley y de Luis estudiaron elementos piezoeléctricos en placas y vigas laminadas. Modelaron un actuador piezoeléctrico pegado a una viga con el fin de controlar su comportamiento. El análisis estático de este modelo les permitió prever su comportamiento dinámico (Crawley y de Luis, 1970).

En 1991 Robbins y J.N. Reddy propusieron una teoría para el desplazamiento la lámina superior de una viga de material piezoeléctrico. Después utilizaron MEF (Método de Elementos Finitos) para predecir el comportamiento de toda

la viga y compararon estos resultados con la teoría clásica de deformación y cizalladura de las vigas, comprobando así que su teoría era válida.

En 1992 Sung et Al. desarrollaron a través de un análisis de elementos finitos las reacciones de estructuras laminadas de materiales piezoeléctricos. Para comprobar si estos resultados eran ciertos realizaron algunos experimentos. Se descubrió que los resultados obtenidos encajan razonablemente con los resultados de estos.(Sung et al, 1992)

En 1995, con su artículo “*A redefined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminas*” (Una teoría de placas híbrida redefinida para laminados con láminas piezoeléctricas) Mitchell y Reddy fijaron la formulación de teorías de acoplamiento de altos órdenes donde la función del potencial de las láminas piezoeléctricas estaba modelando usando la discretización de la capa superior y el desplazamiento mecánico estaba basado en una teoría equivalente de una lámina sola. Descubrieron que cuando las láminas piezoeléctricas eran anchas era necesario modelar la función de potencial eléctrico.(Mitchell et all, 1995)

En 2000, Aldraihem y Khdeir compararon dos teorías de deformación por cortadura para modelar vigas inteligentes con actuadores piezoeléctricos y propusieron soluciones exactas. Llegaron a la conclusión de que para una viga cantilever la diferencia entre sus resultados y los obtenidos usando teorías de deformación de mayor orden era de un 27%. Así demostraron que el factor de corrección de la cortante tenía una importancia especial ya que cuando este es igual a  $\frac{2}{3}$  ambas teorías dan resultados muy parecidos. Además comprobaron sus resultados en un modelo experimental basado en la siguiente configuración:

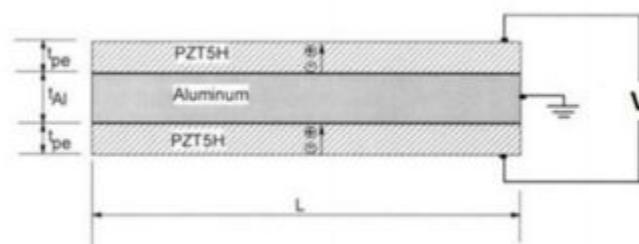


Figura 2.6: Geometría de una viga laminada de tres capas.

Su investigación se centraba principalmente en comparar la teoría de vigas de primer orden con las de orden mayor. Este modelo no era sometido a ninguna carga externa, simplemente a dos voltajes de corriente continua, uno de 10 y otro de 20 V. Los desplazamientos conseguidos fueron del orden de  $10^{-7}$  m. (Aldraihem et al, 2000)

En 2003, J.N. Reddy publicó la primera edición del libro “*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells-Theory and Analysis*” (Mecánica de placas de compuestos laminados-Análisis y Teoría). La contribución de este distinguido profesor indio a la mecánica y estructura de materiales compuestos es muy conocida en este campo. Ha publicado más de 480 artículos y 18 libros sobre el método de elementos finitos, teorías de placas, mecánica de sólidos, mecánica de compuestos... Colabora con la Universidad Carlos III de Madrid y se trata de un profesor con renombre. En 2015 fue elegido para la prestigiosa Academia Nacional de Ingeniería de los Estados Unidos. (J.N. Reddy, 2003)

En 2007 Marinkovic et al. estudiaron una viga de pared delgada con materiales piezoeléctricos trabajando como sensores y actuadores. Establecieron una distribución cuadrática del potencial eléctrico y una lineal del campo eléctrico de los parches piezoeléctricos basándose en la teoría de deformación por cizalladura de primer orden. Probaron a través de diferentes análisis el incremento de rigidez que se producía aplicando las diferentes funciones de los campos eléctricos. (Marinkovic et al., 2007)

En 2015 Bohooly y Mirzavand estudiaron el pandeo y el postpandeo que se producía en laminados de material compuesto con actuadores piezoeléctricos sometidos a cargas mecánicas, térmicas, eléctricas y combinaciones de estas. Su estudio estaba basado en tres casos de placas simplemente apoyadas sobre las que se aplicó la teoría clásica del laminado. Después lo compararon con un modelo experimental en el que en la secuencia de apilamiento se introdujeron láminas piezoeléctricas. Esta idea se traduciría en el estudio de las vigas compuestas. (Bohooly y Mirzavand, 2015)

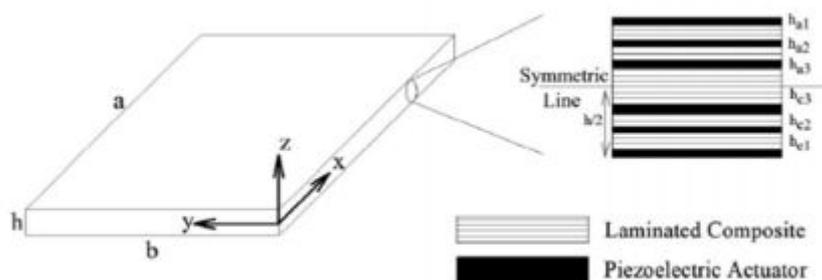


Figura 2.7: Lámina compuesta simétrica

Otros investigadores buscaron el lugar óptimo para los parches actuadores. Los valores óptimos para esta longitud del actuador igual que el voltaje aplicado de 0 a 100V para obtener el mayor y menor desplazamiento. Aún así estos estudios eran realizados en general con métodos de elementos finitos. (Bruch et al, 2000)

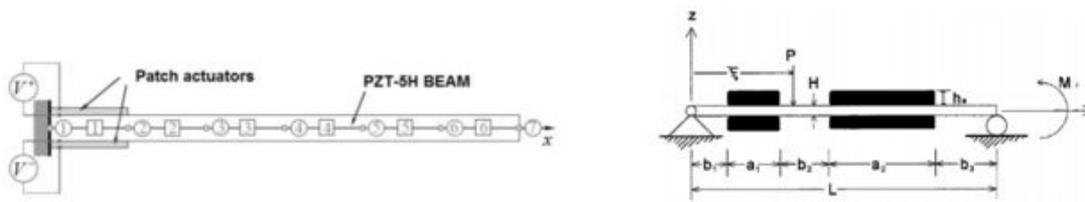


Figura 2.8: Estudio de vigas con parches actuadores

Además, este es el tercer Trabajo de Fin de Grado dentro de una línea de investigación dirigida por el profesor Dr. D. Enrique Barbero Pozuelo. Uno de ellos escrito por Manuel García Algarra en el cual desarrolla las ecuaciones del comportamiento de una viga de material piezoeléctrico sometida a una carga distribuida y un campo lineal de temperatura y voltaje y el segundo de ellos lo realizó Alberto Sisamón Serrano y en él modeliza el comportamiento de una viga tipo sandwich sometida a las mismas especificaciones que el anterior. En este trabajo se ampliarán dichas ecuaciones a campos de temperatura y voltaje genéricos además de cambiar la carga distribuida por una carga puntual.

# Capítulo 3

## Descripción del modelo

### 3.1 Introducción

A lo largo de este capítulo se expondrán y analizarán las ecuaciones generales de las que se va a partir para llevar a cabo este estudio.

Así se presentarán las ecuaciones utilizadas para analizar el comportamiento de los materiales compuestos y el de los materiales piezoeléctricos. Dejando todas las bases sentadas para desarrollar en el cuarto capítulo las ecuaciones del problema a analizar.

### 3.2 Análisis macro-mecánico de una lámina

Como ya se ha explicado los materiales compuestos pueden fabricarse de diferentes maneras, en este caso se tomará un material compuesto de tipo laminado. Estos materiales se fabrican a partir de láminas compuestas por fibras largas colocadas en la misma dirección unidas por la matriz. Después, estas láminas se van apilando con los ángulos deseados entre unas y otras hasta conseguir el espesor requerido.

Estas láminas al tener todas sus fibras colocadas en la misma dirección tienen distintas propiedades mecánicas en cada una de las tres direcciones del espacio. Para poder analizar el laminado es necesario analizar el comportamiento de cada lámina.

En primer lugar se van a presentar las ecuaciones constitutivas de la lámina. Las ecuaciones constitutivas analizan la respuesta de un material a la aplicación de una carga externa, describen el comportamiento macroscópico de la constitución interna del material.

Para obtener estas ecuaciones se aplicará la Ley de Hooke generalizada. Además se asumirá que la lámina es continua, no existen agujeros ni zonas vacías y que la lámina se comporta como un material elástico lineal [11].

La relación lineal entre el tensor de tensiones y de deformaciones puede expresarse como:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j + \sigma_i^0 \quad (3.1)$$

Donde  $\sigma$  es el tensor de tensiones,  $\varepsilon$  es el tensor de deformaciones y  $C$  el tensor de rigidez referido al sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ .

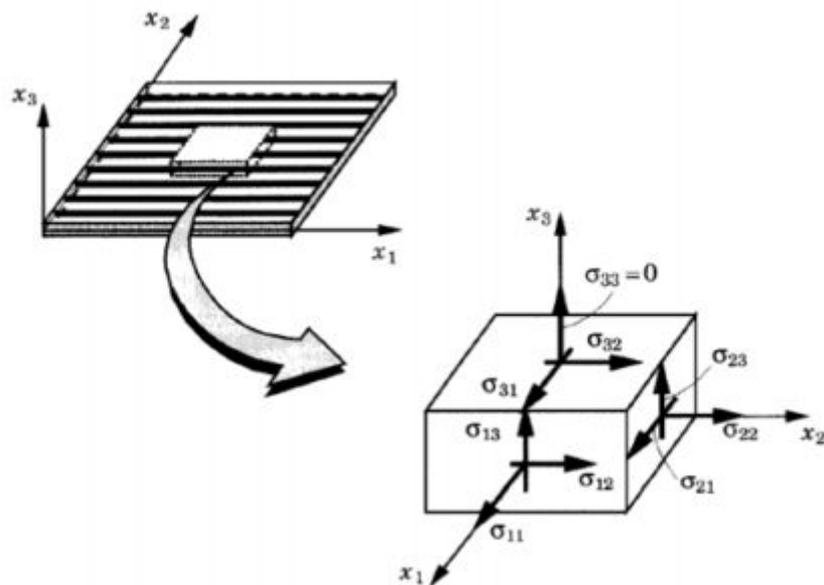


Figura 3.1: Lámina en un estado plano de tensión

$\sigma_{11} \rightarrow \sigma_1$	$\varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon_1$
$\sigma_{22} \rightarrow \sigma_2$	$\varepsilon_{22} \rightarrow \varepsilon_2$
$\sigma_{33} \rightarrow \sigma_3$	$\varepsilon_{33} \rightarrow \varepsilon_3$
$\sigma_{23} \rightarrow \sigma_4$	$\varepsilon_{23} \rightarrow \varepsilon_4$
$\sigma_{13} \rightarrow \sigma_5$	$\varepsilon_{13} \rightarrow \varepsilon_5$
$\sigma_{12} \rightarrow \sigma_6$	$\varepsilon_{12} \rightarrow \varepsilon_6$

(3.2)

Asumiendo que se trata de un material hiperelástico, es decir que los cambios en la tensión dependen del estado inicial y de la configuración, los coeficientes del tensor de rigidez son simétricos ( $C_{ij} = C_{ji}$ ). Así el número de coeficientes independientes se reducen a 21 en la siguiente fórmula.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \sigma_3^0 \\ \sigma_4^0 \\ \sigma_5^0 \\ \sigma_6^0 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Si se invierte esta matriz las deformaciones quedan definidas por:

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j + \varepsilon_i^0 \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_i^0 = -S_{ij}\sigma_j^0 \quad (3.5)$$

Puesto en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_3^0 \\ \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Donde  $[S] = [C]^{-1}$ , en este proyecto se considerará que no hay tensiones ni deformaciones iniciales, es decir  $\sigma_j^0 = 0$  y  $\varepsilon_j^0 = 0$  y por tanto:

$$\{\sigma_i\} = [C]\{\varepsilon_i\}$$

$$\{\varepsilon_i\} = [C]\{\sigma_i\}$$

(3.7)

Los materiales ortótropos tienen tres planos ortogonales de simetría, así tanto el número de coeficientes de la matriz de rigidez como el de la matriz S, pueden reducirse a nueve para casos en tres dimensiones. Quedando las nuevas matrices como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

(3.8)

Los coeficientes de la matriz S pueden relacionarse directamente con las constantes ingenieriles de la siguiente manera:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad , \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \quad , \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}$$

$$S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} \quad , \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad , \quad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}$$

$$S_{31} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \quad , \quad S_{32} = -\frac{\nu_{32}}{E_3} \quad , \quad S_{33} = \frac{1}{E_3}$$

(3.9)

### 3.3 Desplazamientos tensiones y deformaciones

Para llevar a cabo el análisis del comportamiento de un material compuesto se pueden utilizar dos teorías, la teoría clásica del laminado o la first-order shear deformation theory (FSDT). La primera de ellas es la que se utilizará para realizar este análisis y es una extensión de la teoría clásica aplicada a laminados de materiales compuestos, la segunda teoría asume que hay un esfuerzo a cizalladura variable a lo largo del espesor del material y para poder utilizarla es necesario calcular un factor de corrección que depende de la carga, las condiciones de contorno y la geometría, siendo por tanto muy difícil de hallar.

La teoría clásica del laminado fija una serie de hipótesis sobre el laminado a partir de las cuales se realizará el estudio. Estas hipótesis son:

- Cada lámina está fabricada con un material homogéneo y ortótropo.
- Las láminas tienen comportamiento elástico lineal hasta la rotura.
- Todas las láminas están perfectamente unidas entre sí.
- Se trata de láminas delgadas trabajando a tensión plana:

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \tag{3.10}$$

-Los desplazamientos y las derivadas son pequeñas.

-El espesor del laminado no cambia:

$$\varepsilon_3 = 0 \tag{3.11}$$

-Se cumplen las hipótesis de kirchhoff, una sección perpendicular al plano medio del laminado permanece plana y perpendicular a este plano.

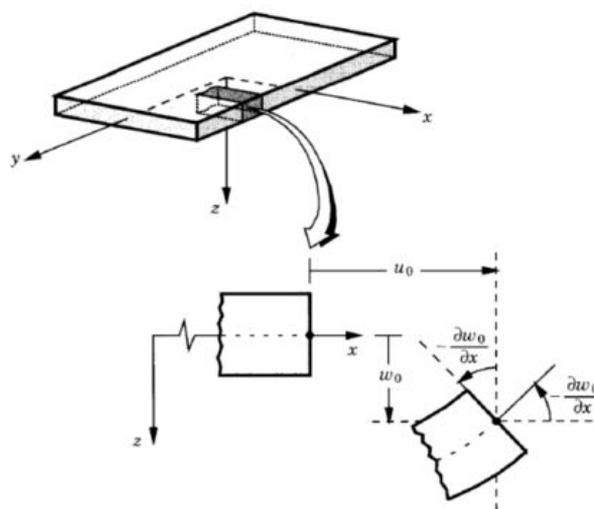


Figura 3.2: Geometría deformada y sin deformar de un eje bajo que cumple las hipótesis de Kirchhoff

Así el campo de desplazamientos puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Siendo  $u_0$ ,  $v_0$  y  $w_0$  los desplazamientos del plano medio de la lámina. Así las deformaciones producidas por el campo de desplazamientos pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x} \right] \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial y} \right] \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Como los desplazamientos y las deformaciones son pequeñas, todos los productos de dos gradientes de desplazamientos son cero excepto  $(\frac{\partial w}{\partial x})^2, (\frac{\partial w}{\partial y})^2$  y  $\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$ . El campo de deformaciones asociadas se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Donde los términos multiplicados por  $z$  son las deformaciones a flexión  $\varepsilon_{xx}^1, \varepsilon_{yy}^1, \gamma_{xy}^1$  y el resto los debidos a las deformaciones de la membrana  $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0$ .

Como se ha mencionado antes una de las hipótesis utilizadas para llevar a cabo este estudio es la hipótesis de kirchhoff:  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$ . Para todas las láminas ortótropas no hay esfuerzos de cizalladura asociados:  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ . A pesar de

que el esfuerzo normal transversal  $\sigma_{zz}$  no es cero debido al efecto Poisson, este puede ser despreciado porque no aparece en la ecuación del movimiento.

Por tanto relación entre las tensiones y deformaciones de una lámina en sus ejes principales puede expresarse como:

$$\sigma_i = Q_{ij}\varepsilon_j - \alpha_i\Delta T - e_{ij}\Delta E_1$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1\Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2\Delta T \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

$\sigma_i$  Tensión de la lámina en la dirección  $i$

[Q] Matriz de rigidez en ejes lámina

$\varepsilon_i$  Deformaciones de la lámina en los ejes de la lámina

$\alpha_i$  Coeficientes de expansión térmica

$\Delta T$  Incremento de temperatura

$e_i$  Módulo piezoeléctrico en ejes lámina

$E_i$  Campo eléctrico en la dirección de los ejes

Todos son propiedades del laminado o dependen de las condiciones de trabajo. Los coeficientes de la matriz de rigidez en ejes lámina pueden calcularse como:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad ; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad ; \quad Q_{66} = G_{12} \quad (3.16)$$

Para poder obtener las propiedades del laminado, es necesario pasar las ecuaciones expresadas en ejes lámina, obteniendo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T \right) - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.17)$$

Donde las variables son las mismas que antes pero en ejes globales en lugar de ejes lámina, para calcular las nuevas matrices, es necesario saber el ángulo de cada lámina respecto al eje global de coordenadas  $\theta$  y a partir de éste:

$$m = \cos(\theta)$$

$$n = \sin(\theta)$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m^2 & n^2 \\ n^2 & m^2 \\ 2mn & -2mn \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

(3.18)

$$\bar{Q}_{ij}^{(k)} = [T]^{-1}[Q_{ij}][R]^{-1}[T][R]$$

(3.19)

Para el caso del módulo piezoeléctrico, como se van a utilizar láminas isótropas de este material, no será necesaria su transformación a ejes globales.

### 3.4 Campo eléctrico y variación de temperatura

El campo eléctrico y la variación de temperatura deberán expresarse de forma que puedan ser incluidos en el modelo teórico. Estas variaciones están tomadas respecto a un valor de referencia.

Uno de los puntos en los que este trabajo difiere de los dos trabajos de fin de grado anteriores estos incrementos dependían solo de la dirección  $z$  y se trataba de incrementos lineales. En este caso van a depender solo de la dirección  $z$  pero se van a tomar como funciones de tercer grado, teniendo un término lineal y otro cúbico, ya que como se verá después ni las constantes ni los términos de segundo grado influyen en el resultado final del problema.

$$\Delta T = A_1 z + A_3 z^3$$

(3.20)

De forma similar al incremento de temperatura, el voltaje depende también de la dirección  $z$ . Debido a la relación entre el campo eléctrico y el voltaje, el campo eléctrico puede establecerse como el creado por una función de cuarto grado de voltaje a lo largo del espesor de la viga:

$$\begin{aligned}
V(z) &= az^2 + bz^4 \\
E_x^P &= \frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad E_y^P = \frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad E_z^P = \frac{\partial V}{\partial z} \\
E_z^P &= z^3 P_1 + z P_3
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

### 3.5 Teorema de trabajos virtuales

Para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange de este problema se partirá del principio de trabajos virtuales:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt
\tag{3.22}$$

Donde  $\delta U$  es la energía de deformación virtual,  $\delta V$  es el trabajo virtual producido por las fuerzas aplicadas y  $\delta K$  es la energía cinética virtual.

El problema a analizar se trata de un problema estático, por lo que tanto la integral en función del tiempo, como el término referido a la energía cinética virtual pueden eliminarse:

$$\delta U + \delta V = 0
\tag{3.23}$$

La expresión de la energía de deformación virtual será:

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx}(\delta\varepsilon_{xx}^0 + z\delta\varepsilon_{xx}^1) + \sigma_{yy}(\delta\varepsilon_{yy}^0 + z\delta\varepsilon_{yy}^1) + 2\sigma_{xy}(\delta\gamma_{xy}^0 + z\delta\gamma_{xy}^1)] dz dx dy
\tag{3.24}$$

En el caso del trabajo virtual, se van a despreciar las tensiones normales internas y por tanto:

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} q \delta w_0 dx dy - \int_{\Omega_0} F_L \delta(x - a) dx dy \delta w_0(a)
\tag{3.25}$$

Donde  $q$  sería una fuerza distribuida a lo largo de la viga y  $F_L$  una fuerza puntual, actuando en el punto  $a$ . En este trabajo se considerará que la carga distribuida es nula, solo habrá carga puntual. La expresión de la fuerza puntual se puede escribir también como:

$$F_L \delta w_0(a) \int_{\Omega_0} \delta(x-a) dx dy = \int_{\Omega_0} F_L \delta(x-a) \delta w_0 dx dy \quad (3.26)$$

Para poder integrar la energía virtual de deformación a lo largo de la dirección del espesor se van a introducir las fuerzas resultantes dentro del plano  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$ ,  $N_{xy}$  y los momentos resultantes  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$ :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.27)$$

Teniendo en cuenta todo esto, el principio de trabajos virtuales puede expresarse de la siguiente manera:

$$0 = \int_{\Omega_0} [N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^0 + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^1 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^1 - F_L \delta(x-a) \delta w_0] dx dy \quad (3.28)$$

Las deformaciones virtuales pueden expresarse en función de los desplazamientos virtuales, como se hizo con las deformaciones reales

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} & ; & \quad \delta \varepsilon_{xx}^1 = -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} & ; & \quad \delta \varepsilon_{yy}^1 = -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} & ; & \quad \gamma_{xy}^1 = -2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Incluyendo las deformaciones virtuales en función de los desplazamientos virtuales y teniendo en cuenta que se trata de una viga y por tanto se desprecian

$$0 = \int_{\Omega_0} \left[ -\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\delta N_{xy}}{\delta x} \delta v_0 - \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} - F_L \delta(x-a) \right) \delta w_0 \right] dx dy \quad (3.30)$$

Si los desplazamientos reales son conocidos, los desplazamientos virtuales son cero y las ecuaciones del movimiento se obtendrán a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que se obtienen igualando a cero los desplazamientos del plano medio  $\Omega_0$ :

$$\begin{aligned}\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \delta w_0 : \frac{\partial M_{xx}}{\partial xx} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x} \right) + F_L \delta(x-a) &= 0\end{aligned}\tag{3.31}$$

Para simplificar el problema, se considerarán las fuerzas resultantes en el plano cero, así la ecuación de Euler-Lagrange se podrá expresar como:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + F_L = cte\tag{3.32}$$

A esta expresión se ha llegado despreciando las fuerzas dentro del plano e integrando la expresión resultante para poder eliminar la función delta de dirac de la ecuación. La constante se calculará posteriormente.

### 3.6 Ecuaciones Constitutivas

Las ecuaciones constitutivas relacionan las fuerzas y los momentos con las tensiones producidas por los desplazamientos de las vigas a partir de las ecuaciones que relacionan las tensiones y las deformaciones:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^T\} \\ \{M^T\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^P\} \\ \{M^P\} \end{Bmatrix}\tag{3.33}$$

Las matrices [A], [B], [D] se definirán posteriormente, en la ecuación (3.37) Como sólo se considerarán los momentos:

$$M = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{\varepsilon^1\} - \{M^T\} - \{M^P\}\tag{3.34}$$

Donde  $M^T$  y  $M^P$  son los momentos originados por los efectos piezoeléctricos y térmicos

$$\{M^T\} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{Q}]^{(k)} \bar{\alpha}^{(k)} \Delta T z dz$$

$$\{M^P\} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{e}]^{(k)} E_z^P z dz$$
(3.35)

Como en la ecuación de Euler-Lagrange solo se utiliza el momento  $M_{xx}$  y tanto el campo de desplazamiento como el de temperatura son conocidos

$$M_{xx}^T = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} (A_1 z + A_3 z^3) z dz$$

$$M_{xx}^T = (D_{11}\alpha_{xx} + D_{12}\alpha_{yy} + D_{13}2\alpha_{xy})A_1 + (F_{11}\alpha_{xx} + F_{12}\alpha_{yy} + F_{13}2\alpha_{xy})A_3$$

$$M_{xx}^P = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{e}_{13}]^{(k)} (z^3 P_1 + z P_3) z dz = I_{13}P_3 + K_{13}P_1$$
(3.36)

De estas expresiones falta por definir únicamente las matrices, que serán propiedades del laminado obtenidas a partir de la suma de las propiedades de cada lámina

$$\begin{Bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \\ F_{ij} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]^{(k)} \begin{Bmatrix} z_{k+1} - z_k \\ 1/2(z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ 1/3(z_{k+1}^3 - z_k^3) \\ 1/5(z_{k+1}^5 - z_k^5) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} I_{ij} \\ K_{ij} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N [\bar{e}_{ij}]^{(k)} \begin{Bmatrix} 1/3(z_{k+1}^3 - z_k^3) \\ 1/5(z_{k+1}^5 - z_k^5) \end{Bmatrix}$$
(3.37)

Donde  $[\bar{Q}_{ij}]$  es la matriz de rigidez de cada lámina en ejes globales,  $z_k$  es la coordenada de la parte inferior de la lámina en la dirección del espesor y  $z_{k+1}$  es la coordenada de la parte superior de la lámina. En este problema se van a usar

laminados simétricos, que son los más habituales, y cuando un laminado tiene estas características, como el punto de coordenadas 0 en la dirección z es el justo la mitad de la lámina, todas las matrices en las que las distancias están elevadas a un exponente par, van a anularse. Por este motivo se usaron incrementos de temperatura y de campo eléctrico de tercer orden, ningún término con exponente par afectaría a la solución del problema.

Al tratarse de una matriz simétrica  $[B]=0$  y por tanto

$$M_{xx} = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - M_{xx}^T - M_{xx}^P \quad (3.38)$$

Y la ecuación de Euler-Lagrange

$$-D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - M_{xx}^T - M_{xx}^P + F_L = cte \quad (3.39)$$

# Capítulo 4

## Aplicación del modelo

### 4.1 Introducción

En el capítulo anterior se obtuvo la ecuación de Euler-Lagrange general para el problema de una viga, su longitud es mucho mayor de su anchura, analizada de forma estática, para un laminado simétrico.

Para poder hacerse una idea de lo que significan las expresiones obtenidas, en este capítulo se obtendrá la expresión del campo de desplazamiento que se obtendría para un caso concreto. En el capítulo siguiente se analizarán los cambios en el desplazamiento máximo de la viga dependiendo del campo eléctrico y de temperatura, además de analizar distintos laminados sometidos a variaciones en de voltaje y temperatura para comparar los resultados tomando como dato el desplazamiento máximo. El caso que se va a analizar será el de una viga de cantilever, sometida a una fuerza puntual  $F$ . La fuerza estará aplicada en el punto  $L$ , coincidente con el final de la viga.

### 4.2 Ecuaciones generales

La ecuación de Euler-Lagrange quedó reducida a

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + F_L = cte$$

(4.1)

siendo

$$M_{xx} = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - (D_{11}\alpha_{xx} + D_{12}\alpha_{yy} + D_{13}2\alpha_{xy})A_1 - (F_{11}\alpha_{xx} + F_{12}\alpha_{yy} + F_{13}2\alpha_{xy})A_3 - I_{13}P_3 - K_{13}P_1 \quad (4.2)$$

Si se llama  $b$  al ancho de la viga:

$$M = bM_{xx} \quad \bar{F}_L = bF_L \quad (4.3)$$

Introduciendo los siguientes valores

$$E_{xx} = \frac{b}{I_{yy}D_{11}^*} \quad I_{yy} = \frac{1}{12}bh^3$$

$$D_{11}^* = \frac{D_{22}D_{66} - D_{26}^2}{D_{11}(D_{22}D_{66} - D_{26}^2) + D_{12}(D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66}) + D_{16}(D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16})} \quad (4.4)$$

Utilizando estos valores:

$$M = -E_{xx}I_{yy} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{11}^* ((D_{11}\alpha_{xx} + D_{12}\alpha_{yy} + D_{13}2\alpha_{xy})A_1 + (F_{11}\alpha_{xx} + F_{12}\alpha_{yy} + F_{13}2\alpha_{xy})A_3 + I_{13}P_3 - K_{13}P_1) \right] \quad (4.5)$$

Asumiendo que  $D_{11}^*D_{11}$  se ha asumido que es igual a 1 debido a que la flexión no está acoplada con la torsión y se trata de una viga larga. Estas simplificaciones inducen un pequeño error que puede ser despreciado.

Combinando esto con la ecuación de Euler-Lagrange

$$-E_{xx}I_{yy} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{11}^* ((D_{11}\alpha_{xx} + D_{12}\alpha_{yy} + D_{13}2\alpha_{xy})A_1 + (F_{11}\alpha_{xx} + F_{12}\alpha_{yy} + F_{13}2\alpha_{xy})A_3 + I_{13}P_3 - K_{13}P_1) \right] + \bar{F}_L = -cte \quad (4.6)$$

Para analizar los resultados de este problema se utilizará el desplazamiento vertical que sufrirá la viga en su plano medio. De la ecuación anterior se puede obtener el desplazamiento de ésta en función de la coordenada longitudinal, que en este caso será la del eje x:

$$w_0(x) = \int_0^x \left( \int_0^\eta \left[ \int_0^\phi \left( \frac{\bar{F}_L(\nu)}{E_{xx}I_{yy}} + cte \right) d\phi - D_{11}^* (D_{11}\alpha xx + D_{12}\alpha yy + D_{13}2\alpha xy) A_1 + (F_{11}\alpha xx + F_{12}\alpha yy + F_{13}2\alpha xy) A_3 + I_{13}P_3 + I_{13}P_1 \right] d\eta \right) dx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (4.7)$$

La rotación de cada punto se puede obtener

$$\theta(x) = \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \quad (4.8)$$

A partir de estas expresiones

$$w_0(x) = \frac{F_L b}{6EI} x^3 - [D_{11}^* (D_{11}\alpha xx + D_{12}\alpha yy + D_{13}2\alpha xy) A_1 + (F_{11}\alpha xx + F_{12}\alpha yy + F_{13}2\alpha xy) A_3 + I_{13}P_3 + K_{13}P_1] x + C_4 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (4.9)$$

$$\theta(x) = \frac{F_L b}{2EI} x^2 - [D_{11}^* (D_{11}\alpha xx + D_{12}\alpha yy + D_{13}2\alpha xy) A_1 + (F_{11}\alpha xx + F_{12}\alpha yy + F_{13}2\alpha xy) A_3 + I_{13}P_3 + K_{13}P_1] x + C_4 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (4.10)$$

$$M(x) = \frac{F_L b}{EI} x + C_4 x + C_1 \quad (4.11)$$

$$Q(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial x} = \frac{F_L b}{EI} + C_4 \quad (4.12)$$

Para obtener las constantes, es necesario fijar las condiciones de contorno, como ya se ha mencionado se utilizará una viga de cantilever con una fuerza puntual F que estará situada en el extremo opuesto al empotramiento.

Por lo que las condiciones de contorno serán:

$$w_0(0) = 0 \quad M_{xx}(L) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad Q(L) = -P \quad (4.13)$$

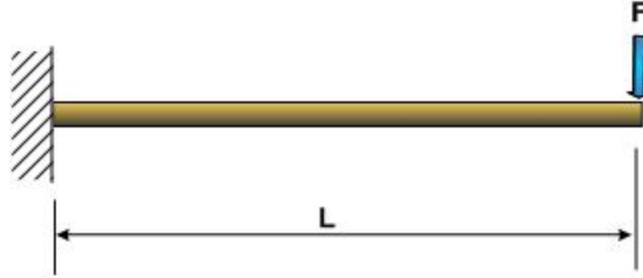


Figura 4.1: Geometría viga de cantilever con una carga puntual en el extremo

De las ecuaciones anteriores se deducen las siguientes constantes

$$C_1 = PL \quad C_2 = 0 \quad C_3 = 0 \quad C_4 = -P \left(1 - \frac{b}{EI}\right) \quad (4.14)$$

Por lo tanto el desplazamiento vertical en cualquier punto x de la viga será

$$w_0(x) = \frac{F_L b}{6EI} x^3 - [D_{11}^* (D_{11} \alpha x x + D_{12} \alpha y y + D_{13} 2 \alpha x y) A_1 + (F_{11} \alpha x x + F_{12} \alpha y y + F_{13} 2 \alpha x y) A_3 + I_{13} P_3 + K_{13} P_1] \frac{x^2}{2} - P \left(1 - \frac{b}{EI}\right) \frac{x^3}{6} + PL \frac{x^2}{2} \quad (4.15)$$

El desplazamiento vertical máximo de la viga tendrá lugar en  $x=L$  y este tendría la siguiente expresión

$$w_{0_{max}} = \frac{F_L b}{6EI} L^3 - [D_{11}^* (D_{11} \alpha x x + D_{12} \alpha y y + D_{13} 2 \alpha x y) A_1 + (F_{11} \alpha x x + F_{12} \alpha y y + F_{13} 2 \alpha x y) A_3 + I_{13} P_3 + K_{13} P_1] \frac{L^2}{2} - P \left(1 - \frac{b}{EI}\right) \frac{L^3}{6} + PL \frac{L^2}{2} \quad (4.16)$$

### 4.3 Descripción del problema

La viga que se utilizará para analizar este problema, será de tipo Euler-Bernoulli con una longitud  $L$ , un espesor  $h$  y una anchura  $b$  constantes para todos los casos. Se tratará de un laminado simétrico formado por láminas de espesor constante, orientadas con un ángulo  $\theta_k$  con respecto al eje  $x$  y entre estas láminas se situarán otras de un material piezoeléctrico isótropo de forma que el laminado se mantenga simétrico para poder utilizar las hipótesis de los capítulos anteriores.

Los ejes globales se tomarán a partir del plano medio de la viga siendo el eje  $z$  positivo hacia abajo.

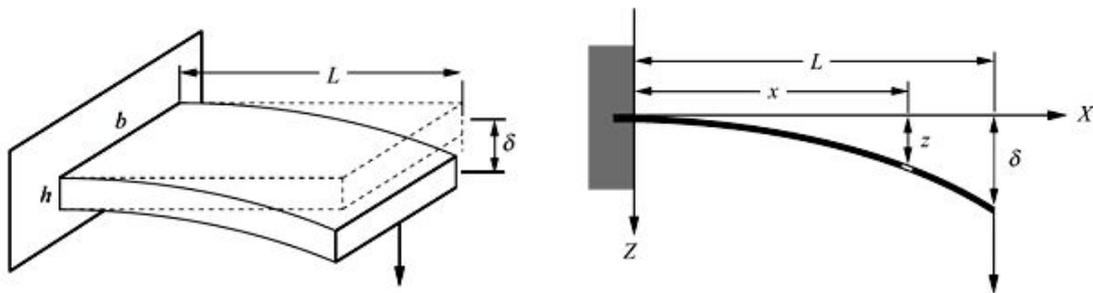


Figura 4.2: Ejes y esquema de la viga

Tanto la longitud, como el ancho de la viga se mantendrán constantes y serán de 240 mm y 24 mm respectivamente, el espesor de esta dependerá de la cantidad de láminas, siendo estas de espesor constante. Estas magnitudes aseguran que la longitud va a ser siempre mucho mayor que el ancho, pudiendo aceptar siempre las aproximaciones hechas durante el desarrollo del modelo teórico para vigas.

El material compuesto que se va a utilizar está compuesto de fibras T300 en una matriz epoxy BSL914. Como material piezoeléctrico cerámico, se utilizará una variedad del circonato de titanio denominado PZT-5H. A continuación que presenta una tabla con las propiedades de estos materiales obtenida de la bibliografía.[Composites Science and Technology 58]

Propiedades	T300-BSL914C epoxy	PZT-5H 3195HD
$E_1$ (GPa)	138	-
$E_2$ (GPa)	11	-
$E$ (GPa)	-	60
$\nu_{12}$	0.28	-
$\nu$	-	0.31
$G_{12}$ (GPa)	5.5	-
$G$ (GPa)	-	22.9
$\alpha_1(10^{-6}/^{\circ}C)$	-1	-
$\alpha_2(10^{-6}/^{\circ}C)$	26	-
$\alpha(10^{-6}/^{\circ}C)$	-	3
$e_{13}(C/m^2)$	-	-10.4
Espesor (mm)	0.134	0.3175

Tabla 4.1: Propiedades de los materiales utilizados

Los laminados que se utilizarán tendrán 12 láminas entre las cuales se encontrarán las láminas piezoeléctricas. Las láminas de material piezoeléctrico son isótropas, por lo que no será necesario definir el ángulo que forman con el eje x. En cambio las láminas de material compuesto podrán estar a 0°, 30°, 45°, 90° y -45°. Primero se tomará un laminado concreto, [piezo/-45/45]<sub>2s</sub>, con él se estudiará la influencia del campo eléctrico y de temperatura en el comportamiento de la viga. Después distintas secuencias de apilamiento serán estudiadas para ver la influencia de la colocación de las láminas piezoeléctricas y la secuencia de apilamiento.

A lo largo del estudio se mantendrá la carga puntual de 1N constante, en el extremo  $x=L$  de la viga en el sentido positivo del eje z.

Para analizar la capacidad de control de movimiento que tienen tanto el campo de temperaturas como el campo eléctrico sobre un laminado lo primero que se hará es estudiar el comportamiento de este sometido únicamente a un campo de temperaturas y luego a un campo eléctrico para ver la influencia de cada uno de estos parámetros.

Para el campo de temperaturas se utilizará el incremento de temperatura entre la temperatura real a la que estará cada punto y la temperatura de

referencia a la que se fabricó el laminado. En este caso se tomará como temperatura de referencia 120°C. Para tener una visión más clara del problema a la hora de representar los resultados se hará en función de la temperatura real.

$$\Delta T = T_{real} - T_{ref} = A_1 z + A_3 z^3 \quad (4.17)$$

Aunque esta distribución parezca un caso muy concreto, si se añaden los términos con exponente par no afectan para nada en el resultado, debido a que se trabajará con laminados simétricas, los cuales harían que el cambio que produjera una lámina lo contrarrestará su simétrica completamente.

Esta distribución de temperaturas tiene la peculiaridad de que el incremento de temperatura en la lámina superior, denominada  $\Delta T_1$  a partir de ahora, será el mismo pero de signo contrario al de la lámina inferior, que se llamará  $\Delta T_2$ . Es decir, si el incremento de temperatura es de 30 K en la lámina superior, en la lámina inferior será de -30 K.

Para analizar el comportamiento del material se analizará desde una temperatura en la lámina superior de 150°C hasta una de -150°C, siendo en la capa inferior justo al contrario. En los dos trabajos de fin de grado que preceden a este se utilizaba una variación lineal del incremento de temperatura en este caso se introduce también un término multiplicado por la coordenada  $z$  al cubo y para cada laminado se estudiarán tres casos distintos.

El caso en el que  $A_3 = 0$  y  $A_1 = \frac{2\Delta T_1}{H}$ , es decir, el mismo caso estudiado en los dos trabajos anteriores ya que se anula el término al cubo.

El caso en el que  $A_3 = 10^{11}$  y  $A_1 = \left[ \Delta T_1 - 10^{11} \left( \frac{H}{2} \right)^3 \right] \frac{2}{H}$ , se ha elegido este valor para  $A_3$  ya que era el primero para el cual la diferencia era significativa con el anterior.

Y por último se estudiará el caso en el que  $A_3 = 10^{12}$  y  $A_1 = \left[ \Delta T_1 - 10^{12} \left( \frac{H}{2} \right)^3 \right] \frac{2}{H}$ , se ha elegido este valor para  $A_3$  para poder apreciar también una diferencia notable con el caso anterior.

En el caso del campo eléctrico, se someterá a la viga a un voltaje de corriente continua. Se tomará como voltaje máximo que es capaz de soportar sin sufrir daños 350kV/m, dato obtenido de la bibliografía Pacheco et. al [34]. La distribución tiene la misma forma que la de la temperatura y por tanto tendrá la misma peculiaridad de tener en la lámina inferior el mismo voltaje pero de signo opuesto que el de la lámina superior. El incremento que se utilizará será desde -350kV/m hasta 350kV/m.

$$V(z) = P_3 z + P_1 z^3$$

(4.18)

Se han ido probando valores y para obtener un cambio significativo en el resultado era necesario fijar valores de  $P_3$  muy elevados.

Primero se analizará el caso de incremento de voltaje lineal, es decir,  $P_1 = 0$  y  $P_3 = \frac{2V_1}{H}$ .

En segundo lugar se ha tomado un valor de  $P_1 = 10^{16}$  y  $P_3 = \left[ V_1 - 10^{16} \left( \frac{H}{2} \right)^3 \right] \frac{2}{H}$ , como se ha mencionado el valor de  $P_1$  debía ser extremadamente elevado para que se produjera algún cambio en el resultado final, por lo que se puede asumir que el campo eléctrico se comporta de forma lineal pudiendo en un problema real despreciar los cambios que no lo sean.

En tercer lugar se tomará  $P_1 = 10^{17}$  y  $P_3 = \left[ V_1 - 10^{17} \left( \frac{H}{2} \right)^3 \right] \frac{2}{H}$ .

# Capítulo 5

## Análisis de resultados

### 5.1 Introducción

Como ya se ha mencionado en apartados anteriores, este capítulo se va a dividir en dos partes, la primera consta del análisis de un laminado concreto,  $[\text{piezo}/-45/45]_{2s}$ , sometido a los campos ya definidos de voltaje y temperatura por separado y después a ambos campos al mismo tiempo. Después se analizarán distintas secuencias de apilamiento sometidas a estas especificaciones y se estudiarán las diferencias.

### 5.2 Control del movimiento

En esta parte del capítulo se va a analizar el comportamiento del laminado  $[\text{piezo}/-45/45]_{2s}$  bajo las condiciones de temperatura y campo eléctrico que se acaban de definir. Primero se analizará el comportamiento con la variación del voltaje, después con la variación de temperatura y por último con la variación de ambos para así estudiar el efecto de cada uno de ellos sobre el movimiento de la viga.

En el caso de no tener en cuenta el campo de temperatura ni el campo eléctrico, el desplazamiento del extremo de la viga hacia abajo será de 0.004924648316179 m, se tomará este valor de referencia para observar cómo cambia el comportamiento de la viga si es sometida a otros esfuerzos.

## 5.2.1 Variación de voltaje

En la siguiente gráfica se muestra el desplazamiento máximo del extremo  $x=L$  de la viga sometido a un campo eléctrico de función lineal.

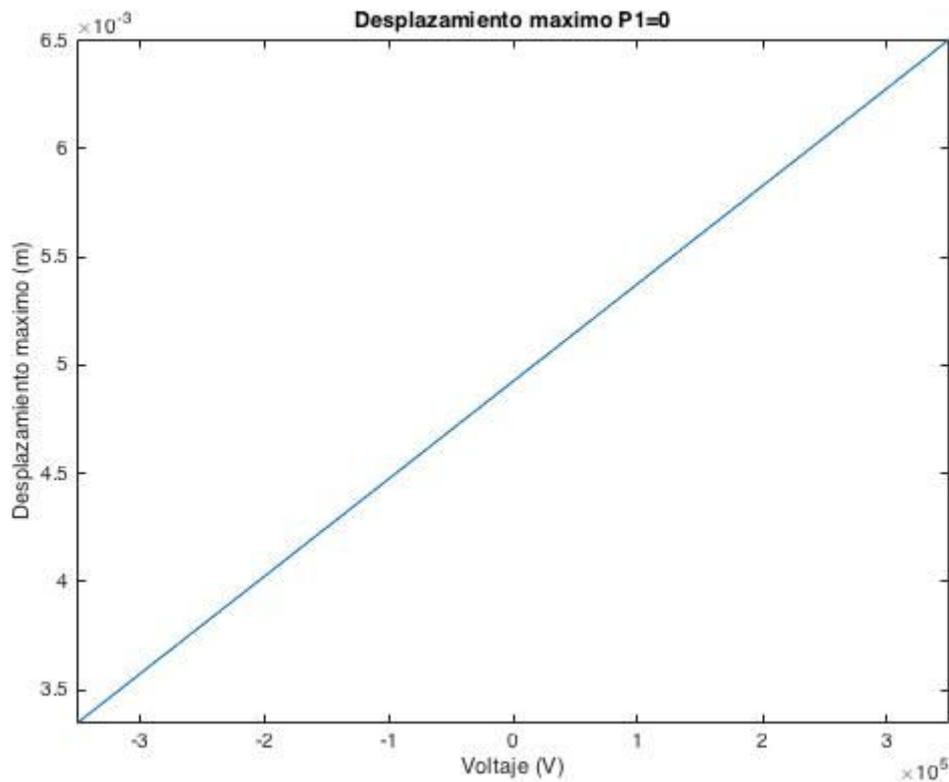


Figura 5.1: Desplazamiento máximo de la viga con laminado [piezo/-45/45]<sub>2s</sub> en función del un campo eléctrico lineal

En esta gráfica se puede observar como el campo el desplazamiento máximo de la viga varía de forma lineal con el voltaje aplicado. El incremento de voltaje cubre un rango de  $-350\text{kV/m}$  a  $350\text{kV/m}$ , si se divide en dos partes, de  $-350$  a  $0$  y de  $0$  a  $350$  se puede observar que el punto  $0\text{kV/m}$  corresponde con un desplazamiento igual al que había en el caso de no tener campo eléctrico ni temperatura, es decir,  $0.004924648316179$  m. Si el campo eléctrico está en el primer intervalo, el desplazamiento máximo de la viga es menor, o lo que es lo mismo, el material piezoeléctrico de la viga estaría contrarrestando el desplazamiento vertical que la fuerza está causando. En el caso del segundo intervalo el desplazamiento máximo de la viga es mayor que en el caso de no estar sometida a ningún campo eléctrico por lo que el material piezoeléctrico está propiciando el desplazamiento de esta en en la dirección vertical.

Para hacerse una idea de a qué corresponden estos desplazamientos se puede analizar en términos de porcentajes. En el caso de que el voltaje sea de

-350kV/m en la lámina superior, se reduciría el desplazamiento máximo de la lámina en un 33%. En el caso de que el voltaje sea de 350kV/m, el porcentaje en el que se aumentaría el desplazamiento máximo de la lámina se corresponde con un más 33% del producido en caso de que no hubiera campo eléctrico aplicado.

Se puede asumir que la variación del desplazamiento máximo es directamente proporcional al campo eléctrico ya que se producirá prácticamente el mismo porcentaje de desplazamiento con el campo positivo o negativo solo que en sentido contrario.

A continuación se presenta una tabla en la que se compraran los desplazamientos máximos de la viga cuando esta está sometida a campos de voltaje en los que el coeficiente que se multiplica por  $z^3$  en la ecuación (4.18), es decir  $P_1$ , es distinto de 0.

Voltaje (kV)	Desplazamiento (m)		
	$P_1 = 0$	$P_1 = 1e16$	$P_1 = 1e17$
-350	0.0033	-0.0028	-0.058
0	0.004925	0.004925	0.004925

Tabla 5.1: Desplazamiento laminado [piezo/-45/45]<sub>2s</sub> con  $V_s = -350$  y  $0$  kV

Se ha tomado como referencia para estudiar el desplazamiento de la viga un campo de voltaje en el que la placa superior del laminado tendría un voltaje de -350kV y la placa inferior 350kV.

A la vista de esos valores y teniendo en cuenta que el desplazamiento negativo significa que va en sentido contrario al eje de coordenadas  $z$ , y que este eje era positivo hacia abajo, un desplazamiento negativo significa que el extremo de la viga está por encima de su horizontal.

Así en esta gráfica se puede observar que si el coeficiente  $P_1$  es 0, para este campo eléctrico, la viga contrarrestaría un 33% del desplazamiento que antes era causado por la fuerza puntual, como ya se ha analizado antes.

En el caso de que  $P_1$  sea  $1e16$ , el efecto piezoeléctrico no sólo contrarrestará todo el desplazamiento causado por la fuerza, sino que hará que este aumente

en sentido contrario un 43,12%. En total la variación en porcentaje del desplazamiento será de 143,12%.

El caso de  $P_1$  sea  $1e17$  es similar al anterior, el efecto piezoeléctrico contrarresta toda la fuerza y añade un desplazamiento en este caso de 1077,66% en sentido contrario, dando un total de 1177,66%.

Ha sido necesario utilizar unos valores tan elevados de  $P_1$  ya que al tratarse de una lámina de un espesor tan pequeño y una distribución cúbica, si se utilizan valores pequeños no se aprecia prácticamente ningún cambio. Sin embargo cuando se llega a cierto valor, cualquier mínimo aumento da lugar a un gran cambio en el resultado final, como se puede observar entre los resultados para  $P_1 = 1e16$  y  $P_1 = 1e17$ .

Con estos resultados se puede observar la labor de control que llevarían a cabo las láminas piezoeléctricas sobre este laminado. Si se mira desde un punto de vista físico, en el caso de poder obtener estos campos de voltaje sería de gran utilidad, el problema es que es un laminado muy fino y una distribución muy complicada para obtenerla de forma sencilla.

## 5.2.2 Variación de Temperatura

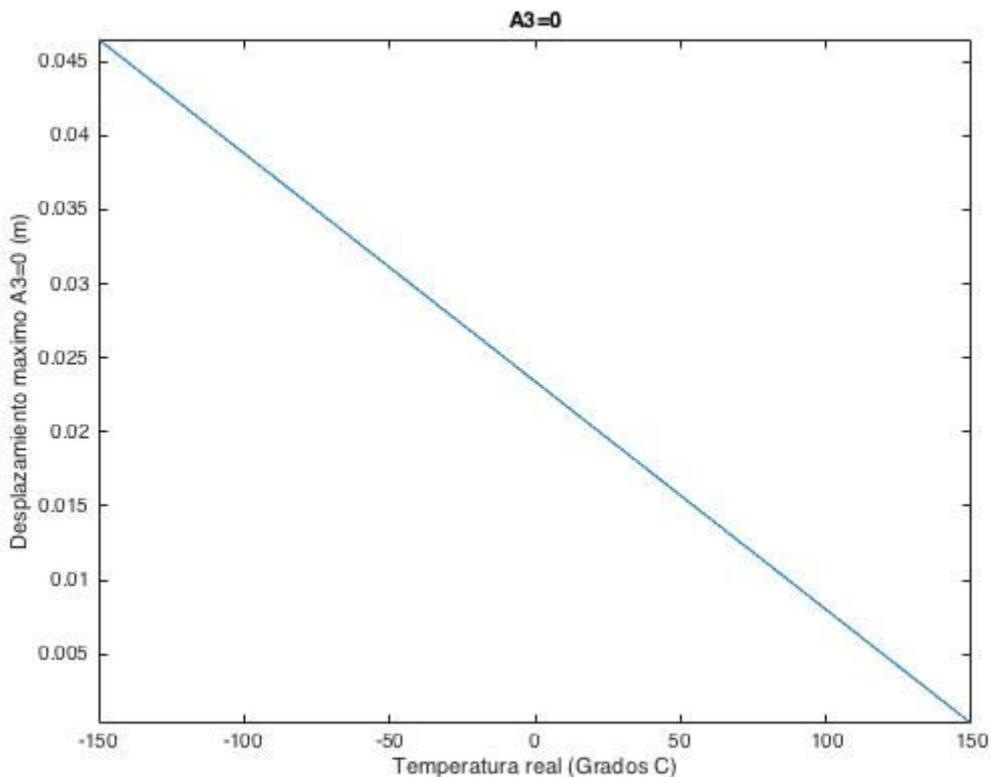


Figura 5.2: Desplazamiento máximo de la viga en función de la temperatura real para el laminado [piezo/-45/45]<sub>2s</sub>

Este es el caso en el que el incremento de temperatura tiene una forma lineal a lo largo del espesor. Se podría hacer un análisis parecido al del voltaje, dividiendo el incremento en dos intervalos, pero en este caso el primero deberá ser de  $-150^{\circ}\text{C}$  a  $120^{\circ}\text{C}$ . Como ya se ha explicado la variación de temperatura efectiva es la temperatura real menos la temperatura de referencia, a la que se fabricó este material. En este caso dicha temperatura son  $120^{\circ}\text{C}$  por lo que en ese punto será en el que el incremento de temperatura sea  $0^{\circ}\text{C}$  en todo el espesor del laminado, dando lugar a que el desplazamiento máximo sea igual al que se produciría de no haber incremento de temperatura.

Por tanto el primer intervalo será el de  $-150$  a  $120^{\circ}\text{C}$ , el cual propiciará el desplazamiento de la viga en un  $844,5\%$ , este valor tan alto es comprensible ya que se trata de un incremento de temperatura muy grande en un espesor muy pequeño. En el segundo intervalo, entre  $120^{\circ}\text{C}$  y  $150^{\circ}\text{C}$  de temperatura real, la viga contrarresta el desplazamiento producido por la fuerza en un  $93,84\%$ , con un incremento de temperatura un poco más grande podría conseguirse que la viga quedase completamente horizontal a pesar de estar aplicando sobre ella la fuerza puntual de  $1\text{N}$ .

Se puede apreciar que los cambios debidos a la temperatura son muy superiores a los debidos a los incrementos de voltaje en este caso, aunque se trata de un incremento de temperatura muy extremo entre ambas caras. A continuación, al igual que se hizo con el voltaje se van a estudiar los cambios que se producirían en el caso de que  $A_3 \neq 0$ . Se tomará un incremento negativo de temperatura de  $-30^{\circ}\text{C}$ , como ya se ha mencionado lo que realmente importa en el caso de la temperatura es la diferencia entre la temperatura real y la temperatura de referencia a la que se fabricó el material. Como la temperatura de referencia es  $120^{\circ}\text{C}$  ese punto será en el que el incremento de temperatura sea  $0$  y por tanto el desplazamiento máximo de la viga será el mismo que en el caso de que no exista el efecto de la temperatura y por tanto actúe únicamente la fuerza sobre la viga.

Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )	Desplazamiento máximo (m)		
	$A_3 = 0$	$A_3 = 1e11$	$A_3 = 1e12$
90	0.0095	0.0121	0.0351
120	0.004925	0.004925	0.004925

Tabla 5.2: Desplazamiento laminado [piezo/-45/45]<sub>2s</sub> con  $T_s = 90$  y  $120^{\circ}\text{C}$

Se ha tomado un incremento de  $-30^{\circ}\text{C}$  para analizar el comportamiento de la viga, como la temperatura de referencia es  $120^{\circ}\text{C}$ , la temperatura real será de  $90^{\circ}\text{C}$ . Debido a la peculiaridad de la función que define el incremento de temperatura a lo largo del espesor de la viga, la cara superior de esta estaría a  $90^{\circ}\text{C}$  y la cara inferior a  $150^{\circ}\text{C}$ .

En este caso este incremento de temperatura genera desplazamientos positivos mayores que el producido por el desplazamiento de la viga cuando no se tenían en cuenta los efectos de la temperatura. Por lo que un incremento de temperatura negativo en la cara superior hace que aumente el desplazamiento hacia abajo del extremo de la viga.

Cuando  $A_3 = 0$ , aumenta el desplazamiento en un  $92,89\%$ , un incremento de  $-30^{\circ}\text{C}$ , da lugar a que la viga se desplace prácticamente lo mismo que lo hace por la presencia de la fuerza de  $1\text{N}$ . En cambio en el caso del voltaje con un incremento de  $-350\text{ kV}$  y una función lineal, daba lugar a una variación del  $33\%$ . De aquí se puede deducir que, como se verá a continuación, si ambas funciones son lineales el efecto de la temperatura predomina sobre el piezoeléctrico.

En el segundo caso, donde  $A_3 = 1e11$ , el desplazamiento aumenta respecto al inicial un  $145,68\%$ , de forma parecida a como lo hacía en el segundo caso del voltaje.

Y por último para  $A_3 = 1e12$  el efecto de la temperatura implica un incremento en el desplazamiento de  $612,69\%$ , siendo bastante menor que el último caso del piezoeléctrico en el que hacía que variara en un  $1177,66\%$ .

### 5.2.3 Variación de Temperatura y Voltaje

En este apartado se va a estudiar lo que ocurriría en el caso de que a la viga ya cargada con la fuerza puntual de  $1\text{N}$ , se le añadiesen los efectos térmicos y piezoeléctricos al mismo tiempo.

Para llevar a cabo este análisis, al igual que en los casos anteriores, se presentará en primer lugar una gráfica con tres ejes en la que se representará en uno de ellos el incremento de voltaje, en el otro el de temperatura y por último el desplazamiento máximo.

En la gráfica se fijará un campo de voltaje desde  $-350\text{ kV}$  a  $350\text{ kV}$  y una temperatura real que irá de  $-150^{\circ}\text{C}$  a  $150^{\circ}\text{C}$ . En ella se representará el caso en el que los dos incrementos tengan una función lineal.

Después, como en los dos apartados anteriores, partiendo de un voltaje de -350 kV en la cara superior y una temperatura de 90°C, se analizará el desplazamiento máximo de la viga con en el caso de que ambos campos sean lineales, en el caso de que  $P_1 = 1e16$  y  $A_3 = 1e11$  y por último cuando  $P_1 = 1e17$  y  $A_3 = 1e12$ .

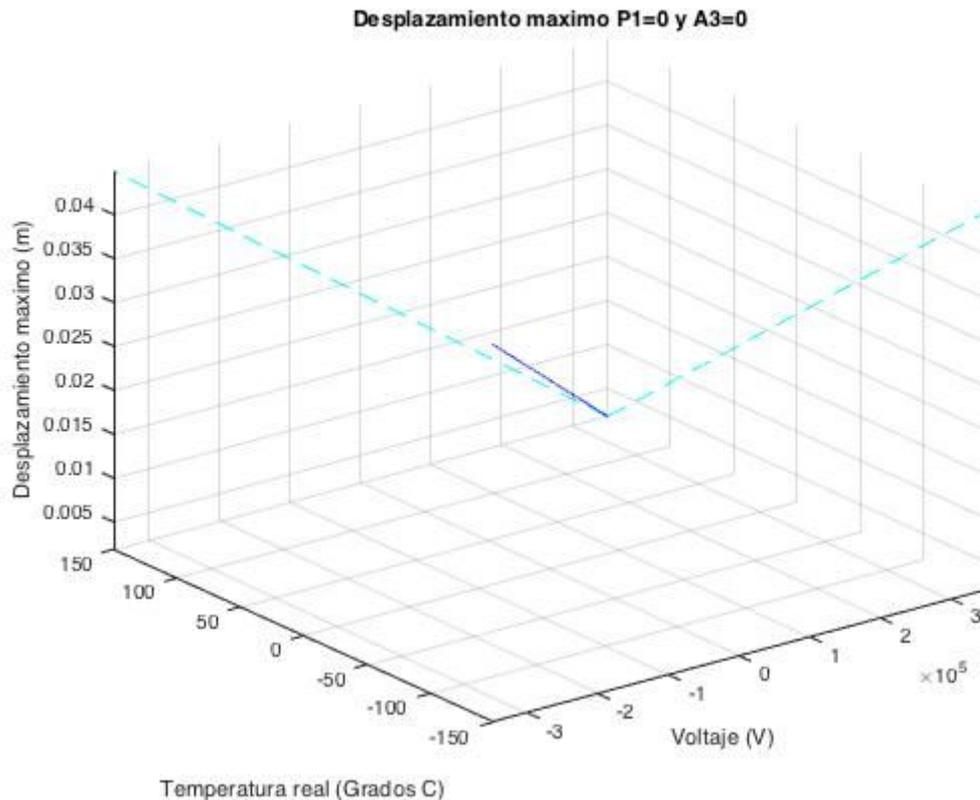


Figura 5.3: Desplazamiento máximo de la viga con laminado  $[\text{piezo}/-45/45]_{2s}$  en función del un campo eléctrico y un incremento de temperatura lineal

En este caso se están aplicando a la vez los efectos térmicos y piezoeléctricos sobre la viga ya cargada. Como en los dos apartados anteriores se ha podido ver como actuaban por separado, ahora se estudiará cuál predomina en cada caso.

Ambos incrementos son, en este caso, lineales y en el punto en el que la temperatura real son  $-150^{\circ}\text{C}$ , es decir, el incremento de temperatura es de  $-170^{\circ}\text{C}$ , y el voltaje tiene un valor de 305 kV, en la cara superior, se incrementará el desplazamiento en un 812,49%. Este porcentaje es el resultado de que el incremento de temperatura haga que el extremo de la placa descienda y el efecto piezoeléctrico intente contrarrestarlo, sin mucho éxito, ya que en este caso el incremento de temperatura es muy grande. Este resultado era de esperar ya que en el apartado anterior la temperatura sola en ese caso daba un incremento de desplazamiento del 844,5% y el voltaje hacía que este disminuyese en un 33%.

		Desplazamiento máximo (m)		
Voltaje (kV)	T <sup>a</sup> (°C)	$P_1 = 0$ y $A_3 = 0$	$P_1 = 1e16$ y $A_3 = 1e11$	$P_1 = 1e17$ y $A_3 = 1e12$
-350	90	0.007965	0.004339	-0.02829
0	120	0.004925	0.004925	0.004925

Tabla 5.3: Desplazamiento laminado [piezo/-45/45]<sub>2s</sub> con  $T_s = 90$  y  $120^\circ\text{C}$  y  $V_s = -350$  y  $0$  kV

En la tabla 5.3 se presentan los resultados de los distintos desplazamientos que se producirían para un voltaje en la cara superior de -350kV y una temperatura de  $90^\circ\text{C}$ , utilizando distintas funciones para los campos eléctricos y térmicos.

En el primer caso se plantea una variación lineal de temperatura y voltaje, pero a diferencia del caso estudiado en la gráfica, para el que un voltaje de -350 kV en la cara superior se correspondía con una temperatura de  $-150^\circ\text{C}$ , aquí ese voltaje se corresponde con  $90^\circ\text{C}$ , variando el incremento de temperatura de  $-270^\circ\text{C}$  a  $-30^\circ\text{C}$ . De esta manera la temperatura no predominará de la misma forma que lo hacía antes y habrá un punto en el que tanto el incremento de temperatura como el voltaje serán 0 y la viga estará únicamente sometida a la carga puntual.

En este caso cuando ambos incrementos son lineales, se produce un aumento del 61,72% en el desplazamiento con respecto al inicial, por lo que también predomina el efecto de la temperatura sobre el piezoeléctrico pero de una forma mucho más moderada a como lo hacía en el caso de la gráfica.

En el segundo caso, se plantea una temperatura superficial de  $90^\circ\text{C}$  y un voltaje de -350 kV utilizando las distribuciones correspondientes en las que  $P_1 = 1e16$  y  $A_3 = 1e11$ , se produce una disminución del desplazamiento inicial del 11,9%. En este caso el efecto piezoeléctrico predomina sobre el efecto térmico, pero ambos son muy parecidos. En el tercer caso con las mismas condiciones en la cara superior se utiliza las relaciones fijando  $P_1 = 1e17$  y  $A_3 = 1e12$ . Aquí el efecto piezoeléctrico predomina indudablemente sobre el térmico y la fuerza, haciendo que la viga vuelva a su posición inicial y desplazando su extremo en sentido contrario un 474,42% del desplazamiento inicial, dando un total de un 574,24%. Entre este caso y el anterior se podría encontrar un punto en el que el efecto piezoeléctrico contrarrestase totalmente al efecto térmico y a la fuerza puntual haciendo que el desplazamiento total fuese 0 y la viga quedase totalmente horizontal.

## 5.3 Análisis de distintas secuencias de apilamiento

En este apartado se va a estudiar el efecto de la secuencia de apilamiento con respecto a los cambios en el voltaje, así se analizarán distintos laminados en los que se irán cambiando de lugar y aumentando o disminuyendo el número de láminas de material piezoeléctrico.

El objetivo es por tanto analizar la capacidad de control de movimiento de cada uno de los laminados y hasta qué punto influye la posición de las láminas piezoeléctricas.

Los laminados a analizar serán:

Secuencia 1:  $[0/90/p]_{2s}$

Secuencia 2:  $[p/0/90]_{2s}$

Secuencia 3:  $[90/p/0]_{2s}$

Secuencia 4:  $[p/90/0]_{2s}$

Secuencia 5:  $[p_2/0_2/90_2]_s$

Secuencia 6:  $[p_2/90_2/0_2]_s$

Secuencia 7:  $[90_2/0_2/p_2]_s$

Secuencia 8:  $[90_2/p_2/0_2]_s$

Tomando como p la lámina piezoeléctrica. Todos los laminados escogidos tienen doce láminas, al igual que la viga del apartado anterior. Se ha escogido este número de láminas para que las dimensiones de la viga,  $L=0,24m$  y  $b=0,024m$  además de la carga puntual de 1N sean coherentes.

En primer lugar se obtendrá el desplazamiento del extremo libre de la viga en ausencia de efectos térmicos ni piezoeléctricos.

Secuencia	Desplazamiento (m)
Secuencia 1	0.004763
Secuencia 2	0.0047779
Secuencia 3	0.004868
Secuencia 4	0.004825
Secuencia 5	0.00477
Secuencia 6	0.00485676
Secuencia 7	0.0048956
Secuencia 8	0.005

Tabla 5.4: Desplazamiento distintas secuencias de apilamiento

En la gráfica siguiente se reflejan los valores del desplazamiento máximo de la vig, se suponiendo un campo de eléctrico lineal a lo largo del espesor, donde el voltaje de la capa superior sea de -350 kV, además de la carga puntual de 1N y despreciando los efectos de la temperatura. En la siguiente tabla se estudiará el caso de que el campo eléctrico no sea lineal.

Secuencia	$P_1 = 0$	
	Desplazamiento (m)	%
Secuencia 1	0.0044956	-5.60
Secuencia 2	0.003929	-17.76
Secuencia 3	0.00445	-7,56
Secuencia 4	0.00374	-22.49
Secuencia 5	0.0036	-24.53
Secuencia 6	0.00314	-35.35
Secuencia 7	0.00479	-2.16
Secuencia 8	0.00393	-21.4

Tabla 5.5: Desplazamiento distintas secuencias de apilamiento con  $V_s = -350\text{kV}$  y  $P_1 = 0$

Secuencia	$P_1 = 1e16$		$P_1 = 1e17$	
	Despl. (m)	%	Despl. (m)	%
Secuencia 1	0.001886	-60.40	-0.02159868	-553.47
Secuencia 2	6.117e-04	-87.20	-0.029248	-712.15
Secuencia 3	7.895e-04	-83.78	-0.03216	-760.64
Secuencia 4	-5.03968e-04	-110.44	-0.0387	-902.07
Secuencia 5	-7.97184e-04	-116.70	-0.04061	-951.40
Secuencia 6	-0.003476	-171.57	-0.063	-1397.16
Secuencia 7	0.0033437	-31.70	-0.00968	-279.73
Secuencia 8	-0.007684	-253.68	-0.11225	-2345.00

Tabla 5.6: Desplazamiento distintas secuencias de apilamiento con  $V_s = -350\text{kV}$  y  $P_1 = 1e16$  y  $1e17$

Tanto en la tabla (5.4), como en la (5.5), como en la (5.6) un desplazamiento positivo quiere decir que el extremo de la viga se desplaza hacia abajo, ya que el eje de coordenadas  $z$  es positivo en esa dirección. Los desplazamientos negativos significarán entonces que el extremo se desplaza hacia arriba. Los porcentajes están realizados respecto al desplazamiento inicial, en el caso de no tener en cuenta efectos térmicos ni piezoeléctricos. Si estos son positivos significa que al desplazamiento inicial se le añade un tanto por ciento igual a esa cifra, si son negativos habrá que restarlos. Es decir, si el porcentaje es negativo dicho efecto estará haciendo que la viga contrarreste el efecto de la fuerza y vaya en sentido contrario a esta.

Todas las secuencias anteriores son bastante parecidas entre ellas, ya que todas tienen 12 láminas y 4 de ellas son piezoeléctricas. Este primer estudio servirá básicamente para ver la influencia de la posición de las láminas piezoeléctricas dentro del laminado.

Los desplazamientos máximos sin tener en cuenta los efectos térmicos ni los piezoeléctricos son bastante similares entre ellos y su diferencia proviene de las distintas secuencias de apilamiento. Al tratarse de un material compuesto las láminas tienen rigideces distintas en sus direcciones principales, por lo tanto dependiendo de cómo se coloquen, la rigidez total de la estructura será distinta.

Debido a la ecuación (3.37) cuanto más alejada esté una lámina del punto medio del laminado, más influyen sus propiedades en las del laminado completo, así por ejemplo se podría predecir que los laminados que más desplazamiento van a sufrir en ausencia de efectos térmicos o piezoeléctricos serán los que empiezan con láminas a  $90^\circ$ , es decir, las secuencias 3, 7, 8 como se puede apreciar en la tabla (5.4).

Respecto al análisis del desplazamiento en función del voltaje, lo que se está estudiando realmente es la influencia de la colocación de la lámina piezoeléctrica. Como las láminas piezoeléctricas son isótropas en todos los casos el laminado intentará contrarrestar el efecto de la fuerza aplicada, dando lugar a porcentajes negativos y en el caso de que el efecto sea lo suficientemente fuerte, hará que la viga flecte en sentido contrario al que lo haría de no haber este efecto.

Los laminados que darán lugar a un mayor cambio por el efecto piezoeléctrico serán aquellos que tengan estas láminas más alejadas del punto medio, en este caso serían las secuencias 2, 4, 5 y 6, como se puede observar en la tabla (5.6).

En la tabla (5.7) se puede ver que utilizando altos coeficientes de  $P_1$  se puede aumentar en gran medida la actuación de las láminas piezoeléctricas, pero

como ya se ha dicho es muy complicado obtener unos campos eléctricos con unas formas tan particulares en un espesor tan pequeño.

$A_3 = 0$		
Secuencia	Desplazamiento (m)	%
Secuencia 1	0.0039	-17.07
Secuencia 2	0.0072	51.90
Secuencia 3	0.0079	62.28
Secuencia 4	0.0080	67.76
Secuencia 5	0.0077	62.45
Secuencia 6	0.0093	91.48
Secuencia 7	0.0069	40.94
Secuencia 8	0.0097	94.8

Tabla 5.7: Desplazamiento distintas secuencias de apilamiento con  $T_s = 90^\circ\text{C}$  y

$$A_3 = 0$$

Secuencia	$A_3 = 1e11$		$A_3 = 1e12$	
	Despl. (m)	%	Despl. (m)	%
Secuencia 1	0.0038	-20.06	0.0025	-47.72
Secuencia 2	0.0086	80.62	0.0210	339.06
Secuencia 3	0.0102	109.33	0.0308	531.84
Secuencia 4	0.0097	101.04	0.0255	428.50
Secuencia 5	0.0093	94.97	0.0236	393.64
Secuencia 6	0.0117	140.28	0.0329	577.40
Secuencia 7	0.0085	73.62	0.0227	363.68
Secuencia 8	0.0140	179.6	0.0521	942.00

Tabla 5.8: Desplazamiento distintas secuencias de apilamiento con  $T_s = 90^\circ\text{C}$  y

$$A_3 = 1e11 \text{ y } 1e12$$

En las tablas (5.7) y (5.8) se analiza el comportamiento de las distintas secuencias de apilamiento despreciando el efecto piezoeléctrico e introduciendo un campo de temperaturas, además de la carga prefijada.

Como en el caso de las tablas (5.5) y (5.6), un desplazamiento positivo indicará que este se produce hacia abajo, en la dirección positiva del eje z y en caso de ser negativo en sentido contrario. Los porcentajes serán calculados a partir del desplazamiento de la viga con esa secuencia en ausencia de efectos térmicos y piezoeléctricos. Un porcentaje positivo se sumará al desplazamiento ya existente y un desplazamiento negativo, se restará, en caso de que un porcentaje negativo sea mayor del 100% la viga flectará en sentido contrario a como lo hacía antes.

El caso más llamativo es el de la primera secuencia de apilamiento  $[0/90/p]_{2S}$  ya que es la única que produce porcentajes negativos, es decir, que opone resistencia a la carga preestablecida al igual que lo hacían todas las secuencias en el caso de contar solo con el efecto piezoeléctrico. Esto se debe a que en la dirección principal el coeficiente de dilatación térmica del material compuesto es negativo  $-1 * 10^{-6}/^{\circ}C$ , al ser el único laminado con la primera lámina a  $0^{\circ}$ , solo pasa en este, ya que la dirección principal de la lámina coincidirá con la dirección principal del laminado. Aun así esta lámina conseguirá un desplazamiento muy pequeño ya que tanto las láminas piezoeléctricas como las colocadas a  $90^{\circ}$  situadas en el interior del laminado se opondrán a ello.

Siguiendo este razonamiento, los laminados que conseguirán un mayor porcentaje de desplazamiento serán aquellos que tengan las láminas a  $0^{\circ}$  lo más cercanas al centro, ya que son las que se oponen al desplazamiento en el sentido de la fuerza. Por lo que se podría predecir que las secuencias con mayor porcentaje de desplazamiento serían la 6 y la 8.

Al igual que en el caso del voltaje, el incremento del coeficiente multiplicado por  $z^3$ , en este caso  $A_3$ , hace que el efecto de la temperatura sobre el laminado se incremente en gran medida, pero es muy difícil conseguir una configuración de este tipo físicamente.

# Capítulo 6

## Conclusiones y estudios futuros

### 6.1 Resumen y Conclusiones

En este Trabajo de Fin de Grado se ha estudiado la capacidad de control sobre el desplazamiento del extremo de una viga que tiene un material piezoeléctrico. El control de los movimientos se usa para obtener estructuras inteligentes que son capaces de cambiar su forma para adaptarse a las condiciones de trabajo y mejorar la actuación de la estructura.

La capacidad de control del material piezoeléctrico se ha obtenido analizando un distintos laminados simétricos con láminas de PZT intercaladas entre láminas de un material compuesto. Sometidos a campos eléctricos y de temperaturas variables, que iban variando entre una distribución lineal y una distribución cúbica. Para llevar a cabo este análisis se ha partido de la Teoría Clásica del Laminado, a la que se ha tenido que añadir el efecto producido por la presencia de un campo eléctrico.

Durante todo el estudio se ha trabajado con una viga de cantilever, con todas sus dimensiones fijas excepto el espesor, que depende de la secuencia utilizada. Además a esta viga se le aplicaba una carga puntual de 1N en el extremo opuesto al empotramiento.

A partir de estos datos en primer lugar se ha tomado un laminado fijo y se han ido variando las condiciones del campo eléctrico y del incremento de temperatura para analizar detenidamente los efectos que tenían en el desplazamiento total de la viga, para saber así cuál era su capacidad de control sobre esta.

La primera conclusión que se ha obtenido es que si se utilizan diferencias lineales tanto del campo eléctrico como de incremento de temperatura, los efectos térmicos son muy superiores a los efectos piezoeléctricos, a pesar de que estos mismos eran capaces de variar el desplazamiento en un 30%.

Para el caso de campos de temperatura o voltaje que dependieran de la coordenada del espesor al cubo, se conseguían grandes rangos de control sobre la viga, llegando en la mayoría de casos a superar en un porcentaje mayor al 100% el efecto causado por la fuerza. En primer lugar se han estudiado los efectos de aplicar ambos campos por separado y posteriormente se ha analizado el caso de que existiera campo un incremento de temperatura y a la vez un campo eléctrico entre las caras superior e inferior.

En la segunda parte del estudio mencionado se puede observar que a pesar de que si se trata de campos lineales el efecto de la temperatura anula totalmente el del campo eléctrico, es posible conseguir que esto se dé la vuelta utilizando una distribución cúbica del campo eléctrico. El problema de esto es que para alcanzar esos resultados son necesarias unas distribuciones extremadamente difíciles de conseguir en un laminado real.

Por último se ha estudiado la influencia de la secuencia de apilamiento en la respuesta de la viga, bajo las mismas condiciones que se hizo para el caso anterior. En primer lugar sin estar sometida a ningún incremento de temperatura ni ningún campo eléctrico. Posteriormente con el campo eléctrico definido en el estudio anterior y por último con el incremento de temperaturas. A la conclusión que se ha llegado a través de este último estudio es que al tratarse de un material compuesto, las propiedades de cada lámina no tienen el mismo impacto sobre el resultado final dependiendo de su posición. Así cuanto más alejada esté una lámina del plano medio del laminado más influirá en las propiedades de este. Además al elevar utilizar campos dependientes de  $z^3$  se dió la misma situación que antes, los porcentajes de desplazamientos crecían enormemente.

## 6.2 Estudios futuros

A partir de este Trabajo de Fin de Grado podrían derivarse otros estudios que ampliarían el campo de conocimiento y de posibles usos de este tipo de estructuras inteligentes.

En primer lugar se podría ampliar el estudio para otros materiales, cambiando el material compuesto, el piezoeléctrico o ambos y sus secuencias de apilamiento. A partir del programa desarrollado sólo habría que cambiar las propiedades de estos y analizar los resultados. Otra forma de ampliar el estudio sería variando las condiciones de contorno para analizar una viga biapoyada o variar las cargas a las que está sometida.

Otro estudio que se podría derivar de este aunque ya sería necesario desarrollar unas nuevas ecuaciones podría ser analizar una variación de temperatura y voltaje en la coordenada longitudinal de la viga, es decir, la coordenada  $x$ . En lugar de que las variaciones dependen del espesor o coordenada  $z$  como en este trabajo.

Un tercer derivado podría basarse en el análisis de la capacidad de actuación de una viga inteligente de este estilo ante la presencia de vibraciones.

También se podrían introducir cargas normales en el plano de la viga y ver su comportamiento, ya que en este estudio esas cargas se han despreciado teniendo en cuenta únicamente las de cortadura.

Por último un estudio muy interesante que podría plantearse sería el de resolver este problema con métodos numéricos, haciendo por ejemplo un análisis de elementos finitos y comparar los resultados de este con los obtenidos en este Trabajo. Este análisis dejaría ver la fiabilidad de los métodos analíticos y hasta qué nivel se puede confiar en ellos sin entrar en predicciones falsas.



# Bibliografía

Alaimoa, A., Milazzob,A. and Orlando, C., Numerical analysis of a piezoelectric structural health monitoring system for composite flange-skin delamination detection. *Composite Structures*, 100: 343–355, 2013.

Alberto Sinsamón Serrano, “Smart Structures Analysis Application to Sandwich Structures”. Trabajo de Fin de Grado UC3M.

Aldraihem O J and Khdeir A A “Smart beams with extension and thickness-shear piezoelectric actuators” *Smart. Mater. Struct*, Vol 9.1-9, 2000.

Álvaro Olmedo Marcos, “Desarrollo de modelos predictivos de comportamiento de uniones mecánicas de material compuesto” Tesis Doctoral , 2015.

Barbarino, S., Bilgen, O., Ajaj, R.M., Friswell, M.I. y Inman, D.J. “A Review of Morphing Aircraft”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 22, 2011.

Bohlooly M, Mirzavand B. “Closed form solutions for buckling and postbuckling analysis of imperfect laminated composite plates with piezoelectric actuators” *Composite Part B Engineering* 2015, Vol 72. 21-29, 2015.

Bruch J.C, Sloss J.M, Adali.S and Sadek I.S “Optimal piezo-actuator locations/lengths and applied voltage for shape control of beams” *Smart Mater. Struct*. Vol 9. 205-11, 2000.

Carlos Santiuste Romero “Análisis y modelización de vigas de tipo laminado sometidas a cargas impulsivas”, Tesis Doctoral UC3M, 2007.

Crawley E F and de Luis J. “Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures” *AIAA Journal*. Vol 25. 1373-85.

Demakos C.B. “Stress fields in fiber reinforced laminate beams due to bending and torsion moments”. *Journal of Reinforced Plastic and Composites*, 22(5), pp 399-418, 2003.

Elisa Rivas Rodriguez “Análisis de la Respuesta de Vigas Adaptativas de Pared Delgada Frente a Cargas Estáticas”. Trabajo fin de Máster UC3M, 2014.

Gandhi, F. y Kang, S.G. “Beams with controllable flexural stiffness”. *Smart Materials and Structures*, 16, pp: 1179-1184, 2007.

Kuder, I.K., Arrieta, A.F., Raither, W.E. y Ermanni, P. “Variable stiffness material and structural concepts for morphing applications”. *Progress in Aerospace Sciences* 63, pp. 33-35, 2013.

López, O., Carnicero, A. and Ruiz, R., “Materiales inteligentes (II): Aplicaciones tecnológicas. Anales de mecánica y electricidad”, 2004.

Manuel García Algarra, “Smart Structures Analysis: Application to Laminated Composite Beams” Trabajo Fin de Grado UC3M, 2015.

Marinkovic D, Köppe H and Gabber H “Accurate modeling of the electric field within piezoelectric layers for active composite structures” *J, Intell. Mater, Syst. Struct.* Vol 18. 503, 2007.

Mitchell, J.A. and Reddy, J.N. 1995, “ A Refined Hybrid Plate Theory for Composite Laminates with Piezoelectric Laminae”, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 32, pp. 2345-2368, 1995.

Reddy, J.N., “Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis.” CRC Press: 113-175, 2003.

Sensor Technology Ltd. Active Noise and Vibration Control. *Smart Structures*, 98-001, 1998.

Sung K H, Charles K and Fu-Kuo C “Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators” *AIAA Journal*. Vol 30. 772-80, 1992.

Voigt,W., *Lehrbuch der Kristallphysik*, 1910.

Wu, X., Huang, W.M., Zhao, Y., Ding, Z., Tang, C. y Zhang, J. “Mechanisms of the Shape Memory Effect in Polymeric Materials”. *Polymers*, 5, pp: 1169-1202, 2013.

URL:

*-[http://ocw.upm.es/expresion-grafica-en-la-ingenieria/ingenieria-grafica-metodologias-de-diseno-para-proyectos/Teoria/LECTURA\\_COMPLEMENTARIA/MATERIALES/materialescompuestos.pdf](http://ocw.upm.es/expresion-grafica-en-la-ingenieria/ingenieria-grafica-metodologias-de-diseno-para-proyectos/Teoria/LECTURA_COMPLEMENTARIA/MATERIALES/materialescompuestos.pdf)*

*-<http://www6.uniovi.es/usr/fblanco/Leccion1.CERAMICAS.TiposMATERIALES.pdf>*

*-<http://www.acciona-infraestructuras.es/innovacion/innovamos-en-las-obras/favicon.ico>*

*-<http://www.aimplas.es/blog/los-composites-en-el-sector-aeronautico>*

*-<http://www.interempresas.net/MetalMecanica/Articulos/105497-Los-materiales-compuestos-en-el-futuro-de-la-automocion.html>*

*-<http://www.interempresas.net/Plastico/Articulos/2971-Materiales-y-estructuras-inteligentes.html>*

