



Universidad Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Ingeniería Mecánica

TESIS DOCTORAL

**COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UN
AUTOBÚS CIRCULANDO EN CURVA**

Autor:

Jorge Antonio Rodríguez Hernández

Directores:

Dr. Vicente Díaz López

Dra. Ester Olmeda Santamaría

Leganés, Febrero 2017



Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

TESIS DOCTORAL

COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UN AUTOBÚS CIRCULANDO EN CURVA

Autor: Jorge Rodríguez Hernández

Directores: Dr. Vicente Díaz López
Dra. Ester Olmeda Santamaría

Firma del Tribunal Calificador:

Presidente: Dr. José Luis San Román García

Vocal: Dr. Julio Fuentes Losa

Secretario: Dr. José Luis Muñoz Sanz

Calificación:

Leganés, 22 de marzo de 2017

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	iv
ÍNDICE DE TABLAS	ix
LISTA DE SIMBOLOS	x
AGRADECIMIENTOS	xviii
RESUMEN	xix
ABSTRACT	xx
CAPITULO 1 INTRODUCCIÓN.....	1
CAPITULO 2 ESTADO DEL ARTE	10
2.1 Generalidades acerca de los autobuses	10
2.2 Modelado y simulación de sistemas dinámicos	12
2.2.1 Generalidades sobre modelado y simulación	12
2.2.2 Modelado y simulación de sistemas técnicos.....	14
2.2.3 Modelado y simulación de vehículos	17
2.3 Modelado dinámico de un autobús	30
2.3.1 Introducción	30
2.3.2 Actuadores del sistema de suspensión	31
2.3.3 Barra Panhard	34
2.3.4 Modelo dinámico.....	35
2.3.5 Análisis de la rigidez y amortiguamiento de las ruedas	36
2.3.6 Análisis de la constante de la rigidez de la barra de torsión	37
2.3.7 Eje posterior del vehículo.....	40
2.3.8 Modelo espacial del vehículo	41

CAPITULO 3	OBJETIVOS	42
CAPITULO 4	ETAPAS DE DESARROLLO DE LA TESIS DOCTORAL	44
CAPITULO 5	DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LA VÍA	45
5.1	Parámetros geométricos de la calzada.....	45
5.1.1	Efectos cinemáticos y dinámicos del peralte.....	46
5.1.2	Tramos de acuerdo	50
5.2	Parametrización de la vía de circulación.....	55
CAPITULO 6	MODELAMIENTO DINÁMICO DEL VEHÍCULO	57
6.1	Sección frontal	57
6.1.1	Análisis de la cabina frontal	59
6.1.2	Diagramas de cuerpo libre de las masas no suspendidas	65
6.1.3	Análisis lateral de la sección frontal	68
6.2	Sección posterior.....	72
6.2.1	Diagrama de cuerpo libre de la cabina posterior.....	74
6.2.2	Análisis de la masa no suspendida	81
6.2.3	Análisis lateral de la sección posterior.....	83
6.3	Modelo Completo	87
CAPITULO 7	SIMULACIÓN DEL SISTEMA DINÁMICO	88
7.1	Descripción del algoritmo de solución.....	88
7.2	Parámetros de entrada	92
7.3	Resultados	94
CAPITULO 8	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD	103
8.1	Planteamiento matricial.....	103
8.2	Sensibilidad a los parámetros de vía	107
8.2.1	Generación de análisis.....	107

8.2.2	Velocidad de circulación	107
8.2.3	Sensibilidad al peralte final	110
8.2.4	Ancho de vía.....	112
8.2.5	Radio de curvatura final	114
8.3	Sensibilidad a los parámetros del vehículo	116
8.3.1	Rigidez torsional de la carrocería.....	116
8.3.2	Rigidez de los neumáticos.....	118
8.3.3	Altura del centro de gravedad de la cabina	120
CAPITULO 9 VALIDACIÓN EXPERIMENTAL.....		122
9.1	Limitaciones del modelo	122
9.2	Equipo utilizado para la experimentación.....	122
9.3	Características del vehículo.....	124
9.4	Vías de simulación y contrastación.....	126
CAPITULO 10 CONCLUSIONES.....		134
CAPITULO 11 DESARROLLOS FUTUROS		135
BIBLIOGRAFÍA		136
ANEXO: ALGORITMO DE SIMULACIÓN		144
	Programa principal – Solucionador.m	144
	Sistema de ecuaciones diferenciales – eqdsys.m.....	153
	Algoritmo solucionador – rks4.m.....	155

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1	Tendencia de accidentes de tránsito en el Perú. Período 2004 – 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].	2
Figura 1-2	Departamentos del Perú con mayor incidencia de accidentes de tránsito en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)]......	2
Figura 1-3	Accidentes de tránsito por clase, según departamentos del Perú en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)]......	3
Figura 1-4	Accidentes de tránsito por clase en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].	3
Figura 1-5	Distribución porcentual de accidentes de tránsito por clase en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].	4
Figura 1-6	Distribución porcentual de causas de accidentes de tránsito en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)]......	4
Figura 1-7	Vehículos participantes en accidentes de tránsito, por tipo y según departamento, año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)]......	5
Figura 1-8	Distribución porcentual de tipos de vehículos involucrados en accidentes de tránsito en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)]......	5
Figura 1-9	Tendencia de víctimas fatales en accidentes de tránsito en el período 2004 - 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)]......	6
Figura 1-10	Accidentes en vías interurbanas con víctimas, en función del tipo de accidente. España. [Anuario Estadístico de Accidentes (2015)]......	6
Figura 1-11	Ocupantes y víctimas según medio de desplazamiento en vías interurbanas de España. [Anuario Estadístico de Accidentes (2015)]......	7
Figura 1-12	Accidentes con víctimas según las características de la vía, en vías interurbanas de España. [Anuario Estadístico de Accidentes (2015)]......	7
Figura 1-13	Accidentes con víctimas según las características de la vía, en vías urbanas de España. [Anuario Estadístico de Accidentes (2015)]......	8
Figura 2-1	Pruebas de inclinación de autobuses: foto histórica de una prueba con el famoso autobús urbano de Londres.	10
Figura 2-2	Pruebas de inclinación de autobuses: ensayo a un bus moderno.....	11

Figura 2-3	Proceso de validación de un modelo virtual mediante simulación y experimentación.....	16
Figura 2-4	Modelo de un cuarto de vehículo utilizando dos grados de libertad.	18
Figura 2-5	Modelo de la mitad de un vehículo utilizando cuatro grados de libertad.....	18
Figura 2-6	Modelo de un vehículo completo utilizando siete grados de libertad.....	18
Figura 2-7	Componentes de un sistema vehicular.....	19
Figura 2-8	Modelado mediante el método axiomático o teórico.....	21
Figura 2-9	Modelado mediante el método empírico o experimental.	21
Figura 2-10	Formas de modelamiento de sistemas complejos.....	22
Figura 2-11	Representación típica de un sistema de multicuerpo.....	24
Figura 2-12	Modelado de un autobús con multicuerpos.	25
Figura 2-13	Modelado de un vagón de ferrocarril con multicuerpos.....	26
Figura 2-14	Modelado de un vehículo de levitación magnética con multicuerpos.....	26
Figura 2-15	Viga compuesta portante de un motor rotatorio.	28
Figura 2-16	Modelo dinámico de la viga compuesta portante de la Figura 2-15.....	28
Figura 2-17	Viga continua sometida a carga transversal variable en el tiempo.....	29
Figura 2-18	Suspensión de ballesta parabólica. [SKF (2012)].....	31
Figura 2-19	Configuración de resortes Belleville.....	32
Figura 2-20	Resorte de anillos.....	32
Figura 2-21	Resorte helicoidal.....	32
Figura 2-22	Esquema del sistema neumático de suspensión.....	33
Figura 2-23	Esquema de la barra Panhard.....	35
Figura 2-24	Modelo del sistema frontal.....	35
Figura 2-25	Fuerza restitutiva vs. deflexiones [Schramm (2014)].....	36
Figura 2-26	Esquema de barra.....	37
Figura 2-27	Modelo del sistema vista posterior.....	40
Figura 2-28	Modelo espacial del vehículo.....	41
Figura 3-1	Agentes que intervienen en un accidente.....	42
Figura 4-1	Etapas de desarrollo del trabajo de modelado y simulación propuesto en la presente tesis.....	44
Figura 5-1	Parámetros geométricos de la vía.....	45

Figura 5-2	Diagrama de cuerpo libre del vehículo.....	46
Figura 5-3	Análisis gráfico de fuerzas en suficiencia de peralte.....	48
Figura 5-4	Diagrama de cuerpo libre de la masa total del automóvil con peralte no compensado.	49
Figura 5-5	Esquema de la perturbación por ingreso repentino.	50
Figura 5-6	Salida de un tramo recto de calzada.	51
Figura 5-7	Curva Clotoide $A = 400$	52
Figura 6-1	Modelo dinámico de la sección frontal del vehículo.....	57
Figura 6-2	Diagrama de cuerpo libre de la sección frontal.	59
Figura 6-3	Descomposición de aceleraciones.	60
Figura 6-4	Grados de libertad de la cabina.....	62
Figura 6-5	Momento respecto al centro de balanceo.	64
Figura 6-6	Diagrama de cuerpo libre de la masa no suspendida izquierda.	65
Figura 6-7	Diagrama de cuerpo libre de la masa no suspendida derecha.	65
Figura 6-8	Descomposición de aceleraciones – masa no suspendida izquierda.	66
Figura 6-9	Descomposición de aceleraciones – masa no suspendida derecha.....	66
Figura 6-10	Diagrama de cuerpo libre de la sección frontal del vehículo.	68
Figura 6-11	Equilibrio dinámico de la sección frontal del vehículo.	70
Figura 6-12	Modelo de la sección posterior del vehículo.	72
Figura 6-13	Diagrama de cuerpo libre de la sección posterior de la cabina.	74
Figura 6-14	Grados de libertad de la cabina posterior.	75
Figura 6-15	Grados de libertad de la masa no suspendida de la sección posterior.....	75
Figura 6-16	Análisis cinemático del punto de apoyo de la barra Panhard en la cabina.....	77
Figura 6-17	Análisis cinemático del punto de apoyo de la barra Panhard en la masa no suspendida.	77
Figura 6-18	Posición inicial de la barra Panhard.....	78
Figura 6-19	Análisis de deformaciones de la barra Panhard.	79
Figura 6-20	Momentos respecto al centro de balanceo.	81
Figura 6-21	Diagrama de cuerpo libre de la masa no suspendida posterior.....	81
Figura 6-22	Diagrama para realizar sumatoria de momentos respecto al centro de balanceo no suspendido.	83
Figura 6-23	Equivalencia de fuerzas de la sección posterior.	84

Figura 6-24	Equilibrio dinámico de la sección posterior.....	85
Figura 6-25	Modelo dinámico completo del vehículo.....	87
Figura 7-1	Diagrama de bloques del programa principal.....	88
Figura 7-2	Diagrama de bloques del programa principal, denominado programa “solucionador”.....	89
Figura 7-3	Diagrama de bloques del programa Runge Kutta 4 modificado.	90
Figura 7-4	Diagrama de bloques del programa que contiene el sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema.	91
Figura 7-5	Variación del ángulo del peralte.....	94
Figura 7-6	Desplazamiento de la cabina frontal vs. tiempo.....	95
Figura 7-7	Desplazamiento de la cabina posterior vs. tiempo.	95
Figura 7-8	Desplazamiento de la masa no suspendida izquierda frontal vs. tiempo.....	96
Figura 7-9	Desplazamiento de la masa no suspendida derecha frontal vs. tiempo.....	96
Figura 7-10	Rotación de la cabina posterior vs. tiempo.....	97
Figura 7-11	Rotación de la cabina frontal vs. tiempo.	97
Figura 7-12	Desplazamiento de la masa no suspendida posterior vs. tiempo.....	98
Figura 7-13	Rotación de la masa no suspendida posterior vs. tiempo.....	98
Figura 7-14	Fuerza normal de la rueda izquierda frontal vs. tiempo.....	99
Figura 7-15	Fuerza normal de la rueda derecha frontal vs. tiempo.....	99
Figura 7-16	Fuerza normal de la rueda izquierda posterior vs. tiempo.....	100
Figura 7-17	Fuerza normal de la rueda derecha posterior vs. tiempo.	100
Figura 7-18	Fuerza de fricción necesaria para el derrape de la sección frontal vs. tiempo.....	101
Figura 7-19	Fuerza de fricción necesaria para el derrape de la sección posterior vs. tiempo.	101
Figura 7-20	Ángulo formado por la barra Panhard en ° respecto a la vertical vs. tiempo.....	102
Figura 7-21	Longitud de la barra Panhard en mm vs. tiempo.....	102
Figura 8-1	Sensibilidad a la velocidad posterior.....	108
Figura 8-2	Sensibilidad a la velocidad frontal.....	109
Figura 8-3	Sensibilidad al peralte posterior.	110
Figura 8-4	Sensibilidad al peralte frontal.....	111

Figura 8-5	Sensibilidad al ancho de vía frontal.....	112
Figura 8-6	Sensibilidad al ancho de vía posterior.	113
Figura 8-7	Sensibilidad al radio de curvatura posterior.	114
Figura 8-8	Sensibilidad al radio de curvatura frontal.....	115
Figura 8-9	Sensibilidad a la rigidez torsional frontal.	116
Figura 8-10	Sensibilidad a la rigidez estructural posterior.	117
Figura 8-11	Sensibilidad a la rigidez de los neumáticos frontal.	118
Figura 8-12	Sensibilidad a la rigidez de los neumáticos posterior.....	119
Figura 8-13	Sensibilidad a la altura del centro de gravedad frontal.....	120
Figura 8-14	Sensibilidad a la altura del centro de gravedad posterior.....	121
Figura 9-1	Vehículo de ensayo.....	123
Figura 9-2	Inertial Measurement Unit (IMU)	123
Figura 9-3	Curva en carretera.....	126
Figura 9-4	Cambio de carril.	127
Figura 9-5	Curva en carretera de radio amplio	127
Figura 9-6	Ajuste de datos experimentales del tramo de carretera curvo.	128
Figura 9-7	Ajuste de datos experimentales del tramo curvo en carretera entre 1.3 y 7s.....	128
Figura 9-8	Resultados del modelo de simulación para el tramo de carretera curvo.	129
Figura 9-9	Resultados experimentales y ajuste de curva sobre el cambio de vía.	130
Figura 9-10	Ajuste de datos experimentales entre 5 y 15s.....	130
Figura 9-11	Resultados del modelo de simulación en el cambio de vía.	131
Figura 9-12	Ajuste de datos de experimentales de resultados en curva de radio amplio	131
Figura 9-13	Resultados de ajuste de datos experimentales segmentados	132
Figura 9-14	Resultados del modelo de simulación para la curva de radio amplio....	132

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1	Características de los tipos de modelado	23
Tabla 2-2	Valores estándar de la rigidez y amortiguamiento de las ruedas.	37
Tabla 9-1	Datos para el autocar ensayado.....	124
Tabla 9-2	Datos mecánicos tomados de la bibliografía	126

LISTA DE SIMBOLOS

A	Coefficiente de la clotoide
\bar{A}	Área de la sección transversal de la barra [m ²]
a_{fnc}	Aceleración final no compensada [m/s ²]
a_{nc}	Aceleración no compensada [m/s ²]
a_y	Aceleración transversal [m/s ²]
B_{calzada}	Ancho total de la calzada [m]
B_{via}	Ancho de un carril de la pista [m]
b_1	Distancia del centro de gravedad a la suspensión izquierda [m]
b_2	Distancia del centro de gravedad a la suspensión izquierda [m]
b_3	Distancia del centro de gravedad a la suspensión izquierda [m]
b_4	Distancia del centro de gravedad a la suspensión derecha [m]
b_5	Distancia del centro de gravedad al neumático izquierdo [m]
b_6	Distancia del centro de gravedad al neumático derecho [m]
C.B.F	Centro de balanceo frontal
$[\bar{C}]$	Matriz de amortiguamiento
c_{s1}	Constante de amortiguamiento del fuelle neumático izquierdo [N·s/m]
c_{s2}	Constante de amortiguamiento del fuelle neumático derecho [N·s/m]
c_{s3}	Constante de amortiguamiento del fuelle neumático izquierdo [N·s/m]

c_{s4}	Constante de amortiguamiento del fuelle neumático derecho $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$
c_{w1}	Constante de amortiguamiento vertical del neumático izquierdo $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$
c_{w2}	Constante de amortiguamiento vertical del neumático derecho $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$
c_{w3}	Constante de amortiguamiento vertical del neumático izquierdo $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$
c_{w4}	Constante de amortiguamiento vertical del neumático derecho $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$
c_{wl1}	Constante de amortiguamiento lateral del neumático izquierdo $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$
c_{wl2}	Constante de amortiguamiento lateral del neumático derecho $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$
c_{wl3}	Constante de amortiguamiento lateral del neumático izquierdo $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$
c_{wl4}	Constante de amortiguamiento lateral del neumático derecho $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$
E	Módulo de elasticidad del material de la barra $[\text{N}/\text{m}^2]$
E_b	Módulo de elasticidad del brazo del torsión en $[\text{N}/\text{mm}^2]$.
$[\bar{F}]$	Matriz excitatriz
F_1	Fuerza originada por la masa suspendida derecha en $[\text{N}]$.
F_2	Fuerza originada por la masa suspendida izquierda en $[\text{N}]$.
F_{BT}	Fuerza ejercida por la barra de torsión $[\text{N}]$
F_{Ph}	Fuerza horizontal ejercida en el extremo A de la barra Panhard $[\text{N}]$
F_{Pv}	Fuerza vertical ejercida en el extremo A de la barra Panhard $[\text{N}]$

F_i	Fuerza de inercia o centrífuga [N]
F_{f1}, F_{f2}	Fricción lateral [N]
$F_{f1,max}$	Fuerza de fricción máxima de la rueda izquierda [N]
$F_{f2,max}$	Fuerza de fricción máxima de la rueda derecha [N]
F_{s1}	Fuerza ejercida por el fuelle neumático izquierdo [N]
F_{s2}	Fuerza ejercida por el fuelle neumático derecho [N]
F_{s3}	Fuerza ejercida por el fuelle neumático izquierdo [N]
F_{s4}	Fuerza ejercida por el fuelle neumático derecho [N]
F_{d1}	Fuerza de amortiguamiento ejercida por el fuelle neumático izquierdo [N]
F_{d2}	Fuerza de amortiguamiento ejercida por el fuelle neumático derecho [N]
F_{d3}	Fuerza de amortiguamiento ejercida por el fuelle neumático izquierdo [N]
F_{d4}	Fuerza de amortiguamiento ejercida por el fuelle neumático derecho [N]
F_{hw1}	Fuerza ejercida por la rigidez lateral del neumático izquierdo [N]
F_{hw2}	Fuerza ejercida por la rigidez lateral del neumático derecho [N]
F_{hwd1}	Fuerza de amortiguamiento lateral ejercida por el neumático izquierdo [N]
F_{hwd2}	Fuerza de amortiguamiento lateral ejercida por el neumático derecho [N]
F_{wl}	Fuerza ejercida neumático izquierdo [N]

F_{w2}	Fuerza ejercida neumático derecho [N]
F_{wd1}	Fuerza de amortiguamiento ejercida neumático izquierdo [N].
F_{wd2}	Fuerza de amortiguamiento ejercida neumático derecho [N]
G	Módulo elástico al corte de la barra en [N/mm ²].
g	Aceleración de la gravedad [m/s ²]
h_0	Distancia normal a la calzada entre extremos de la barra [m]
h_{B1}	Altura del “roll center” respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
h_{B2}	Altura del “roll center” respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
h_{E1}	Altura de equilibrio estático de la masa no suspendida para un ángulo de peralte aleatorio respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
h_{E2}	Altura de equilibrio estático de la masa no suspendida para un ángulo de peralte aleatorio respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
h_G	Altura del centro de gravedad de la cabina respecto a la vía [m]
h_{G1}	Altura de equilibrio estático de la masa suspendida para un ángulo de peralte aleatorio respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
h_{G2}	Altura de equilibrio estático de la masa suspendida para un ángulo de peralte aleatorio respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
h_s	Altura del centro de gravedad en la cabina [m]
I_1	Inercia de la masa suspendida respecto al centro de gravedad [kg·m ²]

I_4	Inercia de la masa suspendida posterior respecto al centro de gravedad [kg · m ²]
I_5	Inercia de la masa no suspendida posterior respecto al centro de gravedad [kg · m ²]
I_b	Momento de inercia del brazo de torsión en [m ⁴].
J_0	Momento de inercia polar de la barra en [m ⁴].
$[\bar{K}]$	Matriz de rigidez
k_E	Constante de rigidez torsional de la estructura en [N · mm/ rad]
k_P	Rigidez de la barra Panhard [N/m]
k_{s1}	Constante de rigidez instantánea del fuelle neumático izquierdo [N/m]
k_{s2}	Constante de rigidez instantánea del fuelle neumático derecho [N/m]
k_{s3}	Constante de rigidez instantánea del fuelle neumático izquierdo [N/m]
k_{s4}	Constante de rigidez instantánea del fuelle neumático derecho [N/m]
k_{TB}	Constante de rigidez de la barra de torsión en [N/m]
k_{w1}	Constante de rigidez vertical del neumático izquierdo [N/m]
k_{w2}	Constante de rigidez vertical del neumático derecho [N/m]
k_{w3}	Constante de rigidez vertical del neumático izquierdo [N/m]
k_{w4}	Constante de rigidez vertical del neumático derecho [N/m]
k_{w11}	Constante de rigidez lateral del neumático izquierdo [N/m]
k_{w12}	Constante de rigidez lateral del neumático derecho [N/m]

k_{wl3}	Constante de rigidez lateral del neumático izquierdo [N/m]
k_{wl4}	Constante de rigidez lateral del neumático derecho [N/m]
ℓ_p	Longitud inicial de la barra Panhard [m]
$[\bar{M}]$	Matriz de inercias
m_T	Masa total [kg]
m_1	Masa de la cabina del vehículo (Masa suspendida) [kg]
m_2	Masa de la dirección izquierda (Masa no suspendida) [kg]
m_3	Masa de la dirección derecha (Masa no suspendida) [kg]
m_4	Masa de la cabina posterior del vehículo (Masa suspendida) [kg]
m_5	Masa del eje posterior (Masa no suspendida) [kg]
N_1, N_2	Fuerzas normales entre las ruedas y la vía [N].
n_{carriles}	Número de carriles de la pista
R	Resultante de la fuerza de inercia y el peso del vehículo [N]
R_T	Componente transversal de la resultante [N]
R_N	Componente normal de la resultante [N]
s	Longitud de arco recorrido.
s_b	Longitud total de la clotoide
s_{b_min}	Longitud mínima de la clotoide [m]
T_{Est}	Torque originado por la estructura del vehículo en [N·m]
$[u]$	Vector de desplazamientos
$[i]$	Vector de velocidades
$[ii]$	Vector de aceleraciones

v	Velocidad del vehículo respecto a tierra [m/s]
v_D	Velocidad de diseño de la curva [m/s]
w_{\max}	Sobreaceleración máxima permitida en la clotoide [m/s ³]
y_1	Desplazamiento horizontal respecto a su posición de equilibrio estático [m]
y_4	Desplazamiento horizontal respecto a su posición de equilibrio estático [m]
z_1	Desplazamiento vertical de la masa suspendida respecto a su posición de equilibrio estático [m]
z_2	Desplazamiento vertical de la masa no suspendida izquierda respecto a su posición de equilibrio estático [m]
z_3	Desplazamiento vertical de la masa suspendida respecto a su posición de equilibrio estático [m]
z_4	Desplazamiento vertical de la masa suspendida respecto a su posición de equilibrio estático [m]
z_5	Desplazamiento vertical de la masa no suspendida respecto a su posición de equilibrio estático [m]
z	Altura del peralte de la vía [m]
z_b	Peralte final en la curva de radio constante [mm]
α	Ángulo de peralte [rad]
α_1	Ángulo de peralte instantáneo de la sección frontal [rad]
α_2	Ángulo de peralte instantáneo de la sección posterior [rad]
ϕ_1	Ángulo rotado por la sección frontal de la cabina en torno al eje longitudinal del vehículo [rad]

ϕ_4	Ángulo rotado por la sección posterior de la cabina en torno al eje longitudinal del vehículo [rad]
ϕ_5	Ángulo rotado por la masa no suspendida en torno al eje longitudinal del vehículo [rad]
φ_P	Ángulo de orientación de la barra Panhard respecto al plano de la calzada [m].
ρ	Radio de curvatura [m]
ρ_1	Radio de curvatura instantáneo de la sección frontal [m]
ρ_2	Radio de curvatura instantáneo de la sección posterior [m]
ρ_b	Radio de curvatura final en [m].
μ	Coefficiente de fricción estática entre la vía y el neumático.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo agradecer a mis Directores, D. Vicente Díaz López y D^a. Ester Olmeda Santamaría por sus invalorable enseñanzas y consejos, por su apoyo y paciencia y por su inagotable optimismo para la consecución de nuestros objetivos.

A los colegas del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Carlos III de Madrid. En particular a los colegas D^a Beatriz López Boada, D^a. María Jesús López Boada, D. José Luis San Román García, y D^a. Ana María Gómez Amador por sus valiosos consejos y apoyo.

A mis colegas y compañeros de trabajo del Departamento de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en particular al actual Jefe del Departamento, D. Juan Carlos Dextre, al actual Coordinador de la Sección de Ingeniería Mecánica, D. Luis Chirinos García, y a los colegas del Área de Diseño por su paciencia y apoyo.

A los colegas de la División de Máquinas de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid, en particular a D. Emilio Bautista Paz, D. José Luis Muñoz Sanz, D. Javier Echávarri Otero y D. Juan Manuel Muñoz Guijosa, por su apoyo invaluable durante el período de estudios que me condujo a la obtención del Diploma de Estudios Avanzados.

A D. Jorge Alencastre Miranda, colega y amigo del Área de Diseño de la Sección de Ingeniería Mecánica de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus innumerables y valiosos consejos y sugerencias vertidas a lo largo de la realización de este trabajo. Su experiencia y habilidad en la comprensión de la dinámica de los sistemas mecánicos ha resultado decisiva para llegar al final del trabajo.

A D. Enrique Carrillo Li, de la Sección de Ingeniería Mecánica de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su gran ayuda en el arduo trabajo computacional para la simulación del modelo dinámico del sistema analizado.

A mis alumnos de las especialidades de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica de la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

A mi madre y a mi familia, quienes con su amor de cada día me renuevan los ánimos para seguir alcanzando metas.

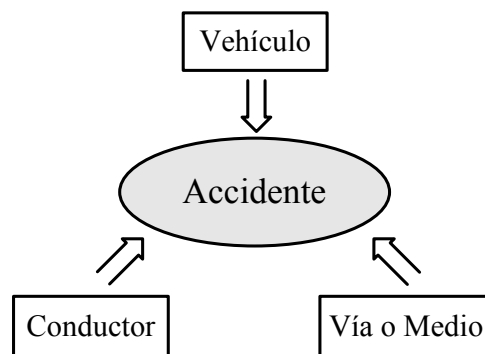
RESUMEN

En esta tesis doctoral se plantea la problemática en seguridad vial que se produce en la conducción de vehículos de transporte colectivo de viajeros cuando éstos describen una curva. La velocidad excesiva y otros factores afectan a un posible derrape o a un desafortunado vuelco, pudiéndose producir un accidente de circulación. El derrape o el vuelco suponen una posible salida de la vía y, en la mayoría de las ocasiones, aparecen numerosas víctimas.

En este trabajo de investigación se abordan modelos numéricos de simulación que permiten establecer, en primer lugar, y analizar posteriormente, aquellos parámetros intervinientes en la dinámica lateral de este tipo de vehículo.

Al ser parámetros de diseño del propio vehículo y/o de uso derivadas de la conducción del conductor, resultan fundamentales para mejorar la seguridad vial de este tipo de vehículos.

Este planteamiento resulta novedoso en esta materia ya que no se abordan hasta ahora la conjunción de dos de los tres grandes protagonistas en la seguridad vial: conductor, vehículo y medio.



Como última aportación se consideran en esta tesis doctoral parámetros de la vía (medio) cuando ésta cambia su curvatura. De esta manera se contemplan en este trabajo de forma simultánea estos tres agentes fundamentales.

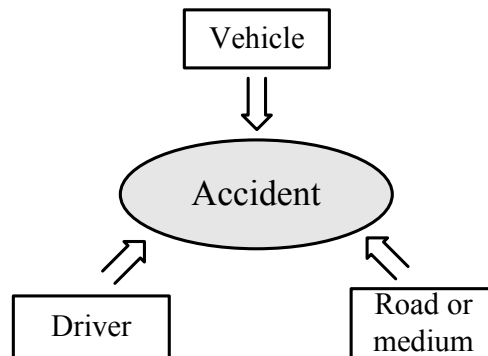
ABSTRACT

This doctoral thesis presents the problems in road safety that occurs in the driving of vehicles of collective transport of passengers when they describe a curve. Excessive speed and other factors affect a possible skidding or an unfortunate overturn, which can lead to a traffic accident. The skidding or rollover means a possible exit from the road and, in most cases, numerous victims appear.

In this work, numerical models of simulation are approached that allow to establish, firstly, and to analyze later, those parameters involved in the lateral dynamics of this type of vehicle.

Being parameters of design of the vehicle itself and/or use derived from the driving of the driver, they are fundamental to improve the road safety of this type of vehicles.

This approach is new in this matter since the conjunction of two of the three main protagonists in road safety: driver, vehicle and road are not tackled until now.



As a last contribution, parameters of the pathway or road (medium) are considered in this doctoral thesis when this changes his curvature. In this way, these three fundamental agents are simultaneously contemplated in this work.

CAPITULO 1 INTRODUCCIÓN

La operación de un vehículo se complica, y hasta deviene en peligrosa, dependiendo de su velocidad, cuando describe una trayectoria curva. Ello porque sobre cada parte del vehículo se presentarán fuerzas debidas a la componente lateral de la aceleración. Estas fuerzas actuantes, más grandes para mayores velocidades, intentan sacar al vehículo de su trayectoria curva. A dichas fuerzas laterales se opondrán las fuerzas de fricción entre los neumáticos del vehículo y la calzada, las cuales dependerán, en general, del comportamiento dinámico del vehículo. Asimismo, dependiendo de la geometría y dinámica del sistema, dichas fuerzas laterales también pueden ocasionar peligro de vuelco del vehículo.

Como punto de partida del análisis, si aumentamos la velocidad a lo largo de la trayectoria curva y sabiendo que esa fuerza de inercia lateral se producirá en cada parte del vehículo, vemos que si su magnitud aumenta y su influencia hace que la fuerza de fricción crezca de tal manera que se acerca al máximo valor de la fuerza de adherencia entre cualquiera de los neumáticos y la calzada, estaríamos ante la inminencia de un derrape o resbalamiento hacia fuera de la pista. Adicionalmente se producirá un efecto de vuelco o volteo, el cual originará problemas en la estabilidad del vehículo, pudiendo causar la pérdida del control del mismo y poniendo en riesgo la integridad física de los ocupantes del vehículo. Según esto, en dicha situación crítica en la cual se presenta la inminencia de derrape o de vuelco del vehículo, definiremos a la correspondiente velocidad como *velocidad crítica de derrape* o *velocidad crítica de vuelco*.

Los accidentes consecuentes a un derrape que haga que el vehículo salga de la carretera con posterior volcadura o que simplemente sufra volcadura por sobrepasar la velocidad crítica de vuelco, normalmente conllevan a la pérdida de vidas humanas. Este hecho obliga a nuestra sociedad, a través de sus ingenieros, a ayudar a encontrar soluciones técnicas al problema.

En el medio peruano las estadísticas de la Policía Nacional del Perú a través de su anuario correspondiente al año 2015 nos proporcionan datos muy importantes que serán reseñados a continuación para mostrar la gravedad del problema.

De la **Figura 1-1**, de los 95532 casos de accidentes de tránsito presentados, es clara la posición de Lima como el departamento con la mayor incidencia de accidentes de tránsito (53305 casos).

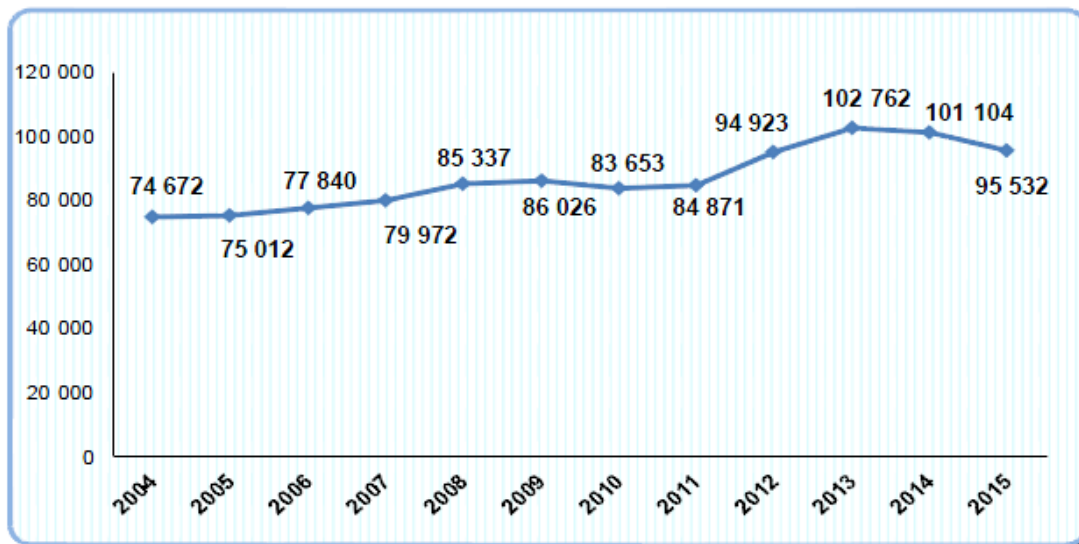


Figura 1-1 Tendencia de accidentes de tránsito en el Perú. Período 2004 – 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].

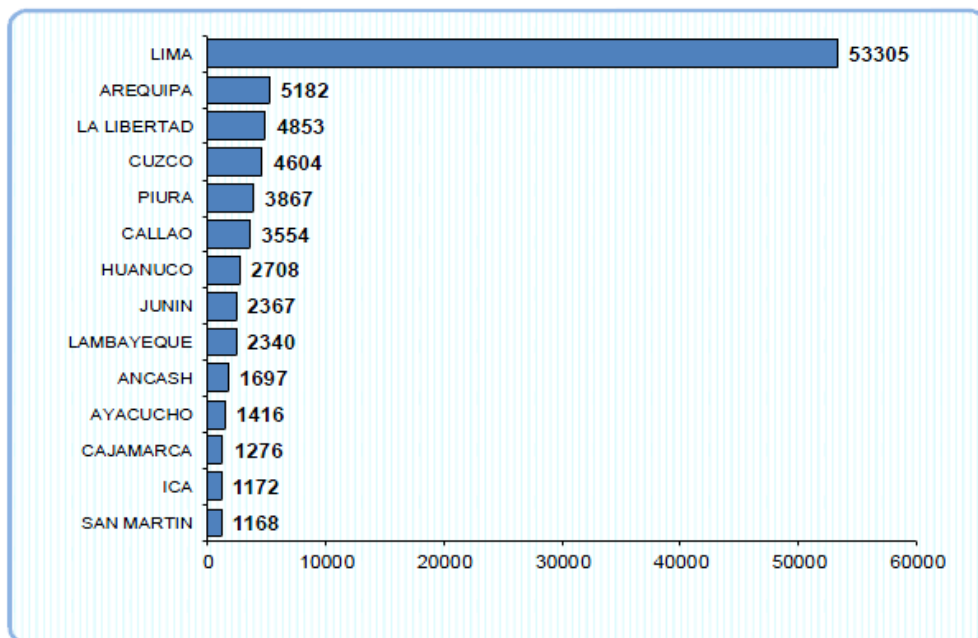


Figura 1-2 Departamentos del Perú con mayor incidencia de accidentes de tránsito en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].

En las siguientes figuras: **Figura 1-3**, **Figura 1-4** y **Figura 1-5**, se puede apreciar que los accidentes por despiste y posterior volcadura y por volcadura sin derrape previo constituyen más de tres mil cien casos.

DEPARTAMENTO	TOTAL	CLASE											
		CHOQUE	ATROPELLO	CHOQUE Y ATROPELLO	CAIDA DE PASAJERO	VOLCADURA	INCENDIO DE VEHICULOS	CHOQUE Y FUGA	ATROPELLO Y FUGA	DESPISTE Y VOLCADURA	COLISION	DESPISTE	OTROS
TOTAL	95 532	47 494	13 667	1 386	2 503	1 239	141	12 179	2 234	1 929	537	8 019	4 204
AMAZONAS	381	166	49	7	5	11	0	24	15	9	1	84	10
ANCASH	1 697	772	201	52	14	41	2	198	46	49	3	221	98
AYACUCHO	1 416	420	141	11	28	65	3	174	59	31	3	106	375
CAJAMARCA	1 276	666	209	9	21	33	0	127	23	18	0	146	24
CUZCO	4 604	2 364	940	49	92	82	0	351	100	168	24	261	173
HUANCAVELICA	249	85	32	0	2	11	0	9	4	60	1	36	9
HUANUCO	2 706	1 930	76	3	6	22	1	27	17	53	176	243	154
ICA	1 172	706	158	17	14	25	1	72	21	17	7	89	45
JUNÍN	2 367	973	492	18	75	62	6	202	53	134	4	300	48
LA LIBERTAD	4 853	2 385	739	120	133	51	3	584	135	30	51	483	139
LAMBAYEQUE	2 340	1 014	386	58	62	12	2	420	67	35	8	190	86
LIMA	53 305	27 137	7 509	613	1 638	548	88	7 770	1 161	789	119	3 652	2 281
CALLAO	3 554	1 678	533	76	154	29	3	453	80	40	6	325	177
LORETO	394	230	49	0	0	2	0	16	8	3	0	85	1
MADRE DE DIOS	488	266	67	0	8	3	1	15	4	5	4	110	5
MOQUEGUA	573	268	65	0	3	24	0	28	15	49	3	110	8
PASCO	95	30	10	6	0	5	0	3	2	16	1	21	1
PIURA	3 867	1 591	587	88	43	42	12	773	180	47	29	362	113
PUNO	922	355	120	20	8	26	0	130	25	81	16	124	17
SAN MARTÍN	1 168	559	113	9	5	13	0	94	25	6	1	302	41
TACNA	1 142	639	200	14	37	4	0	62	25	16	0	133	12
TUMBES	433	233	60	3	1	3	0	32	13	7	5	65	11
UCAYALI	815	326	97	49	6	13	5	145	31	24	2	111	6

Figura 1-3 Accidentes de tránsito por clase, según departamentos del Perú en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].

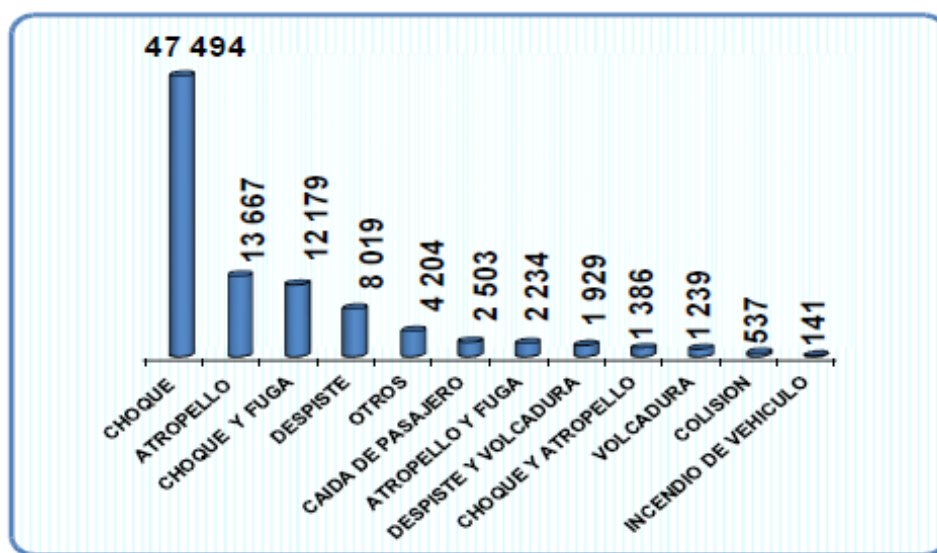


Figura 1-4 Accidentes de tránsito por clase en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].

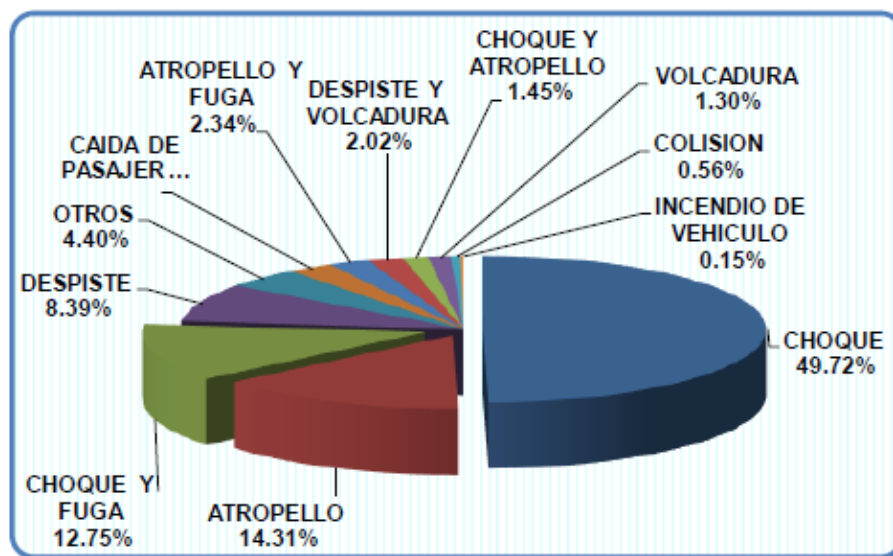


Figura 1-5 Distribución porcentual de accidentes de tránsito por clase en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].

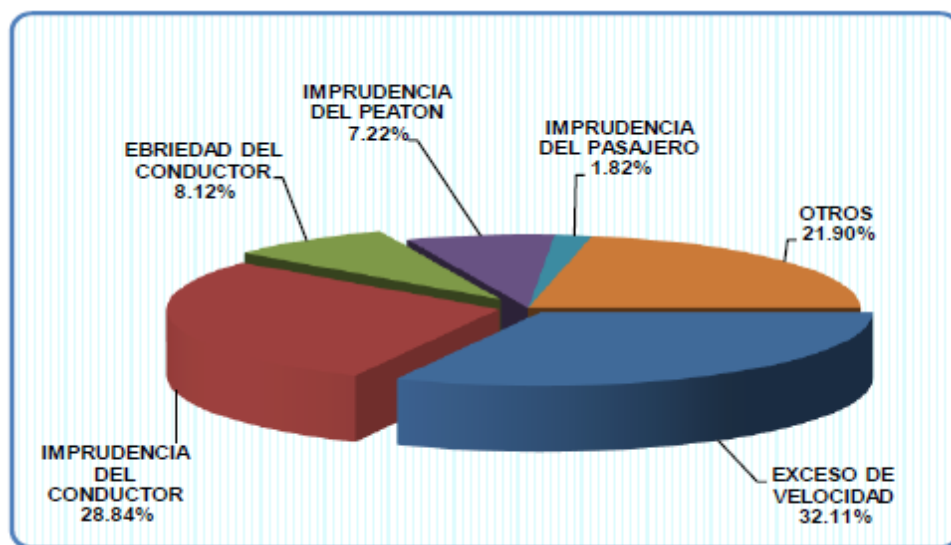


Figura 1-6 Distribución porcentual de causas de accidentes de tránsito en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].

Un dato interesante relacionado al presente trabajo se ve en la **Figura 1-6** y es que el 28.84% de accidentes es causado por imprudencia del conductor y 32.11% por exceso de velocidad. Ello nos obliga a los ingenieros a pensar en soluciones que asistan al conductor al maniobrar el vehículo al momento mismo de la marcha.

En la **Figura 1-7** y en la **Figura 1-8** se puede apreciar el fuerte involucramiento que tienen los vehículos de transporte masivo de pasajeros (vehículos mayores). También se puede observar que la pérdida de estabilidad y control en el vehículo, más si los viajes son con pasajeros, involucran cifras apreciables en los accidentes de tránsito.

DEPARTAMENTO	TOTAL	TIPO DE VEHICULO																		
		VEHICULO MAYOR	AUTOMOVIL	STATION WAGON	CAMIONETA PICK UP	CAMIONETA RURAL	CAMIONETA PANEL	OMNIBUS	CAMION	REMOLCADOR	REMOLQUE Y SEMI	VEHICULO NO IDENTIFICADO	VEHICULO MENOR	MOTO	MOTOCAR	TRICICLO	FURGONETA	BICICLETA	VEHICULO IDENTIFICADO	OTROS
TOTAL	135322	108223	15694	14992	9877	9431	2705	5250	4371	1333	968	1591	28101	12425	11034	471	483	691	1391	1596
AMAZONAS	531	274	96	36	53	21	3	10	43	5	3	2	257	163	88	0	1	2	0	6
ANCASH	2315	1793	920	291	189	143	28	55	80	22	39	26	522	180	232	9	6	15	14	66
APURIMAC	556	392	106	122	44	28	12	6	50	14	2	8	164	92	39	2	1	1	10	35
AREQUIPA	7555	6656	3601	278	789	521	175	480	342	219	108	143	899	565	447	38	31	64	22	33
AYACUCHO	1797	1361	671	31	325	118	17	67	80	30	11	9	436	190	171	1	7	5	1	61
CAJAMARCA	1949	1127	330	104	165	216	88	47	131	32	10	4	822	365	333	99	0	12	0	13
CUSCO	6659	5676	2813	710	727	534	41	408	282	18	18	125	983	546	355	9	26	17	8	23
HUANCAVELICA	292	264	112	20	62	30	2	11	18	4	3	2	28	19	4	1	0	1	0	3
HUANUCO	4581	3682	1874	799	176	484	49	112	153	13	17	3	899	364	524	0	0	0	1	31
ICA	1925	1307	756	108	118	128	7	55	85	30	8	12	618	279	251	6	3	10	2	67
JUNIN	3181	2388	1090	302	287	245	3	101	155	77	37	91	793	413	319	5	2	8	10	36
LALIBERTAD	6704	5093	2148	973	640	504	88	212	261	55	66	146	1611	1085	327	9	3	46	80	60
LAMBAYEQUE	3859	2070	1129	35	362	286	119	22	76	19	15	7	1789	493	820	125	55	43	45	208
LIMA	75177	64734	36132	9808	4634	4947	1808	3888	1941	441	366	769	10441	3698	4098	71	49	301	1145	881
CALLAO	4948	4113	1961	359	230	401	91	362	210	260	173	66	835	386	299	15	12	56	17	51
LORETO	600	44	26	1	1	4	0	6	6	0	0	0	556	325	223	0	6	0	0	2
MADRE DE DIOS	710	159	71	23	14	16	2	3	12	6	4	5	551	465	80	2	0	2	2	0
MOQUEGUA	745	677	305	58	134	68	4	23	57	11	8	8	68	47	9	0	0	3	2	7
PASCO	118	92	24	6	26	14	2	3	13	0	2	2	26	14	11	0	0	0	1	0
PIURA	5745	2801	994	471	408	283	118	191	173	29	71	61	2944	1114	354	42	233	64	19	18
PUNO	1201	966	249	100	185	197	12	62	69	30	5	57	235	119	62	18	0	18	0	18
SAN MARTIN	1742	375	147	17	61	69	6	12	39	7	9	9	1367	931	400	0	12	3	0	1
TACHA	1709	1519	848	283	149	69	15	92	36	2	3	22	191	131	38	1	0	7	8	5
TUMBES	676	349	154	39	90	55	6	12	28	2	1	4	327	107	203	1	8	4	3	1
UCAYALI	1047	309	127	13	46	48	9	10	30	7	9	8	738	341	327	17	28	9	7	9

Figura 1-7 Vehículos participantes en accidentes de tránsito, por tipo y según departamento, año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].

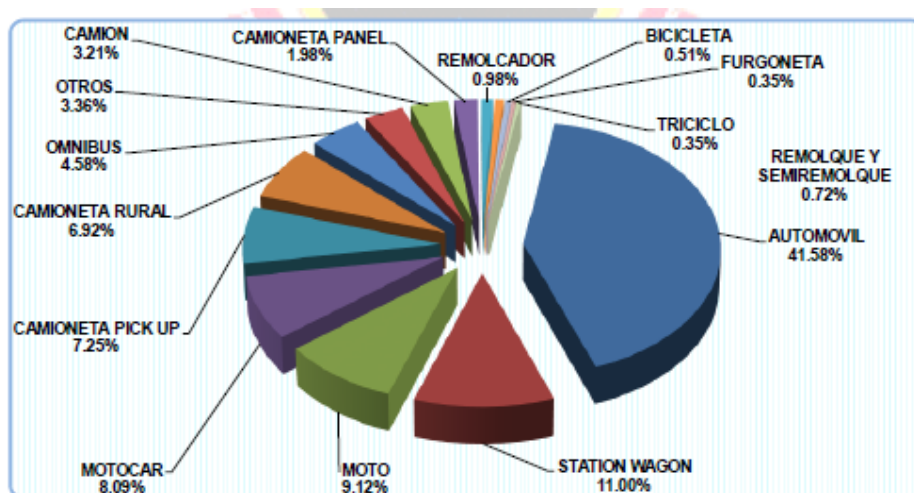


Figura 1-8 Distribución porcentual de tipos de vehículos involucrados en accidentes de tránsito en el año 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].

A continuación podemos ver la cantidad de víctimas fatales en accidentes de tránsito en el Perú (**Figura 1-9**).

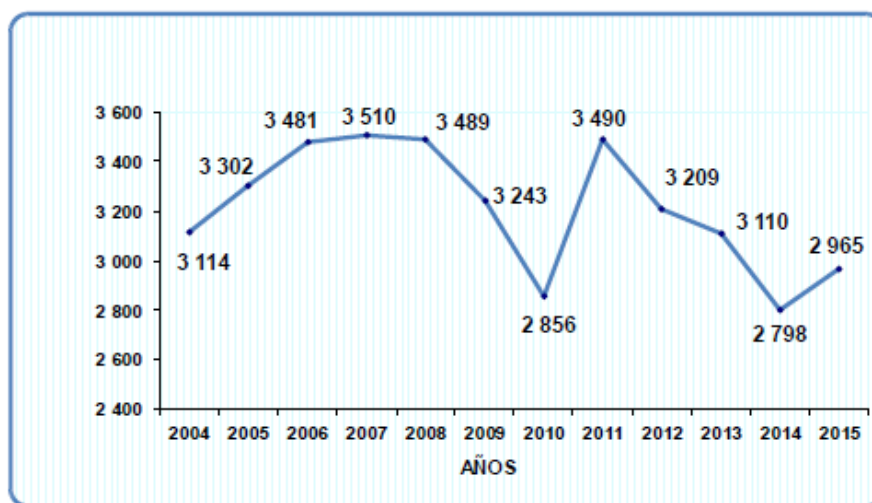


Figura 1-9 Tendencia de víctimas fatales en accidentes de tránsito en el período 2004 - 2015. [Anuario Estadístico PNP (2015)].

De manera similar se pueden mostrar estadísticas para España, tomando como referencia los gráficos presentados en el [Anuario Estadístico de Accidentes (2015)].

TIPO DE ACCIDENTE	VÍAS INTERURBANAS				
	Accidentes con víctimas			Víctimas	
	Total	Mortales a 30 días	Fallecidos	Heridos hospitalizados	Heridos no hospitalizados
Frontal	1.445	148	195	545	2.406
Fronto-lateral	4.074	113	129	558	6.174
Lateral	2.293	11	11	158	3.193
Por alcance	6.554	82	89	308	10.551
Múltiple o en caravana	2.621	38	47	210	5.793
Colisión contra obstáculo o elemento de la vía	531	9	9	33	696
Atropello a personas	679	97	97	191	481
Atropello a animales	320	5	5	26	381
Vuelco	972	12	12	77	1.023
Calda	992	18	18	152	949
Sólo salida de la vía	0	0	0	0	0
Salida de la vía por la izquierda con colisión	1.769	92	98	289	2.206
Salida de la vía por la izquierda con despeñamiento	219	21	21	61	246
Salida de la vía por la izquierda con vuelco	1.311	56	60	209	1.573
Salida de la vía por la izquierda, otro tipo	881	25	26	108	1.019
Salida de la vía por la derecha con colisión	2.274	120	128	393	2.658
Salida de la vía por la derecha con despeñamiento	338	25	28	94	375
Salida de la vía por la derecha con vuelco	2.022	67	68	273	2.434
Salida de la vía por la derecha otro tipo	3.438	31	35	212	4.195
Otro tipo de accidente	1.825	161	172	847	1.683
TOTAL	34.558	1.131	1.248	4.744	48.036

Figura 1-10 Accidentes en vías interurbanas con víctimas, en función del tipo de accidente. España. [Anuario Estadístico de Accidentes (2015)].

En el cuadro mostrado en la **Figura 1-10** se aprecia la importancia que tienen los accidentes en los que se produce salida de la vía con posterior vuelco, colisión o despeñamiento. En la **Figura 1-11** se muestra la incidencia de accidentes en autobuses.

CLASES DE USUARIOS	Num. de ocupantes en los vehículos	NUMERO DE VICTIMAS							
		TOTAL				CONDUCTORES			
		Total	Fallecidos	Heridos hospitalizados	Heridos no hospitalizados	Total	Fallecidos	Heridos hospitalizados	Heridos no hospitalizados
Pedaton	884	839	120	236	483	0	0	0	0
Bicicleta	2.262	2.173	48	322	1.803	2.168	48	322	1.798
Ciclomotor	1.183	1.118	28	198	892	969	27	177	765
Motocicleta	6.943	6.570	247	1.180	5.143	5.860	238	1.063	4.559
Turismo de SP hasta 9 plazas	259	121	3	11	107	59	0	3	56
Turismo sin remolque	64.671	36.984	625	2.221	34.138	22.110	431	1.408	20.271
Turismo con remolque	73	38	4	6	28	18	1	4	13
Maquinaria obras y agrícola y tractores agrícolas	358	145	20	26	99	123	19	20	84
Furgoneta	7.059	3.615	76	278	3.261	2.125	50	168	1.907
Camión <=>3.500 kg sin remolque	1.195	525	8	32	485	364	7	18	339
Camión <=>3.500 kg con remolque	5	1	0	0	1	1	0	0	1
Camión >3.500 kg sin remolque	1.716	610	27	81	502	495	25	67	403
Camión >3.500 kg con remolque	48	13	0	2	11	12	0	2	10
Tractocamión (cabeza tractora)	305	84	1	11	72	77	1	10	66
Vehículo articulado	1.482	539	30	81	428	483	28	73	382
Autobús (no escolar)	1.289	283	2	3	278	35	1	1	33
Autobús escolar	22	3	0	0	3	1	0	0	1
Cuadriciclo	162	140	6	19	115	102	5	15	82
Tren/metro/tranvía	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Otro vehículo	247	160	3	33	124	116	3	28	87
Sin especificar	223	67	0	4	63	42	0	4	38
TOTAL	90.386	54.028	1.248	4.744	48.036	35.162	884	3.383	30.895

Figura 1-11 Ocupantes y víctimas según medio de desplazamiento en vías interurbanas de España. [Anuario Estadístico de Accidentes (2015)].

Características de la vía	Accidentes con víctimas	Accidentes mortales a 30 días	Fallecidos	Heridos hospitalizados	Heridos no hospitalizados
INTERSECCIÓN					
En T o Y	3.187	83	89	445	4.644
En X o +	1.087	45	46	183	1.689
Giratoria	3.149	36	39	213	4.141
Otro tipo	1.438	32	35	143	2.116
Se desconoce	0	0	0	0	0
Total	8.861	196	209	984	12.590
FUERA DE INTERSECCIÓN					
Recta	17.596	522	581	2.034	25.374
Curva	8.001	412	457	1.719	9.949
Se desconoce	98	1	1	7	123
Total	25.697	935	1.039	3.760	35.446
TOTAL	34.558	1.131	1.248	4.744	48.036

Figura 1-12 Accidentes con víctimas según las características de la vía, en vías interurbanas de España. [Anuario Estadístico de Accidentes (2015)].

En la **Figura 1-12** y en la **Figura 1-13** se puede apreciar la importante cantidad de accidentes que se producen en curvas.

Características de la vía	Accidentes con víctimas	Accidentes mortales a 30 días	Fallecidos	Heridos hospitalizados	Heridos no hospitalizados
INTERSECCIÓN					
En T o Y	8.075	53	56	754	9.574
En X o +	16.725	57	61	1.004	21.667
Gladiatoria	5.433	21	21	318	6.628
Otro tipo	1.337	10	10	60	1.675
Se desconoce	0	0	0	0	0
Total	31.570	141	148	2.136	39.544
FUERA DE INTERSECCIÓN					
Recta	14.409	109	112	1.094	16.963
Curva	1.006	11	12	123	1.132
Se desconoce	16.213	167	169	1.398	19.265
Total	31.628	287	293	2.615	37.380
TOTAL	63.198	428	441	4.751	76.924

Figura 1-13 Accidentes con víctimas según las características de la vía, en vías urbanas de España. [Anuario Estadístico de Accidentes (2015)].

Estos datos junto a las conclusiones de los estudios de accidentes realizados por [Aparicio (1992)] y unidos al análisis para el establecimiento de sistemas de seguridad automotriz [Aparicio (2012)] realizados también en España, muestran que los tipos de accidentes con apreciable número de víctimas son los vuelcos, los choques frontales con otros vehículos en mayor cantidad con camiones, y los despistes. Todos estos detalles han originado que las autoridades de los sectores correspondientes busquen en el estudio y la investigación, por un lado, y en la reglamentación, por el otro, posibilidades de solución al problema.

Es evidente entonces, para nosotros los ingenieros, lo necesaria que es nuestra participación en lo que concierne a buscar soluciones técnicas a través del estudio y de la investigación en torno al comportamiento dinámico de los vehículos. Para ello existen hoy en día numerosas herramientas, la gran mayoría de ellas, si no todas, apoyadas por los métodos de diseño y análisis que utilizan ordenadores. Sin embargo de ninguna manera quedaremos exentos a la experimentación.

La experimentación que requieren los prototipos físicos para su optimización y puesta a punto ha sido desde siempre muy costosa, requiere de mucho tiempo para la

implementación y ejecución de las pruebas y muchas veces está acompañada de riesgos, por lo que la implementación de los mencionados métodos de diseño y análisis asistidos por computadora pueden reemplazar en gran medida a los experimentos reales o, por lo menos, disminuir en gran medida el número de ellos hasta lograr el buscado diseño óptimo. Todo ello reducirá los costos finales del producto y al mismo tiempo, algo que es sumamente importante en estos tiempos de alta competitividad en el mercado, reducirá ostensiblemente los tiempos de puesta en mercado de los nuevos productos.

Un rol importante en la interpretación de un sistema mecánico, como lo es un vehículo de cualquier tipo, lo cumple la investigación de su comportamiento dinámico, es decir, el estudio de las relaciones entre fuerzas que actúan sobre él y los movimientos que realiza. La base para el estudio teórico del comportamiento dinámico de un sistema lo brinda un modelo físicamente equivalente al sistema real [Popp (2010)]. Este modelo, denominado virtual, debe ser lo más detallado posible de tal manera que debe contener todas las características físicas más importantes del sistema real. Sin embargo se debe tratar que las expresiones matemáticas que representan a dicho modelo virtual sean lo más simples que se pueda, pues luego un sistema computacional deberá calcular soluciones rápidas y si es posible en tiempo real, esto último imprescindible para los actualmente denominados sistemas inteligentes, los cuales ayudan al conductor en el manejo seguro de los vehículos, actuando en tiempo real cuando alguna maniobra se acerca a un cierto umbral de peligro predefinido para el sistema. Por ello, muchos de los autores de libros sobre el tema de modelado y simulación de sistemas mecánicos hablan de uno de los preceptos más importantes en la modelación de sistemas mecánicos: *“tan complejo como se necesite, tan simple como sea posible”* [Woernle (2011)].

En la presente tesis se modelará un autobús de pasajeros para realizar el análisis de su comportamiento dinámico cuando entra a una curva peraltada. Los resultados de las simulaciones que se podrán hacer con el modelo serán luego comparadas con datos obtenidos experimentalmente y finalmente procederemos a la validación del modelo virtual.

CAPITULO 2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Generalidades acerca de los autobuses

En lo referido a la investigación, se realiza el análisis teórico de la actividad del vehículo, a fin de establecer algunas relaciones matemáticas que definan un mapa de variables con las correspondientes magnitudes que definan ese *límite máximo de operación*, mediante la *velocidad crítica de derrape* y/o la *velocidad crítica de vuelco* [García (2008)]; y en cuanto a la reglamentación algunos países han establecido ensayos en carretera y en laboratorios.

Un primer ensayo consiste en ubicar el vehículo sobre una plataforma que puede inclinarse alrededor de uno de sus lados hasta provocar el inicio del vuelco, bajo criterios ya establecidos y que también puede recoger datos acerca de daños de la carrocería, respecto a su posición final frente a los pasajeros y que deben cumplir ciertas condiciones de supervivencia establecidas en su reglamentación. Ejemplos de este ensayo y su evolución se presentan en la **Figura 2-1** y en la **Figura 2-2**.



Figura 2-1 Pruebas de inclinación de autobuses: foto histórica de una prueba con el famoso autobús urbano de Londres.

La fotografía del bus antiguo mostrada en la **Figura 2-1** ha sido tomada del libro “Memories of a London and UK Runner: The History of the London bus” y representa una de las pruebas de vuelco que se realizaban en el año 1933. Para ser declarados aptos para el servicio, estos vehículos debían alcanzar una inclinación lateral de 28 grados sexagesimales como mínimo. [Pérez (2016)].



Figura 2-2 Pruebas de inclinación de autobuses: ensayo a un bus moderno.

La fotografía mostrada en la **Figura 2-2** fue tomada del artículo “Ensayo de estabilidad para micros de doble piso” publicada en Saber Cómo N° 77 de junio del 2009, Secretaría de Transporte de la Nación Argentina.

El ensayo se realiza con carga completa, con barriles con agua que simulan el peso de los pasajeros, y en condición de marcha, inclinando lentamente la plataforma hasta que alcanza los 28 grados sexagesimales. Durante el desarrollo de la prueba sólo los neumáticos están en contacto con la plataforma. Es de precisar que los autobuses de doble piso datan de los años 80 y para el 2009 conformaban el 90% de la flota de más de 4000 autobuses de larga distancia que circulaban por Argentina.

Un segundo ensayo, que se aplicará en esta tesis, consiste en realizar pruebas en curvas (peralte y radio de curvatura conocidos) y tramos rectos (longitud y velocidad máxima también conocidos), para estudiar el comportamiento dinámico del vehículo.

2.2 Modelado y simulación de sistemas dinámicos

2.2.1 Generalidades sobre modelado y simulación

El diccionario inglés de Oxford define modelo como "*Una descripción simplificada (a menudo matemática) de un sistema para ayudar a cálculos y predicciones*". [Gosh (2015)].

El diccionario alemán Brockhaus, referido a Ciencia y Tecnología, define modelo como "una representación que sólo expresa las características importantes del sistema real, para obtener a través de esta simplificación un modelo adecuado y manejable para ser luego estudiado matemática o experimentalmente."

Los modelos son representaciones simplificadas de sistemas reales destinados a ayudar a comprender su comportamiento cuando estén en condiciones de operación real. Los modelos pueden ser reales o virtuales. En el primer caso se puede citar, por ejemplo, el caso del modelo a escala de un cierto dispositivo mecánico, el cual nos puede proporcionar valiosa información antes de construir dicho dispositivo a escala natural. Indudablemente ello nos ahorrará tiempo y dinero hasta tener el dispositivo final. En el segundo caso, el de los modelos virtuales, éstos se han constituido en las últimas décadas, gracias al continuo avance en la potencia y capacidades de tratamiento de datos de los computadores actuales, en herramientas imprescindibles para el diseño y optimización de nuevos productos [Popp (2010)].

La simulación es la operación de un modelo, que normalmente denominaremos como virtual, que permite observar el comportamiento del sistema modelado bajo condiciones normales de operación. Es más, muchas veces se presenta el caso en que se puede simular un modelo en condiciones que normalmente serían difíciles o peligrosas de crear en el mundo real y así predecir su comportamiento a lo largo de un cierto periodo de tiempo. También se podrían presentar casos más extremos en los que las escalas de tiempo previstas para la observación y el estudio del sistema son demasiado cortas o demasiado largas, lo cual haría muy difícil, o a veces prácticamente imposible, su estudio con un sistema real.

Así pues, hoy en día los ingenieros utilizamos muy a menudo modelos para describir algunos aspectos seleccionados de un sistema real o de un sistema que recién se diseñará

o construirá. Estos modelos se utilizan para simular su comportamiento para una mejor comprensión, diseño, implementación y mejoras de esos sistemas.

El modelado y la simulación permiten el estudio de sistemas existentes, la construcción de nuevos sistemas, la prueba y la optimización de ellos. Diseñar, implementar y usar modelos ofrece el beneficio adicional de proporcionar una mayor apreciación y comprensión de las interacciones entre sistemas y cómo los subsistemas funcionan dentro de un sistema más grande.

Los modelos se utilizan ahora para la enseñanza y la investigación en muchas disciplinas, que van desde la sociología hasta la previsión meteorológica. Los modelos económicos se utilizan para inferir las propiedades del estado actual de los diversos aspectos de las economías complejas. En la ingeniería se utilizan para diseñar, construir, probar y optimizar los sistemas.

Entre las numerosas ventajas de realizar un riguroso proceso de modelado y simulación tenemos:

- Posibilidad de prueba del funcionamiento de un sistema antes de que se construya.
- Posibilidad de repetir las pruebas se pueden repetir cuantas veces sea necesario sin que ello signifique mayores gastos de tiempo y dinero.
- Mejora y optimización del rendimiento de un sistema existente.
- Aprendizaje y/o mejor comprensión de la ciencia que rodea al sistema. Ello permitirá a su vez mejorar el propio modelo a la luz de los resultados de las simulaciones.
- Capacitación para la operación o utilización un sistema.
- Mejora del control de un sistema antes de que sea construido.
- Comprobación y reducción de las posibilidades de consecuencias no deseadas debido a operaciones indebidas del sistema o debido a comportamientos no previstos de algunos de los subsistemas que integran el modelo.
- Una mejor comprensión de las interacciones entre varios subsistemas pertenecientes al sistema principal.

No está de más recordar que tan sólo con el modelado y las debidas simulaciones de éste no llegaremos al producto técnico óptimo que estamos desarrollando. Siempre será necesario, sobre todo para productos que saldrán al mercado, la construcción de prototipos sobre los cuales se realice la etapa final del diseño y optimización. Claro que gracias a la utilización de un modelo virtual y las correspondientes simulaciones, la fase de estudio del prototipo físico se reducirá considerablemente consiguiendo con ello un significativo ahorro de costes y tiempo de diseño.

2.2.2 Modelado y simulación de sistemas técnicos

En la norma alemana VDI 3633 se define la simulación de un sistema físico de la siguiente manera: *“La simulación de un sistema físico real es su emulación en un nuevo sistema que contenga sus características dinámicas en el que se puedan practicar experimentos con el fin de obtener información que se pueda transferir a la realidad”*. [Scherf (2010)].

Como se ha expresado en el anterior acápite dedicado al modelado y simulación en general, con la ayuda de la simulación se puede realizar muy rápidamente la verificación del funcionamiento de un sistema o de parte de él. Normalmente realizar una simulación con un modelo es mucho más rápido que realizar un experimento y por lo tanto se puede reducir el tiempo y costo de un proyecto. Adicionalmente, a través de la animación de una simulación mediante el computador, se puede tener una cierta visibilidad virtual del sistema que ayuda a entenderlo y a verificar y validar los procesos que ocurren en el modelo real. También se puede aseverar que la simulación en el computador está completamente exenta de peligros, lo cual nos permitirá simular choques o colisiones entre vehículos o un choque entre un vehículo y un muro, el vuelco de un vehículos, etc.

Claro que antes de que podamos simular un proceso técnico tendremos que realizar su modelado. Es decir, el sistema real se debe transferir a un modelo virtual de simulación el cual normalmente en este caso estará representado por ecuaciones matemáticas, las cuales serán ecuaciones diferenciales si el proceso que estamos analizando se distiende en el tiempo. Como veremos más adelante, dicho proceso de modelado se puede llevar a cabo tanto de manera teórica como experimental.

Para el modelado teórico o axiomático de sistema dinámicos, se puede echar mano a leyes físicas conocidas como por ejemplo, las leyes de Newton, la ley de la conservación de la energía, el principio del impulso y de la cantidad de movimiento, el principio de D'Alembert, los principios de la mecánica de Lagrange o de Hamilton, etc.

Los resultados de los modelos son normalmente ecuaciones diferenciales aunque también curvas o mapas que describen el sistema con una cierta precisión. Aquí es necesario recalcar que cuanto mayor sea la precisión del modelado, mayor será la precisión de los resultados. Sin embargo dicha precisión de modelado debe ser mantenida dentro de ciertos límites pues si el modelo resultante es muy complicado entonces su descripción matemática será también muy complicada y se necesitarán herramientas computacionales complicadas y largos tiempos para su solución, lo cual disminuirá sensiblemente las ventajas propias de la simulación y la encarecerá. Por ello se recomienda siempre realizar el modelo haciendo uso de simplificaciones y tomando decisiones conducentes a obtener un modelo suficientemente sencillo pero que contenga la mayor parte de las principales características del modelo real.

Algunas de esas simplificaciones recomendadas son:

- Utilizar sistemas con parámetros concentrados en lugar de sistemas con parámetros distribuidos. Por ejemplo, usar, en lo posible, partículas en lugar de cuerpos de masa distribuida. Con esta simplificación, en lugar de obtener ecuaciones diferenciales parciales se puede obtener ecuaciones parciales ordinarias.
- En la medida de lo posible utilizar cuerpos rígidos en lugar de cuerpos deformables.
- No considerar la masa de elementos como resorte elásticos lineales o no lineales, amortiguadores actuadores hidráulicos o neumáticos y en general para los elementos de unión que se usan al interior del sistema.
- Evitar, en lo posible, asignar masas a ciertos elementos en los que su masa es despreciable al lado de la masa de otros cuerpos que participan en el sistema.

Si ahora tenemos el modelo representado por ecuaciones diferenciales y por sus líneas características, para la solución de aquella todavía se requieren los parámetros del

sistema. La determinación de los parámetros del sistema es lo que se conoce como identificación del sistema.

Luego de algunas simulaciones podremos comprobar si el modelo virtual está suficientemente acorde con la realidad.

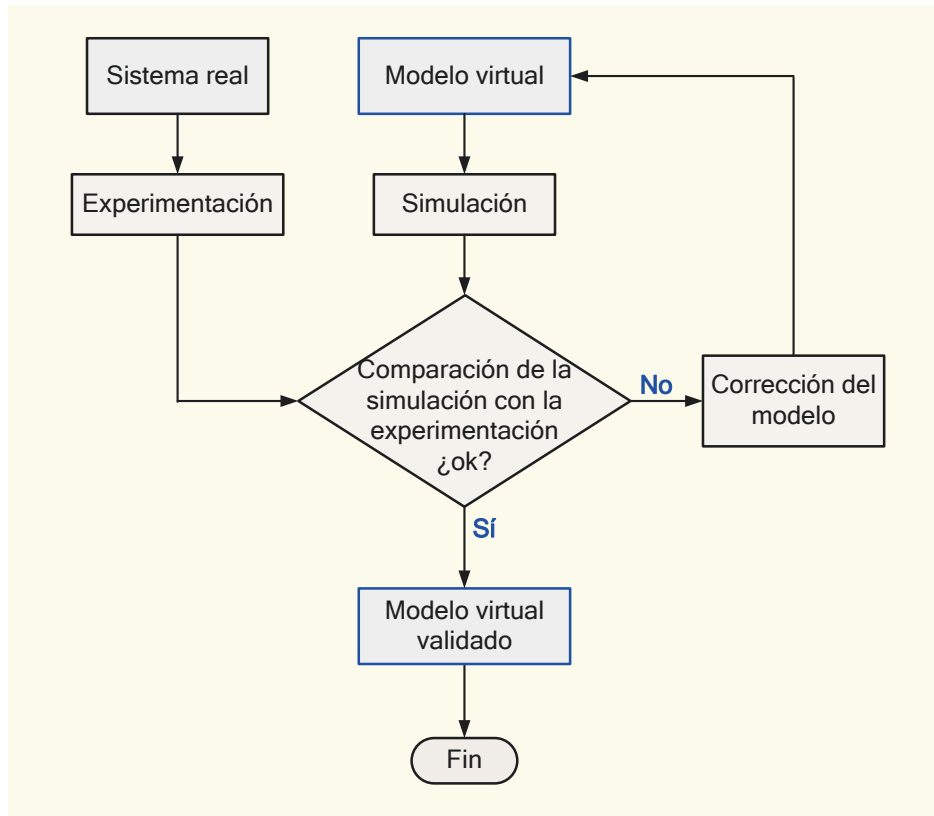


Figura 2-3 Proceso de validación de un modelo virtual mediante simulación y experimentación.

El modelador debe tener la suficiente experiencia y conocimientos para hacer esta determinación de manera precisa y rápida. Si se determina que no es el caso, entonces se requiere verificar el modelo para mejorarlo. Para ello se deberán revisar las simplificaciones realizadas pues tal vez fueron demasiado grandes, también se deberá comprobar si todas las características importantes del sistema están presentes y también hay que verificar la identificación de parámetros del sistema. A esta parte del proceso se le denomina validación del modelo (ver **Figura 2-3**).

En dicha figura se puede apreciar que el proceso de validación es recursivo y por supuesto que se puede añadir el hecho de que aún antes de la comparación de los resultados de la simulación del modelo virtual con los resultados de la experimentación

real, el modelador puede ir ajustando el modelo a partir de sucesivas simulaciones en las que su experiencia y criterio la aconsejarán ir haciendo ajustes al modelo.

2.2.3 Modelado y simulación de vehículos

Introducción

La dinámica de vehículos trata el modelado mecánico de los vehículos así como la descripción matemática y análisis de ellos. Evidentemente habrá diferencias metodológicas según el tipo de vehículo a analizar por lo que en esta tesis se hará énfasis en los vehículos terrestres no guiados por carril. Sin embargo hay que asentar a que la mayoría de problemas referidos a la dinámica vehicular tienen propuestas de solución similares y pueden ser tratados de una manera general y desde un punto de vista similar.

La evaluación de modelos matemáticos permite la simulación de movimiento y el estudio de los parámetros más importantes inherentes al comportamiento del modelo mecánico. Es evidente que a la complejidad del modelado de un vehículo le acompañará un modelado matemático complejo y en consecuencia deberá apelarse a sistemas informáticos que ayuden a obtener soluciones rápidas.

Un concepto importante al modelizar sistemas tan complejos como lo son los vehículos, desde los más pequeños automóviles hasta los autobuses de pasajeros, es la posibilidad de hacerlo utilizando subsistemas: chasis y carrocería, dirección, suspensión, sistema de frenado, ruedas, etc. De este modo se obtendrán módulos que podrán ser modificados independientemente, si es que ello resulta necesario, a partir de los resultados de las primeras simulaciones. [Popp (2010)].

Otro criterio importante al modelizar vehículos es que el modelo permita realizar de manera sencilla análisis de estabilidad de marcha, de seguridad en el manejo, durabilidad del vehículo y seguridad de maniobra (evitar acercarse a condiciones que puedan ocasionar vuelco o derrape del vehículo).

Los modelos de investigación de los vehículos han sufrido grandes cambios en las últimas décadas, desde el tradicional modelo de parámetros agrupados hasta el moderno modelo de elementos finitos, el modelo dinámico de subestructuras y el modelo dinámico de multicuerpos, y de modelos lineales a modelos no lineales con rigidez o

amortiguación no lineal. Las figuras muestran estos modelos de vehículos. Las respuestas de estos modelos se pueden obtener teóricamente o numéricamente según sea la complejidad de los modelos matemáticos resultantes, estando dicha complejidad ligada estrechamente a la cantidad de grados de libertad que se haya considerado para el respectivo modelado. [Yang (2015)].

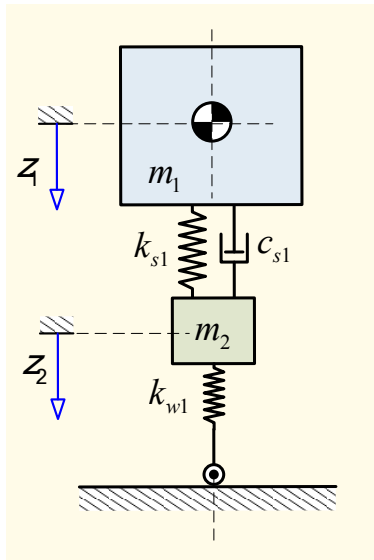


Figura 2-4 Modelo de un cuarto de vehículo utilizando dos grados de libertad.

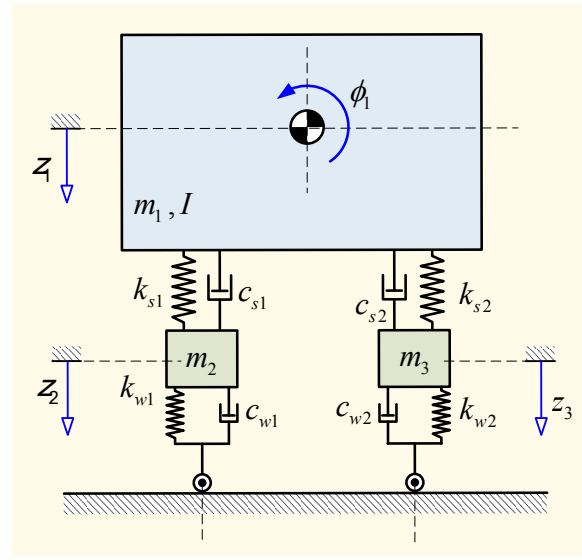


Figura 2-5 Modelo de la mitad de un vehículo utilizando cuatro grados de libertad.

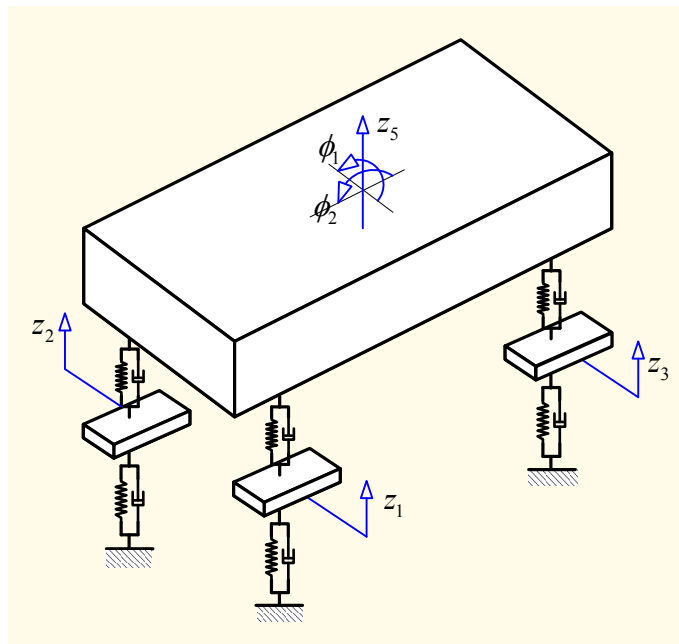


Figura 2-6 Modelo de un vehículo completo utilizando siete grados de libertad.

Definición de sistema y modelado

Los vehículos, desde el punto de vista del sistema completo, están compuestos por el conductor y los pasajeros, la carga, la carrocería y chasis, el sistema de propulsión, el sistema de guiado, los sistemas de suspensión y otros, según tipo del vehículo.

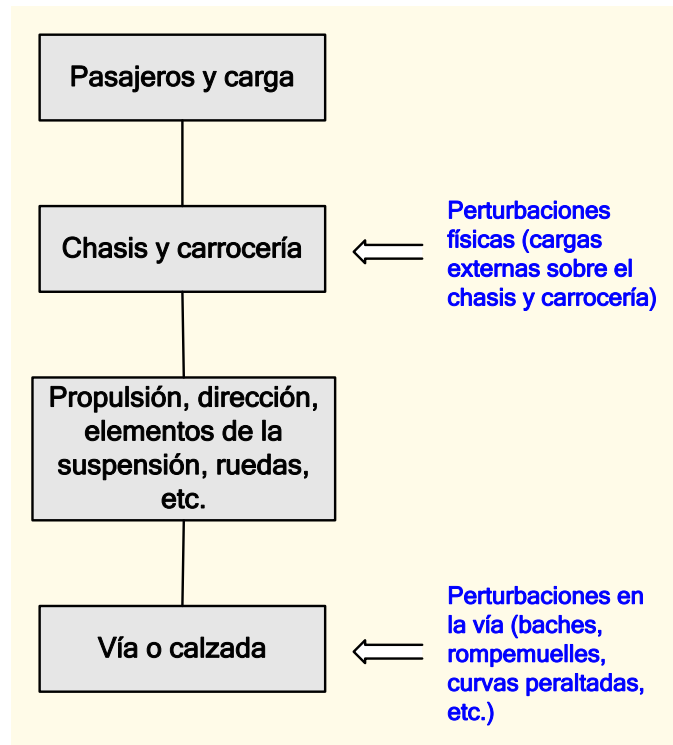


Figura 2-7 Componentes de un sistema vehicular.

Estos componentes están interconectados dinámicamente unos con otros, como lo muestra la **Figura 2-7**. Dinámicamente conectados significa en este caso que tanto la acción de fuerzas como la consecuente respuesta afectan a unos y a otros componentes. Por ejemplo, cuando el vehículo transita sobre la vía, la propulsión interna y las fuerzas de suspensión así como perturbaciones externas actúan sobre el cuerpo o chasis del vehículo y adicionalmente el movimiento resultante afecta a los pasajeros y su equipaje. El análisis dinámico de esta interacción de fuerzas y movimientos subsecuentes es el efecto de la dinámica de todos los componentes del sistema interactuando unos con otros.

La base del análisis teórico de sistemas vehiculares es un modelo matemático apropiado adaptado a la tarea de ingeniería planteada. Repitiendo por su tremenda importancia

algo ya dicho en los subcapítulos 3.1. y 3.2, la calidad de los resultados obtenibles del comportamiento dinámico de un sistema depende del modelo virtual correspondiente. Por ello, el modelo tiene que ser lo más detallado posible para poder representar de la manera más precisa y completa las propiedades esenciales del sistema dinámico en estudio. Por otro lado, el modelo debe ser lo más simple posible para permitir simulaciones eficientes y rápidas.

Esto último, en el contexto de que hoy en día la rapidez con que los productos finales lleguen al mercado global es fundamental dentro del marco de competencia entre fabricantes. Resolver este conflicto entre minuciosidad y sencillez que deben ser cualidades del modelo es una tarea de ingeniería verdaderamente complicada, muy en particular para los vehículos modernos pues cada vez más se les incorporan nuevos y más sofisticados sistemas inteligentes.

Para realizar el modelado es siempre recomendable descomponer el sistema total en subsistemas. En la [Figura 2-7](#) se puede ver no sólo la descomposición del sistema total, que en este caso es un vehículo, sino también la interacción de fuerzas y movimientos entre los subsistemas. La idea es la de modelar cada subsistema por separado en módulos y luego unir cada módulo para tener el modelo matemático del sistema total.

Este concepto modular permite realizar diferentes enfoques para cada subsistema en particular, con lo cual se obtiene una muy buena flexibilidad para poder realizar, si fuera necesario, variaciones en el diseño y ello conlleva una importantísima capacidad para visualizar y entender el comportamiento mecánico de sistemas muy grandes y complejos. Es más, esta manera de proceder será muy importante para realizar el modelo de un nuevo sistema partir del anterior. El nuevo proceso de modelado se verá enormemente simplificado al poder transferir módulos completos al nuevo modelo.

Según [\[Popp \(2010\)\]](#), [\[Rill \(2014\)\]](#) y [\[Schramm \(2014\)\]](#), entre otros, hay dos formas de realizar el modelamiento de sistemas mecánicos:

- Enfoque empírico
- Enfoque axiomático o teórico

A continuación se hará una breve descripción de cada uno de ellos.

- El método axiomático:

Resulta directamente en un modelo matemático a partir de la aplicación de principios físicos fundamentales descritos matemáticamente. Este modelo enfatiza tanto la estructura del sistema como las relaciones entre los parámetros del sistema.

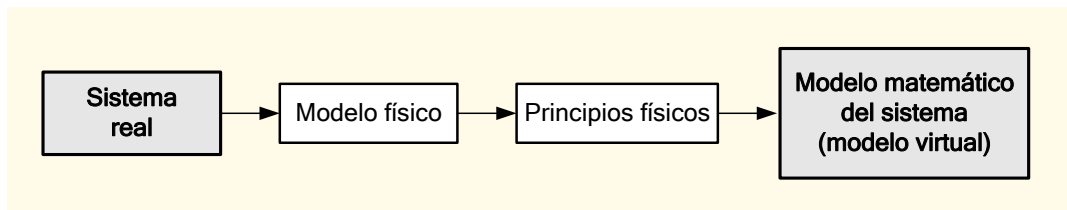


Figura 2-8 Modelado mediante el método axiomático o teórico.

Para la aplicación de principios fundamentales en sistemas complejos es frecuentemente necesario tratar con sistemas más simples de elementos idealizados, los cuales son denominados modelos físicos. Lo que se ha discutido hasta ahora acerca del modelamiento matemático aplica también al modelamiento físico. Estos modelos deben ser lo más simples que se pueda pero sin embargo deben ser tan detallados como se requiera.

- El enfoque empírico o experimental:

Está basado en la realización de medidas sobre prototipos de componentes de vehículos, los cuales son procesados mediante métodos de identificación dando como resultado un modelo matemático.

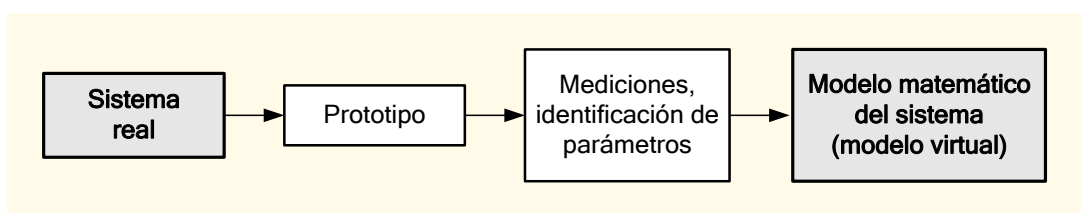


Figura 2-9 Modelado mediante el método empírico o experimental.

Para ello el sistema bajo estudio debe ser excitado mediante señales de prueba conocidas y las consecuentes respuestas deben ser grabadas. De la relación entrada-salida se pueden identificar los parámetros del modelo matemático considerando que se conoce a priori la estructura del sistema.

Este método es conocido como el método de identificación paramétrica. Si no hay información disponible acerca de la estructura del sistema, entonces se tiene un problema denominado de caja negra.

La descripción matemática de sistemas dinámicos complejos requiere en general, de ambos enfoques. El enfoque axiomático es el más sencillo y rápido de realizar y por ello es el que debe aplicarse siempre que sea posible. Los valores desconocidos de ciertos parámetros deben ser encontrados mediante experimentación y los resultados finales deben ser validados empíricamente. Se considera que el modelamiento es satisfactorio cuando las predicciones teóricas coinciden con los resultados experimentales.

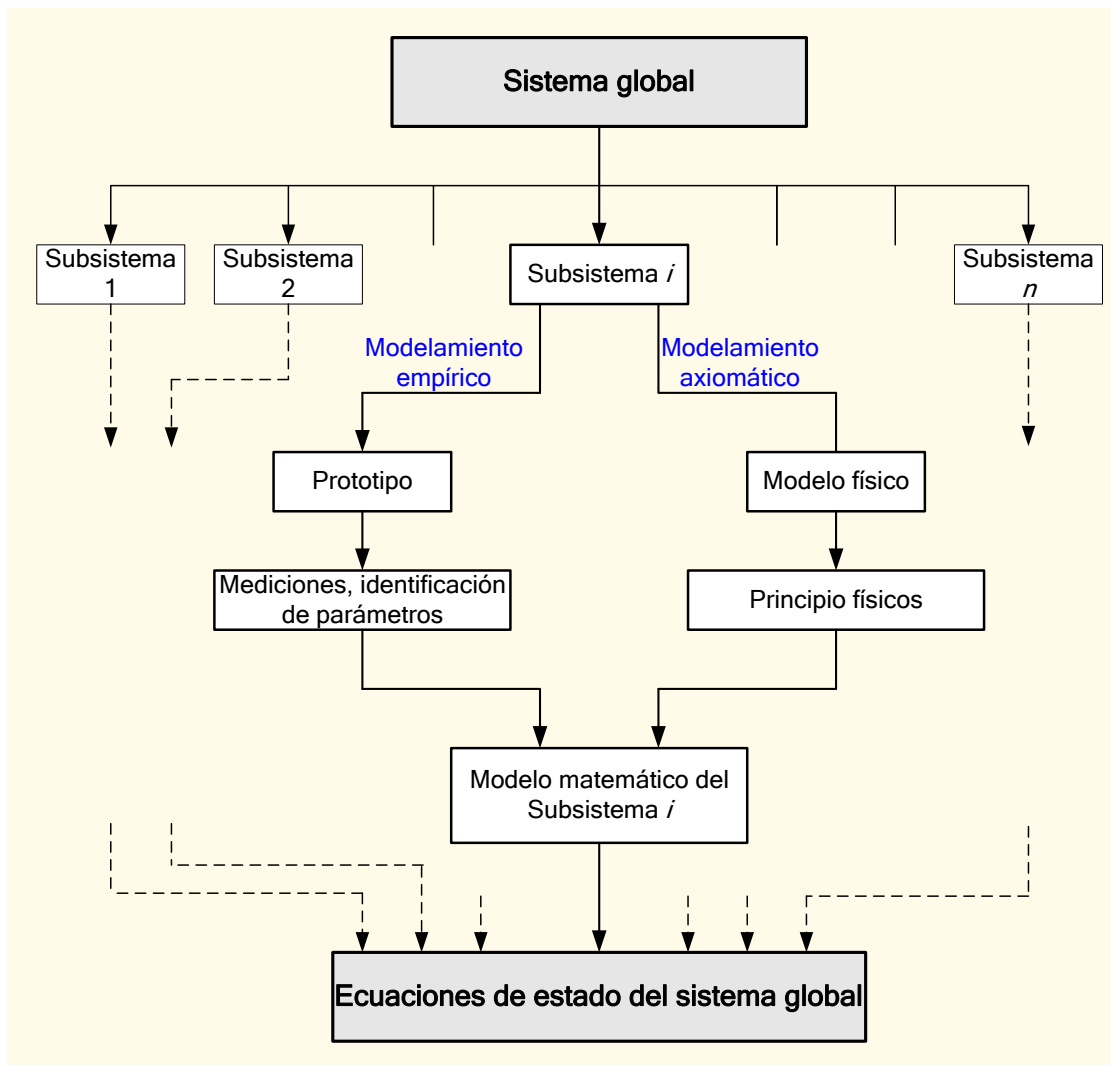


Figura 2-10 Formas de modelamiento de sistemas complejos.

A continuación será presentado a consideración el método de modelado axiomático para los sistemas vehiculares pues es el que primordialmente se utilizará en la presente tesis. La **Figura 2-10** muestra un esquema de cómo tratar los subsistemas de manera separada mediante modelos realistas. Luego los modelos resultantes para cada subsistema se ensamblarán sistemáticamente y el resultado será un modelo matemático del sistema global, el cual debe ser, como ya lo hemos expresado, sencillo de evaluar y además muy eficiente para ser analizado computacionalmente.

El primer paso será elegir un modelo físico. Los vehículos constan de muchos componentes mecánicos los cuales pueden ser modelados de diferentes maneras. Dichas formas de modelado son:

- Sistemas de multicuerpos (SMC)
- Sistemas de elementos finitos (SEF)
- Sistemas continuos (SC)

La utilización de una u otra forma de modelamiento depende de la geometría y de la rigidez de los componentes a ser modelados. Popp y Schiehlen [Popp (2010)] presentan las características inherentes a cada uno de estos tipos de modelamiento en la Tabla 2-1. Dependiendo de la complejidad del sistema que se va a modelar es posible combinar, por ejemplo el sistema de multicuerpos con el sistema de elementos finitos. Ello se ve claramente en los modelos de sistemas de multicuerpos en los que se combinan cuerpos rígidos y cuerpos flexibles.

Tabla 2-1 Características de los tipos de modelado

Modelo	Geometría	Distribución de la rigidez	Modelo matemático	Número de grados de libertad
Sistema de multicuerpos (SMC)	Compleja	Homogénea	Ecuaciones diferenciales ordinarias	finito (pequeño)
Sistema de elementos finitos (SEF)	Compleja	Homogénea	Ecuaciones diferenciales ordinarias	finito (grande)
Sistema continuo (SC)	Simple	No homogénea	Ecuaciones diferenciales parciales	infinito

- Modelado mediante sistemas de multicuerpos (SMC)

Un sistema de varios cuerpos consiste en cuerpos con masa e inercia y sujetos a diversos tipos de fuerzas (concentradas o distribuidas) y pares de fuerzas actuando en puntos discretos [Schielen (2014)], [Wittenburg (1977)] y [García de Jalón (1994)]. Los cuerpos y partículas están conectados unos con otros mediante resortes, amortiguadores, actuadores y también mediante rodamientos, cojinetes, articulaciones de muchos tipos y servomecanismos, estos últimos con masa considerada como despreciable (ver Figura 2-11).

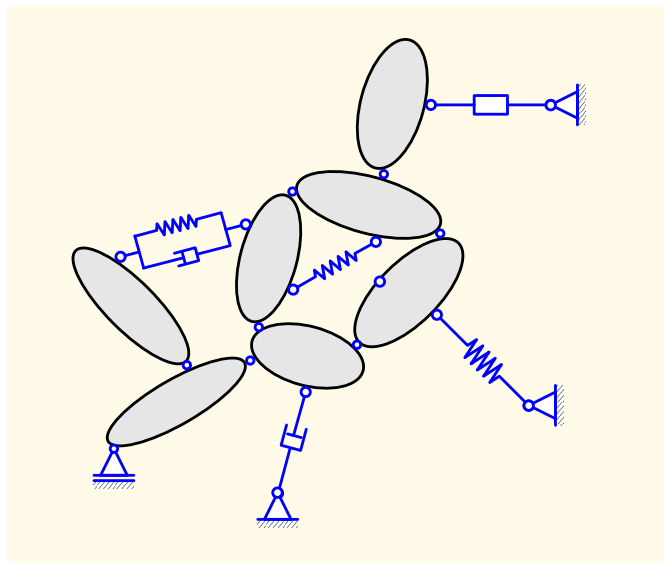


Figura 2-11 Representación típica de un sistema de multicuerpo.

Una hipótesis importante en la dinámica de vehículos es la de asumir como cuerpos rígidos las partes del vehículo si es que se sabe que se está modelando un sistema cuyos movimientos son de baja frecuencia. Además hay que recordar que los apoyos y juntas reducirán el número total de grados de libertad de un sistema de multicuerpos. Debido a que una serie de elementos compatibles actúa sobre un número discreto de juntas o articulaciones, la distribución de rigidez en el sistema de multicuerpos es no homogénea.

Es muy importante tener en cuenta durante el modelado y simulación la descripción de las variables de movimiento de los cuerpos (representación de los grados de libertad a través de coordenadas) y también la descripción de las fuerzas y momentos actuantes sobre el sistema.

Adicionalmente, no hay restricciones con respecto a la geometría resultando ello en una muy alta adaptabilidad de los sistemas de multicuerpo. La descripción matemática de la cinemática y de la cinética del sistema resulta normalmente en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales cuya forma es la mostrada en la ecuación (3.1).

$$[M] \ddot{y}(t) + [D] \dot{y}(t) + [K] y(t) = F(t) \quad (3.1)$$

Estas ecuaciones representan un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden donde las matrices-coeficiente son matrices de orden $(n \times n)$ que caracterizan la inercia $[M]$, amortiguamiento $[D]$ y rigidez $[K]$ del subsistema vehicular en estudio o caracterización. El vector columna $y(t)$ contiene todos los grados de libertad y el vector columna $F(t)$ de orden $(n \times 1)$ contiene las fuerzas excitatrices que en general son dependientes del tiempo.

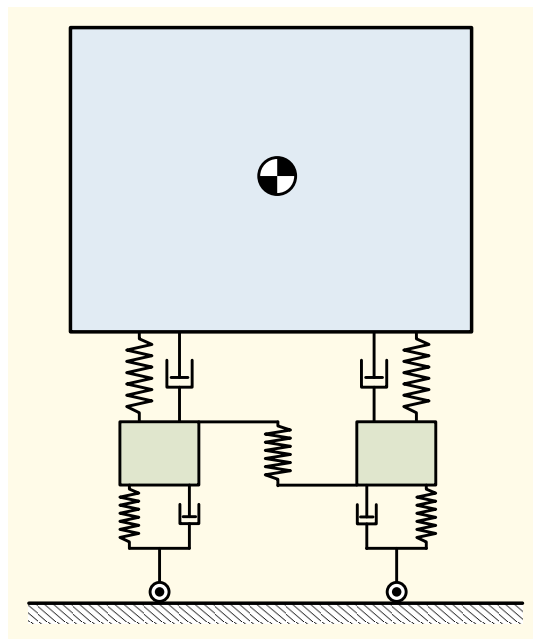


Figura 2-12 Modelado de un autobús con multicuerpos.

El sistema de ecuaciones (3.1) debe ser completado con las condiciones iniciales, Así se puede asegurar, en términos matemáticos, que existe una única solución para el problema. A continuación se presenta tres ejemplos de vehículos modelados mediante sistemas de multicuerpos. En la [Figura 2-12](#) se muestra el modelo de un autobús, en la [Figura 2-13](#) el modelo de un vagón de ferrocarril y en la [Figura 2-14](#) el modelo de un vehículo que levita magnéticamente.

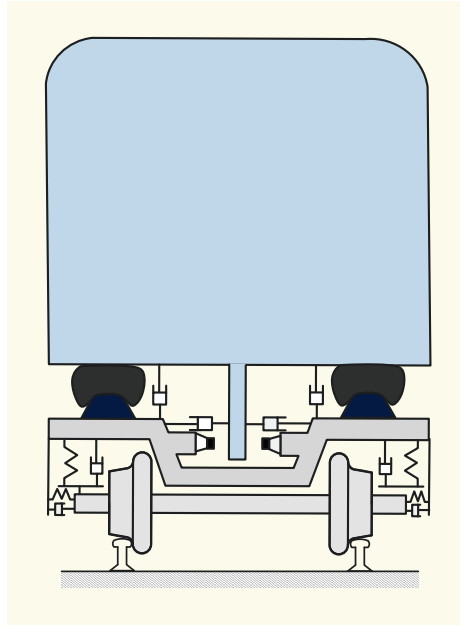


Figura 2-13 Modelado de un vagón de ferrocarril con multicuerpos.

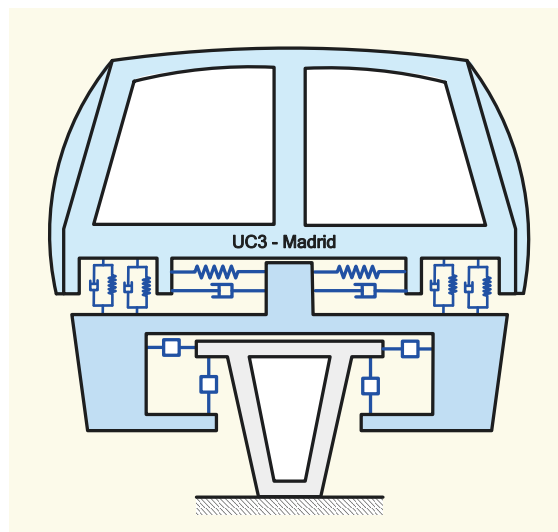


Figura 2-14 Modelado de un vehículo de levitación magnética con multicuerpos.

- Modelado mediante sistema de elementos finitos (SEF)

Es el sistema de modelado mediante elementos flexibles simples, como por ejemplo barras, vigas, placas, etc., con un número finito de grados de libertad. En los nodos actúan cargas discretas y pueden ser añadidas al sistema otros elementos como partículas, resortes, cojinetes, etc. Las condiciones de borde son tomadas en cuenta a

través de movimientos (desplazamientos) o fuerzas, según sea el caso, en los nodos. Los movimientos linealmente independientes de los nodos representan el número de grados de libertad del modelo completo.

El número de grados de libertad es finito debido a que el número de nodos es finito, sin embargo, los números de grados de libertad de los sistemas modelados de esta manera serán mucho más altos si los comparamos con los que resultan de modelos de multicuerpos debido a la deformabilidad de los elementos del sistema. Las deformaciones al interior de los elementos finitos entre los puntos nodales se denominan funciones de forma.

El procedimiento de modelamiento mediante elementos finitos (SEF) es muy flexible pues no existe ningún tipo de restricción con respecto al diseño geométrico del sistema. Este tipo de modelamiento es muy eficiente cuando se usan elementos uniformes o similares o si se forman grupos de elementos en supergrupos o subestructuras, respectivamente. En estructuras de tipo viga ocurren vibraciones libres sin amortiguamiento, resultando que las ecuaciones de movimiento son de la forma:

$$[\underline{M}] \ddot{y}(t) + [\underline{K}] y(t) = 0 \quad (3.2)$$

En el caso en que sean vibraciones forzadas sin amortiguamiento las ecuaciones de movimiento serán de la forma:

$$[\underline{M}] \ddot{y}(t) + [\underline{K}] y(t) = F(t) \quad (3.3)$$

donde las matrices $[\underline{M}]$ y $[\underline{K}]$ son de orden $(n \times n)$ y caracterizan la inercia y la rigidez del sistema, respectivamente. Adicionalmente se deben especificar las condiciones iniciales del problema. Es más, también hay que considerar que para este tipo de modelado se da el caso del problema de valor inicial, igual que en el modelado mediante un sistema de multicuerpo (SMC).

Como ejemplo sencillo de un modelo de este tipo se presenta una viga compuesta hiperestáticamente apoyada sometida a una carga variable en el tiempo, la cual es causada por la fuerza transmitida por el motor cuyo rotor gira a una velocidad angular Ω (ver **Figura 2-15**).

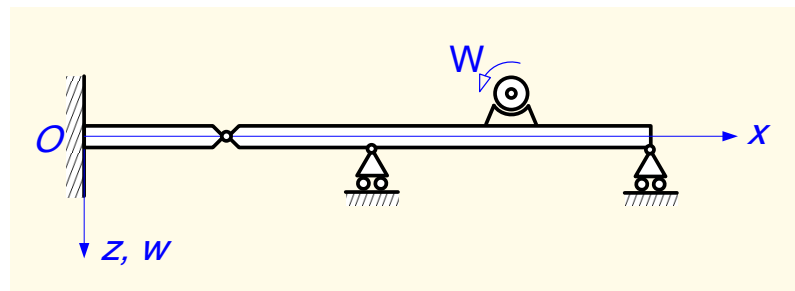


Figura 2-15 Viga compuesta portante de un motor rotatorio.

Modelizando el sistema mediante elementos finitos tendremos como resultado el siguiente modelo:

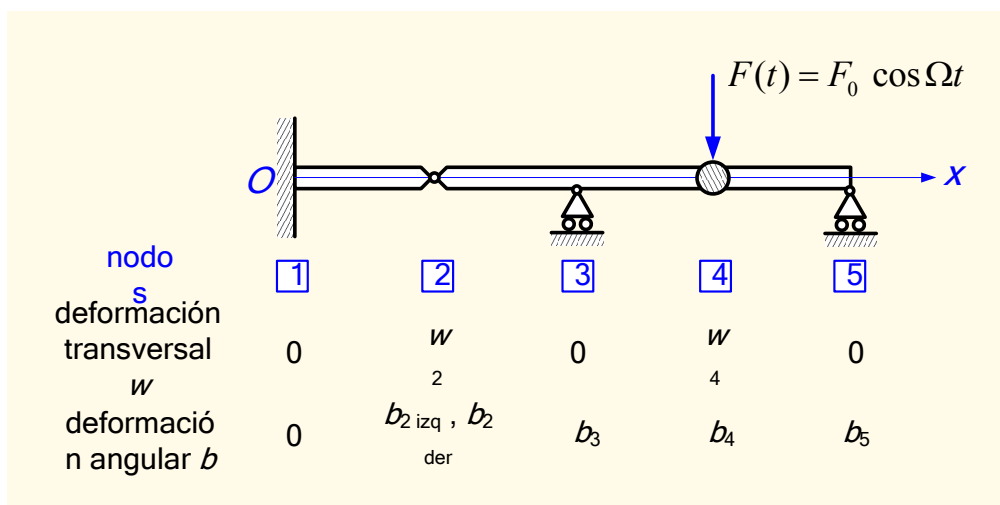


Figura 2-16 Modelo dinámico de la viga compuesta portante de la **Figura 2-15**.

Luego de aplicar adecuadamente la teoría de los elementos finitos se obtendrá la ecuación diferencial del movimiento del sistema analizado (3.4):

$$[M] \ddot{y}(t) + [K] y(t) = F_0 \cos \Omega t \quad (3.4)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, conjuntamente con las condiciones de borde, constituyen el modelo virtual del sistema fijo a analizar.

- Modelado mediante sistemas continuos (SC)

El sistema se modela empleando cuerpos flexibles o no rígidos con parámetros de masa y rigidez distribuidos. Como ejemplo de medio continuo unidimensional con

propiedades de masa y rigidez homogéneas, se muestra el caso de una viga elástica sometida a cargas que, en general, pueden ser funciones del tiempo (ver **Figura 2-17**).

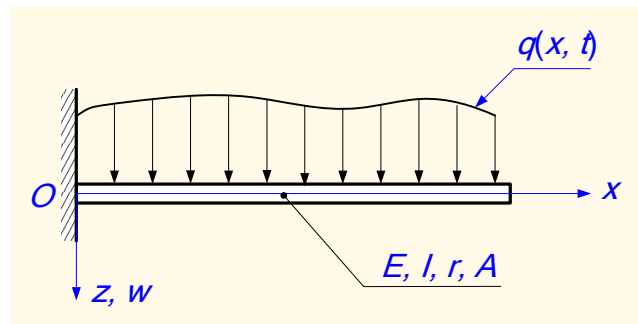


Figura 2-17 Viga continua sometida a carga transversal variable en el tiempo.

Como consecuencia de la variación de distancias en el tiempo entre los diversos puntos materiales, las vigas tienen un número de grados de libertad infinito. Matemáticamente, las vigas continuas están representadas por ecuaciones diferenciales parciales.

Para el ejemplo mostrado, la ecuación de movimiento de un elemento infinitesimal de viga caracterizado por la coordenada x será:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (3.5)$$

- donde:
- EI representa la rigidez de la viga
 - ρA representa la inercia de la sección transversal de la viga
 - $w(x, t)$ es la deflexión transversal de la viga para un instante t
 - $q(x, t)$ es la carga externa aplicada a la viga para un instante t

La ecuación tiene que ser completada por condiciones iniciales y de borde resultando ello en un problema de valor inicial y de borde.

Hoy en día, el modelado de sistemas complejos está apoyado muy fuertemente por sistemas computacionales. Para el modelado SMC, y en particular para el modelado SEF, existen actualmente en el mercado muchos códigos computacionales muy eficientes, cuyas características han sido bastante bien analizadas por Kortuem & Sharp [Kortuem (1993)].

El análisis de los diferentes modelos depende muy fuertemente del tipo de las fuerzas actuantes sobre el sistema en estudio y de su comportamiento en el tiempo. Por ello se debe distinguir entre los siguientes tipos de fuerzas:

- Fuerzas externas e internas.
- Fuerzas aplicadas y fuerzas de reacción.
- Fuerzas superficiales y fuerzas volumétricas (gravitatorias, inerciales o másicas, etc.).

2.3 Modelado dinámico de un autobús

2.3.1 Introducción

En general, el modelado analítico de cualquier vehículo implica analizar las interrelaciones entre un gran número de componentes; así como la respuesta de estos ante diferentes perturbaciones externas y los efectos de estas sobre el resto de componentes. Debido a ello, se deben plantear diferentes modelos para predecir el comportamiento del vehículo ante una serie de estímulos externos con el objetivo de conocer un tipo de respuesta en específico; tal modelado implica dejar de lado algunos componentes y perturbaciones con poca o nula relevancia con el fenómeno que se intenta conocer. En el caso de la presente tesis, se necesita conocer la respuesta vertical y lateral del vehículo así como el movimiento vertical y lateral de los componentes de éste debido a perturbaciones verticales y cargas transversales; por lo cual, se dejan de lado las perturbaciones longitudinales. Adicionalmente, no se determinará la cinemática del vehículo en el eje longitudinal x ni sus giros en torno al eje z (ángulo ψ). Ello con el objetivo de predecir el movimiento en un plano vertical del centro de gravedad del vehículo.

Cabe mencionar, que si bien en la actualidad, se hace uso de sistemas activos de control de desplazamientos y de giros; estos no serán considerados en los siguientes modelos a desarrollar.

2.3.2 Actuadores del sistema de suspensión

Por definición se sabe que todo elemento elástico recupera su forma original cuando las fuerzas que producen su deformación desaparecen. La fuerza actuante es función directa de la deformación sufrida, pudiendo existir entre ambas magnitudes una relación lineal o no lineal.

Un primer componente, utilizado mayormente en vehículos antiguos, son los llamados “muelles” o suspensión de ballesta; están compuestos por una serie de hojas de acero superpuestas una sobre otra y fijadas por una hebilla; a la primera hoja, la más larga, se le denomina hoja maestra mientras que las subsiguientes son llamadas hojas esclavas. Este elemento, además de su comportamiento elástico, provee de amortiguamiento debido a la fricción entre sus hojas, pero con el inconveniente de que el coeficiente de amortiguamiento no puede ser regulado a un valor requerido, además de que dichos valores dependen de factores externos como la lubricación entre las hojas o la contaminación de las superficies.

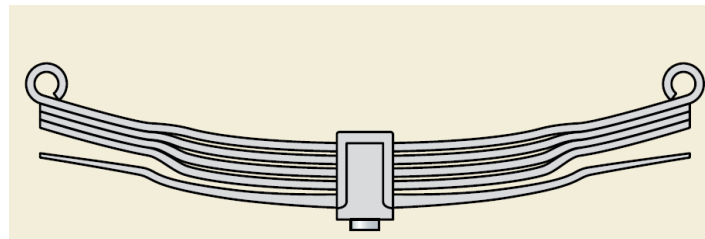


Figura 2-18 Suspensión de ballesta parabólica. [SKF (2012)]

Un segundo diseño es el resorte de arandelas o “*Belleville spring*” el cual consiste en una serie de arandelas cónicas las cuales poseen un ángulo de inclinación β el cual ante la aplicación de una carga varía permitiendo la deflexión del resorte. Una ventaja de este elemento es el poco espacio que requiere además de brindar un buen aislamiento ante vibraciones multidireccionales. La rigidez de este componente depende del número de arandelas y de la configuración de las arandelas, la cual puede ser en paralelo, en cuyo caso la rigidez es elevada; o una configuración en serie la cual posee una baja rigidez con el inconveniente de que existe el riesgo de inestabilidad debido a la elevada deflexión.

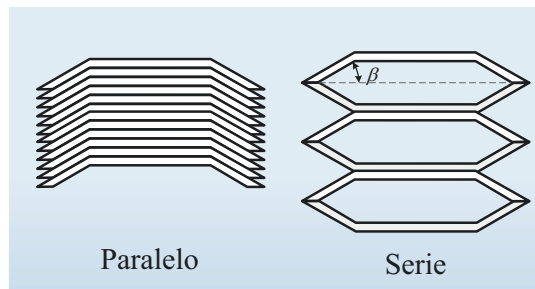


Figura 2-19 Configuración de resortes Belleville.

Un diseño muy similar al anterior son los llamados resortes de anillo, los cuales constan de una serie de anillos cónicos, externos e internos, los cuales ante una carga vertical permiten que el anillo externo se expanda mientras que el interno se reduce. La deformación vertical origina fricción en las caras de los anillos.

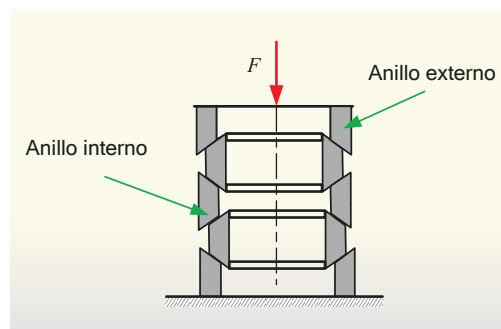


Figura 2-20 Resorte de anillos.

Un tercer diseño y el más común de todos los componentes elásticos son los resortes helicoidales, los cuales pueden ser cilíndricos o cónicos. Son fabricados por lo general de un alambre de acero de sección circular; este tipo de resortes suelen ser muy robustos y de fácil fabricación, además de que poseen un bajo coeficiente de amortiguamiento.

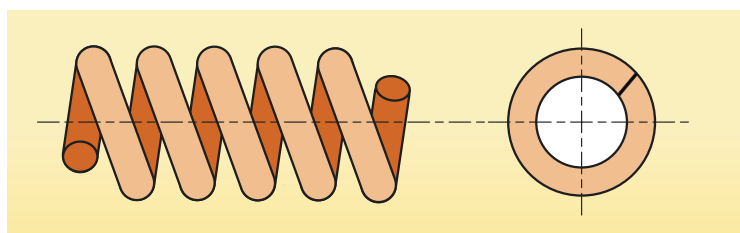


Figura 2-21 Resorte helicoidal.

El siguiente diseño corresponde al resorte neumático; el cual se compone de una cámara de goma de la cual se encuentra conectada a una válvula, ya sea controlada por solenoides o de forma mecánica, de modo que permite controlar el ingreso y salida del aire en la cámara en respuesta a una perturbación vertical. Así mismo, este componente provee un coeficiente de amortiguamiento el cual puede ser variado aumentando o reduciendo el estrangulamiento conectado a la entrada de la tubería de alimentación. Este tipo de resorte posee una gran capacidad que posee de absorber oscilaciones en múltiples direcciones; además cabe señalar que los coeficientes de rigidez en las direcciones transversal y longitudinal dependen de la geometría de la cámara. La principal característica de este componente es que las variables de rigidez y amortiguamiento pueden ser reguladas; en el caso de que se desee reducir el coeficiente de amortiguamiento, únicamente se reduce el estrangulamiento a la entrada de la tubería de aire; o en caso se desee reducir la rigidez, se conecta la cámara con un reservorio secundario que permite aumentar el volumen de la cámara.

La respuesta de este sistema se puede describir de la siguiente manera: Al recibir una carga, la cámara se comprime lo cual acciona la válvula de control 5/3 lo cual permite el ingreso de aire de modo que la cámara recupere su forma original; cuando desaparece la carga, el resorte se estira más allá de su forma original lo cual acciona nuevamente la válvula permitiendo la liberación de aire al medio ambiente.

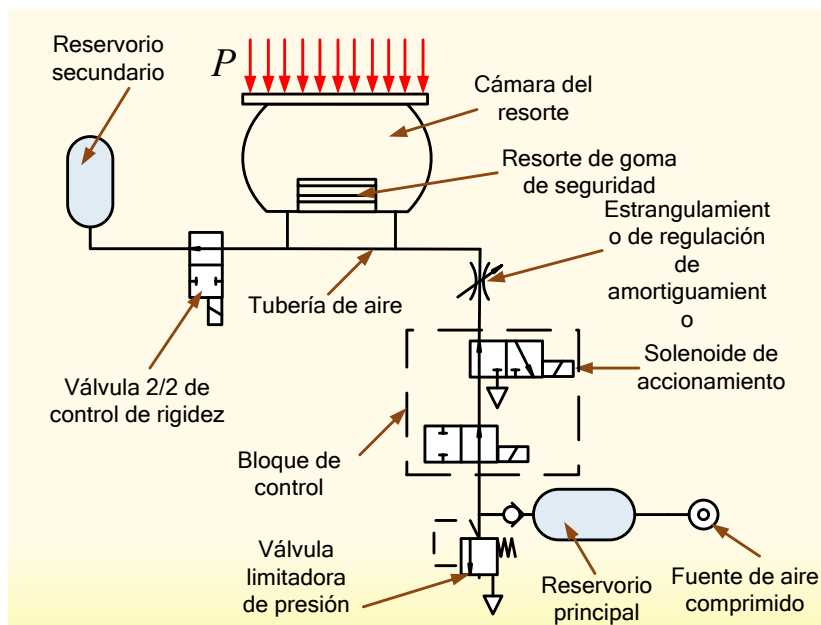


Figura 2-22 Esquema del sistema neumático de suspensión.

Cuando éste recupera su forma, la válvula de control regresa a su posición central. Se tiene además un resorte de goma al interior de la cámara, el cual interviene en caso de que la presión originada por la carga supere el valor de presión de la válvula limitadora. Tal caso es una condición extrema; por lo que dicho resorte puede ser un elemento de seguridad ante sobrecargas.

2.3.3 Barra Panhard

Es un elemento de la suspensión el cual evita los desplazamientos laterales de un eje; además de restringir el movimiento vertical relativo entre la masa suspendida y la no suspendida; Las fuerzas que restringen el movimiento entre los elementos conectados se general de la deformación axial de la barra, la cual actúa a modo de resorte restringiendo el movimiento de estos a movimiento verticales; y adicionalmente interviniendo en la dinámica de estos ya que las fuerzas y los consecuentes momentos que se originan, tanto en la masa no suspendida como en la suspendida intervienen en la dinámica de estos.

El cálculo del coeficiente de rigidez de la barra pasa por un cálculo de deformación axial, el cual se describe en la ecuación (3.6):

$$\delta_p = \frac{F_p L}{EA} \quad (3.6)$$

De donde la rigidez axial, responde a la siguiente equivalencia:

$$k_p = \frac{EA}{L_p} \quad (3.7)$$

En términos de modelado, se considera que la barra Panhard se encuentra empotrada a la masa no suspendida y articulada a la masa suspendida; por ello, y considerando la elevada rigidez de los neumáticos que dan soporte a la masa no suspendida, solo se considera el desplazamiento de la masa suspendida en el cálculo de la deformación axial de la barra. En la **Figura 2-23** se muestra una representación de la barra Panhard, conjuntamente con las masas suspendida y no suspendida.

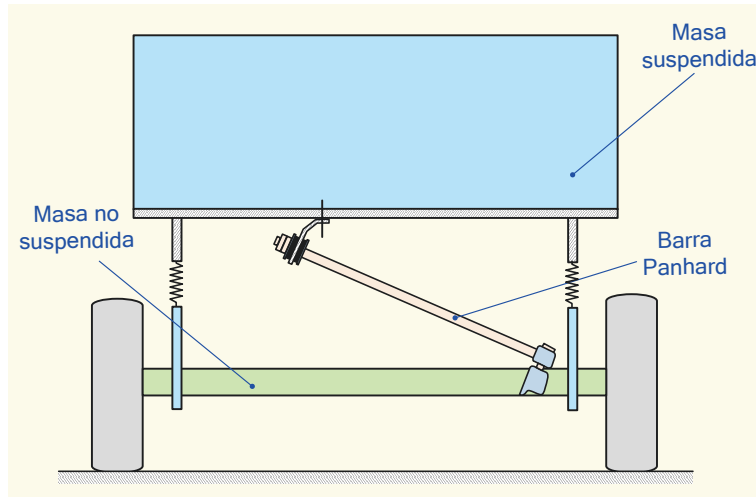


Figura 2-23 Esquema de la barra Panhard.

De los diferentes modelos de suspensión, es posible notar un aspecto común, el cual es que todos los sistemas poseen configuraciones independientes en el eje delantero, responsable de la dirección, y el eje posterior; así mismo, toda la masa por debajo de ellos son masas no suspendidas, por lo que, independientemente de los grados de libertad que posea el sistema de suspensión en las diferentes configuraciones existentes, la respuesta está ligada, únicamente, a la fuerzas producidas por el amortiguador ante excitaciones externas.

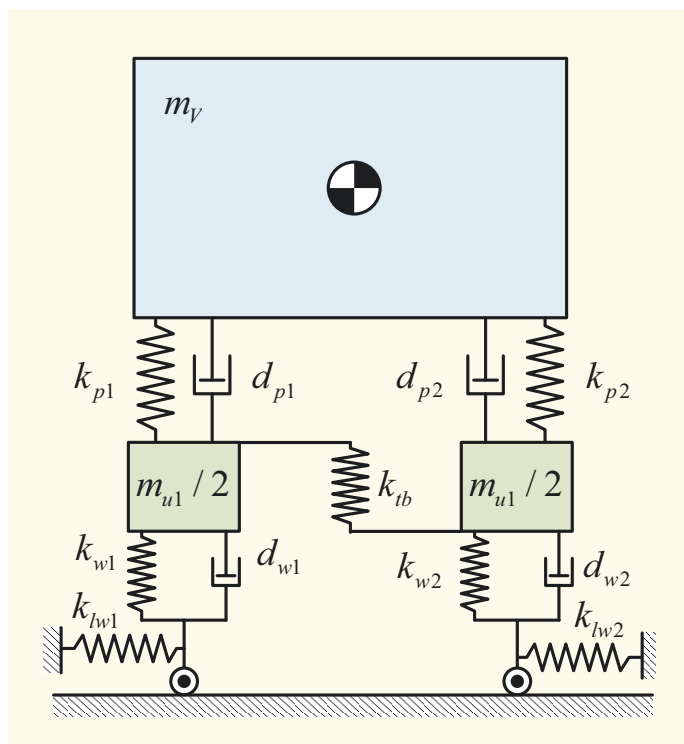


Figura 2-24 Modelo del sistema frontal.

En el modelo se puede apreciar la existencia de dos masas no suspendidas, las cuales se deben a los componentes del sistema de dirección, masa del eje, de las ruedas y de las partes del sistema de suspensión. Dado que tanto la rueda izquierda como la derecha poseen libertad de desplazamiento vertical independiente; únicamente ligado por la barra de torsión, se pueden considerar como dos masas independientes, las cuales se pueden considerar como iguales ya que se asume que se distribuyen de forma simétrica entre las ruedas delanteras

m_{u1} Masa no suspendida del eje delantero en [kg].

2.3.5 Análisis de la rigidez y amortiguamiento de las ruedas

Las ruedas en el modelo presentado, bajo ninguna circunstancia pueden ser consideradas como elementos rígidos debido a que estas poseen deformaciones considerables en comparación al resto de elementos elásticos, las cuales se originan debido a las variaciones de masa en el vehículo y las perturbaciones externas. Estas poseen un coeficiente de rigidez y de amortiguamiento en función de la presión neumática en el interior de la rueda; dado que la presión neumática es constante, se puede asumir constante debido a la carencia de valores experimentales, se puede observar una tendencia lineal en el comportamiento de las ruedas, tal como se aprecia en la **Figura 2-25**:

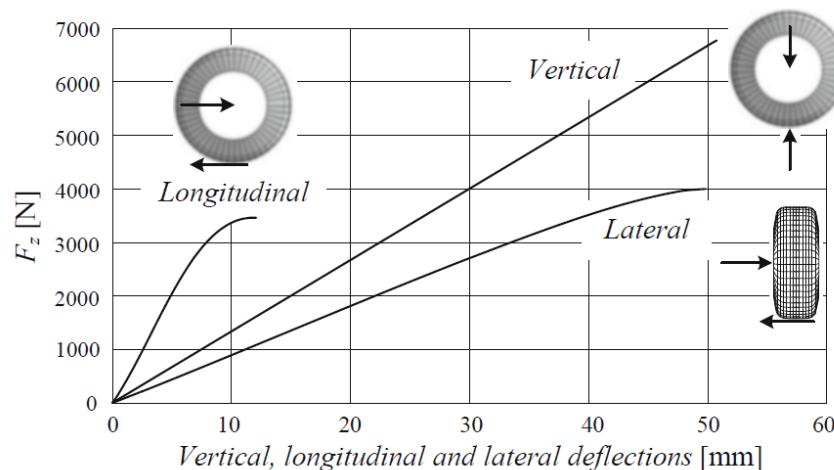


Figura 2-25 Fuerza restitutiva vs. deflexiones [Schramm (2014)].

De igual modo se tiene un comportamiento similar para la fuerza de amortiguamiento de las ruedas; en la **Figura 2-25** se tiene la siguiente nomenclatura:

- k_{wn} Constante de rigidez vertical de la n-ésima rueda en $[\text{N} \cdot \text{m}]$.
- k_{lwn} Constante de rigidez lateral de la n-ésima rueda en $[\text{N} \cdot \text{m}]$.
- d_{wn} Constante de amortiguamiento de la n-ésima rueda en $[\text{N} \cdot \text{m/s}]$.

Si bien estos valores deben ser obtenidos de manera experimental, se asumirán los valores mostrados en la [Tabla 2.2](#):

Tabla 2-2 Valores estándar de la rigidez y amortiguamiento de las ruedas [Mustafá (2010)].

k_{wn}	160000 N/m
d_{wn}	800 N·s/m
k_{lwn}	80000 N/m

2.3.6 Análisis de la constante de la rigidez de la barra de torsión

La siguiente característica es la interferencia de la barra de torsión la cual vincula los desplazamientos verticales de las masas no suspendidas; dicho elemento aprovecha los brazos de palanca generados por tales desplazamientos generando un momento torsor en la barra la cual actúa como un resorte de torsión de modo que restringe los movimientos de ambas masas a valores pequeños, lo cual es deseable a fin de evitar vibraciones excesivas para los pasajeros; así como evitar que el centro de balanceo se desplace grandes longitudes. En la [Figura 2-26](#) se muestra el esquema para el modelado de una barra de torsión.

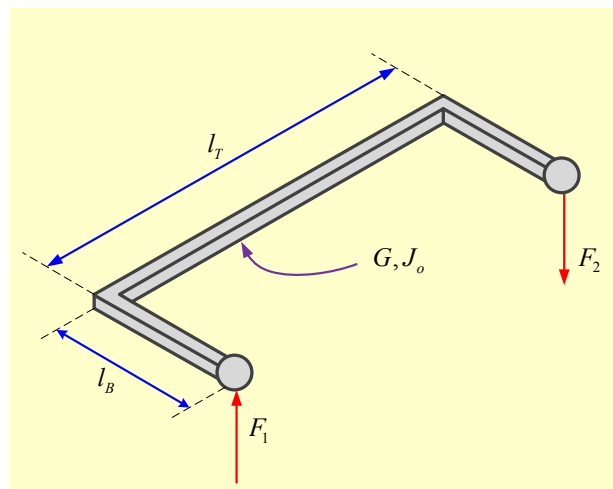


Figura 2-26 Esquema de barra.

La fuerza originada por los desplazamientos en los extremos de las barras puede ser calculada de la siguiente manera:

$$y_1 = \frac{F_1 \ell_b^3}{3 E_b I_b} \quad (3.8)$$

donde: F_1 Fuerza originada por la masa suspendida derecha en [N].

ℓ_b Longitud del brazo de torsión en [mm].

E_b Módulo de elasticidad del brazo de torsión en [N/mm²].

I_b Momento de inercia del brazo de torsión en [mm⁴].

Despejando F_1 de (3.8):

$$F_1(y_1) = \frac{3y_1 E_b I_b}{\ell_b^3} \quad (3.9)$$

Con lo cual se tiene una relación entre el desplazamiento de la masa no suspendida y la fuerza sobre el brazo.

Seguidamente se determina el par torsor originado en la barra mediante la siguiente relación:

$$M_{t1} = F_1 \ell_b \quad (3.10)$$

Aplicando (3.9) en (3.10) se obtiene:

$$M_{t1} = \frac{3y_1 E_b I_b}{\ell_b^2} \quad (3.11)$$

De igual forma para el desplazamiento de la masa no suspendida izquierda se tiene el siguiente momento torsor sobre la barra:

$$M_{t2} = F_2 \ell_b$$

donde: F_2 Fuerza originada por la masa suspendida izquierda en [N].

Aplicando el mismo proceso que para la barra derecha se obtiene:

$$M_{t2} = \frac{3y_2 E_b I_b}{\ell_b^2} \quad (3.12)$$

Se tiene que el par torsor sobre la barra resulta ser la diferencia de ambos momentos ya que ambos actúan en sentido inverso

$$M_{TB} = M_{t1} - M_{t2}$$

$$M_{TB} = \frac{3E_b I_b}{l_b^2} (y_1 - y_2) \quad (3.13)$$

Lo siguiente es analizar la respuesta de la barra de torsión; se asume que el momento torsor en el extremo derecho es mayor que en el izquierdo, por lo que el momento torsor resultante posee sentido antihorario. La relación que vincula el ángulo de distorsión de una sección con respecto a otra considerada como fija es la siguiente:

$$\Phi_B = \frac{M_{TB} l_T}{G J_0} \quad (3.14)$$

donde G Módulo elástico al corte de la barra en $[\text{N/mm}^2]$.

Φ_B Ángulo de giro de la barra en $[\text{rad}]$.

J_0 Momento de inercia polar de la barra en $[\text{mm}^4]$.

M_{TB} Momento torsor resultante en $[\text{N} \cdot \text{mm}]$.

l_T Longitud de la barra de torsión en $[\text{mm}]$.

Reemplazando (3.13) en (3.14) se obtiene:

$$\Phi_B = \frac{3E_b I_b l_T}{l_b^2 G J_0} (y_1 - y_2) \quad (3.15)$$

Lo siguiente es determinar el desplazamiento del brazo con el cual se cumple la condición de equilibrio en la barra, de modo que el momento torsor en la barra sea nulo. Para ello, se multiplica el ángulo por el radio de giro y se toma la componente vertical de dicho desplazamiento, el cual, en este punto se asume pequeño, de modo que se pueda linealizar la expresión; de ello resulta:

$$y_\Delta = \Phi l_b$$

$$y_\Delta = \frac{3E_b I_b l_T}{l_b G J_0} (y_1 - y_2) \quad (3.16)$$

Luego, realizando el análisis dado en la ecuación (3.9) se obtiene la ecuación que da como resultado la fuerza ejercida por la barra de torsión:

$$F_{tb} = \frac{9E_b^2 I_b^2 l_T}{l_b^4 G J_0} (y_1 - y_2) \quad (3.17)$$

donde: F_{tb} Fuerza ejercida por la barra de torsión en [N].

Finalmente de la expresión (3.17), es posible obtener la constante elástica de la barra de torsión, la cual posee un comportamiento lineal respecto a la diferencia de desplazamientos de las masas no suspendidas.

$$k_{tb} = \frac{9E_b^2 I_b^2 l_T}{l_b^4 G J_0} \quad (3.18)$$

donde: k_{tb} Constante de rigidez de la barra de torsión en [N/mm].

2.3.7 Eje posterior del vehículo

Para la vista posterior del sistema se tiene la configuración mostrada en la **Figura 2-27**.

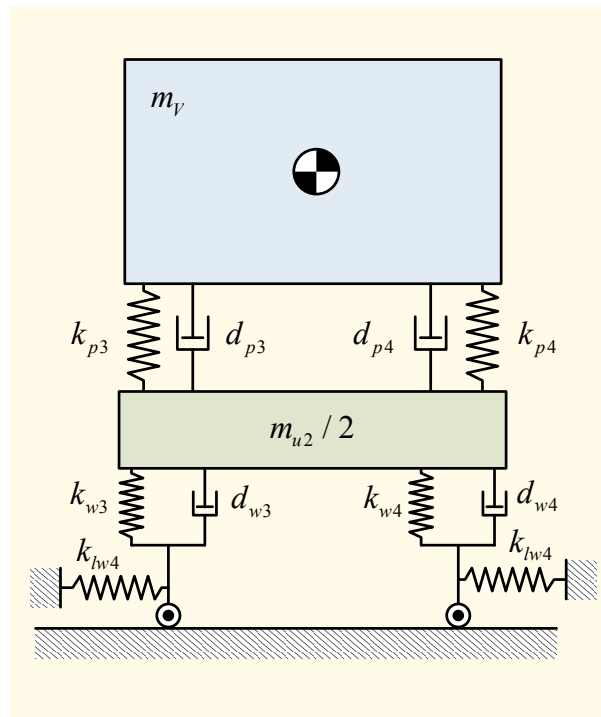


Figura 2-27 Modelo del sistema vista posterior.

La diferencia en este caso es que se tiene dos suspensiones ligadas por lo que el eje posterior posee una rotación en torno al eje longitudinal. Por ello, es necesario el ángulo de giro del eje para conocer el giro de la sección de vehículo soportado.

2.3.8 Modelo espacial del vehículo

Una vez definidas las características del eje posterior y frontal, es necesario conocer la interrelación entre ambos sistemas a fin de conocer el comportamiento real del vehículo ante cargas transversales. El vínculo físico más considerable entre ellos es la estructura del autobús; el cual, debido a los diferentes ángulos de giro ϕ en torno al eje x de ambas secciones, origina un momento torsor en la estructura el cual actúa en la distribución lateral de cargas y en la cinemática de ambas secciones. En la siguiente figura se puede apreciar el modelo espacial del vehículo completo:

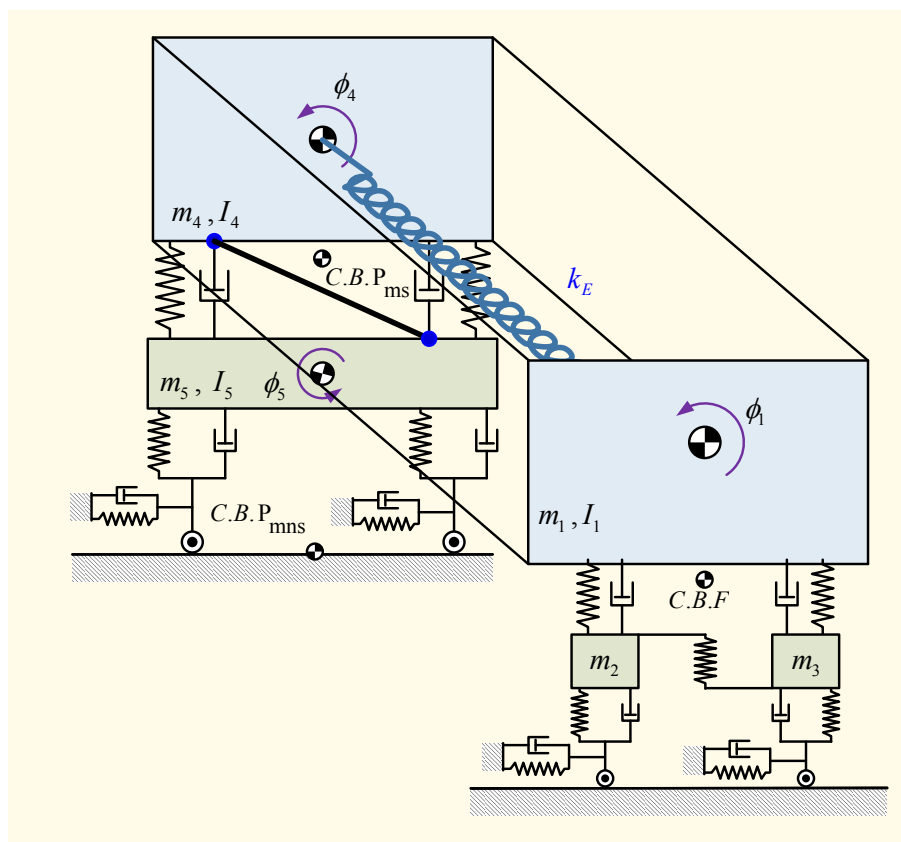


Figura 2-28 Modelo espacial del vehículo.

donde: k_E Constante de rigidez torsional de la estructura en $[N \cdot mm / rad]$.

Finalmente, el modelo del vehículo está definido a fin de poder predecir la respuesta ante cargas transversales y verticales; lo siguiente es definir el método de análisis a seguir para el problema, así como definir las ecuaciones cinemáticas con las que se podrá predecir el límite de vuelco ante diferentes condiciones de vía y velocidad del vehículo.

CAPITULO 3 OBJETIVOS

En esta tesis doctoral se plantea la problemática en seguridad vial que se produce en la conducción de vehículos de transporte colectivo de viajeros cuando estos describen una curva. La velocidad excesiva y otros factores afectan a un posible derrape o a un desafortunado vuelco, pudiéndose producir un accidente de circulación. El derrape o el vuelco suponen una posible salida de la vía y, en la mayoría de las ocasiones, aparecen numerosas víctimas.

En este trabajo de investigación se abordan modelos numéricos de simulación que permiten establecer, en primer lugar, y analizar posteriormente, aquellos parámetros intervinientes en la dinámica lateral de este tipo de vehículo.

Al ser parámetros de diseño del propio vehículo y/o de uso derivadas de la conducción del conductor, resultan fundamentales para mejorar la seguridad vial de este tipo de vehículos.

Este planteamiento resulta novedoso en esta materia ya que no se abordan hasta ahora la conjunción de dos de los tres grandes protagonistas en la seguridad vial: conductor, vehículo y medio (ver **Figura 3-1**).

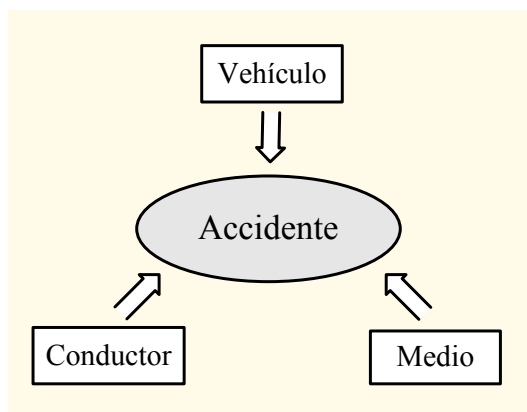


Figura 3-1 Agentes que intervienen en un accidente.

Como última aportación se consideran en esta tesis doctoral parámetros de la vía (medio) cuando ésta cambio de curvatura. De esta manera se contemplan en este trabajo de forma simultánea estos tres agentes fundamentales.

Los objetivos que se persiguen con el desarrollo de esta tesis son:

- Obtención de un modelo tridimensional constituido por dos modelos planos de dinámica lateral unidos por barras de torsión constante. Con ello se consigue establecer un modelo dinámico de comportamiento lateral de un autobús cuando éste circula por una curva.
- Analizar los parámetros implicados con el fin de determinar cuáles de ellos son sensibles al derrape y al posible vuelco.
- Se considerarán centros de gravedad y de balanceo variables en el tiempo.
- En el modelo se incluye la influencia de una barra de estabilidad en el eje delantero y de una barra Panhard para el eje trasero.

CAPITULO 4 ETAPAS DE DESARROLLO DE LA TESIS DOCTORAL

Para la correcta consecución de los objetivos anteriormente propuestos se han seguido las fases de trabajo propuestas en el esquema de la **Figura 4-1**.

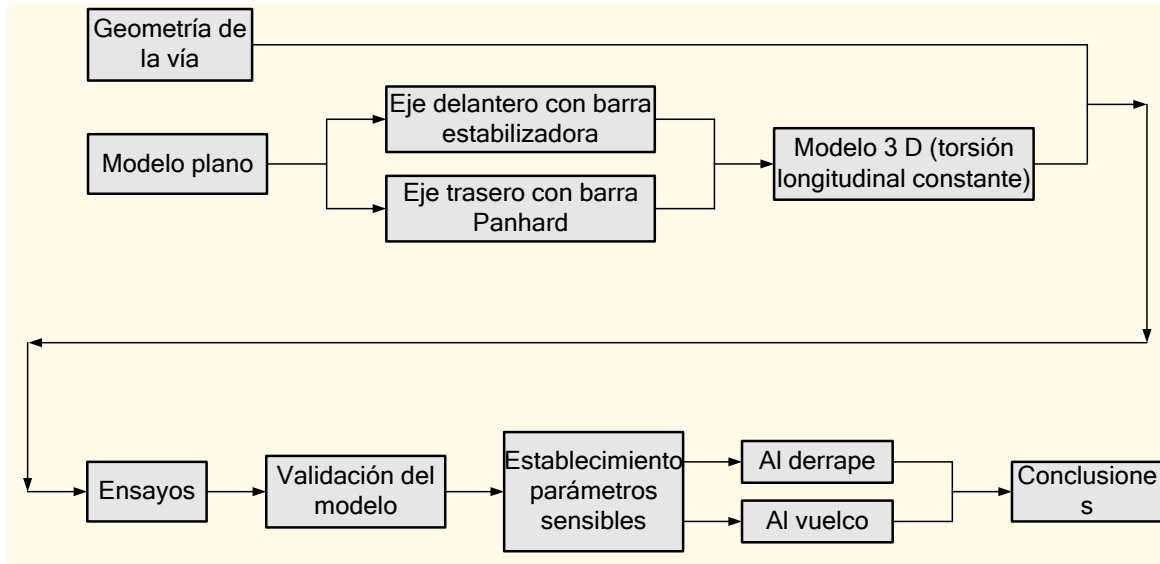


Figura 4-1 Etapas de desarrollo del trabajo de modelado y simulación propuesto en la presente tesis.

Primero se establece la geometría de la calzada para luego proceder al modelado del bus mediante dos sistemas dinámicos planos. Por un lado la parte frontal del vehículo considerando la actuación de una barra de torsión o estabilizadora y por otro lado la parte trasera del vehículo considerando la actuación de un sistema de suspensión Panhard. El modelo tridimensional se conforma uniendo los dos modelos planos anteriormente descritos mediante un muelle de torsión con módulo de rigidez constante.

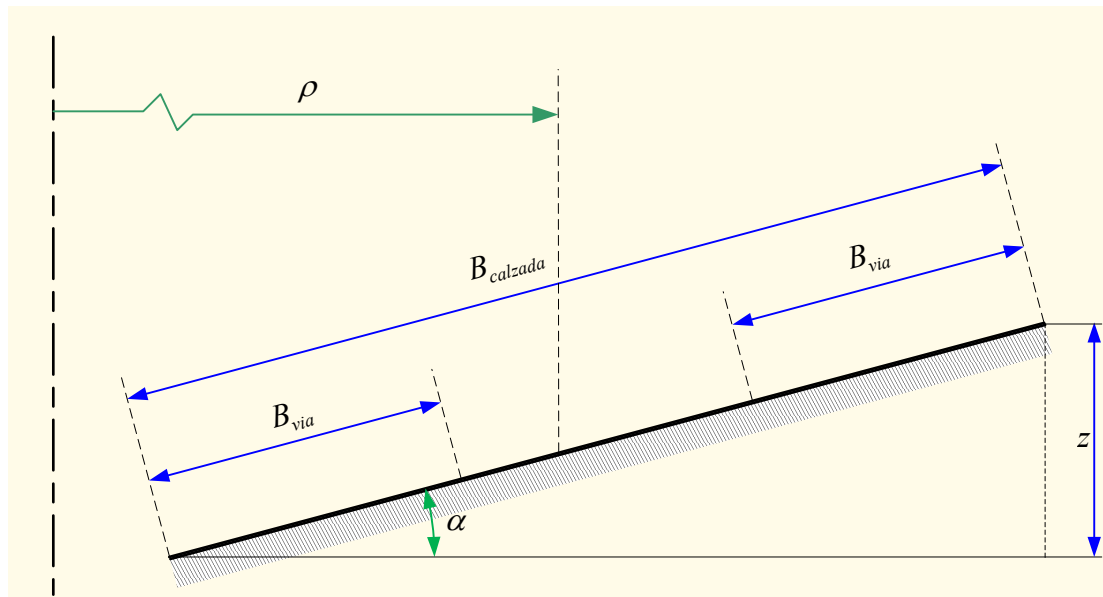
El modelo matemático o virtual se consigue a través de la aplicación del principio de Newton - D'Alembert obteniéndose un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La simulación será realizada utilizando un algoritmo en Matlab el cual será diseñado exclusivamente para este estudio. Finalmente el modelo será ajustado y validado mediante la comparación de los resultados con los obtenidos mediante experimentación en un modelo físico real.

CAPITULO 5 DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LA VÍA

5.1 Parámetros geométricos de la calzada

En la siguiente figura se puede apreciar el modelo de la vía a considerar en esta tesis doctoral:



donde:

- $B_{calzada}$ Ancho total de la calzada [m]
- B_{via} Ancho de un carril de la pista [m]
- z Altura del peralte de la vía [m]
- α Ángulo de peralte [rad]
- ρ Radio de curvatura de la vía [m]

De los parámetros mostrados, es necesario analizar su variación en los diferentes recorridos y tipos de trazados de carreteras; dado que la presente tesis doctoral modela y predice la condición crítica de vuelco y derrape, solo será necesario modelar tramos en los que exista radio de curvatura y peralte. Por ello, en los siguientes apartados se analizarán los efectos del peralte y las características de las curvas de parámetros geométricos variables, o de acuerdo, para poder construir la geometría sobre la cual se simulará el comportamiento dinámico del vehículo.

5.1.1 Efectos cinemáticos y dinámicos del peralte

El peralte se define como una elevación relativa entre ambos extremos de la vía de modo que una componente del peso del vehículo compense la fuerza de inercia originada por la aceleración normal; su longitud se mide entre extremos de la pista según la vertical, tal y como se ve en la [Figura 5-1](#). De acuerdo con la formulación deducida por la dinámica, el módulo de la aceleración normal se encuentra definido por la siguiente ecuación:

$$a_y = \frac{v^2}{\rho} \quad (5.1)$$

- donde:
- a_y Aceleración transversal [m/s²]
 - v Velocidad del vehículo respecto a tierra [m/s]
 - ρ Radio de curvatura [m]

En la siguiente figura se tiene un diagrama de cuerpo libre de un vehículo circulando por una curva peraltada:

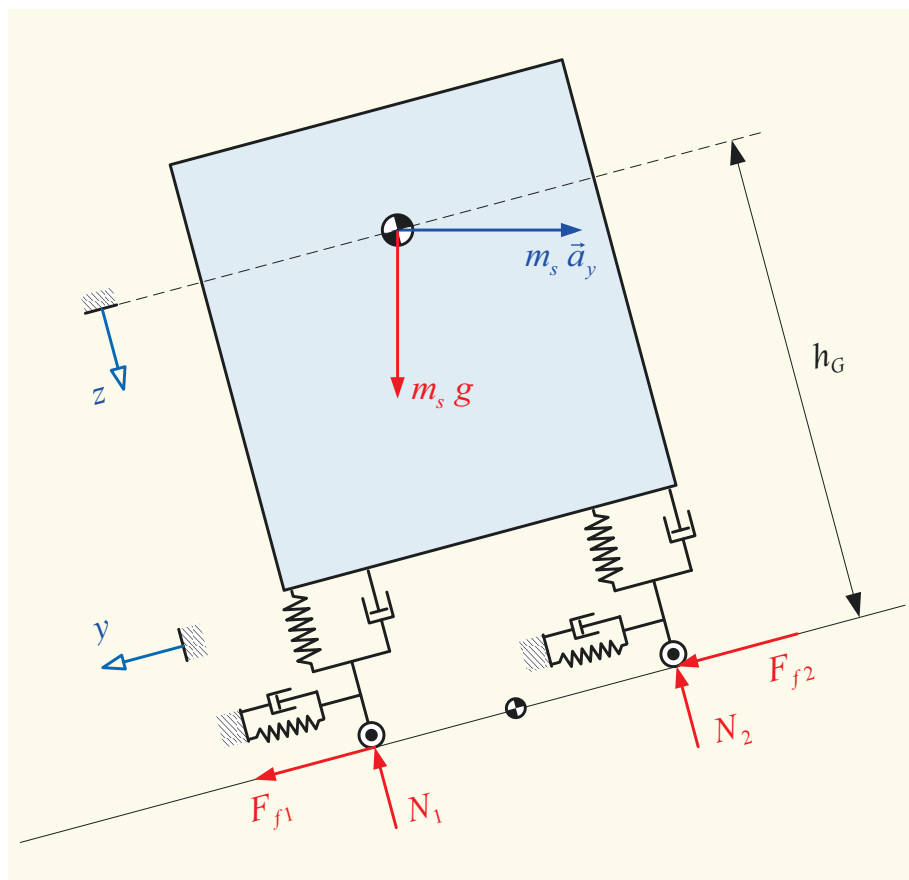


Figura 5-2 Diagrama de cuerpo libre del vehículo.

En esta modelización del vehículo, se considera este por secciones separadas de forma separada para después aplicar el principio de superposición. Se distingue la masa suspendida y la masa no suspendida; las cuales están unidas por sendos muelles y amortiguadores. La masa no suspendida, a su vez, conecta con la calzada mediante los neumáticos, caracterizados estos por rigideces y amortiguamientos verticales y laterales, respectivamente.

Al tomar la curva, existe una aceleración lateral aplicada al centro de gravedad (c.d.g) de la masa no suspendida y de la masa suspendida; la cual es el principal actuante en el fenómeno de vuelco. Adicionalmente ambas inercias provocan reacciones laterales entre neumático y calzada.

En estas condiciones, la notación empleada es la siguiente:

h_G	Altura del centro de gravedad de la cabina respecto a la vía [m]
g	Aceleración de la gravedad [m/s ²]
N_1, N_2	Fuerzas normales entre las ruedas y la vía [N].
F_{f1}, F_{f2}	Fricción lateral [N]
m_T	Masa total [kg]

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, se busca que la resultante del peso y la fuerza de inercia estén sobre el eje z a fin de maximizar la fuerza normal entre los neumáticos y la vía. Para obtener las relaciones geométricas entre la vía y las fuerzas recurrimos nuevamente a la [Figura 5-1](#) de donde:

$$\sin \alpha = \frac{z}{B_{\text{calzada}}} \quad (5.2)$$

$$\tan \alpha = \frac{z}{\sqrt{B_{\text{calzada}}^2 - z^2}} \quad (5.3)$$

Adicionalmente se tiene la siguiente equivalencia:

$$F_i = \frac{v^2}{\rho} m_T \quad (5.4)$$

donde: F_i Fuerza de inercia o centrífuga [N]

Seguidamente recurrimos a un análisis gráfico de fuerzas para el análisis de los efectos del peralte:

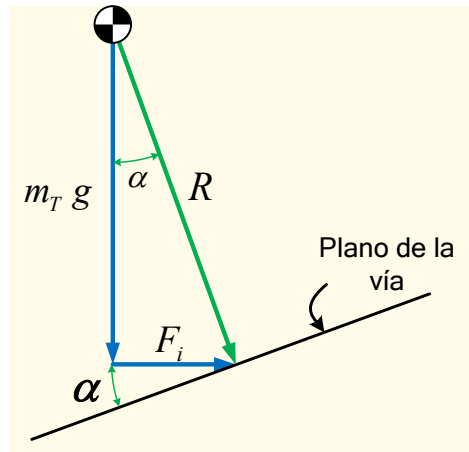


Figura 5-3 Análisis gráfico de fuerzas en suficiencia de peralte.

De acuerdo a la **Figura 5-3**, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\tan \alpha = \frac{F_i}{m_T g} \quad (5.5)$$

Reemplazando (5.4) en (5.5), igualando con (5.3) y despejando z se obtiene:

$$z = \frac{B_{\text{calzada}} v^2}{\sqrt{v^4 + g^2 \rho^2}} \quad (5.6)$$

La relación (5.6) da como resultado el peralte requerido para una determinada velocidad, ancho de vía y radio de curvatura, un análisis similar se puede encontrar en [Gonzales (2010)].

La condición analizada anteriormente se le conoce como suficiencia de peralte; tal como se ve en la **Figura 5-3**, la fuerza resultante es perpendicular al plano de la vía; en cuyo caso, las fuerzas normales entre las ruedas y la pista son máximas; sin embargo, dicha condición suele ser una condición ideal debido a que el peralte compensado corresponde a un valor exacto de velocidad, el cual no es posible mantener constante ya que dicho parámetro varía continuamente, adicionalmente de que no es posible de que todos los vehículos sobre una calzada transiten a la misma velocidad. En la **Figura 5-4** se muestra el caso de un peralte no compensado o falta de peralte; en dicho modelo la masa total del vehículo es considerado como un cuerpo rígido suspendido por los neumáticos.

En dicha **Figura 5-4**:

- R Resultante de la fuerza de inercia y el peso del vehículo [N]
- R_T Componente transversal de la resultante [N]
- R_N Componente normal de la resultante [N]

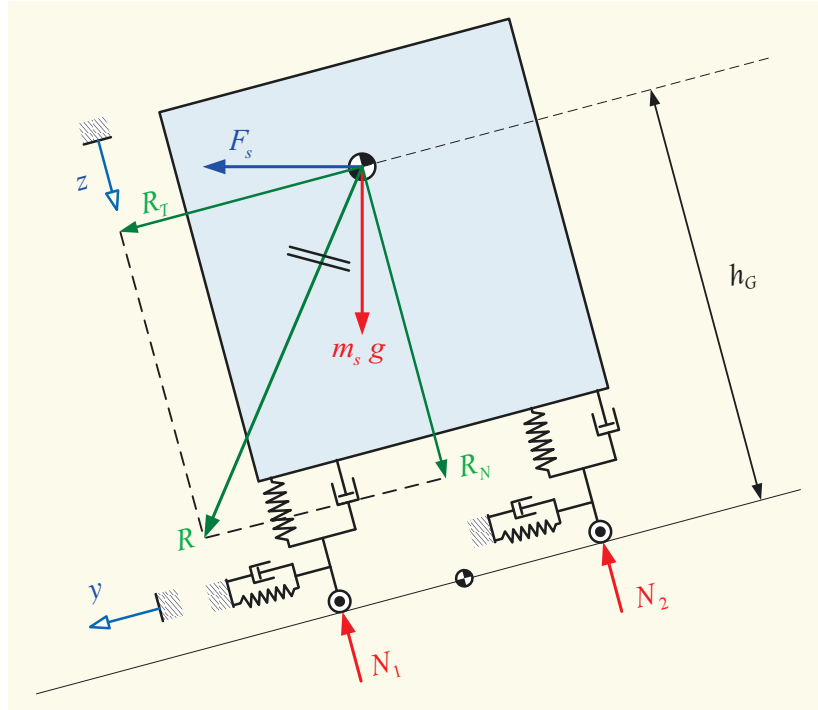


Figura 5-4 Diagrama de cuerpo libre de la masa total del automóvil con peralte no compensado.

$$\vec{W}_s = m_s g [\sin \alpha ; \cos \alpha] \quad (5.8)$$

Sustituyendo las relaciones trigonométricas a partir de las relaciones (5.2) y (5.3) en la suma de las relaciones (5.7) y (5.8); y separando cada componente se obtiene

$$R_T = m_s \left(\frac{g z}{B_{\text{calzada}}} - \frac{v^2 \sqrt{B_{\text{calzada}}^2 - z^2}}{\rho B_{\text{calzada}}} \right) \quad (5.9)$$

$$R_N = m_s \left(\frac{v^2 z}{\rho B_{\text{calzada}}} + \frac{g \sqrt{B_{\text{calzada}}^2 - z^2}}{B_{\text{calzada}}} \right) \quad (5.10)$$

Si a la relación (5.9) se le divide entre la masa del vehículo, se obtiene el valor de la aceleración no compensada; la cual, de acuerdo con [Coenraad (2010)], se recomienda que no sea mayor a 1 m/s^2 por razones de confort y seguridad de los pasajeros al

interior de la cabina. No obstante, dicho valor es regulado mediante la maniobra del vehículo sobre la curva, ya que dicho comportamiento no será modelado, se tomará un valor de sobreaceleración máxima para la parametrización de la vía.

De la expresión se tiene que la aceleración no compensada responde a la siguiente equivalencia:

$$a_{nc} = \left(\frac{g z}{B_{calzada}} - \frac{v^2 \sqrt{B_{calzada}^2 - z^2}}{\rho B_{calzada}} \right) \quad (5.11)$$

donde: a_{nc} Aceleración no compensada $[m/s^2]$

5.1.2 Tramos de acuerdo

Los tramos de acuerdo son segmentos de vía que conectan los tramos curvos de radio constante con tramos rectos. La razón para la existencia de este tipo curvas es evitar la aparición repentina de la aceleración transversal no compensada sobre el vagón; además de permitir la aparición gradual del peralte; caso contrario se tendrían picos de desplazamiento al momento del ingreso a la curva como el resultado mostrado en la **Figura 5-5**.

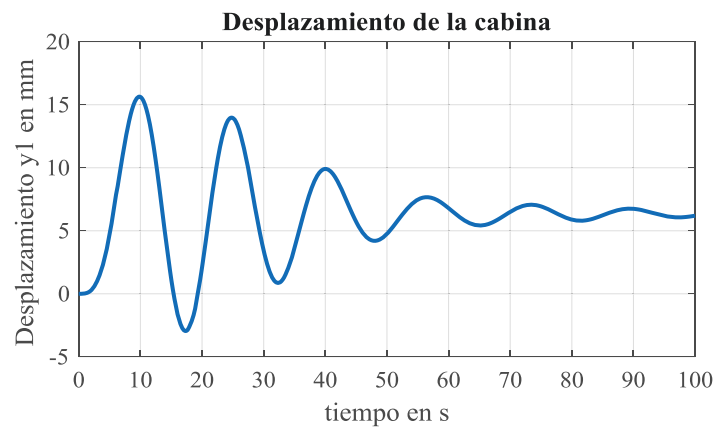


Figura 5-5 Esquema de la perturbación por ingreso repentino.

El gráfico anterior se ha calculado considerando los desplazamientos laterales sufridos por la cabina de un vehículo circulando a una velocidad de 90 km/h en una curva de 100 metros de radio de curvatura.

Con la finalidad de reducir los picos producidos por los efectos de la aceleración no compensada, existen una gran variedad de curvas comúnmente usadas en este tipo de

tramos, entre ellas resaltan la lemniscata de Bernoulli y la clotoide; de las cuales, la clotoide es la de mayor uso por lo que a continuación se presentará su definición matemática y su parametrización.

En resumen, con el objeto de que la conducción sea segura y confortable, se realizan las entradas y salidas de una carretera, siguiendo trazados cuya geometría responde a este tipo de funciones, denominadas curva de acuerdo.

La clotoide se define matemáticamente mediante la siguiente ecuación:

$$\rho(s) \cdot s = A^2 \tag{5.12}$$

- donde:
- A^2 Coeficiente de la clotoide.
 - s Longitud de arco recorrido.
 - ρ Radio de la curvatura variable con la longitud de arco.

De acuerdo a la relación (5.12) se puede afirmar que la clotoide relaciona de manera lineal el radio de curvatura instantáneo con la longitud de arco recorrido desde el inicio de la curva hasta el punto de análisis; lo cual se puede interpretar de que a medida que el vehículo avanza, una magnitud del radio de la curva disminuye proporcionalmente a la longitud de arco recorrido y una constante:

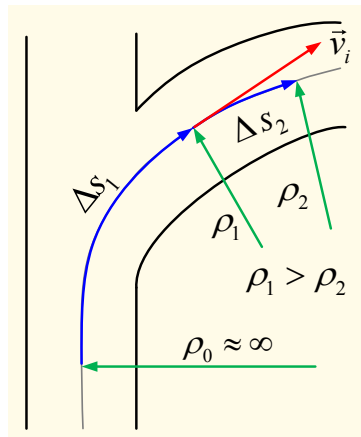


Figura 5-6 Salida de un tramo recto de calzada.

La siguiente figura muestra la gráfica de una curva clotoide de parámetros arbitrarios obtenida mediante aproximaciones numéricas de las expresiones deducidas más adelante e integradas haciendo uso del software comercial Mathematica® y de un algoritmo de generación. La gráfica corresponde a valores arbitrarios seleccionados

únicamente para que sea posible apreciar la forma curva, lo cual se puede apreciar en la **Figura 5-7**:

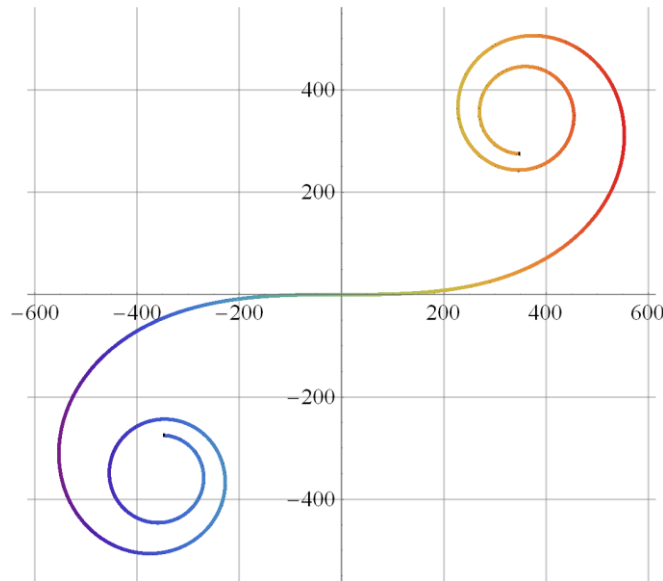


Figura 5-7 Curva Clotoide $A = 400$.

La ecuación (5.12) puede ser parametrizada mediante deducciones matemáticas presentadas en [Blanch (2013)]. El resultado de final de dichas deducciones origina las ecuaciones (5.13) y (5.14) para las coordenadas x e y en términos de la longitud de arco recorrido:

$$x(s) - x(s_0) = \int_{s_0}^s \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds \quad (5.13)$$

$$y(s) - y(s_0) = \int_{s_0}^s \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds \quad (5.14)$$

Si se sustituye $s_0 = 0$ y el punto inicial de la integración en el origen de un sistema cartesiano; y sumando las expresiones (5.13) y (5.14) se obtiene:

$$\vec{r}(s) = [x(s) ; y(s)] = \left[\int_{s_0}^s \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds ; \int_{s_0}^s \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds \right] \quad (5.15)$$

Las integrales mostradas en la relación (5.15), corresponden a las llamadas funciones de Fresnel; la cuales siendo simplificadas dan como resultado la siguiente expresión:

$$\vec{r}(s) = [x(s); y(s)] = A\sqrt{\pi} \left[\text{FresnelC} \left(\frac{s}{A\sqrt{\pi}} \right); \text{FresnelS} \left(\frac{s}{A\sqrt{\pi}} \right) \right] \quad (5.16)$$

donde: $\vec{r}(s)$ Vector posición de cualquier punto de la curva.

FresnelC Función coseno Fresnel.

FresnelS Función seno Fresnel.

Se puede apreciar que la relación (5.16) es determinada por las llamadas funciones de Fresnel, las cuales son tratadas de manera numérica ya que no existe solución analítica para ellas. Debido ello, el cálculo de la integral las funciones resultantes se realiza mediante una aproximación basada en las series de Taylor; e integrando los resultados de la expansión de la ecuación (5.15), se obtiene las siguientes relaciones matemáticas para $\vec{r}(s)$:

$$x \approx s \quad (5.17)$$

$$y \approx \frac{s^3}{6A^2} \quad (5.18)$$

Si se reemplaza (5.17) en (5.18) se obtiene:

$$y \approx \frac{x^3}{6A^2} \quad (5.19)$$

La relación (5.19) es conocida como parábola cúbica, la cual solo puede ser aplicada para relaciones de s/ρ pequeñas; en cualquier otro caso se debe usar la formulación (5.16) para el trazado ya que la error de la aproximación es considerable.

Lo siguiente será definir los siguientes parámetros de la clotoide:

Longitud total de la clotoide s_b

Coefficiente A^2

Como se mencionó, una de las funciones de las curvas de acuerdo es evitar la aparición repentina de la aceleración no compensada, por ello se debe evaluar una magnitud denominada sobreaceleración, la cual representa la tasa de variación de la aceleración en el tiempo; en el sector ferroviario, se tiene como restricción de que la sobreaceleración de la aceleración no compensada no debe ser mayor a $0,2 \text{ m/s}^3$ de acuerdo a la recomendación dada en [Coenraad (2010)]; no obstante, en el sector

automovilístico, la sobreaceleración suele compensarse maniobrando con el volante la dirección del vehículo. Sin embargo, para efectos de la simulación y desarrollo del algoritmo, se fijará dicho valor como un parámetro de entrada, ya que la maniobra del automóvil no está siendo simulada, debido a que se trata de un parámetro aleatorio. Para determinar el mínimo valor de longitud de curva requerido, se debe conocer el valor final de la aceleración no compensada límite en el tramo de radio constante con lo que se define la siguiente relación:

$$\frac{a_{\text{fnc}} v_D}{0,2} < s_b \quad (5.20)$$

donde a_{fnc} Aceleración final no compensada [m/s²]
 v_D Velocidad de diseño de la curva [m/s]

La relación (5.20) representa una restricción al mínimo valor que puede tomar la longitud de la curva; lo siguiente es conocer el coeficiente de la clotoide, el cual se puede determinar de la definición de la clotoide y del radio de curvatura a alcanzar

$$\rho_b = \frac{A^2}{s_b} \quad (5.21)$$

donde: ρ_b Radio de curvatura final en [m].

A partir de las relaciones (5.21) y (5.20) se puede definir los parámetros de la clotoide con lo cual quedaría completamente definida. Como se puede apreciar en las relaciones mostradas, la clotoide parte desde un radio de curvatura infinito, propio de un tramo recto, hasta un valor de radio constante por lo que las funciones de radio de curvatura y peralte son las siguientes:

$$\rho(s) = \frac{A^2}{s} \quad (5.22)$$

$$z(s) = s \frac{z_b}{s_b} \quad (5.23)$$

donde: z_b Peralte final en la curva de radio constante [mm]

5.2 Parametrización de la vía de circulación

Una vez conocidas las características geométricas de la vía que intervienen en el comportamiento dinámico del vehículo, es necesario construir de manera paramétrica la calzada por la cual circula el vehículo y sobre la cual se realizará la simulación ya mencionada; dado que la simulación dinámica tiene como parámetro el tiempo, se debe tomar este como el parámetro con el cual se establece el valor instantáneo de cada característica geométrica.

De lo anterior se tienen las siguientes equivalencias para el peralte y el radio de curvatura instantáneos:

$$\rho(t) = \frac{A^2}{vt} \quad (5.24)$$

$$z(t) = vt \frac{z_b}{s_b} \quad (5.25)$$

Lo siguiente es establecer los tramos que la componen; ya que se desea analizar el vuelco y derrape del vehículo, únicamente se requerirá analizar una curva de acuerdo conectada con una curva de radio constante; ya que en una curva de tramo recto, no se tiene el efecto de la aceleración lateral.

Con respecto a la longitud de la curva clotoide; esta debe ser elegida de manera discrecional siempre y cuando esta sea mayor a la longitud de la curva clotoide mínima obtenida mediante la expresión (5.20). De lo anterior, y de las relaciones (5.11) y (5.20), se tiene que:

$$B_{calzada} = B_{via} \times n_{carriles} \quad (5.26)$$

$$\frac{\left(\frac{gz}{B_{calzada}} - \frac{v^2 \sqrt{B_{calzada}^2 - z^2}}{\rho B_{calzada}} \right) v_D}{w_{max}} < s_{b_min} \quad (5.27)$$

Por lo que los parámetros de entrada serán

z_b	Peralte de la curva de radio constante [mm]
ρ_b	Radio de curvatura constante [m]
B_{via}	Ancho de vía (carril) [mm]

n_{carriles}	Número de carriles de la pista
v	Velocidad del vehículo en [m/s]
w_{max}	Sobreaceleración máxima permitida en la clotoide [m/s ³]
s_{b_min}	Longitud mínima de la clotoide [m]

Lo siguiente es el cálculo de parámetro A^2 de la clotoide por lo que se recurre a la expresión

$$A^2 = s_{b_min} \rho_b \quad (5.28)$$

El tiempo recorrido sobre la clotoide:

$$t_{\text{clotho}} = \frac{s_{b_min}}{v} \quad (5.29)$$

Lo restante que queda especificar la longitud de la curva de radio constante que no sería otra cosa que la diferencia entre la longitud total de la vía de simulación dada de manera arbitraria y la longitud de la clotoide calculada en (5.27).

Para efecto de la simulación, el algoritmo calcula y construye una matriz con todos los valores de ángulo de peralte y radio de curvatura; lo cuales serán aplicados en la siguiente sección en el análisis dinámico del vehículo.

CAPITULO 6 MODELAMIENTO DINÁMICO DEL VEHÍCULO

Por razones de facilitar el análisis de la dinámica del vehículo, se ha dividido este en dos secciones, frontal y posterior; las cuales serán acopladas, más adelante, mediante una rigidez torsional perteneciente a la estructura del vehículo. En el caso de la sección frontal, la masa no suspendida, la cual comprende elementos tales como la masa de los neumáticos y demás componentes de la dirección; se modela como un par de masas puntuales las cuales únicamente poseen un grado de libertad en la dirección perpendicular al plano de la vía.

6.1 Sección frontal

Se tiene el siguiente modelo dinámico de la sección frontal del vehículo:

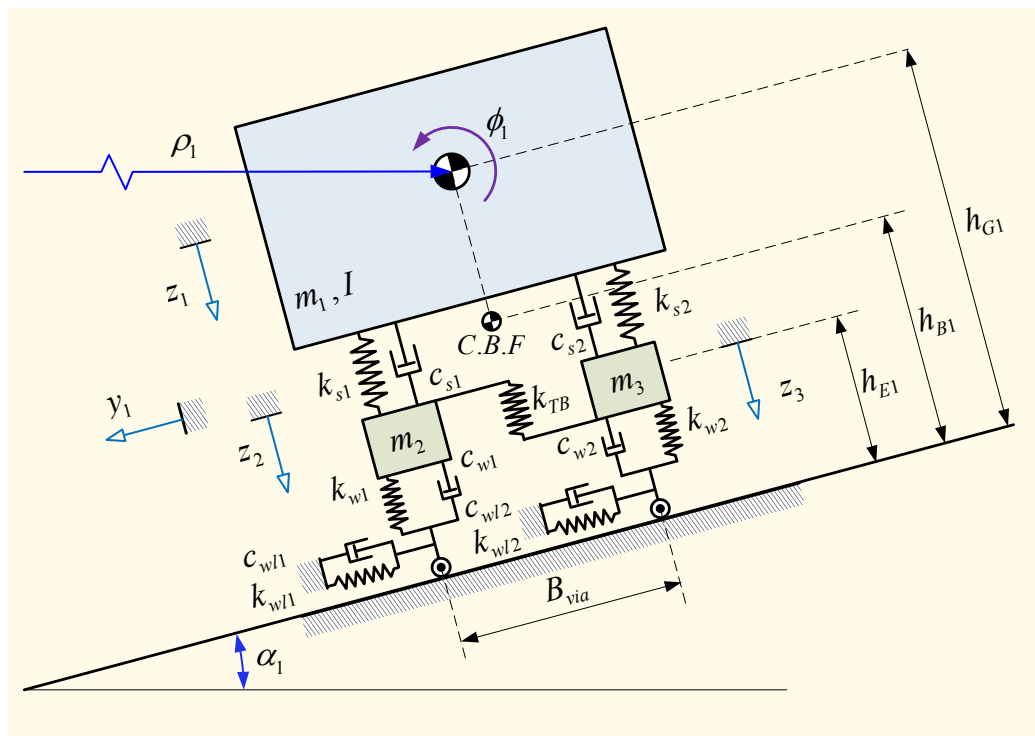


Figura 6-1 Modelo dinámico de la sección frontal del vehículo.

De acuerdo a lo mostrado se tiene la siguiente nomenclatura:

B_{via} Ancho de vía (Distancia entre ruedas) [m].

C.B.F Centro de balanceo frontal

c_{s1} Constante de amortiguamiento del fuelle neumático izquierdo [N·s/m]

c_{s2}	Constante de amortiguamiento del fuelle neumático derecho [N·s/m]
c_{wl1}	Constante de amortiguamiento lateral del neumático izquierdo [N·s/m]
c_{wl2}	Constante de amortiguamiento lateral del neumático derecho [N·s/m]
c_{w1}	Constante de amortiguamiento vertical del neumático izquierdo [N·s/m]
c_{w2}	Constante de amortiguamiento vertical del neumático derecho [N·s/m].
h_{B1}	Altura del “roll center” respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
h_{E1}	Altura de equilibrio estático de la masa no suspendida para un ángulo de peralte aleatorio respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
h_{G1}	Altura de equilibrio estático de la masa suspendida para un ángulo de peralte aleatorio respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
k_{s1}	Constante de rigidez instantánea del fuelle neumático izquierdo [N/m]
k_{s2}	Constante de rigidez instantánea del fuelle neumático derecho [N/m]
k_{w1}	Constante de rigidez vertical del neumático izquierdo [N/m]
k_{w2}	Constante de rigidez vertical del neumático derecho [N/m]
k_{TB}	Constante de rigidez de la barra de torsión en [N/m]
k_{wl1}	Constante de rigidez lateral del neumático izquierdo [N/m]
k_{wl2}	Constante de rigidez lateral del neumático derecho [N/m]
m_1	Masa de la cabina del vehículo (masa suspendida) [kg]
m_2	Masa de la dirección izquierda (masa no suspendida) [kg]
m_3	Masa de la dirección derecha (masa no suspendida) [kg]
I_1	Inercia de la masa suspendida respecto al centro de gravedad [kg·m ²]
y_1	Desplazamiento horizontal respecto a su posición de equilibrio estático [m]
z_1	Desplazamiento vertical de la masa suspendida respecto a su posición de equilibrio estático [m]
z_2	Desplazamiento vertical de la masa no suspendida izquierda respecto a su posición de equilibrio estático [m]

- z_3 Desplazamiento vertical de la masa suspendida respecto a su posición de equilibrio estático [m]
- α_1 Ángulo de peralte instantáneo de la sección frontal [rad]
- ϕ_1 Ángulo rotado por la sección frontal de la cabina en torno al eje longitudinal del vehículo [rad]
- ρ_1 Radio de curvatura instantáneo de la sección frontal [m]

Tal modelo se basa en uno mostrado tanto en [Rajamani (2012)] como por [Aparicio (2012)]; dicha representación ha sido modificada en esta tesis doctoral a fin de considerar las rigideces y amortiguamientos de las ruedas y suspensión para de obtener un comportamiento más real del modelo. A continuación, se debe analizar cada masa por separado obteniendo el sistema de ecuaciones diferenciales de cada sección:

6.1.1 Análisis de la cabina frontal

Aplicando el principio de D'Alembert se tiene:

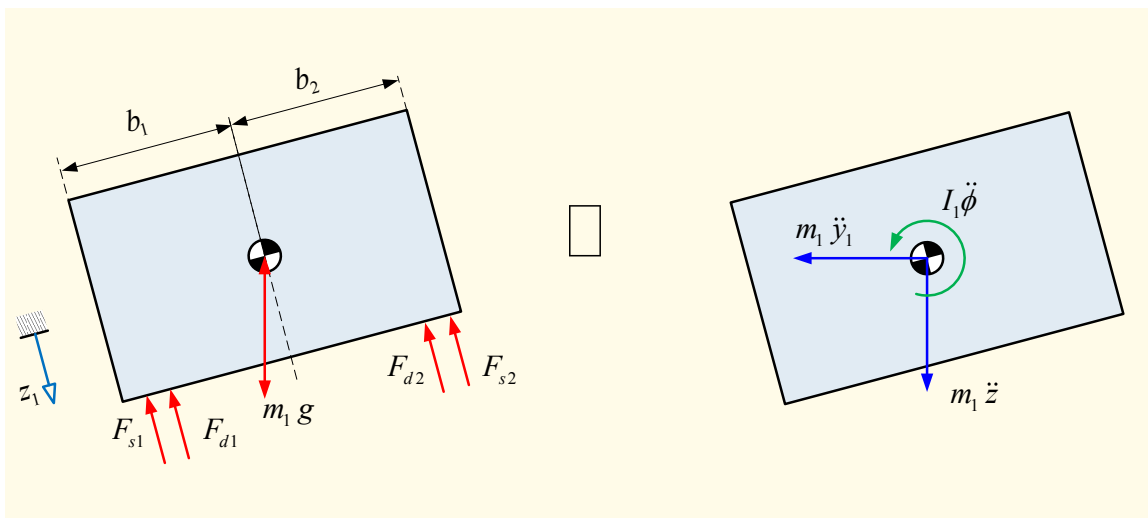


Figura 6-2 Diagrama de cuerpo libre de la sección frontal.

- donde: b_1 Distancia del centro de gravedad a la suspensión izquierda [m]
- b_2 Distancia del centro de gravedad a la suspensión izquierda [m]
- F_{s1} Fuerza ejercida por el fuelle neumático izquierdo [N]
- F_{s2} Fuerza ejercida por el fuelle neumático derecho [N]

- F_{d1} Fuerza de amortiguamiento ejercida por el fuelle neumático izquierdo [N]
- F_{d2} Fuerza de amortiguamiento ejercida por el fuelle neumático derecho [N]
- T_{Est} Torque originado por la estructura del vehículo en [N·m]

De los parámetros geométricos de la vía, definidos en el capítulo anterior, se puede apreciar que la aceleración en la dirección y no es otra cosa que la aceleración normal o centrípeta debido al tránsito del vehículo sobre la vía curva; por ello se puede decir que la única magnitud desconocida es la aceleración en la dirección z ; sendas aceleraciones, como se aprecia en la siguiente **Figura 6-3**, pueden ser descompuestas en dos componentes paralela y normal a la superficie de la vía peraltada:

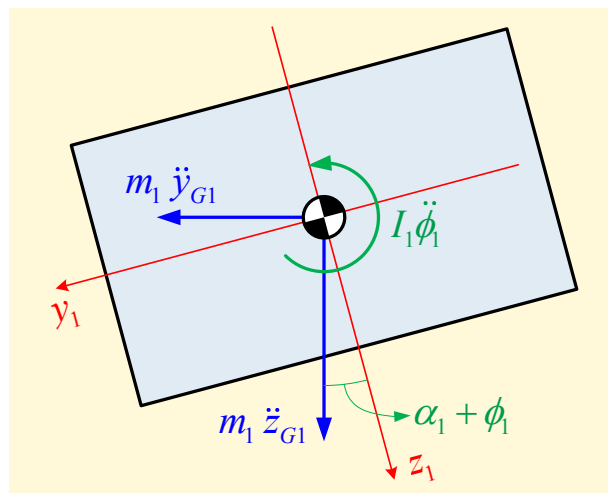


Figura 6-3 Descomposición de aceleraciones.

Donde la aceleración normal o centrípeta responde a la siguiente equivalencia:

$$m_1 \ddot{y}_{G1} = m_1 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \tag{6.1}$$

Proyectando ambas aceleraciones sobre los ejes normal y paralelo a la vía; y considerando la rotación de la cabina en torno a su eje longitudinal, se obtienen las siguientes equivalencias:

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 \ddot{z}_{G1} \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] + m_1 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \sin[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \quad (6.2)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 \ddot{z}_{G1} \sin[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] + m_1 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \quad (6.3)$$

De ello se tiene que las sumatorias de fuerzas en las direcciones y_1 y z_1 son equivalentes a las expresiones (6.2) y (6.3). Dado que el principal interés es conocer el valor del desplazamiento en las direcciones y_1 y z_1 , las expresiones mencionadas se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$m_1 \ddot{z}_{G1} \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] = m_1 \ddot{z}_1 - m_1 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \sin[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \quad (6.4)$$

$$m_1 \ddot{z}_{G1} \sin[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] = m_1 \ddot{y}_1 + m_1 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \quad (6.5)$$

Con ello se consigue reemplazar la aceleración vertical de la cabina en términos de valores conocidos y de las incógnitas buscadas. Lo siguiente es definir las fuerzas de los actuadores, las cuales son proporcionalmente lineales al desplazamiento y velocidad; y para efectos del presente análisis, las constantes de proporcionalidad lineales de amortiguamiento y rigidez de los actuadores serán consideradas como constantes; lo cual no es el caso real, ya que al tratarse de actuadores neumáticos, dichos coeficientes varían en función de la carga soportada por el actuador. A fin de conocer las fuerzas ejercidas por los actuadores, se debe determinar los desplazamientos de los extremos del actuador a fin de establecer la carga ejercida ello se realiza en el siguiente análisis geométrico mostrado en la siguiente [Figura 6-4](#) donde es posible apreciar los grados de libertad de la cabina frontal:

Dado que las masas no suspendidas solo poseen desplazamientos normales al plano de la vía peraltada; la fuerza de lo actuadores vienen dadas por las siguientes equivalencias:

$$F_{s1} = k_{s1} (z_1 + b_1 \sin \phi_1 - z_2) \quad (6.6)$$

$$F_{s2} = k_{s2} (z_1 - b_2 \sin \phi_1 - z_3) \quad (6.7)$$

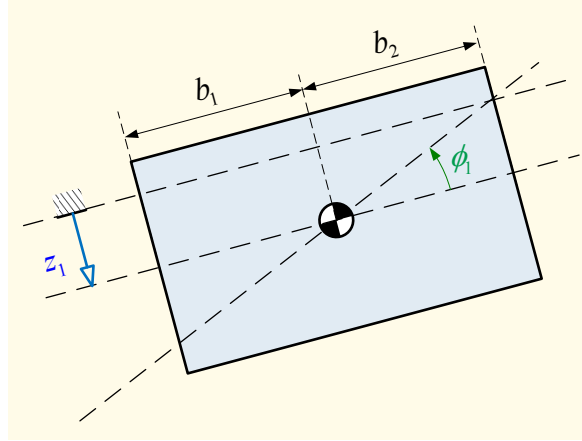


Figura 6-4 Grados de libertad de la cabina.

Las expresiones (6.6) y (6.7) se pueden linealizar mediante series de Taylor, con lo cual se tendría las expresiones:

$$F_{s1} = k_{s1}(z_1 + b_1 \phi_1 - z_2) \quad (6.8)$$

$$F_{s2} = k_{s2}(z_1 - b_2 \phi_1 - z_3) \quad (6.9)$$

Seguidamente, la respuesta de los amortiguadores está ligada a la velocidad relativa que poseen los cuerpos ligados por ella, por lo que la fuerza ejercida por ellos sería la derivada en el tiempo de las expresiones de desplazamiento multiplicadas por el coeficiente de amortiguamiento del actuador:

$$F_{d1} = c_1(\dot{y}_1 + b_1 \dot{\phi}_1 - \dot{y}_2) \quad (6.10)$$

$$F_{d2} = c_2(\dot{y}_1 - b_2 \dot{\phi}_1 - \dot{y}_3) \quad (6.11)$$

Finalmente se puede expresar la ecuación diferencial de la cabina en la dirección normal a la vía:

$$m_1 \ddot{z}_1 - m_1 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \sin[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] = -F_{s1} - F_{s2} - F_{d1} - F_{d2} + m_1 g \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] - \delta_{est}(k_{s1} + k_{s2}) \quad (6.12)$$

donde: δ_{est} Deformación de los actuadores en condición estática [m].

Debido a que la orientación de los actuadores cambia conjuntamente con el ángulo de peralte sobre la curva de acuerdo (Clotoide), el valor de la deformación estática de los actuadores cambia en el tiempo, por lo que esta no se compensa completamente con la componente normal del peso. Debido a ello, se debe considerar dicha componente del peso como una fuerza excitatriz del sistema; lo anterior, se puede simplificar de la siguiente manera:

$$m_1 g \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] - \delta_{est}(k_{s1} + k_{s2}) = m_1 g \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] - m_1 g \cos[\alpha_1(t-1) + \phi_1(t-1)] \quad (6.13)$$

Lo mismo con las masas no suspendidas; con la excepción de que estas no poseen ángulo de giro respecto al eje longitudinal:

$$m_2 g \cos[\alpha_1(t)] - \delta_{est}(k_{w1}) = m_2 g \cos[\alpha_1(t)] - m_2 g \cos[\alpha_1(t-1)] \quad (6.14)$$

$$m_3 g \cos[\alpha_1(t)] - \delta_{est}(k_{w3}) = m_3 g \cos[\alpha_1(t)] - m_3 g \cos[\alpha_1(t-1)] \quad (6.15)$$

Cabe mencionar, que de tal efecto es casi nulo ya que la variación del peralte es muy pequeña; sin embargo, a fin de realizar un modelamiento más cercano a la realidad se considerará dicho efecto. Finalmente, la ecuación para la sección frontal de la cabina quedaría definida de la siguiente manera:

$$m_1 \left(\ddot{z}_1 - \frac{v^2}{\rho_1(t)} \sin[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \right) = - \left[k_{s1}(z_1 + b_1 \phi_1 - z_2) + c_1(\dot{z}_1 + b_1 \dot{\phi}_1 - \dot{z}_2) \right] - \left[k_{s2}(z_1 - b_2 \phi_1 - z_3) + c_2(\dot{z}_1 - b_2 \dot{\phi}_1 - \dot{z}_3) \right] + m_1 g \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] - m_1 g \cos[\alpha_1(t-1) + \phi_1(t-1)] \quad (6.16)$$

Con respecto a la dirección horizontal, se tiene por condición que el vehículo no derrapa en ninguna de las secciones; por lo que las fuerzas que intervienen directamente en la determinación de la fuerza de fricción son las componentes del peso y las fuerzas de inercia de cada masa.

Lo anterior puede ser visto en el diagrama de cuerpo libre de toda la sección presentado más adelante Seguidamente, se debe determinar la ecuación diferencial que gobierna el giro de la sección; dado que la sección está en rotación respecto al eje longitudinal del

vehículo, es necesario establecer de manera teórica, un centro de rotación fijo de modo que se puedan establecer la ecuación respecto a un punto inercial; para ello se tiene el concepto del centro de balanceo; para el cual se considerará como un punto; ya que de manera real no lo sería debido a que el centro de balanceo varía debido a los desplazamientos de los componentes del sistema de suspensión; no obstante, dicha variación no es considerable, por lo que dicho punto puede ser considerado como un punto fijo. Dicho centro de balanceo se mostró en la [Figura 6-1](#); por lo que el análisis cinético de la cabina respecto a éste se muestra en la [Figura 6-5](#).

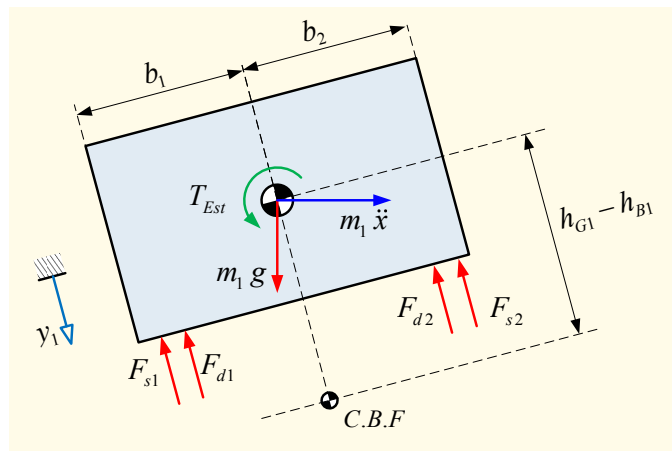


Figura 6-5 Momento respecto al centro de balanceo.

De la figura anterior, y tomando la sumatoria de momentos respecto al centro de balanceo, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 \left[I_1 + m_1 (h_{G1} - h_{B1})^2 \right] \ddot{\phi}_1 = & b_2 \left[k_{s2} (z_1 - b_2 \phi_1 - z_3) + c_2 (\dot{z}_1 - b_2 \dot{\phi}_1 - \dot{z}_3) \right] \\
 & - b_1 \left[k_{s1} (z_1 + b_1 \phi_1 - z_2) + c_1 (\dot{z}_1 + b_1 \dot{\phi}_1 - \dot{z}_2) \right] \\
 & - \left[\left(m_1 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \right) (h_{G1} - h_{B1}) \right] \\
 & + \left[(m_1 g \sin \alpha_1(t)) (h_{G1} - h_{B1}) \right] + T_{est}
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Tal ecuación considera un momento resistente, el cual es originado por la rigidez torsional de la estructura del vehículo; dicho momento se denota por T_{est} y su cálculo se muestra en las subsiguientes secciones.

6.1.2 Diagramas de cuerpo libre de las masas no suspendidas

Lo siguiente es construir las ecuaciones de las masas no suspendidas; tales masas como se mencionó anteriormente se consideran como masas puntuales, las cuales están unidas por la barra de torsión; cuyo efecto se modela como una fuerza aplicada sobre sendas masas en sentidos puestos a fin de modelar el efecto de esta. El punto de partida es análisis de fuerzas de cada masa no suspendida para lo cual se tienen los correspondientes diagramas de equivalencia según D'Alembert. Ver [Figura 6-6](#) y [Figura 6-7](#), respectivamente.

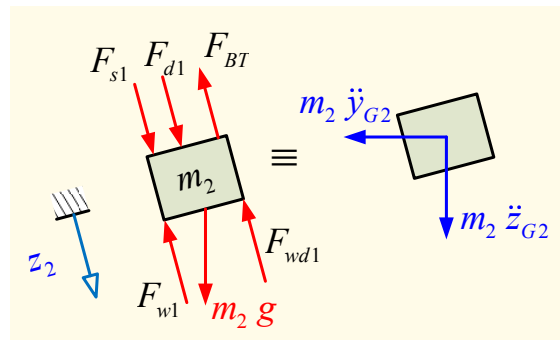


Figura 6-6 Diagrama de cuerpo libre de la masa no suspendida izquierda.

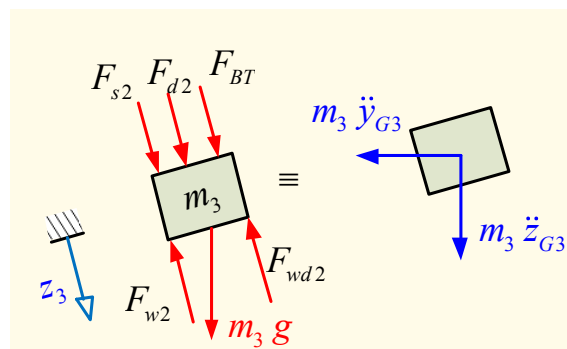


Figura 6-7 Diagrama de cuerpo libre de la masa no suspendida derecha.

- donde:
- F_{BT} Fuerza ejercida por la barra de torsión [N]
 - F_{w1} Fuerza ejercida neumático izquierdo [N]
 - F_{w2} Fuerza ejercida neumático derecho [N]
 - F_{wd1} Fuerza de amortiguamiento ejercida neumático izquierdo [N].
 - F_{wd2} Fuerza de amortiguamiento ejercida neumático derecho [N]

Desarrollando un análisis similar al de la masa suspendida o cabina; en el cual se descomponen las aceleraciones vertical y transversal o centrípeta sobre los ejes normal y paralelo a la vía; con la diferencia que el ángulo que forma los ejes normal y paralelo a la vía respecto al eje vertical y transversal es únicamente el ángulo de peralte en dicho segmento de vía; ya la masa suspendida no posee rotación; de acuerdo a lo mencionado, se obtienen las siguientes gráficas:

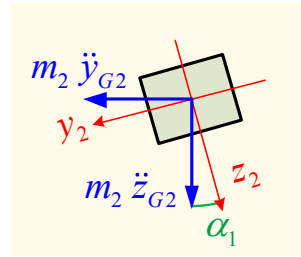


Figura 6-8 Descomposición de aceleraciones – masa no suspendida izquierda.

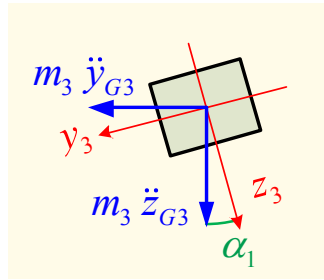


Figura 6-9 Descomposición de aceleraciones – masa no suspendida derecha.

De lo cual se obtiene ecuaciones similares a las expresiones (6.4) y (6.5) para la masa no suspendida izquierda:

$$m_2 \ddot{y}_{G2} = m_2 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \quad (6.18)$$

$$m_2 \ddot{z}_{G2} \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] = m_2 \ddot{z}_2 - m_2 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \sin[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \quad (6.19)$$

$$m_2 \ddot{z}_{G2} \sin[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] = m_2 \ddot{y}_2 + m_2 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \quad (6.20)$$

De igual modo para la masa suspendida derecha:

$$m_3 \ddot{y}_{G3} = m_3 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \quad (6.21)$$

$$m_3 \ddot{z}_{G3} \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] = m_3 \ddot{z}_3 - m_3 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \sin[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \quad (6.22)$$

$$m_3 \ddot{z}_{G3} \sin[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] = m_3 \ddot{y}_3 + m_3 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \quad (6.23)$$

Seguidamente, se tienen las siguientes ecuaciones para las fuerzas verticales ejercidas por las ruedas y por la barra de torsión

$$F_{TB} = k_{TB} (z_2 - z_3) \quad (6.24)$$

$$F_{w1} = k_{w1} z_2 \quad (6.25)$$

$$F_{wd1} = c_{w1} \dot{z}_2 \quad (6.26)$$

$$F_{w2} = k_{w2} z_3 \quad (6.27)$$

$$F_{wd2} = c_{w2} \dot{z}_3 \quad (6.28)$$

De todas las expresiones ya mencionadas; se obtiene la ecuación diferencial del movimiento de la masa no suspendida izquierda:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{z}_2 - m_2 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \sin[\alpha_1(t)] &= k_{s1} (z_1 + b_1 \phi_1 - z_2) + c_1 (\dot{z}_1 + b_1 \dot{\phi}_1 - \dot{z}_2) \\ &\quad - k_{TB} (z_2 - z_3) - k_{w1} y_2 - c_{w1} \dot{z}_2 \\ &\quad + m_2 g \cos[\alpha_1(t)] - m_2 g \cos[\alpha_1(t-1)] \end{aligned} \quad (6.29)$$

De forma similar para la masa no suspendida derecha

$$\begin{aligned} m_3 \ddot{z}_3 - m_3 \frac{v^2}{\rho_1(t)} \sin[\alpha_1(t)] &= k_{s2} (z_1 - b_1 \phi_1 - z_3) + c_2 (\dot{z}_1 - b_1 \dot{\phi}_1 - \dot{z}_3) \\ &\quad + k_{TB} (z_2 - z_3) - k_{w2} z_3 - c_{w2} \dot{z}_3 \\ &\quad + m_3 g \cos[\alpha_1(t)] - m_3 g \cos[\alpha_1(t-1)] \end{aligned} \quad (6.30)$$

6.1.3 Análisis lateral de la sección frontal

Finalmente, se debe modelar el desplazamiento paralelo al plano de la vía peraltada por lo que se recurre al siguiente diagrama de cuerpo libre; así mismo, se requiere calcular el valor instantáneo de las normales en cada uno de los neumáticos a fin de predecir si el vuelco del automóvil se inicia en la sección frontal del mismo; así como el valor de la fuerza de fricción en los neumáticos, que para efectos de simplificación será modelado mediante el concepto de la fricción seca de Coulomb:

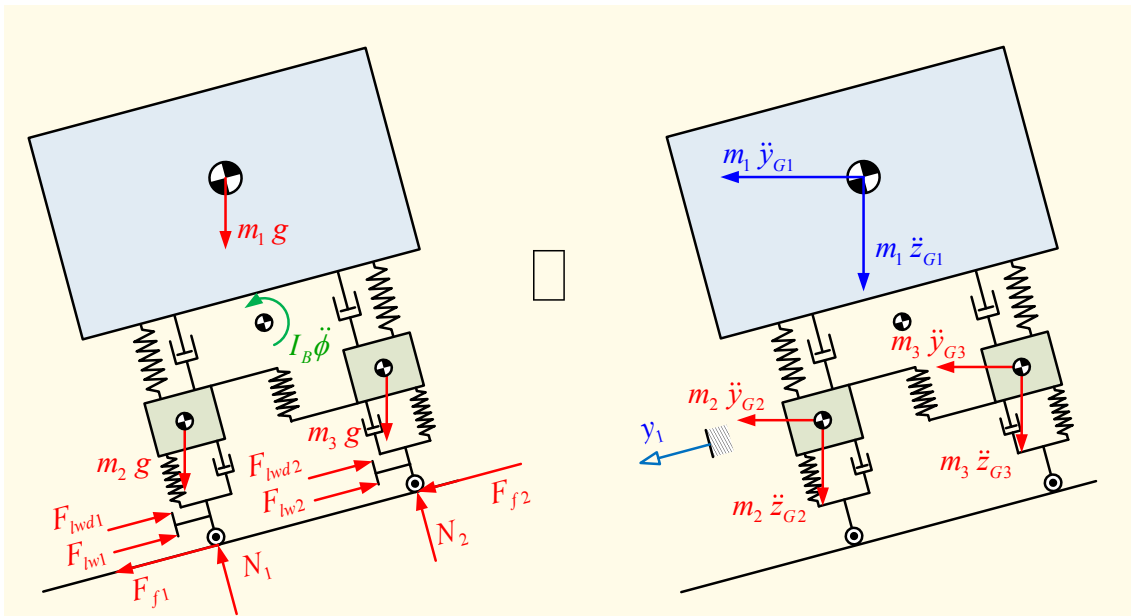


Figura 6-10 Diagrama de cuerpo libre de la sección frontal del vehículo.

- donde:
- F_{fw1} Fuerza ejercida por la rigidez lateral del neumático izquierdo [N]
 - F_{fw2} Fuerza ejercida por la rigidez lateral del neumático derecho [N]
 - F_{fwd1} Fuerza de amortiguamiento lateral ejercida por el neumático izquierdo [N]
 - F_{fwd2} Fuerza de amortiguamiento lateral ejercida por el neumático derecho [N]

Tales fuerzas se corresponden con las siguientes ecuaciones:

$$F_{fw1} = k_{wl1} y_1 \tag{6.31}$$

$$F_{fw2} = k_{wl2} y_1 \tag{6.32}$$

$$F_{hvd1} = c_{wl1} \dot{y}_1 \quad (6.33)$$

$$F_{hvd2} = c_{wl2} \dot{y}_1 \quad (6.34)$$

Dado que se trata de evitar el derrape del vehículo, se asume; de manera teórica, que el vehículo no posee desplazamiento en la dirección paralela al plano. Por ello las expresiones anteriores poseen magnitud nula y en consecuencia se obtiene:

$$y_1 = \dot{y}_1 = \ddot{y}_1 = 0 \quad (6.35)$$

De lo anterior, se tiene que una de las componentes de la fuerza de inercia vertical posee una componente paralela a la vía, la cual se obtiene al aplicar la ecuación (6.35) en las expresiones (6.23), (6.20) y (6.3) con lo cual quedarían expresadas de la siguiente manera:

$$F_{l1i} = \frac{m_1 v^2}{\rho_1(t)} \cos[\alpha_1(t) + \phi_1(t)] \quad (6.36)$$

$$F_{l2i} = \frac{m_2 v^2}{\rho_1(t)} \cos[\alpha_1(t)] \quad (6.37)$$

$$F_{l3i} = \frac{m_3 v^2}{\rho_1(t)} \cos[\alpha_1(t)] \quad (6.38)$$

Con el fin de simplificar expresiones; las componentes del peso en las direcciones vertical y horizontal, se denotan de la siguiente manera:

$$W_{v1} = m_1 g \cos(\alpha_1 + \phi_1) \quad (6.39)$$

$$W_{h1} = m_1 g \sin(\alpha_1 + \phi_1) \quad (6.40)$$

$$W_{v2} = m_2 g \cos(\alpha_1) \quad (6.41)$$

$$W_{h2} = m_2 g \sin(\alpha_1) \quad (6.42)$$

$$W_{v3} = m_3 g \cos(\alpha_1) \quad (6.43)$$

$$W_{h3} = m_3 g \sin(\alpha_1) \quad (6.44)$$

De las fuerzas ya mencionadas, se tiene el siguiente estado de equilibrio dinámico mostrado en la Figura 6-11.

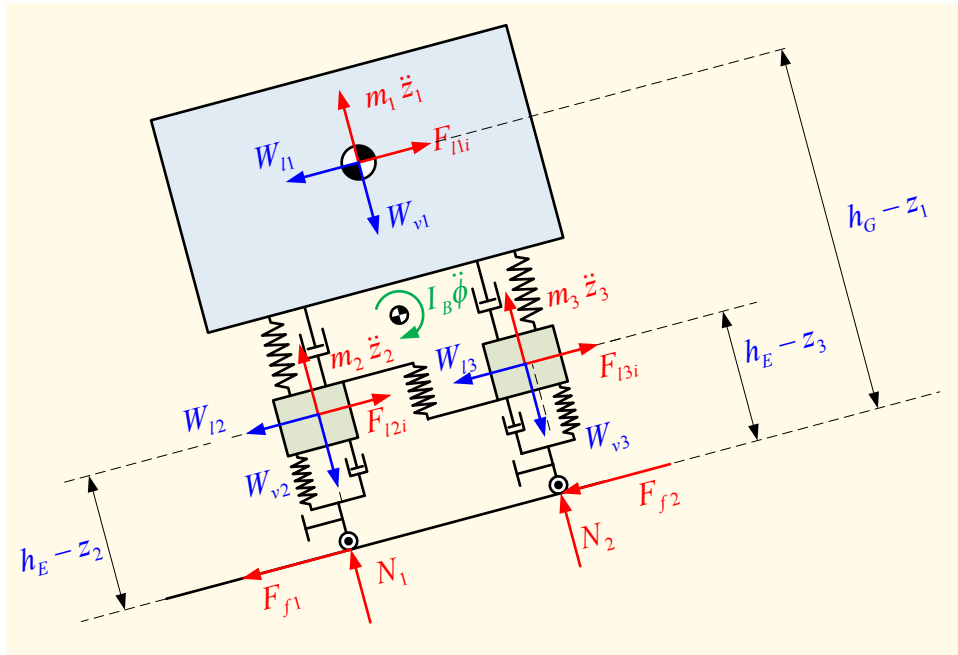


Figura 6-11 Equilibrio dinámico de la sección frontal del vehículo.

donde:

I_B Momento de inercia respecto al Centro de balanceo frontal [kg · m²]

De la gráfica anterior se tiene la siguiente ecuación:

$$\sum \vec{F}_{y1} = 0$$

$$F_{f1} + F_{f2} = F_{1li} + F_{12i} + F_{13i} - W_{1l} - W_{12} - W_{13} \quad (6.45)$$

Seguidamente se debe calcular la normal en cada instante de análisis, por lo que se debe calcular las fuerzas y momentos de inercia de manera instantánea. De lo anterior, se debe tener en cuenta que la distancia normal entre la vía y los cuerpos suspendidos varía debido a los desplazamientos entre ellos. Se tiene la siguiente equivalencia tomando momentos respecto a la rueda izquierda frontal:

$$\sum M_1 = 0:$$

$$\left[[W_{12} - F_{12i}](h_{E1} - z_2) + [W_{13} - F_{13i}](h_{E1} - z_3) - I_B \ddot{\phi}_1 + [W_{1l} - F_{1li}](h_{G1} - z_1) \right] = 0 \quad (6.46)$$

$$\left[+ (m_1 \ddot{z}_1 - W_{1l})(B_{via} / 2) + (m_3 \ddot{z}_3 - W_{13})(B_{via}) + N_2 (B_{via}) \right]$$

De la expresión anterior, se tiene la normal de la rueda externa:

$$N_2 = - \left[\begin{aligned} & [W_{l2} - F_{l2i}](h_{E1} - z_2) + [W_{l3} - F_{l3i}](h_{E1} - z_3) - I_B \ddot{\phi}_1 \\ & + [W_{r1} - F_{r1i}](h_{G1} - z_1) + (m_1 \ddot{z}_1 - W_{v1})(B_{via} / 2) + (m_3 \ddot{z}_3 - W_{v3})(a_{via}) \end{aligned} \right] / (B_{via}) \quad (6.47)$$

Finalmente de la condición de equilibrio dinámico, se tiene que la sumatoria de fuerzas en la dirección perpendicular al plano da como resultado la segunda normal:

$$\sum F_y = 0: \quad N_1 + N_2 + m_1 \ddot{z}_1 + m_2 \ddot{z}_2 + m_3 \ddot{z}_3 - W_{v1} - W_{v2} - W_{v3} = 0$$

De la cual se obtiene la normal de la rueda cercana a la curvatura:

$$N_1 = W_{v1} + W_{v2} + W_{v3} - N_2 - m_1 \ddot{z}_1 - m_2 \ddot{z}_2 - m_3 \ddot{z}_3 \quad (6.48)$$

Ahora, dadas las características geométricas de la vía, la única posibilidad de vuelco es en el instante en que la normal de la rueda derecha sea cero; por lo que la observación de los valores que toma dicha variable durante la simulación es de vital importancia para este trabajo.

Finalmente, se necesitaría una ecuación adicional para encontrar la fuerza de fricción en cada rueda; se asume que la condición de derrape es el instante en que la fuerza de fricción de alguna de las ruedas supera la fricción estática máxima; por lo tanto, se pueden tomar como válidas las siguientes relaciones:

$$F_{f1,max} = \mu N_1 \quad (6.49)$$

$$F_{f2,max} = \mu N_2 \quad (6.50)$$

donde: μ Coeficiente de fricción estática entre la vía y el neumático.

$F_{f1,max}$ Fuerza de fricción máxima de la rueda izquierda [N]

$F_{f2,max}$ Fuerza de fricción máxima de la rueda derecha [N]

Finalmente la condición de derrape vendrá dada si en algún instante se cumple que:

$$F_{f1} + F_{f2} = F_{f1,max} + F_{f2,max} \quad (6.51)$$

Con ello se completan las ecuaciones diferenciales de la sección frontal del vehículo y las condiciones de vuelco y derrape de las ruedas frontales. En el siguiente apartado se modela la sección posterior, la cual se acopla a la sección frontal mediante la rigidez torsional de la estructura entre ambos.

6.2 Sección posterior

La sección posterior a diferencia de la frontal, la masa no suspendida se compone por un eje único, el cual se conecta mediante el sistema de suspensión, un elemento de estabilización conocido como barra Panhard y los neumáticos; debido a ello, este posee una rotación independiente adicional a la sufrida por la sección de la cabina posterior.

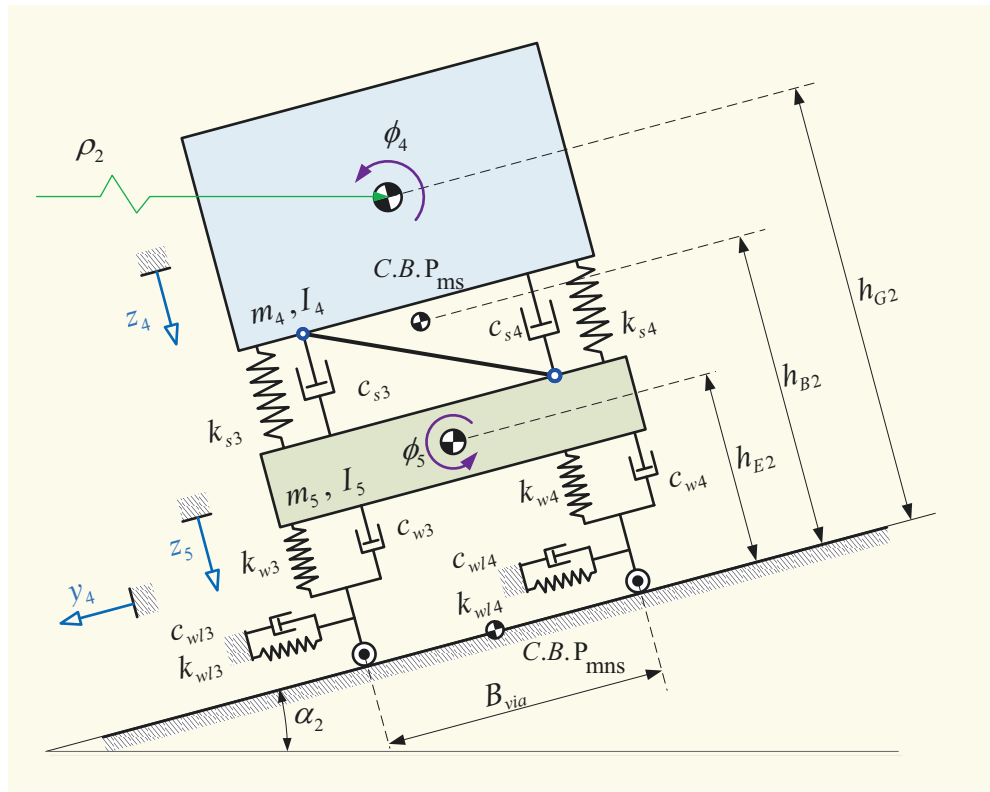


Figura 6-12 Modelo de la sección posterior del vehículo.

donde:

- c_{s3} Constante de amortiguamiento del fuelle neumático izquierdo [N·s/m]
- c_{s4} Constante de amortiguamiento del fuelle neumático derecho [N·s/m]
- c_{wl3} Constante de amortiguamiento lateral del neumático izquierdo [N·s/m]
- c_{wl4} Constante de amortiguamiento lateral del neumático derecho [N·s/m]
- c_{w3} Constante de amortiguamiento vertical del neumático izquierdo [N·s/m]
- c_{w4} Constante de amortiguamiento vertical del neumático derecho [N·s/m].
- h_{B2} Altura del “roll center” respecto a la superficie de la vía peraltada [m]

h_{E2}	Altura de equilibrio estático de la masa no suspendida para un ángulo de peralte aleatorio respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
h_{G2}	Altura de equilibrio estático de la masa suspendida para un ángulo de peralte aleatorio respecto a la superficie de la vía peraltada [m]
k_{s3}	Constante de rigidez instantánea del fuelle neumático izquierdo [N/m]
k_{s4}	Constante de rigidez instantánea del fuelle neumático derecho [N/m]
k_{w3}	Constante de rigidez vertical del neumático izquierdo [N/m]
k_{w4}	Constante de rigidez vertical del neumático derecho [N/m]
k_{wl3}	Constante de rigidez lateral del neumático izquierdo [N/m]
k_{wl4}	Constante de rigidez lateral del neumático derecho [N/m]
m_4	Masa de la cabina posterior del vehículo (Masa suspendida) [kg]
m_5	Masa del eje posterior (Masa no suspendida) [kg]
I_4	Inercia de la masa suspendida respecto al centro de gravedad [kg · m ²]
y_4	Desplazamiento horizontal respecto a su posición de equilibrio estático [m]
z_4	Desplazamiento vertical de la masa suspendida respecto a su posición de equilibrio estático [m]
z_5	Desplazamiento vertical de la masa no suspendida respecto a su posición de equilibrio estático [m]
α_2	Ángulo de peralte instantáneo de la sección posterior [rad]
ϕ_4	Ángulo rotado por la sección posterior de la cabina en torno al eje longitudinal del vehículo [rad]
ϕ_5	Ángulo rotado por la masa no suspendida en torno al eje longitudinal del vehículo [rad]
ρ_2	Radio de curvatura instantáneo de la sección posterior [m]

Con respecto a los valores de radio de curvatura y ángulo de peralte dados para esta sección, se debe tener en cuenta que el vehículo posee una determinada longitud, la cual produce que las secciones frontal y posterior, se encuentren sobre diferentes radios de

curvatura y ángulo de peralte; ya que puntualmente, ambas secciones están en diferentes ubicaciones sobre la vía de simulación. Debido a que la simulación calcula en intervalos de tiempo muy pequeños, en función de los cuales la calzada y sus parámetros varían, resultaría muy complejo modelar dicho efecto; por lo que de manera práctica, se tomará como radio de curvatura y ángulo de peralte de la sección posterior, los valores tomados por la sección frontal en el subintervalo anterior de simulación.

6.2.1 Diagrama de cuerpo libre de la cabina posterior

Se tiene el siguiente diagrama de cuerpo libre para la cabina posterior:

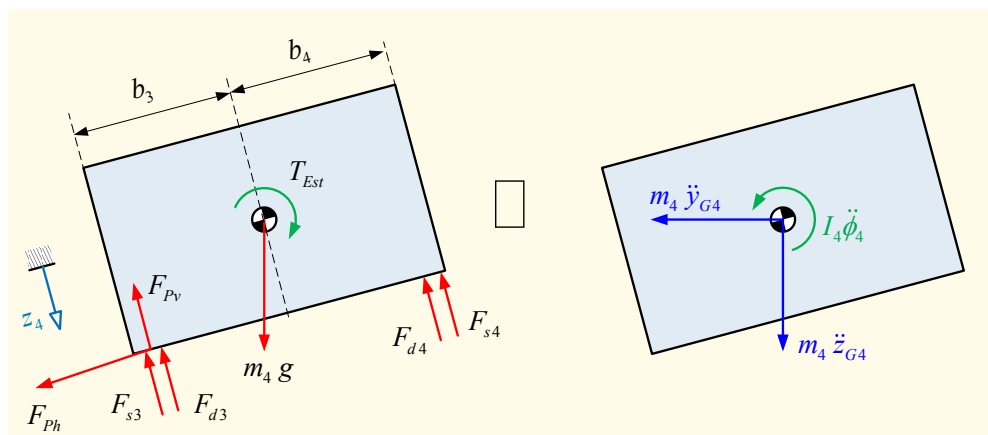


Figura 6-13 Diagrama de cuerpo libre de la sección posterior de la cabina.

donde:

- b_3 Distancia del centro de gravedad a la suspensión izquierda [m]
- b_4 Distancia del centro de gravedad a la suspensión derecha [m]
- F_{s3} Fuerza ejercida por el fuelle neumático izquierdo [N]
- F_{s4} Fuerza ejercida por el fuelle neumático derecho [N]
- F_{PAh} Fuerza horizontal ejercida en el extremo A de la barra Panhard [N]
- F_{PAv} Fuerza vertical ejercida en el extremo A de la barra Panhard [N]
- F_{d3} Fuerza de amortiguamiento ejercida por el fuelle neumático izquierdo [N]
- F_{d4} Fuerza de amortiguamiento ejercida por el fuelle neumático derecho [N]
- T_{Est} Torque originado por la estructura del vehículo en [N·m]

Lo siguiente es establecer la fuerza generada por los actuadores neumáticos; en este caso, a diferencia de la sección frontal, se tienen dos movimientos compuestos tanto por el giro de la masa suspendida como por el giro de la masa no suspendida; por lo que es necesario analizar los grados de libertad de ambos cuerpos para determinar el desplazamiento relativo entre los extremos del actuador. De lo mencionado, se tiene el siguiente análisis cinemático, el cual tiene por objetivo conocer los posibles desplazamientos de cada cuerpo:

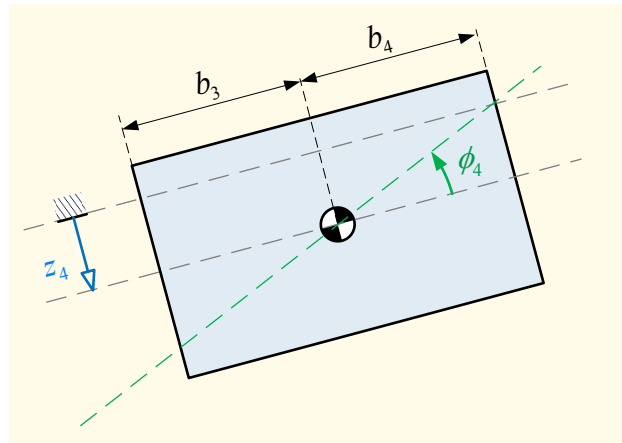


Figura 6-14 Grados de libertad de la cabina posterior.

Seguidamente se debe considerar la masa no suspendida:

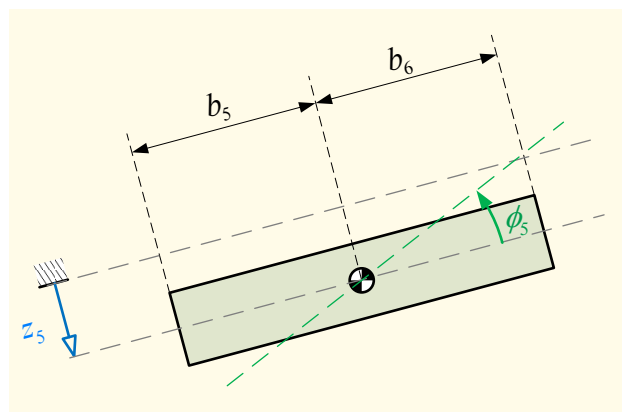


Figura 6-15 Grados de libertad de la masa no suspendida de la sección posterior.

donde: b_5 Distancia del centro de gravedad al neumático izquierdo [m]
 b_6 Distancia del centro de gravedad al neumático derecho [m]

De lo anterior, se tienen las siguientes expresiones para las fuerzas de los actuadores sobre la cabina posterior:

$$F_{s3} = k_{s3} (z_4 + b_3 \phi_4 - z_5 - b_5 \phi_5) \quad (6.52)$$

$$F_{s4} = k_{s4} (z_4 - b_4 \phi_4 - z_5 + b_6 \phi_5) \quad (6.53)$$

$$F_{d3} = c_{s3} (\dot{z}_4 + b_3 \dot{\phi}_4 - \dot{z}_5 - b_5 \dot{\phi}_5) \quad (6.54)$$

$$F_{d4} = c_{s4} (\dot{z}_4 - b_4 \dot{\phi}_4 - \dot{z}_5 + b_6 \dot{\phi}_5) \quad (6.55)$$

Seguidamente, se debe realizar la misma descomposición de aceleraciones similar a la realizada en la parte frontal; por lo que el resultado de dicho análisis da las siguientes equivalencias:

$$m_4 \ddot{y}_{G4} = m_4 \frac{v^2}{\rho_2(t)} \quad (6.56)$$

$$m_4 \ddot{y}_{G4} \cos[\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] = m_4 \ddot{y}_4 - m_4 \frac{v^2}{\rho_2(t)} \sin[\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] \quad (6.57)$$

$$m_4 \ddot{y}_{G4} \sin[\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] = m_4 \ddot{x}_4 + m_4 \frac{v^2}{\rho_2(t)} \cos[\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] \quad (6.58)$$

Por último, se debe considerar el efecto de la variación de la condición estática de los actuadores producto del cambio de orientación de los actuadores debido a la variación del peralte. Recurriendo al análisis realizado en la sección anterior, se tiene el siguiente resultado:

$$m_4 g \cos[\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] - \delta_{est} (k_{s3} + k_{s4}) = m_4 g \cos[\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] - m_4 g \cos[\alpha_2(t-1) + \phi_4(t-1) + \phi_5(t-1)] \quad (6.59)$$

Lo siguiente es determinar el comportamiento de la barra Panhard y su influencia sobre el comportamiento dinámico de dicha sección. Se tiene que tal barra puede ser modelada como una biela dado que su masa es pequeña en comparación a que poseen los componentes que conecta; de tal modelamiento, se asume que fuerza que ejerce dicha barra debe ser siempre orientada de manera axial a la barra; con lo cual, la magnitud de la fuerza ejercida debe ser, necesariamente, proporcional a la variación de la longitud de la barra a fin de ser geoméricamente compatible con la posición de los

componentes que conecta y de sus restricciones. Por ende esta se comportará como un resorte de orientación variable.

Para ello, se tiene el siguiente análisis cinemático similar al realizado en para el desplazamiento relativo entre amortiguadores y resortes a fin de poder conocer las ecuaciones a partir de las cuales se analiza la geometría de la barra Panhard:

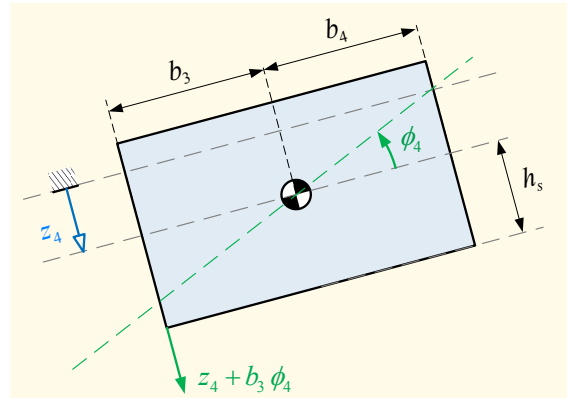


Figura 6-16 Análisis cinemático del punto de apoyo de la barra Panhard en la cabina.

donde: h_s Altura del centro de gravedad en la cabina [m]

De igual manera si se analiza el extremo derecho, conectado a la masa no suspendida se tiene una figura similar al mostrado en la [Figura 6-16](#):

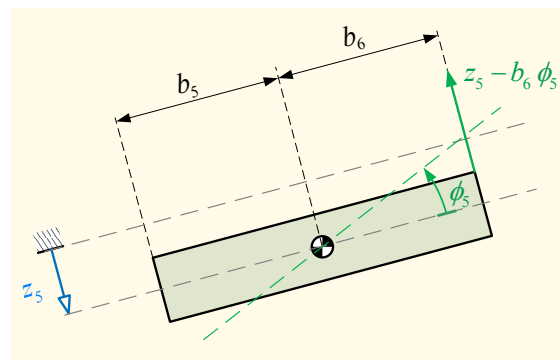


Figura 6-17 Análisis cinemático del punto de apoyo de la barra Panhard en la masa no suspendida.

De lo anterior, el vector aceleración en el extremo A de la barra, conectado a la masa no suspendida, queda definido de la siguiente manera:

$$s_A = (z_4 + b_3 \phi_4) \tag{6.60}$$

Mientras que el otro extremo posee el siguiente desplazamiento:

$$s_B = (z_5 - b_6 \phi_5) \quad (6.61)$$

Seguidamente se debe analizar la geometría de la barra en términos de sus posiciones inicial y deformada por los desplazamientos señalados. Para ello utilizaremos el diagrama de la [Figura 6-18](#).

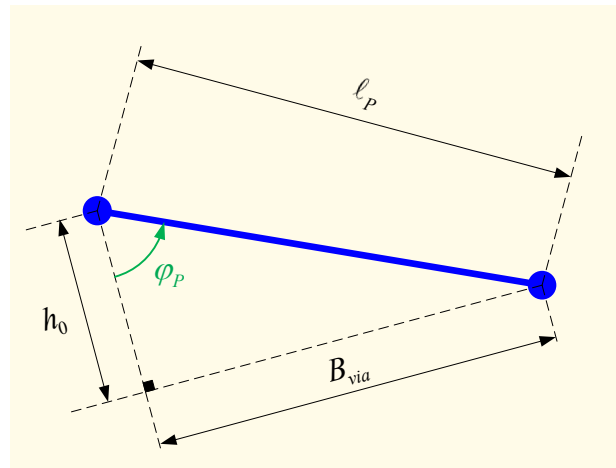


Figura 6-18 Posición inicial de la barra Panhard.

donde:

φ_P Ángulo de orientación de la barra Panhard respecto al plano de la calzada [m].

ℓ_P Longitud inicial de la barra Panhard [m]

h_0 Distancia normal a la calzada entre extremos de la barra [m]

La magnitud inicial de la distancia entre extremos de la barra en la dirección normal a la calzada se puede determinar mediante la siguiente relación:

$$h_0 = (h_{G2} - h_{S2} - h_{E2}) \quad (6.62)$$

Tal magnitud puede ser cotejada extrayendo las dimensiones dadas en la [Figura 6-16](#) y en la [Figura 6-13](#); adicionalmente, se tiene que la longitud inicial de la barra viene dada por la siguiente equivalencia:

$$\ell_P = \sqrt{h_0^2 + B_{via}^2} \quad (6.63)$$

Ahora se debe analizar la longitud deformada de la barra producto del desplazamiento de sus extremos; para lo cual asumimos que la distancia en dirección paralela a la vía de la barra permanece inalterable; más no la distancia en la dirección normal que es la responsable de originar las deformaciones. Lo anterior se tiene representado en el diagrama geométrico la **Figura 6-19**.

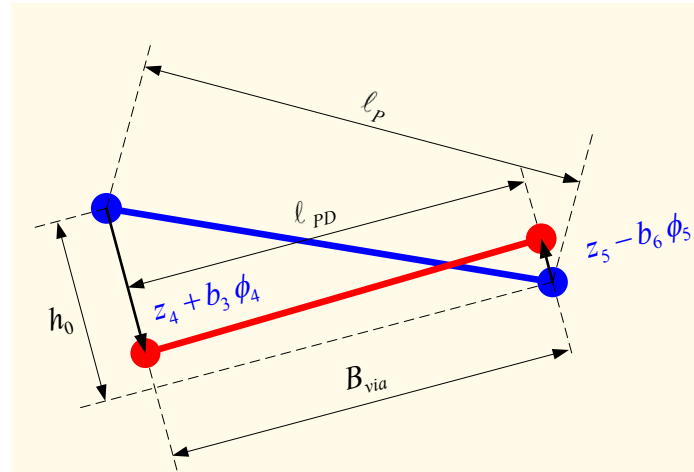


Figura 6-19 Análisis de deformaciones de la barra Panhard.

donde l_{pD} Longitud de la barra Panhard deformada [m]

Seguidamente, a fin de reducir los errores originados por la variación del signo del ángulo formado por la barra; y adicionalmente, considerando que los desplazamientos de la masa no suspendida son pequeños debido a que la rigidez de los neumáticos es alta en comparación a la de los actuadores que soportan la masa suspendida, es que el desplazamiento del extremo B no será considerado. Con respecto al tipo de soportes que posee la barra, estos son uniones articuladas que permiten la libre rotación de la barra en torno a ellos.

Finalmente, dado que la barra posee una rigidez dada por la equivalencia:

$$k_p = \frac{EA}{l_p} \tag{6.64}$$

donde: E Módulo de elasticidad del material de la barra [N/m²]

A Área de la sección transversal de la barra [m²]

k_p Rigidez de la barra Panhard [N/m]

Se puede afirmar que dicho elemento posee una rigidez elevada; con lo cual se puede apreciar el efecto reductor de las perturbaciones verticales y laterales sobre la masa suspendida posterior. Una última magnitud a considerar es la orientación de la barra respecto al plano de la vía; la cual, debido a los desplazamientos de los extremos de la barra varía en el tiempo; por ello se tiene la siguiente relación:

$$\varphi_B = \arctan\left(\frac{B_{via}}{h_0 - z_4 - b_3 \phi_4}\right) \quad (6.65)$$

Seguidamente se establece que la fuerza axial viene dada por:

$$F_P = k_p (\ell_P - \ell_{PD})$$

Reescribiendo la ecuación anterior en términos de los desplazamientos de los cuerpos ligados se tiene:

$$F_P = k_p \left(\sqrt{(B_{via}^2 + h_0^2)} - \sqrt{(h_0 - z_4 - b_3 \phi_4)^2 + B_{via}^2} \right) \quad (6.66)$$

Aplicando las relaciones (6.65) y (6.66), se obtiene las componentes de las fuerzas en las direcciones normal y paralela a la calzada:

$$F_{Pv} = k_p \left(\sqrt{(B_{via}^2 + h_0^2)} - \sqrt{(h_0 - z_4 - b_3 \phi_4)^2 + B_{via}^2} \right) \cos(\varphi_P) \quad (6.67)$$

$$F_{Pv} = k_p \left(\sqrt{(B_{via}^2 + h_0^2)} - \sqrt{(h_0 - z_4 - b_3 \phi_4)^2 + B_{via}^2} \right) \sin(\varphi_P) \quad (6.68)$$

Ahora es posible escribir la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la cabina en el eje y_4 :

$$m_4 \left(\ddot{z}_4 + \frac{v^2}{\rho_2(t)} \sin[\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] \right) = m_4 g \left[\begin{array}{l} \cos \alpha_2 [\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] \\ -\cos \alpha_2 [\alpha_2(t-1) + \phi_4(t-1) + \phi_5(t-1)] \end{array} \right] \quad (6.69)$$

$$-k_{s3} (z_4 + b_3 \phi_4 - z_5 - b_5 \phi_5) - k_{s4} (z_4 - b_4 \phi_4 - z_5 + b_6 \phi_5)$$

$$-c_{s3} (\dot{z}_4 + b_3 \dot{\phi}_4 - \dot{z}_5 - b_5 \dot{\phi}_5) - c_{s4} (\dot{z}_4 - b_4 \dot{\phi}_4 - \dot{z}_5 + b_6 \dot{\phi}_5) - F_{Pv}$$

Lo siguiente es establecer la ecuación diferencial del giro de la cabina posterior, que al igual que en la sección frontal, se realizará desde su centro de balanceo. Nuevamente, se asume que se ubica a una altura fija, debido a la geometría del sistema de suspensión; así como a los pequeños desplazamientos de los cuerpos.

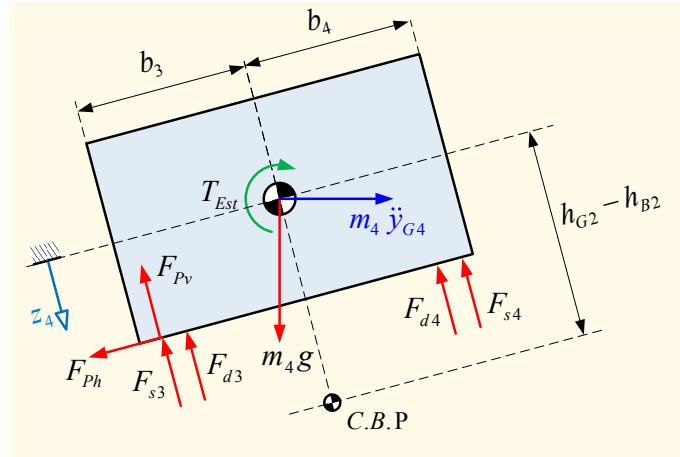


Figura 6-20 Momentos respecto al centro de balanceo.

De lo anterior, se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 \left[I_4 + m_4 (h_{G2} - h_{B2})^2 \right] \ddot{\phi}_4 &= b_4 \left[k_{s4} (z_4 - b_4 \phi_4 - z_5 + b_6 \phi_5) + c_{s4} (\dot{z}_4 - b_4 \dot{\phi}_4 - \dot{z}_5 + b_6 \dot{\phi}_5) \right] \\
 &\quad - b_3 \left[k_{s3} (z_4 + b_3 \phi_4 - z_5 - b_5 \phi_5) + c_{s3} (\dot{z}_4 + b_3 \dot{\phi}_4 - \dot{z}_5 - b_5 \dot{\phi}_5) + F_{Pv} \right] \\
 &\quad - \left[\left(m_4 \frac{v^2}{\rho_2(t)} \cos [\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] \right) (h_{G2} - h_{B2}) \right] - T_{est} \\
 &\quad + \left[(m_4 g \sin [\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)]) (h_{G2} - h_{B2}) \right] + [F_{Ph} (h_{G2} - h_{S2} - h_{B2})]
 \end{aligned} \tag{6.70}$$

6.2.2 Análisis de la masa no suspendida

El siguiente análisis corresponde a la masa no suspendida de la sección posterior para la cual se tiene el diagrama de equivalencia de D'Alembert de la **Figura 6-21**.

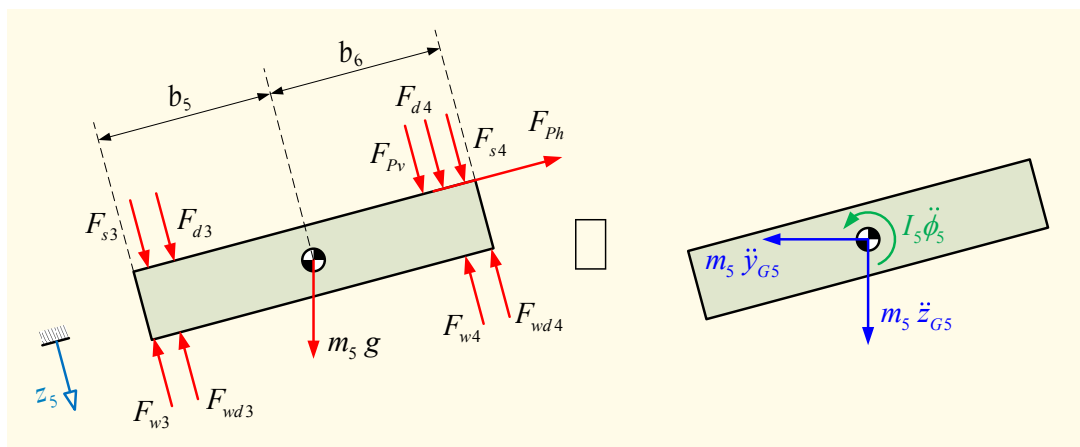


Figura 6-21 Diagrama de cuerpo libre de la masa no suspendida posterior.

De la **Figura 6-15**, se tiene los posibles desplazamientos que tendrá la masa no suspendida, por lo que se puede establecer de manera directa la fuerza que ejercerán los neumáticos producto de tales desplazamientos:

$$F_{w3} = k_{w3} (z_5 + b_5 \phi_5) \quad (6.71)$$

$$F_{wd3} = c_{w3} (\dot{z}_5 + b_5 \dot{\phi}_5) \quad (6.72)$$

$$F_{w4} = k_{w4} (z_5 - b_6 \phi_5) \quad (6.73)$$

$$F_{wd4} = c_{w4} (\dot{z}_5 - b_6 \dot{\phi}_5) \quad (6.74)$$

Descomponiendo las aceleraciones, al igual que en el caso de la masa suspendida, se obtienen las siguientes equivalencias:

$$m_5 \ddot{x}_{G5} = m_5 \frac{v^2}{\rho_2(t)} \quad (6.75)$$

$$m_5 \ddot{y}_{G5} \cos \alpha_2 [\alpha_2(t) + \phi_5(t)] = m_5 \ddot{y}_5 - m_5 \frac{v^2}{\rho_2(t)} \sin [\alpha_2(t) + \phi_5(t)] \quad (6.76)$$

$$m_5 \ddot{y}_{G5} \sin [\alpha_2(t) + \phi_5(t)] = m_5 \ddot{x}_5 + m_5 \frac{v^2}{\rho_2(t)} \cos [\alpha_2(t) + \phi_5(t)] \quad (6.77)$$

Seguidamente, si se tiene en cuenta el efecto de la variación de la condición estática de los neumáticos, esta da como resultado la siguiente equivalencia:

$$m_5 g \cos [\alpha_2(t) + \phi_5(t)] - \delta_{est} (k_{w3} + k_{w4}) = m_5 g \cos \alpha_2 [\alpha_2(t) + \phi_5(t)] - m_5 g \cos [\alpha_2(t-1) + \phi_5(t-1)] \quad (6.78)$$

De las ecuaciones anteriores, obtenemos la ecuación diferencial para la dirección y_5 :

$$m_5 \left(\ddot{z}_5 - \frac{v^2}{\rho_2(t)} \sin \alpha_2 [\alpha_2(t) + \phi_5(t)] \right) = -k_{w3} (z_5 + b_5 \phi_5) - c_{w3} (\dot{z}_5 + b_5 \dot{\phi}_5) - k_{w4} (z_5 - b_6 \phi_5) - c_{w4} (\dot{z}_5 - b_6 \dot{\phi}_5) + k_{s3} (z_4 + b_3 \phi_4 - z_5 - b_5 \phi_5) + k_{s4} (z_4 - b_4 \phi_4 - z_5 + b_6 \phi_5) + c_{s3} (\dot{z}_4 + b_3 \dot{\phi}_4 - \dot{z}_5 - b_5 \dot{\phi}_5) + c_{s4} (\dot{z}_4 - b_4 \dot{\phi}_4 - \dot{z}_5 + b_6 \dot{\phi}_5) + m_5 g \cos [\alpha_2(t) + \phi_5(t)] - m_5 g \cos [\alpha_2(t-1) + \phi_5(t-1)] + F_{Pv} \quad (6.79)$$

Finalmente tomando momentos respecto a su centro de balanceo, se obtiene la ecuación diferencial para el giro en torno al eje longitudinal:

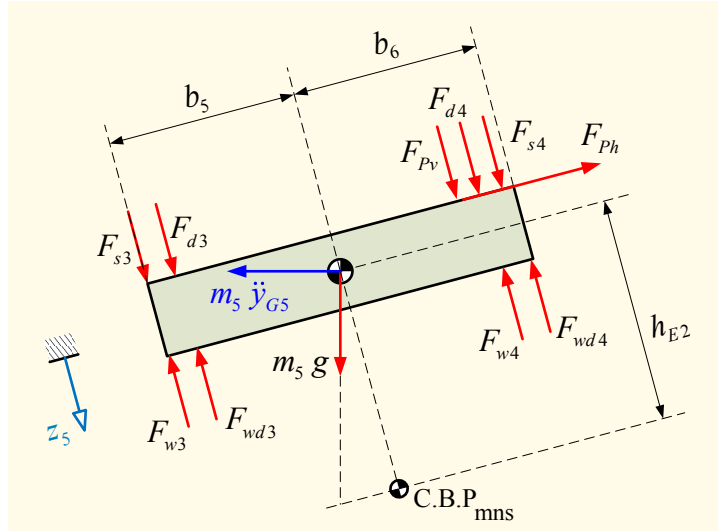


Figura 6-22 Diagrama para realizar sumatoria de momentos respecto al centro de balanceo no suspendido.

De la figura mostrada se obtiene la siguiente ecuación diferencial para el giro ϕ_5 :

$$\begin{aligned} \left[I_5 + m_5 (h_{E2})^2 \right] \ddot{\phi}_5 = & b_6 \begin{bmatrix} k_{w4} (z_5 - b_6 \phi_5) + c_{w4} (\dot{z}_5 - b_6 \dot{\phi}_5) - k_{s4} (z_4 - b_4 \phi_4 - z_5 + b_6 \phi_5) \\ -c_{s4} (\dot{z}_4 - b_4 \dot{\phi}_4 - \dot{z}_5 + b_6 \dot{\phi}_5) - F_{PB} \end{bmatrix} \\ & - b_5 \begin{bmatrix} k_{s3} (z_4 + b_3 \phi_4 - z_5 - b_5 \phi_5) + c_{s3} (\dot{z}_4 + b_3 \dot{\phi}_4 - \dot{z}_5 - b_5 \dot{\phi}_5) \\ -k_{w3} (z_5 + b_5 \phi_5) - c_{w3} (\dot{z}_5 + b_5 \dot{\phi}_5) \end{bmatrix} \\ & + \left[(m_5 g \sin[\alpha_2(t) + \phi_5(t)]) - \left(m_5 \frac{v^2}{\rho_2(t)} \cos[\alpha_2(t) + \phi_5(t)] \right) - F_{Ph} \right] (h_{E2}) \end{aligned} \quad (6.80)$$

6.2.3 Análisis lateral de la sección posterior

Finalmente aplicando el principio de D'Alembert a toda la sección se obtiene la **Figura 6-23**. En ella:

- F_{lw1} Fuerza ejercida por la rigidez lateral del neumático izquierdo [N]
- F_{lw2} Fuerza ejercida por la rigidez lateral del neumático derecho [N]
- F_{lwd1} Fuerza de amortiguamiento lateral ejercida por el neumático izquierdo [N]
- F_{lwd2} Fuerza de amortiguamiento lateral ejercida por el neumático derecho [N]

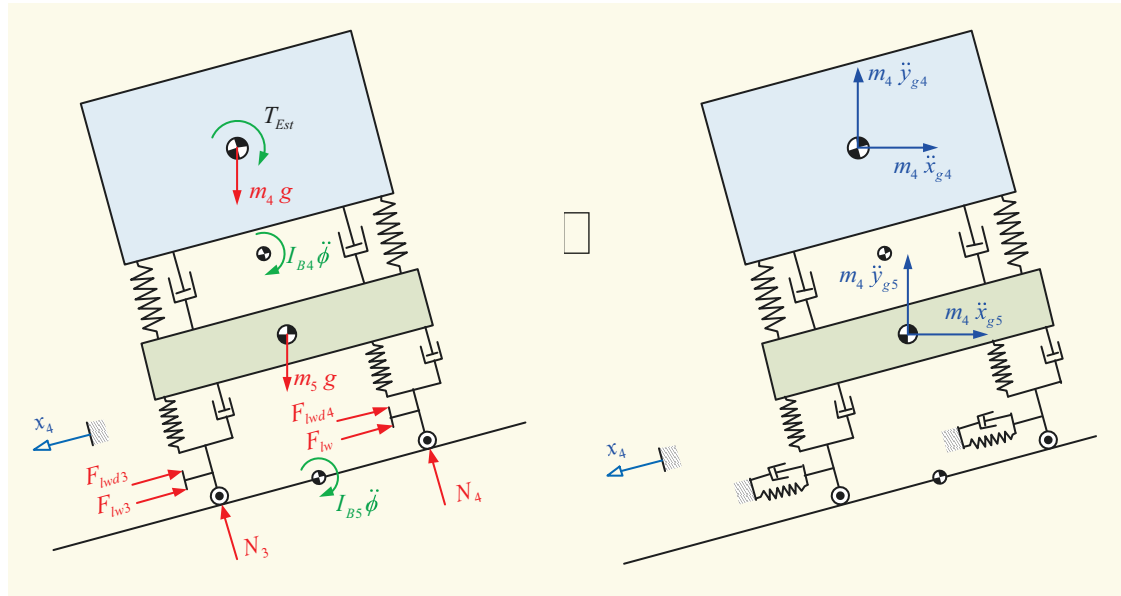


Figura 6-23 Equivalencia de fuerzas de la sección posterior.

Tales fuerzas se corresponden con las siguientes ecuaciones:

$$F_{lw3} = k_{wl3} y_4 \quad (6.81)$$

$$F_{lw4} = k_{wl4} y_4 \quad (6.82)$$

$$F_{lwd3} = c_{wl3} \dot{y}_4 \quad (6.83)$$

$$F_{lwd4} = c_{wl4} \dot{y}_4 \quad (6.84)$$

Debido a que todos los cuerpos se encuentran ligados rígidamente de manera horizontal, se puede realizar la siguiente equivalencia:

$$y_4 = y_5 \quad (6.85)$$

Dado que se trata de evitar el derrape del vehículo, se asume; de manera teórica que el vehículo no posee desplazamiento en la dirección paralela al plano. De manera similar a la sección frontal

$$y_4 = \dot{y}_4 = \ddot{y}_4 = 0 \quad (6.86)$$

De lo anterior, se tiene que una de las componentes de la fuerza de inercia vertical; posee una componente paralela a la vía, la cual se obtiene al aplicar la ecuación (6.86) en las expresiones (6.77) y (6.58) con lo cual quedaría expresadas de la siguiente manera:

$$F_{14i} = \frac{m_4 v^2}{\rho_2(t)} \cos[\alpha_2(t) + \phi_4(t) + \phi_5(t)] \quad (6.87)$$

$$F_{15i} = \frac{m_5 v^2}{\rho_2(t)} \cos[\alpha_2(t) + \phi_5(t)] \quad (6.88)$$

Finalmente, se tiene la condición para el equilibrio dinámico en el instante de análisis.

Ver **Figura 6-24**.

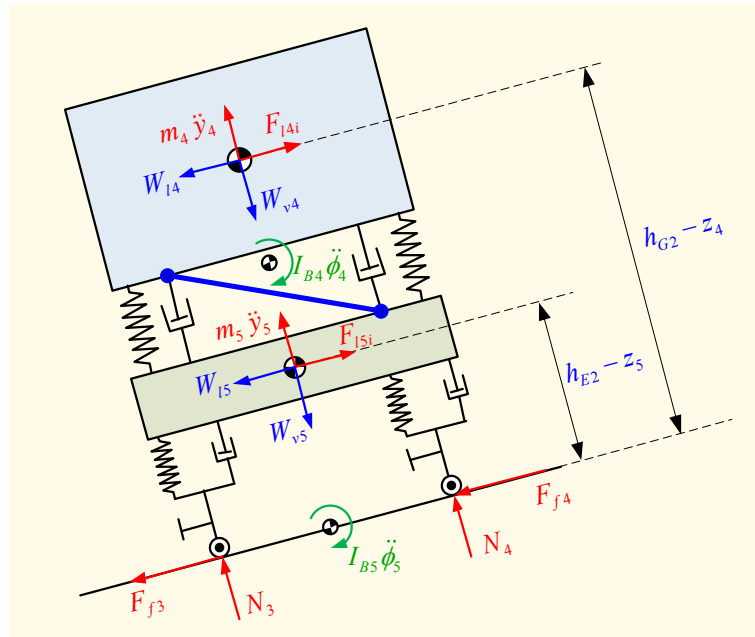


Figura 6-24 Equilibrio dinámico de la sección posterior.

Con el fin de simplificar expresiones, las componentes del peso se denotan de la siguiente manera:

$$W_{v4} = m_4 g \cos(\alpha_2 + \phi_5 + \phi_4) \quad (6.89)$$

$$W_{14} = m_4 g \sin(\alpha_2 + \phi_5 + \phi_4) \quad (6.90)$$

$$W_{v5} = m_5 g \cos(\alpha_2 + \phi_5) \quad (6.91)$$

$$W_{15} = m_5 g \sin(\alpha_2 + \phi_5) \quad (6.92)$$

De la gráfica anterior se tiene la siguiente ecuación:

$$\sum \vec{F}_{x4} = 0$$

$$F_{f3} + F_{f4} = F_{14i} + F_{15i} - W_{14} - W_{15} \quad (6.93)$$

Seguidamente se debe calcular la normal en cada instante de análisis, por lo que se debe calcular las fuerzas y torques de inercia de manera instantánea. Por lo que de manera similar a la sección frontal se toman momentos respecto a la rueda izquierda:

$$\sum M_4 = 0:$$

$$\left[\begin{array}{l} [W_{15} - F_{15i}](h_{E2} - z_5) - I_{B4} \ddot{\phi}_4 - I_{B5} \ddot{\phi}_5 + [W_{14} - F_{14i}](h_{G2} - z_4) \\ + (m_4 \ddot{z}_4 - W_{v4})(B_{via} / 2) + (m_5 \ddot{z}_5 - W_{v5})(B_{via} / 2) + N_4 (B_{via}) \end{array} \right] = 0 \quad (6.94)$$

De la expresión anterior, se tiene la normal de la rueda externa:

$$N_4 = - \left[\begin{array}{l} [W_{15} - F_{15i}](h_{E2} - z_5) - I_{B4} \ddot{\phi}_4 - I_{B5} \ddot{\phi}_5 + [W_{14} - F_{14i}](h_{G2} - z_4) \\ + (m_4 \ddot{z}_4 - W_{v4})(B_{via} / 2) + (m_5 \ddot{z}_5 - W_{v5})(B_{via} / 2) \end{array} \right] / B_{via} \quad (6.95)$$

Finalmente de la condición de equilibrio dinámico, se tiene que la sumatoria de fuerzas en la dirección perpendicular al plano da como resultado la segunda normal:

$$\sum F_y = 0:$$

$$N_4 + N_3 + m_4 \ddot{z}_4 + m_5 \ddot{z}_5 - W_{V4} - W_{V5} = 0 \quad (6.96)$$

De lo cual se obtiene la normal de la rueda cercana a la curvatura:

$$N_3 = W_{V4} + W_{V5} - N_4 - m_4 \ddot{z}_4 - m_5 \ddot{z}_5 \quad (6.97)$$

Con respecto al derrape y al igual que en la sección frontal, se asume que el derrape se produce cuando la suma de las fuerzas de fricción encontradas en la ecuación (6.93) superan la suma de las fuerzas de fricción estática máxima se produce el derrape; por lo que se tiene:

$$F_{f3,max} = \mu N_3 \quad (6.98)$$

$$F_{f4,max} = \mu N_4 \quad (6.99)$$

donde: $F_{f3,max}$ Fuerza de fricción máxima de la rueda izquierda [N]

$F_{f4,max}$ Fuerza de fricción máxima de la rueda derecha [N]

Finalmente la condición de derrape vendrá dada si en algún instante se cumple que:

$$F_{f3} + F_{f4} = F_{f3,max} + F_{f4,max} \quad (6.100)$$

6.3 Modelo Completo

Una vez obtenida las ecuaciones de cada sección, es necesario integrarlas; para ello se está considerando la estructura del autobús como un resorte de torsión.

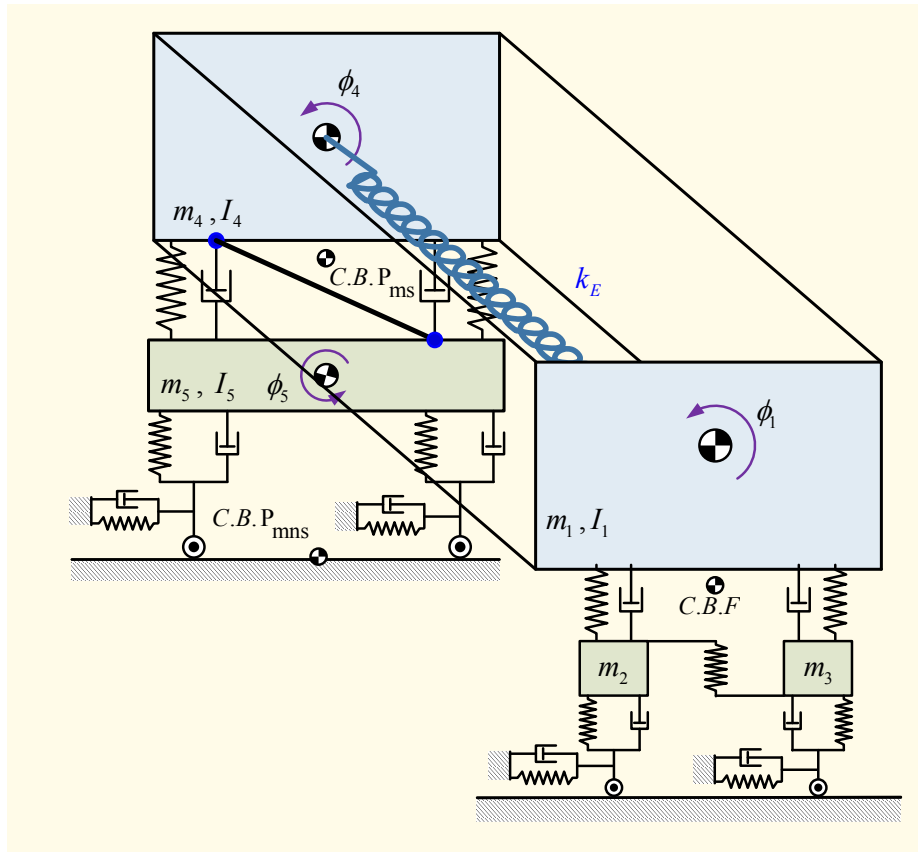


Figura 6-25 Modelo dinámico completo del vehículo.

donde: k_E Constante de rigidez torsional de la estructura del vehículo
 $[N \cdot m / rad]$

Finalmente, de las figuras y ecuaciones anteriores, se ve la influencia de la rigidez torsional de la estructura, por lo que el momento torsor originado por dicho elemento es equivalente a la siguiente expresión:

$$T_{Est} = k_E (\phi_1 - \phi_4) \quad (6.101)$$

Dicho elemento es una ligadura entre ambas secciones, por lo que todas las ecuaciones diferenciales descritas anteriormente quedarían ligadas.

CAPITULO 7 SIMULACIÓN DEL SISTEMA DINÁMICO

7.1 Descripción del algoritmo de solución

El algoritmo está constituido por un algoritmo generador de la calzada en términos paramétricos y un solucionador de sistemas de ecuaciones diferenciales.

El programa desarrollado se compone de 3 archivos (ver [Figura 7-2](#), [Figura 7-3](#) y [Figura 7-4](#)). La implementación del mismo contempla el uso del algoritmo Runge–Kutta 4 para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales. A la par se aprovechó el bucle creado por dicho algoritmo para la evaluación de aceleraciones, fuerzas y torques de inercia, fuerzas normales y fuerzas de fricción de manera instantánea (ver [Figura 7-3](#)). Así mismo, se hizo uso de variables globales para la manipulación de datos en todos los programas independientes.

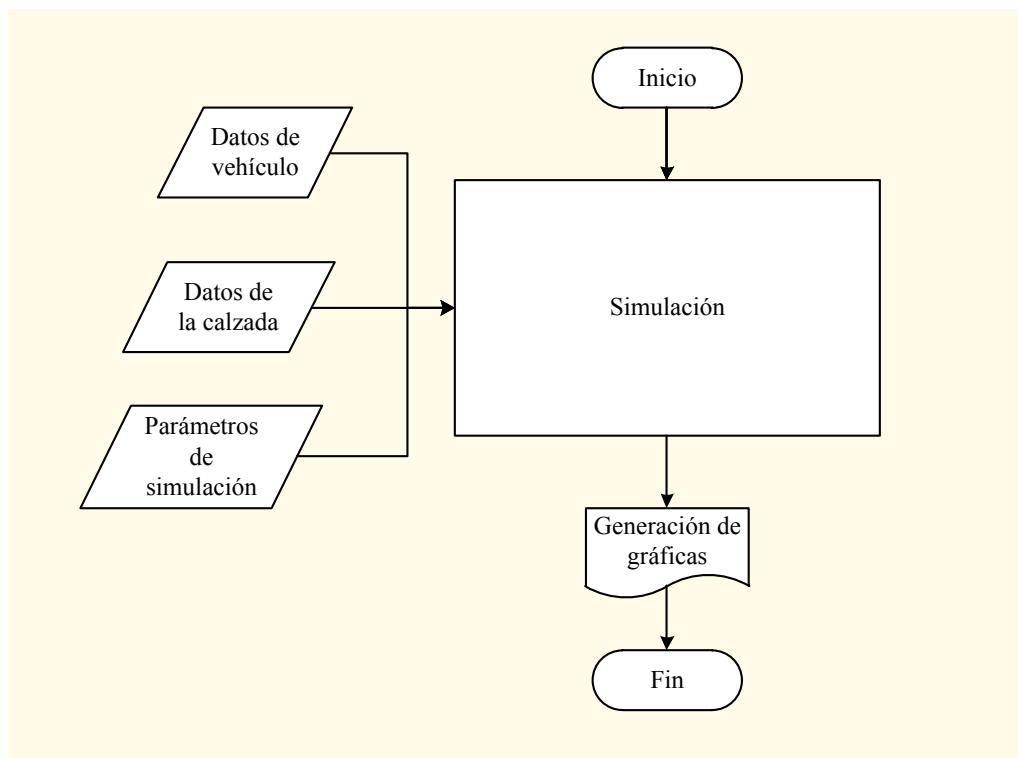


Figura 7-1 Diagrama de bloques del programa principal.

El primer módulo del algoritmo (ver **Figura 7-2**) incorpora la introducción de datos y características del vehículo; en él se pueden implementar de manera paralela otros algoritmos o programas que calculen de manera instantánea la variación del centro de gravedad, o el cambio de la rigidez o del coeficiente de amortiguamiento de la suspensión como también de los neumáticos. El final del primer módulo implementa el código para la generación de las gráficas de resultados.

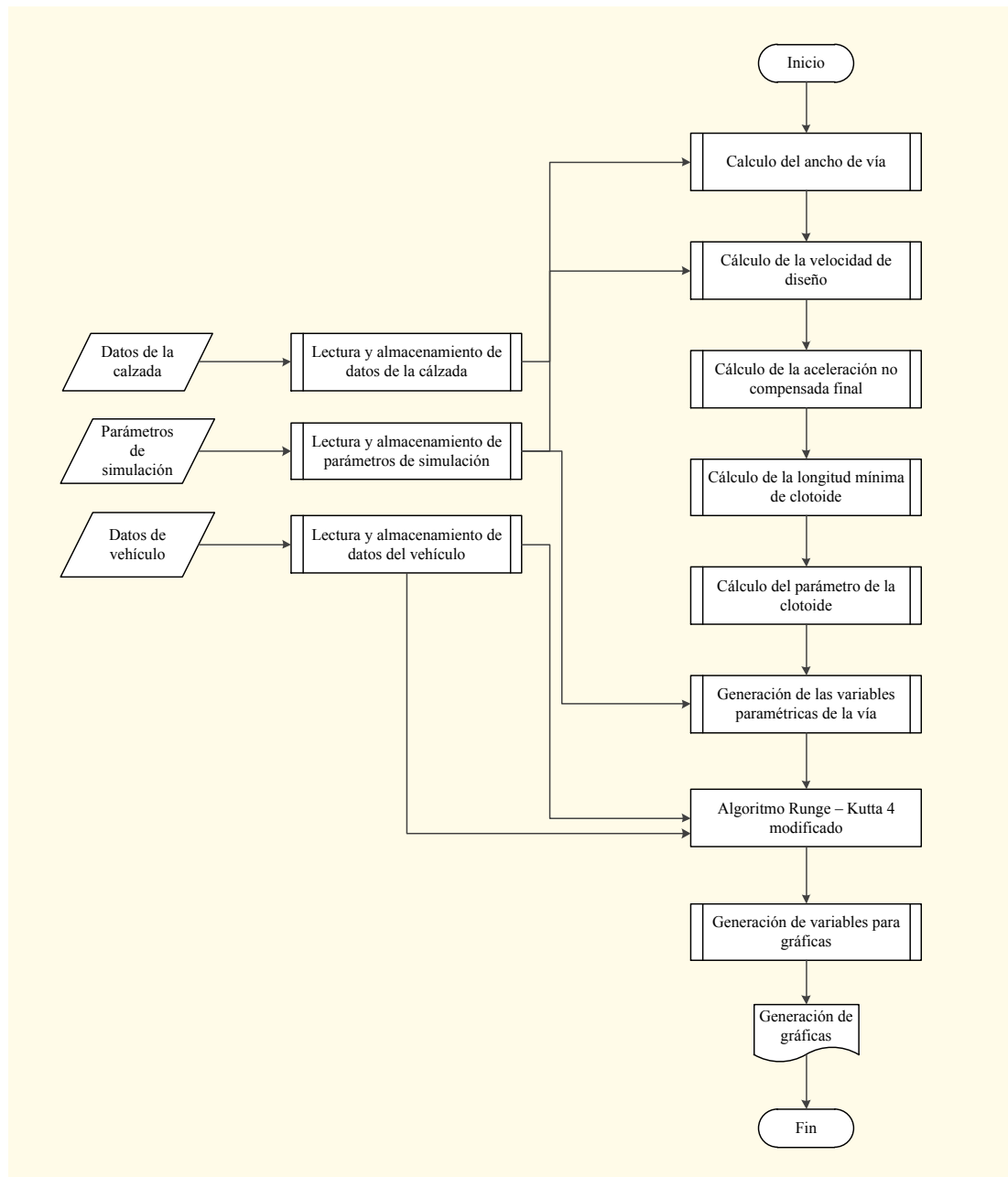


Figura 7-2 Diagrama de bloques del programa principal, denominado programa “solucionador”.

En un segundo módulo (ver **Figura 7-3**) se tiene la implementación del algoritmo Runge – Kutta 4, el cual se ha modificado para que calcule valores de fuerza y momentos; así mismo, registra los valores de los resultados a partir de los que se generarán las gráficas. Así mismo, en dicho módulo se implementa el algoritmo de cálculo de la suspensión Panhard, la cual varía de iteración en iteración en cuanto a posición y longitud.

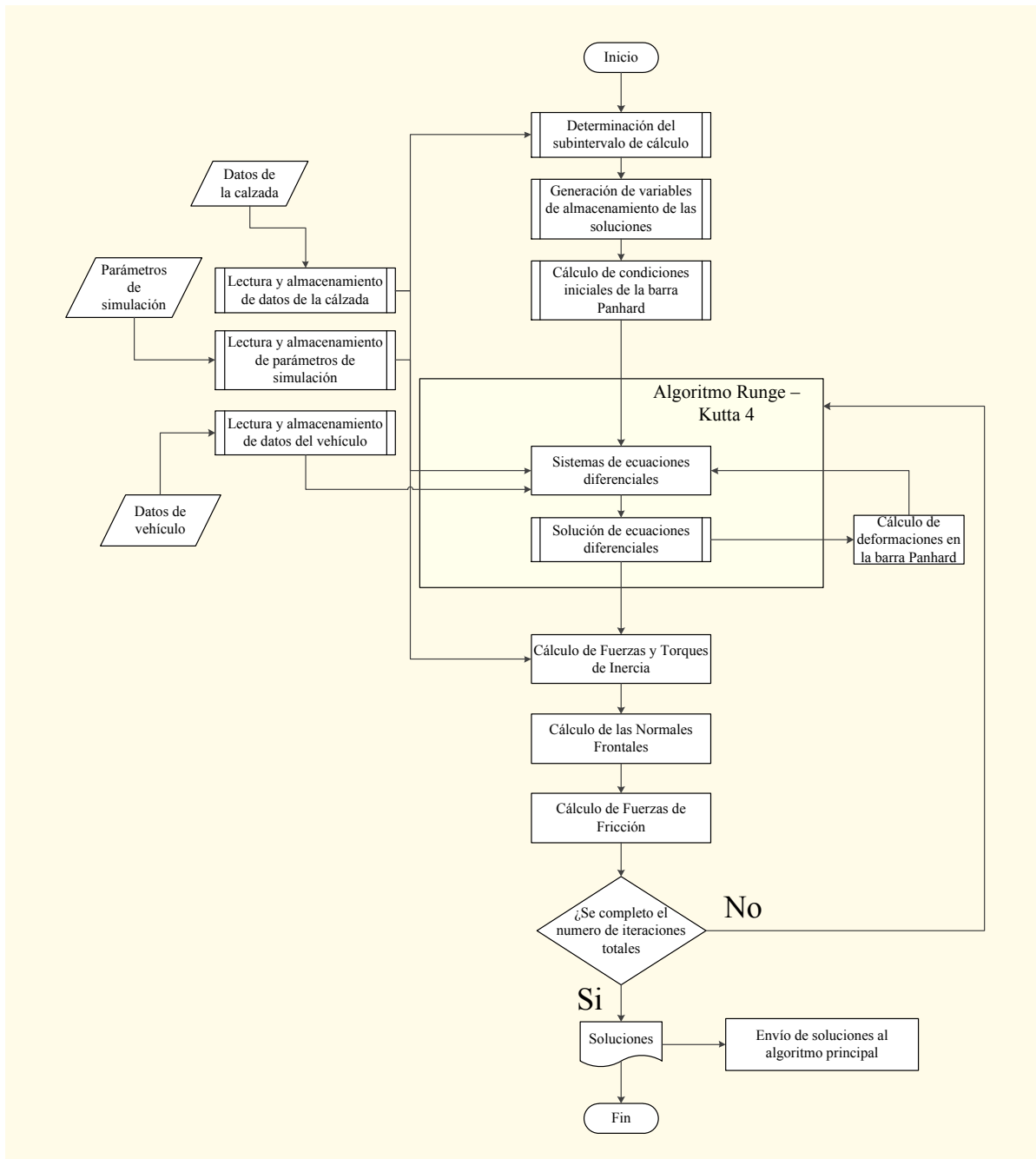


Figura 7-3 Diagrama de bloques del programa Runge Kutta 4 modificado.

Finalmente, en el tercer módulo (ver **Figura 7-4**) se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales descrito en el capítulo anterior, el cual está implementado de forma que los valores de las fuerzas en los actuadores se calculan de iteración en iteración. De esa manera se pueden conocer las fuerzas y momentos actuantes en cada instante en cada elemento de conexión y además se podrá realizar modificaciones futuras a fin de obtener un algoritmo que modele, de manera más exacta, el comportamiento de los actuadores de la suspensión.

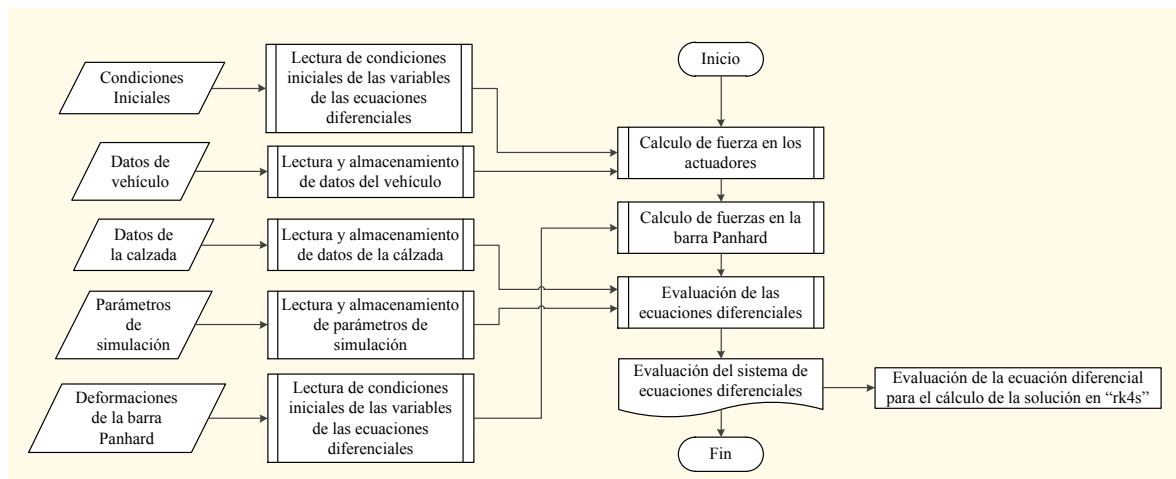


Figura 7-4 Diagrama de bloques del programa que contiene el sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema.

7.2 Parámetros de entrada

Las siguientes gráficas corresponden a las soluciones de las 8 ecuaciones diferenciales las que corresponden al paso del vehículo sobre una curva de simulación compuesta por una curva clotoide y una curva de radio constante; así mismo se muestran las fuerzas y torque de inercia; las normales y las fuerzas de fricción máxima de las cuatro ruedas; y la diferencia entre las fuerzas de fricción máxima y las fuerzas de fricción reales; finalmente, se muestra la longitud de la barra Panhard y el ángulo que forma esta con el plano de la vía a fin de visualizar su comportamiento durante la simulación. Todo ello a partir de los siguientes parámetros numéricos, los cuales pueden ser alterados en la ejecución del algoritmo:

Parámetros del trazado de la calzada

- Peralte en la curva de radio constante (Peralte final)= 200 mm
- Radio de curvatura constante (Radio de curvatura final)= 300 m
- Ancho del carril = 1000 mm
- Coeficiente de fricción de la vía = 0.4
- Número de carriles en la calzada = 3 carriles
- Velocidad del vehículo= 25 m/s
- Sobreaceleración máxima = 0.12 m/s³
- Aceleración de la gravedad = 9.81 m/s²
- Longitud total de la curva de simulación = 1500 m
- Subintervalo de tiempo de la simulación = 0.1 s

Variables frontales del vehículo

- $m_1 = 7000 \text{ kg}$
- $m_2 = 500 \text{ kg}$
- $m_3 = 500 \text{ kg}$
- $I_1 = 125000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

- $c_{s1} = 6000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
- $c_{s2} = 6000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
- $b_1 = 0.800 \text{ m}$
- $b_2 = 0.800 \text{ m}$
- $k_{s1} = 200000 \text{ N/m}$
- $k_{s2} = 200000 \text{ N/m}$
- $h_{B1} = 0.750 \text{ m}$
- $h_{G1} = 1.550 \text{ m}$
- $h_{E1} = 0.500 \text{ m}$
- $k_{TB} = 1000000 \text{ N/m}$
- $k_{w1} = 650000 \text{ N/m}$
- $k_{w2} = 650000 \text{ N/m}$
- $c_{w1} = 8000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
- $c_{w2} = 8000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
- $k_E = 60000000 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$

Variables posteriores del vehículo

- $m_4 = 7000 \text{ kg}$
- $m_5 = 1000 \text{ kg}$
- $I_4 = 125000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- $I_5 = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- $c_{s3} = 6000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
- $c_{s4} = 6000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
- $b_3 = 0.800 \text{ m}$
- $b_4 = 0.800 \text{ m}$
- $b_5 = 0.800 \text{ m}$
- $b_6 = 0.800 \text{ m}$
- $k_{s3} = 200000 \text{ N/m}$

- $k_{s4} = 200000 \text{ N/m}$
- $c_{w3} = 8000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$
- $c_{w4} = 8000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$

Así mismo, el ángulo del peralte de la vía se puede representar como una función del tiempo. Ello constituye un parámetro importante de entrada al sistema total que es el vehículo. La gráfica correspondiente se muestra en la **Figura 7-5**.

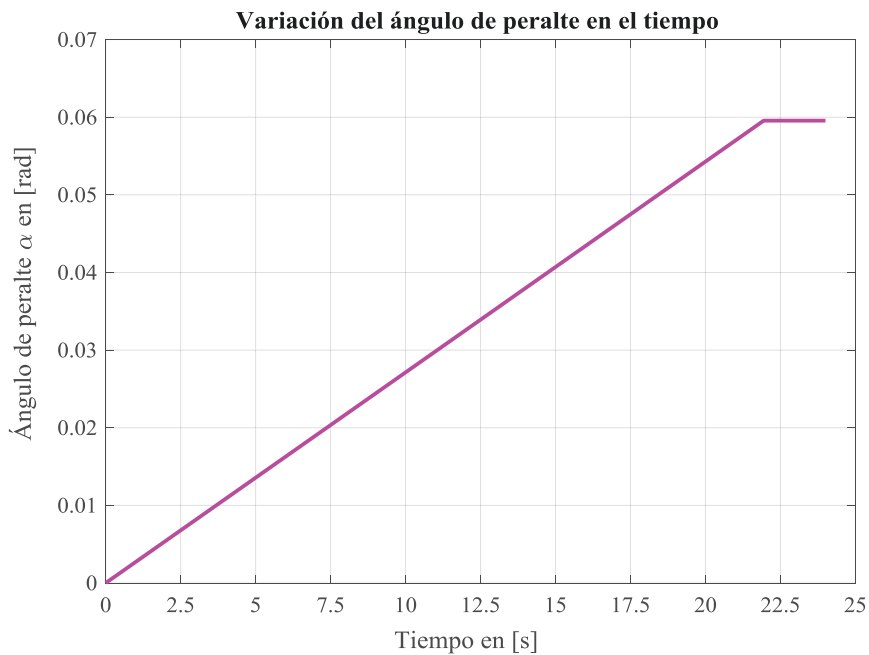


Figura 7-5 Variación del ángulo del peralte.

7.3 Resultados

Con respecto a las normales, se presenta las gráficas de los resultados obtenidos; cabe mencionar que se asume como condición de vuelco el que una de las cuatro normal sea menor a cero; y como condición de derrape que la suma de la fuerza de fricción estática máxima instantánea de cada sección sea menor que la fuerza de fricción real instantánea. Se presenta una gráfica con la diferencia entre ambas para cada sección.

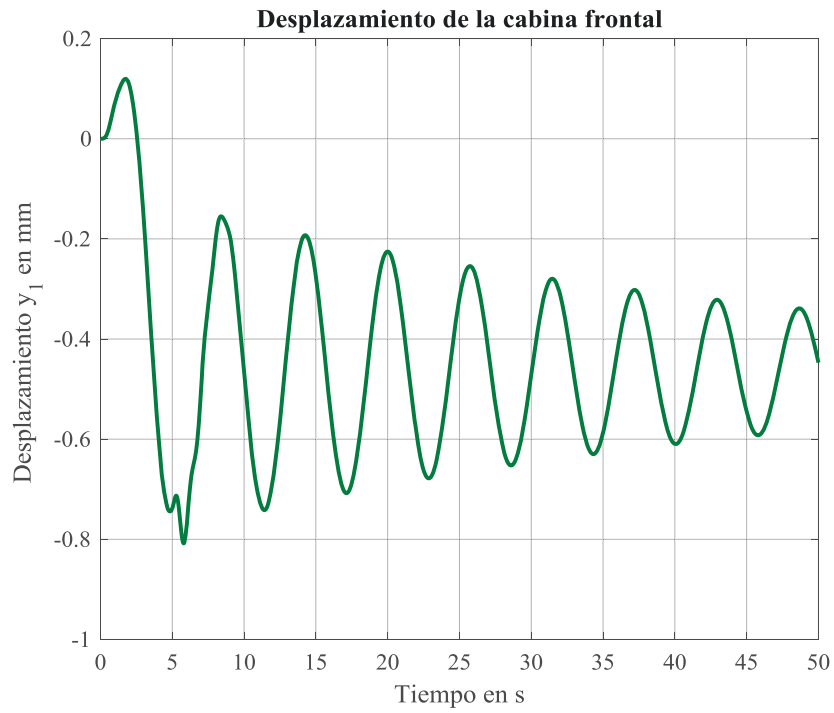


Figura 7-6 Desplazamiento de la cabina frontal vs. tiempo.

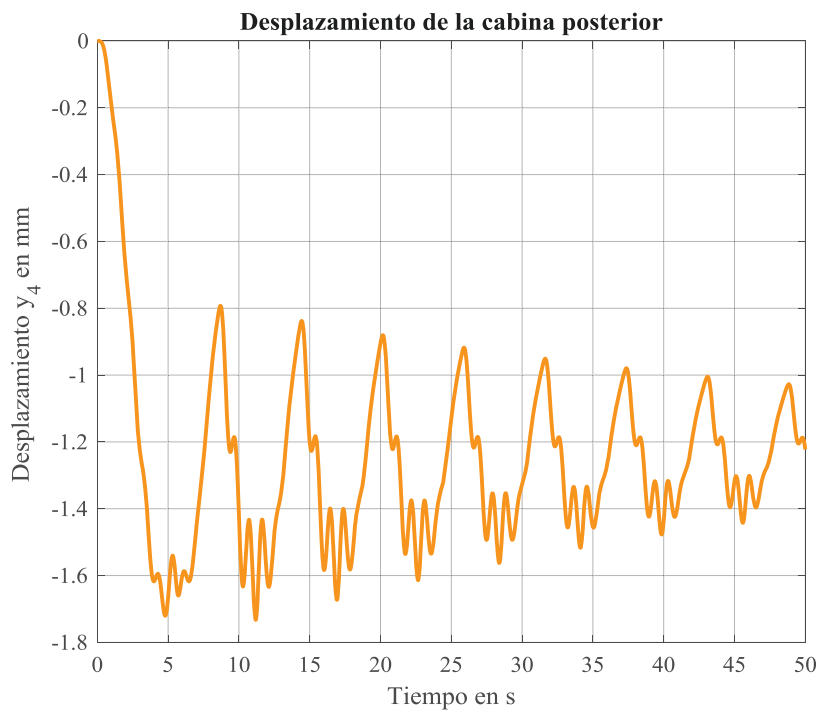


Figura 7-7 Desplazamiento de la cabina posterior vs. tiempo.



Figura 7-8 Desplazamiento de la masa no suspendida izquierda frontal vs. tiempo.

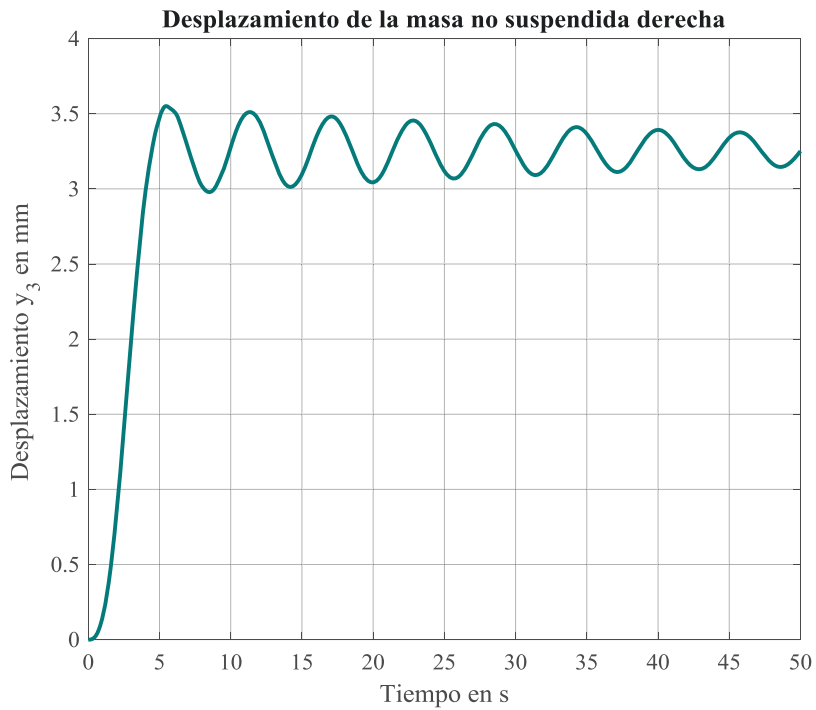


Figura 7-9 Desplazamiento de la masa no suspendida derecha frontal vs. tiempo.

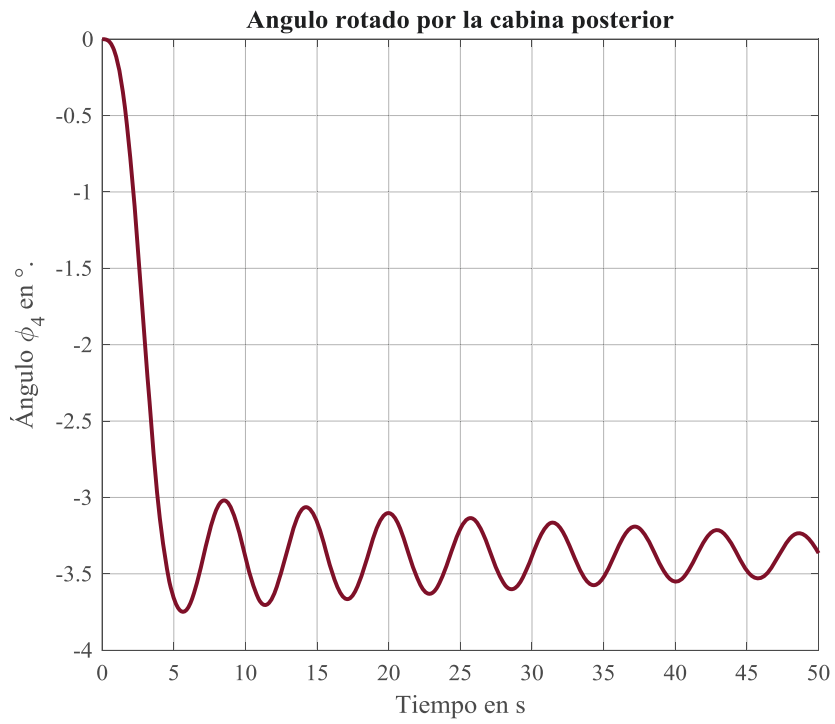


Figura 7-10 Rotación de la cabina posterior vs. tiempo.

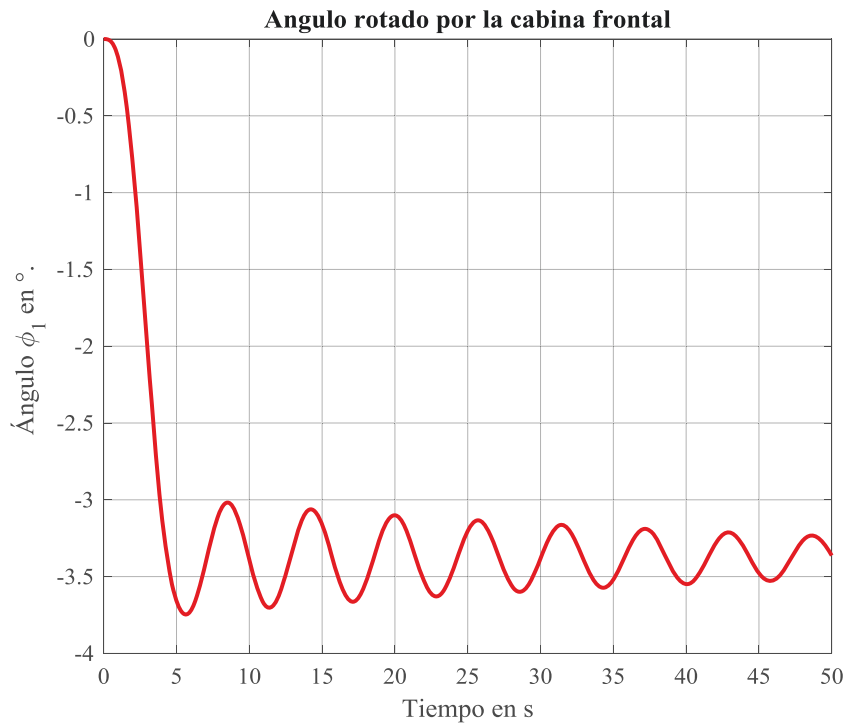


Figura 7-11 Rotación de la cabina frontal vs. tiempo.

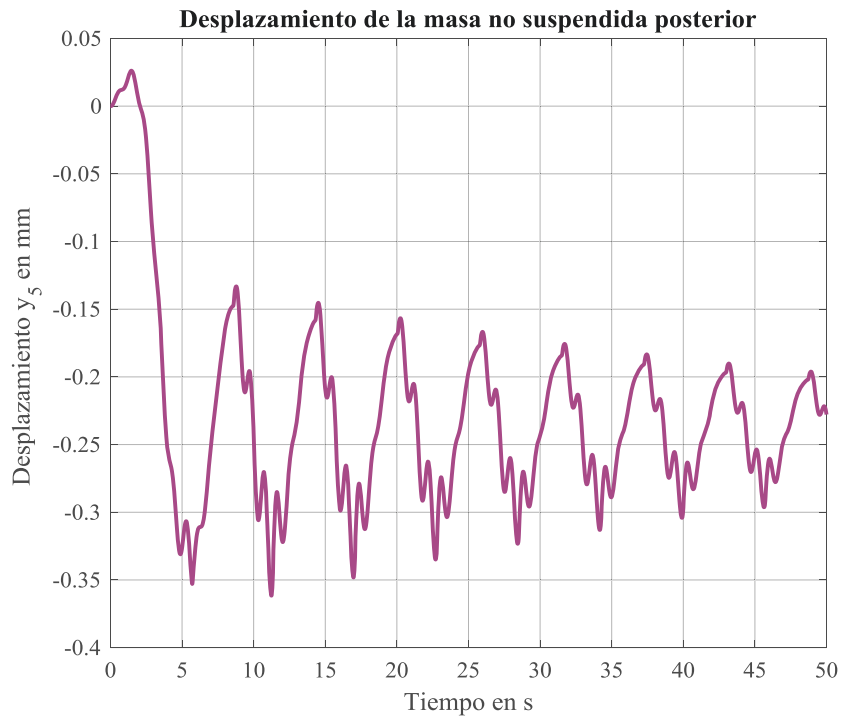


Figura 7-12 Desplazamiento de la masa no suspendida posterior vs. tiempo.

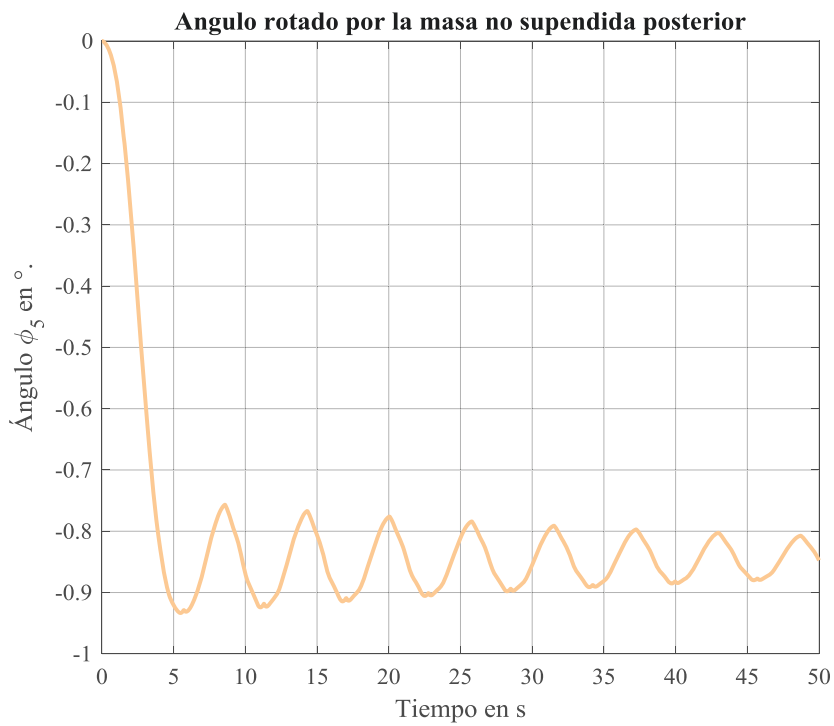


Figura 7-13 Rotación de la masa no suspendida posterior vs. tiempo.

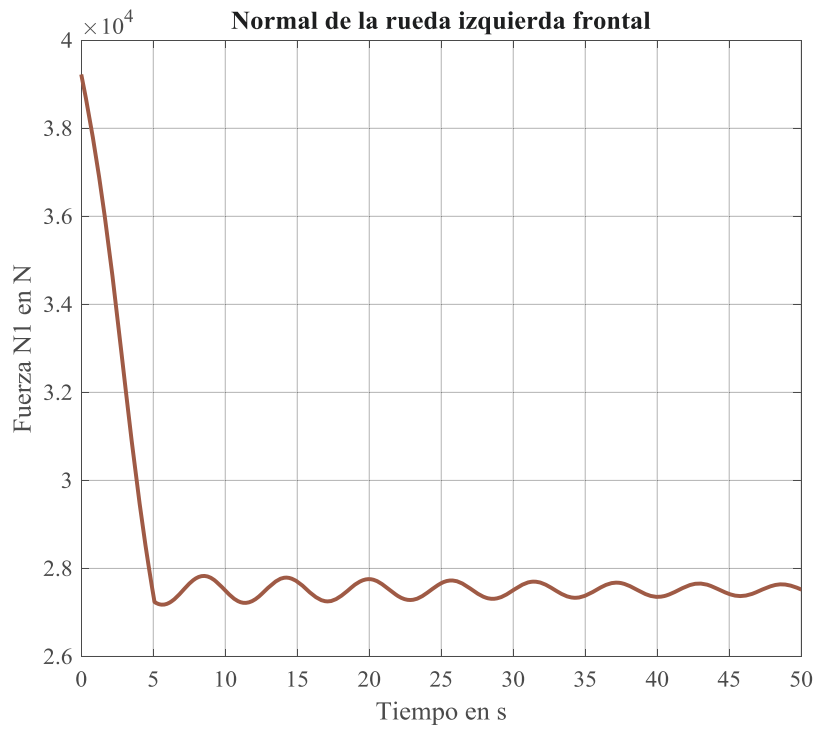


Figura 7-14 Fuerza normal de la rueda izquierda frontal vs. tiempo.

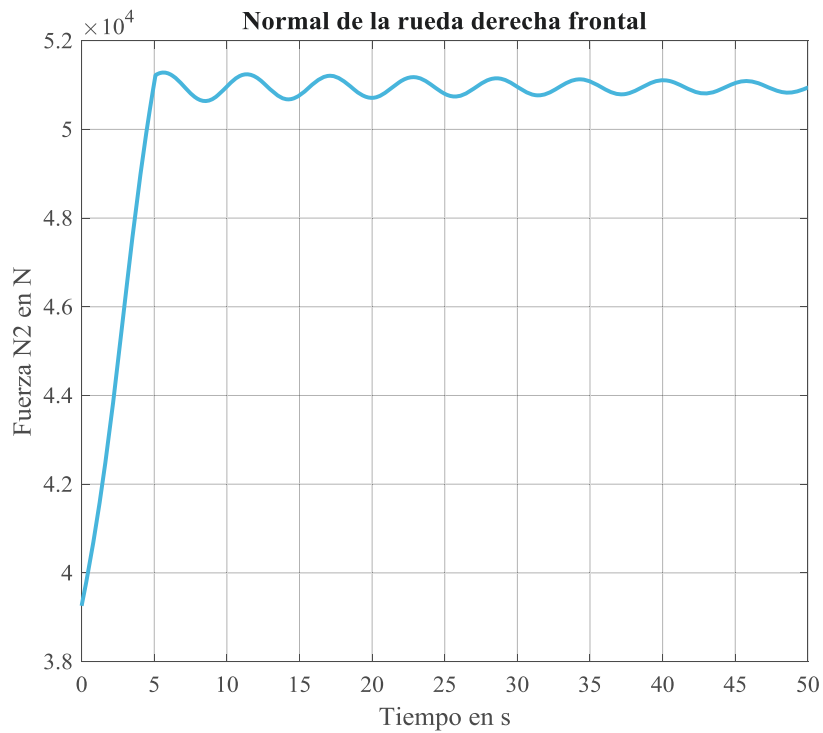


Figura 7-15 Fuerza normal de la rueda derecha frontal vs. tiempo.

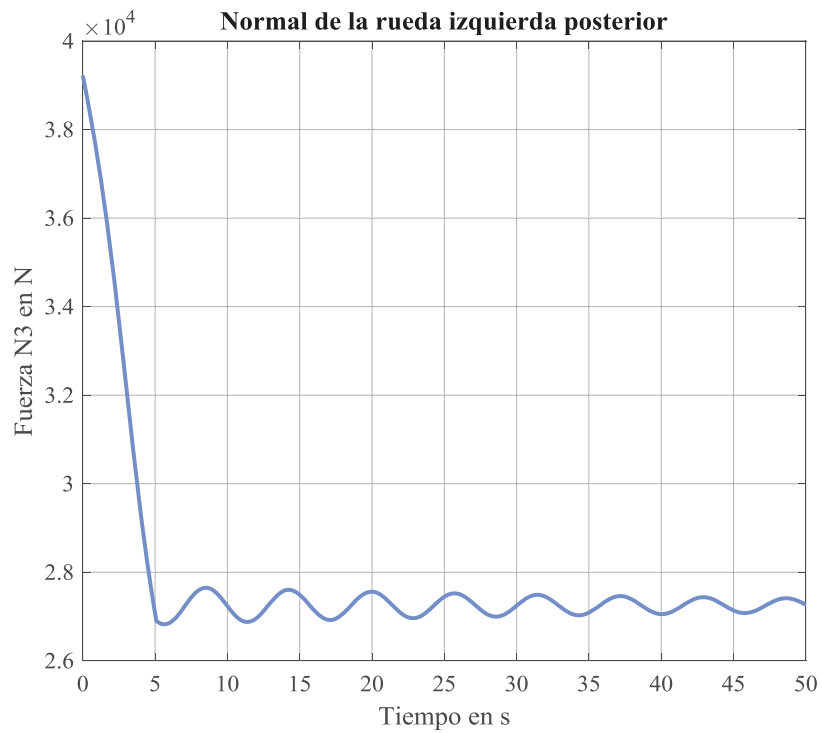


Figura 7-16 Fuerza normal de la rueda izquierda posterior vs. tiempo.

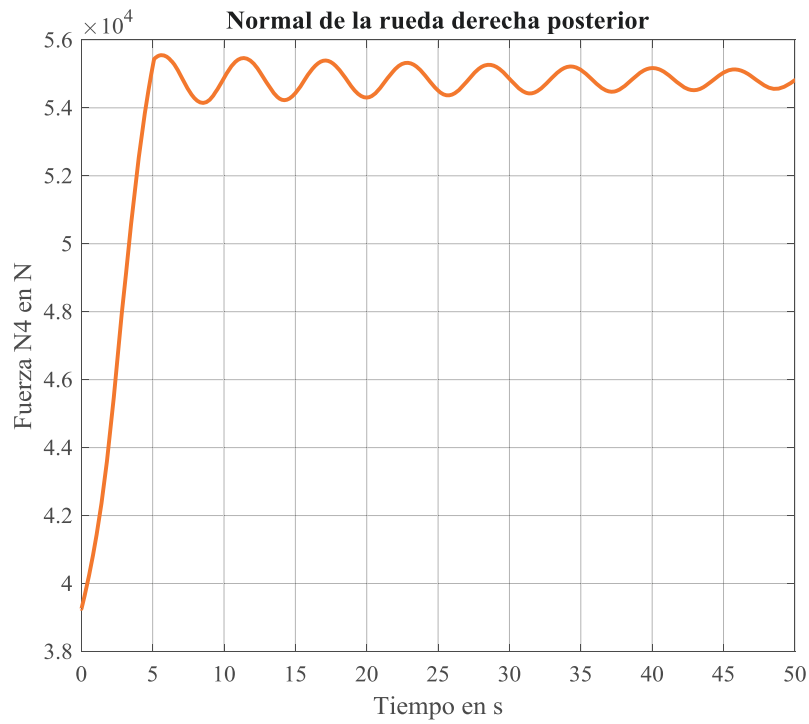


Figura 7-17 Fuerza normal de la rueda derecha posterior vs. tiempo.

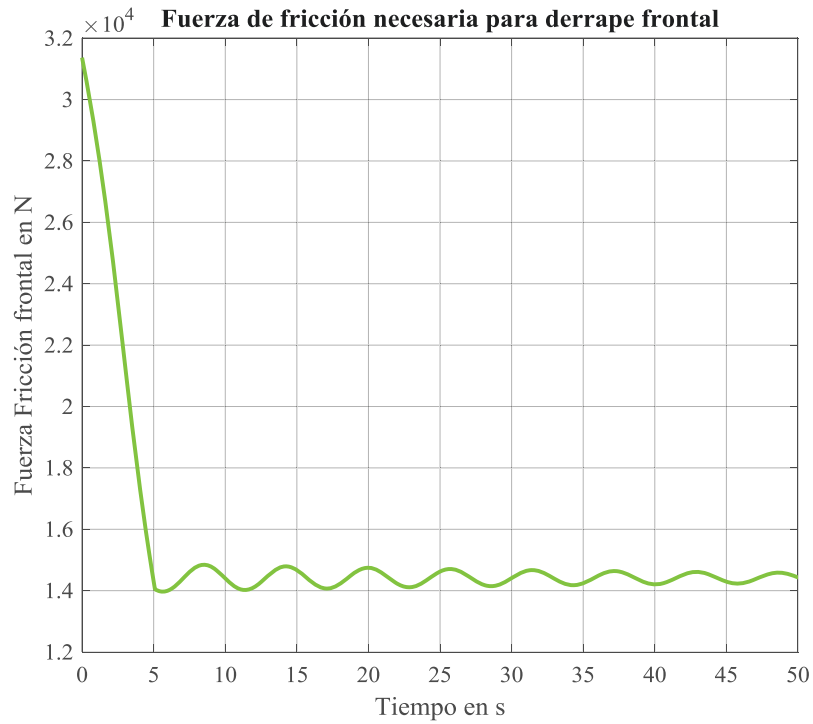


Figura 7-18 Fuerza de fricción necesaria para el derrape de la sección frontal vs. tiempo.

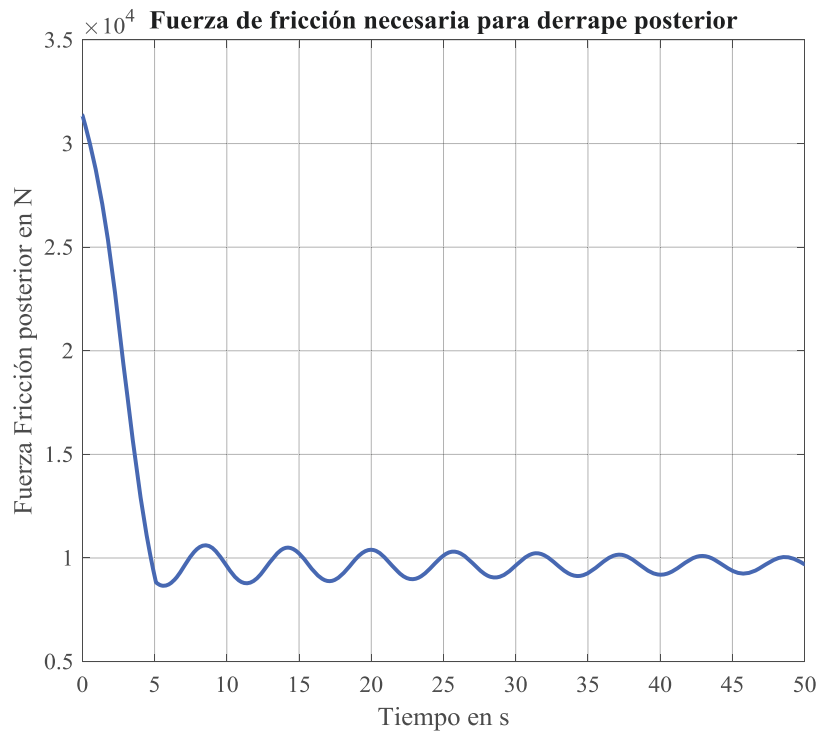


Figura 7-19 Fuerza de fricción necesaria para el derrape de la sección posterior vs. tiempo.

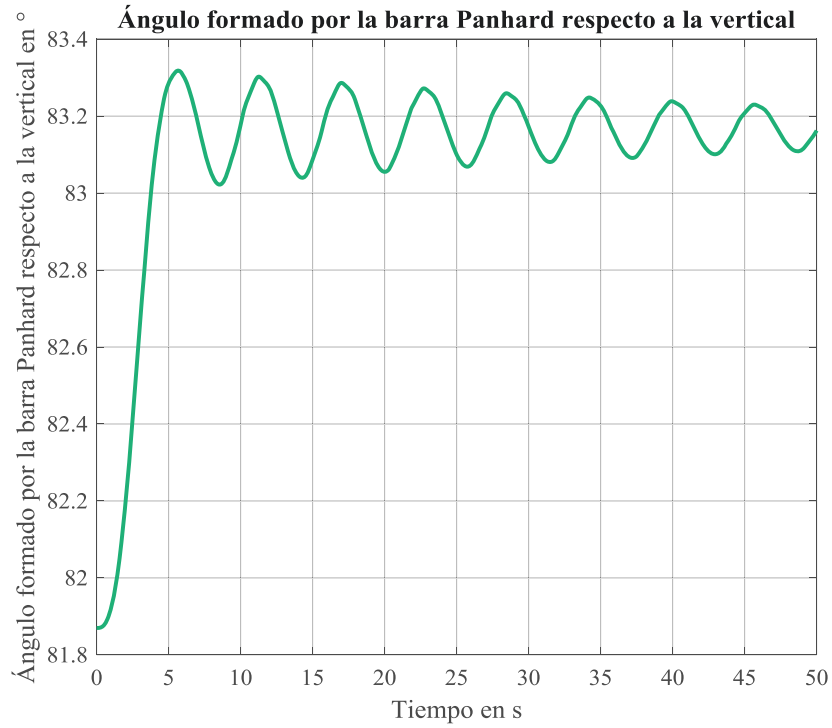


Figura 7-20 Ángulo formado por la barra Panhard en ° respecto a la vertical vs. tiempo.

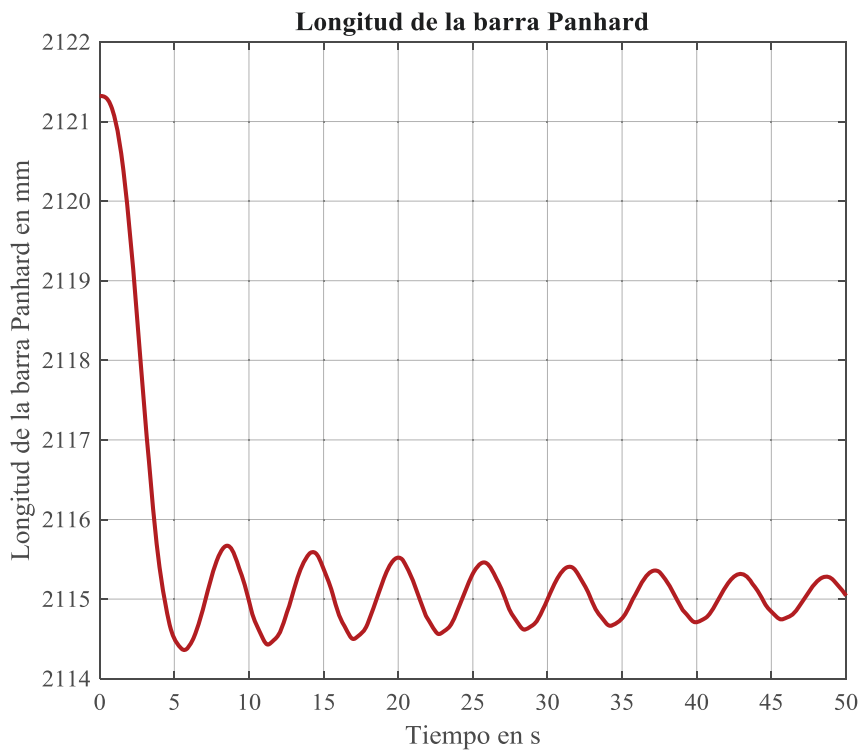


Figura 7-21 Longitud de la barra Panhard en mm vs. tiempo.

CAPITULO 8 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

8.1 Planteamiento matricial

Una vez conocidos los resultados de la simulación; a partir de valores y parámetros fijos, es necesario conocer ante cuál de ellos se tiene una mayor tendencial vuelco o bien al derrape. Para ello un primer paso es plantear el sistema de ecuaciones diferenciales descrito anteriormente en su forma matricial; con el fin de establecer las matrices de rigidez, amortiguamiento y de excitación, se deben eliminar las no linealidades planteadas en los sistemas tales como:

- Efecto de la variación de la posición inicial de los actuadores.
- Barra Panhard.

Así mismo, todas las funciones trigonométricas deben ser aproximadas mediante series de Taylor a una forma linealizada; ello es posible debido a los pequeños ángulos de rotación de los cuerpos, como puede ser apreciado en el capítulo anterior.

$$\sin(\varphi) \approx \varphi$$

$$\cos(\varphi) \approx 1$$

Posteriormente al desarrollo y factorización vectorial se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$[\underline{M}][\ddot{u}] + [\underline{C}][\dot{u}] + [\underline{K}][u] = [\underline{F}] \quad (7.1)$$

donde

$[\underline{M}]$	Matriz de inercias
$[\underline{C}]$	Matriz de amortiguamiento
$[\underline{K}]$	Matriz de rigidez
$[\underline{F}]$	Matriz excitatriz
$[\ddot{u}]$	Vector de aceleraciones
$[\dot{u}]$	Vector de velocidades

$[u]$ Vector de desplazamientos

Donde tales matrices responde a las siguientes relaciones:

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{B1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{B4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{B5} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$[\ddot{u}] = \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{z}_4 \\ \ddot{z}_5 \\ \ddot{\phi}_4 \\ \ddot{\phi}_5 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$[\dot{u}] = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{\phi}_4 \\ \dot{\phi}_5 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$[u] = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \phi_1 \\ z_4 \\ z_5 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$[\bar{F}] = \begin{bmatrix} -\frac{m_1 v^2}{\rho_1} \alpha_1 \\ -\frac{m_2 v^2}{\rho_1} \alpha_1 \\ -\frac{m_3 v^2}{\rho_1} \alpha_1 \\ (h_{G1} - h_{B1}) \left(\frac{m_1 v^2}{\rho_1} - m_1 g \alpha_1 \right) \\ -\frac{m_4 v^2}{\rho_2} \alpha_2 \\ -\frac{m_5 v^2}{\rho_2} \alpha_2 \\ (h_{G2} - h_{B2}) \left(\frac{m_4 v^2}{\rho_2} - m_4 g \alpha_2 \right) \\ (h_{E2}) \left(\frac{m_5 v^2}{\rho_2} - m_5 g \alpha_2 \right) \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_1 & -c_2 & c_1 b_1 - c_2 b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_{w1} & 0 & -c_1 b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & c_2 + c_{w2} & c_2 b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 b_1 \dot{z}_1 - c_2 b_2 \dot{z}_1 & -c_1 b_1 \dot{z}_2 & +c_2 b_2 \dot{z}_3 & +c_1 b_1^2 \dot{\phi} + c_2 b_2^2 \dot{\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s3} + c_{s4} & -c_{s3} - c_{s4} & c_{s3} b_3 - c_{s4} b_4 & -c_{s3} b_5 + c_{s4} b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s3} - c_{s4} & c_{w3} + c_{w4} + c_{s3} + c_{s4} & -c_{s3} b_3 + c_{s4} b_4 & c_{w3} b_5 - c_{w4} b_6 - c_{s3} b_5 - c_{s4} b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s3} b_3 - c_{s4} b_4 & -c_{s3} b_3 + c_{s4} b_4 & c_{s3} b_3^2 + c_{s4} b_4^2 & -c_{s3} b_3 b_5 - c_{s4} b_4 b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s3} b_3 - c_{s4} b_4 & -c_{w4} b_6 - c_{s4} b_6 - c_{w3} b_5 & -c_{s4} b_4 b_6 + c_{s3} b_3 b_5 & c_{w4} b_6^2 - c_{s3} b_5^2 - c_{w3} b_5^2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{s2} & -k_{s1} & -k_{s2} & k_{s1} b_1 - k_{s2} b_2 - \frac{m_1 v^2}{\rho_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{s1} & k_{s1} + k_{w1} + k_{TB} & -k_{TB} & -k_{s1} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{s2} & -k_{TB} & k_{s2} + k_{w2} + k_{TB} & k_{s2} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{s1} b_1 - k_{s2} b_2 & -k_{s1} b_1 & k_{s1} b_1^2 + k_{s2} b_2^2 - k_E - m_1 g (h_{G1} - h_{B1}) & 0 & 0 & k_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s3} + k_{s4} & -k_{s3} - k_{s4} & k_{s3} b_3 - k_{s4} b_4 + \frac{m_4 v^2}{\rho_2} & -k_{s3} b_5 + k_{s4} b_6 + \frac{m_5 v^2}{\rho_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s3} - k_{s4} & k_{w3} + k_{w4} + k_{s3} + k_{s4} & -k_{s3} b_3 + k_{s4} b_4 - k_E & k_{w3} b_5 - k_{w4} b_6 + k_{s3} b_5 - k_{s4} b_6 - \frac{m_5 v^2}{\rho_2} \\ 0 & 0 & 0 & k_E & k_{s3} b_3 - k_{s4} b_4 & -k_{s3} b_3 + k_{s4} b_4 & k_{s3} b_3^2 + k_{s4} b_4^2 - m_4 g (h_{G2} - h_{B2}) & -k_{s3} b_3 b_5 - k_{s4} b_4 b_6 - m_4 g (h_{G2} - h_{B2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{w4} b_6 - k_{s4} b_6 - k_{w3} b_5 - k_{s3} b_5 & -k_{w4} b_6 - k_{s4} b_6 - k_{w3} b_5 & -k_{w4} b_6^2 - k_{s4} b_6^2 - k_{w3} b_5^2 - k_{s3} b_5^2 & k_{w4} b_6^2 + k_{s4} b_6^2 - k_{w3} b_5^2 - k_{s3} b_5^2 - m_5 g h_{E2} \end{bmatrix}$$

8.2 Sensibilidad a los parámetros de vía

8.2.1 Generación de análisis

Para la generación de cada análisis de sensibilidad, se construyó un algoritmo el cual, evalúa el comportamiento dinámico descrito en capítulos anteriores, de forma que para cada valor analizado simula todo el modelo y de los resultados mostrados en el capítulo anterior, registra el menor valor de la normal en cada rueda obtenida en toda la simulación así como el mínimo valor de la fuerza de fricción requerido para producir el derrape. Se ha seleccionado dichos resultados ya que lo que se busca conocer es que tan sensible es al vuelco o al derrape el modelo a fin de visualizar si ante la variación de un parámetro se podría originar el fenómeno.

8.2.2 Velocidad de circulación

De las matrices anteriores, se puede notar que el primer parámetro al cual es sensible el vuelco es la velocidad por lo que, manteniendo constantes el resto de parámetros descritos en la simulación, se obtienen las siguientes gráficas, las cuales describen la normal mínima en las ruedas así como la fuerza de fricción mínima requerida para provocar el derrape para cada valor de velocidad.

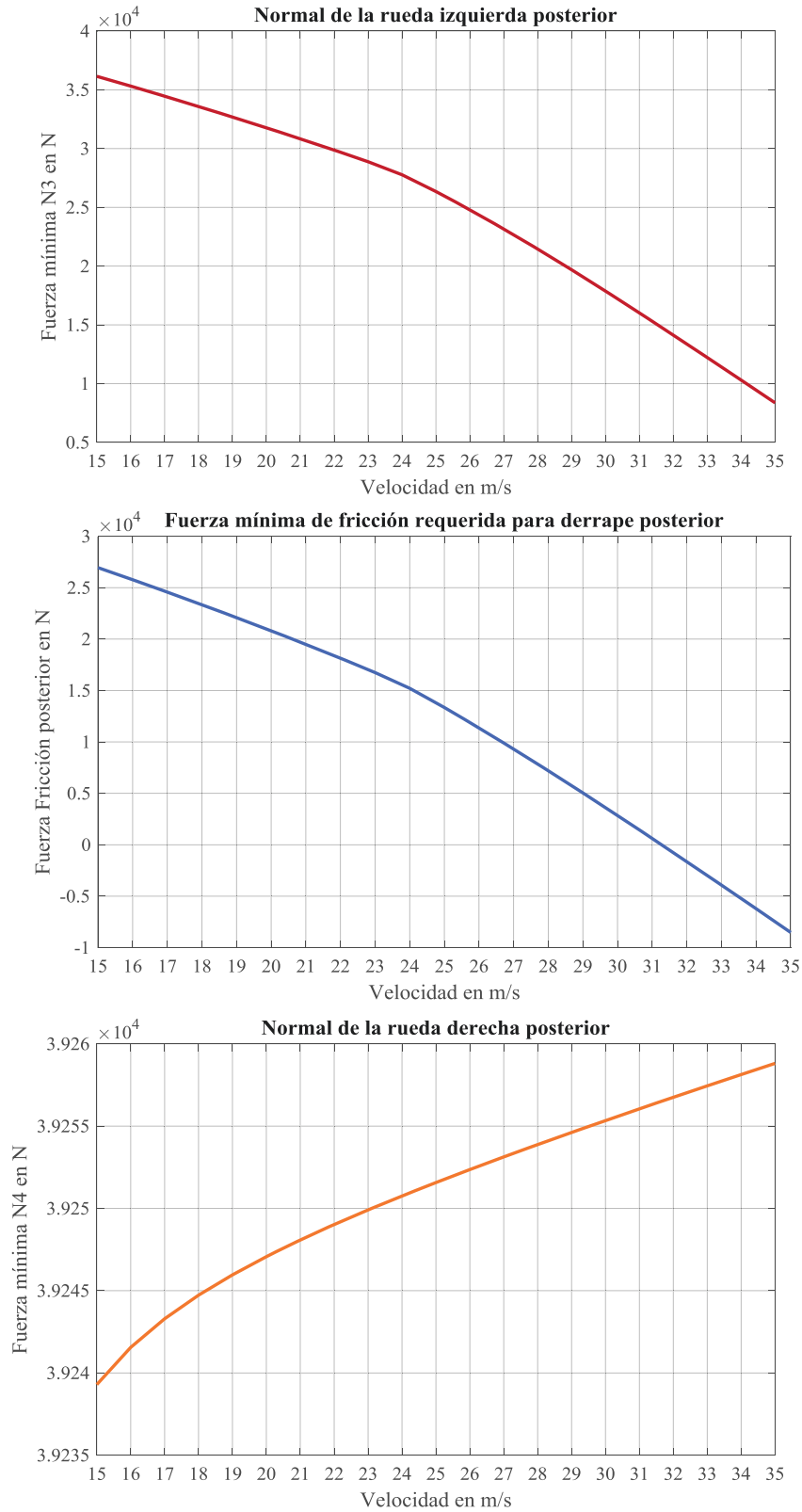


Figura 8-1 Sensibilidad a la velocidad posterior.

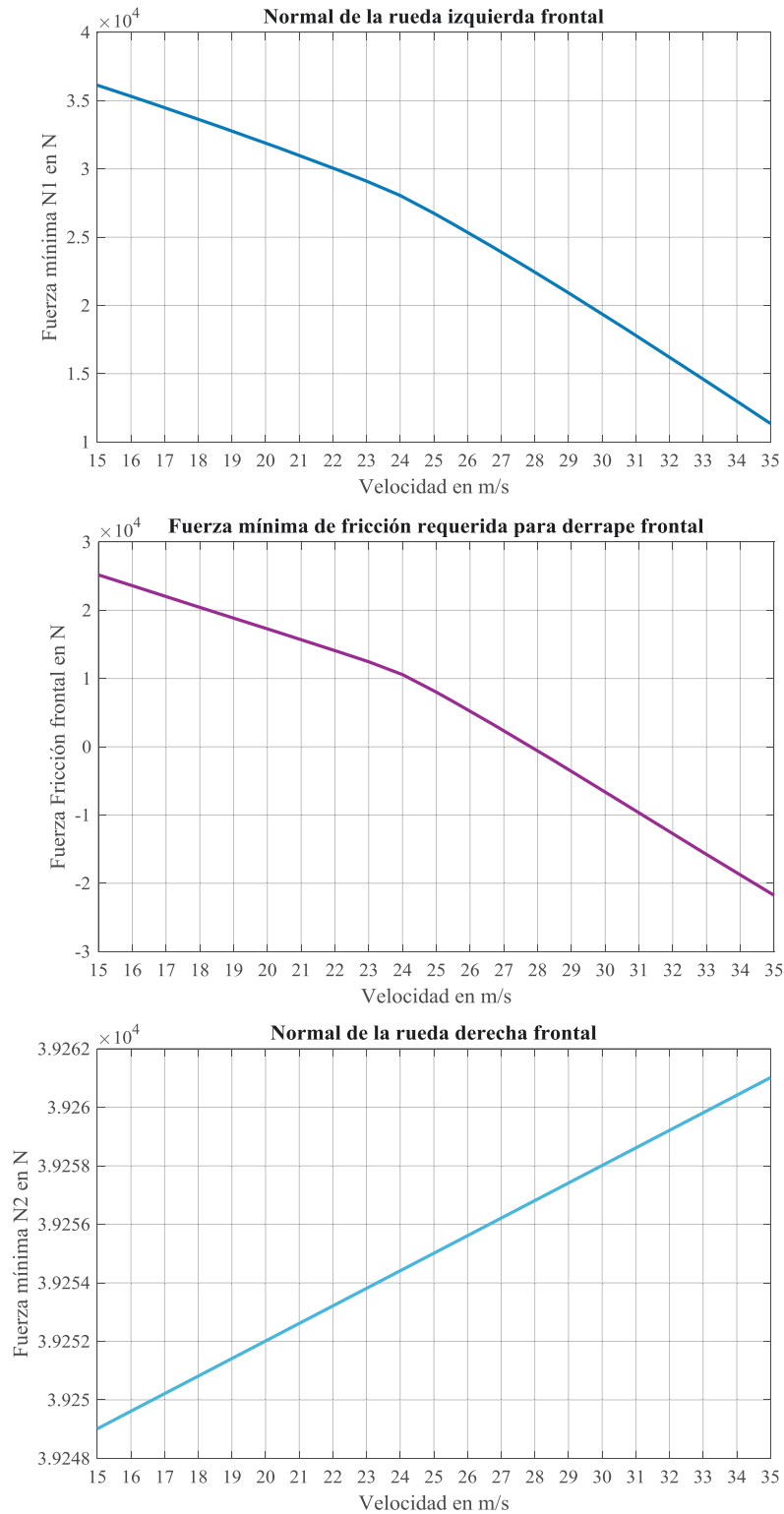


Figura 8-2 Sensibilidad a la velocidad frontal.

De las gráficas se puede apreciar una mayor sensibilidad al derrape que al vuelco, debido al derrape, velocidad crítica se encuentra aproximadamente a 28 m/s o 101 km/h para las condiciones dadas en la simulación.

8.2.3 Sensibilidad al peralte final

Seguidamente, variando en este caso los valores de peralte final de curva, se obtienen las siguientes gráficas:

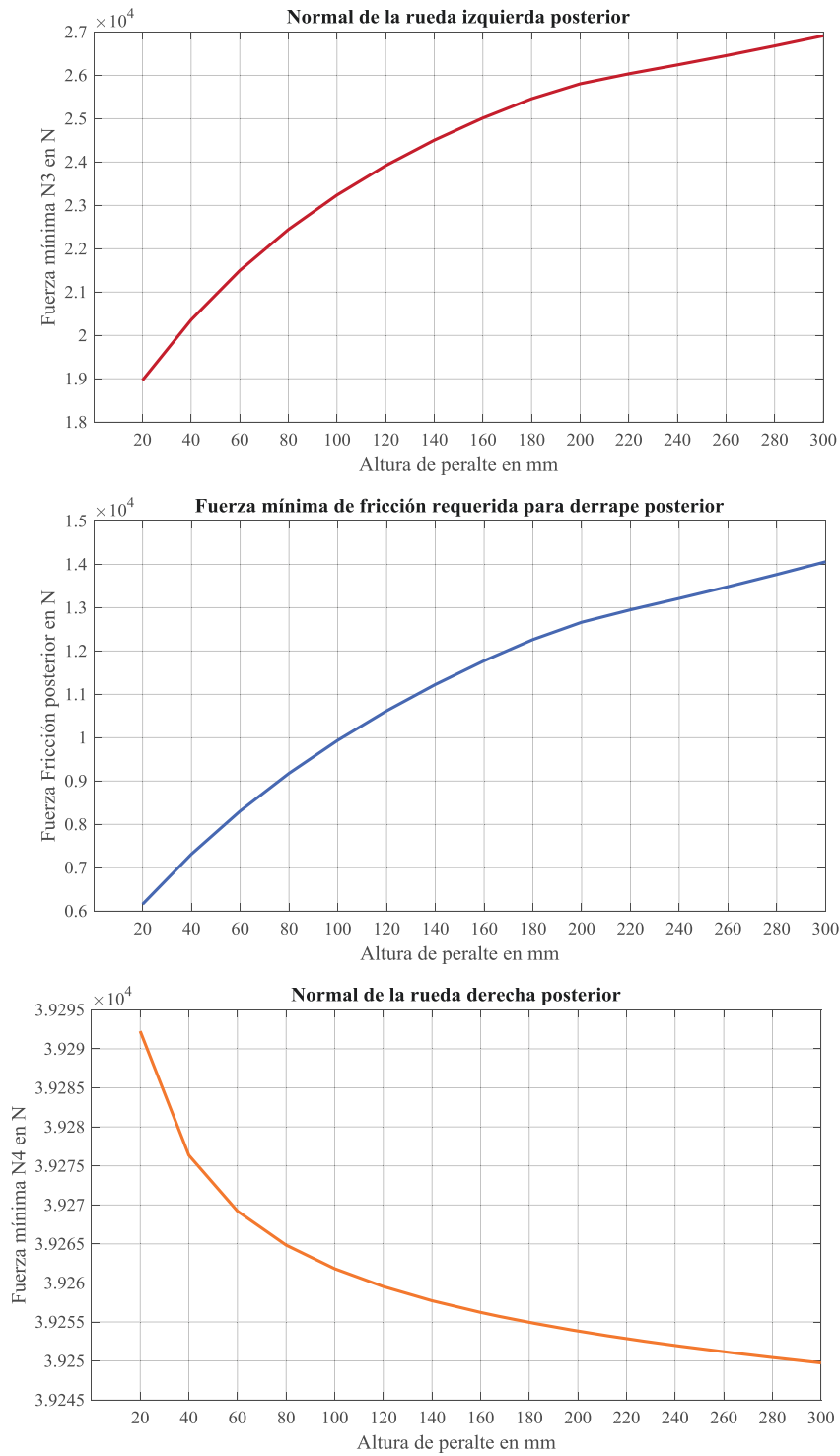


Figura 8-3 Sensibilidad al peralte posterior.

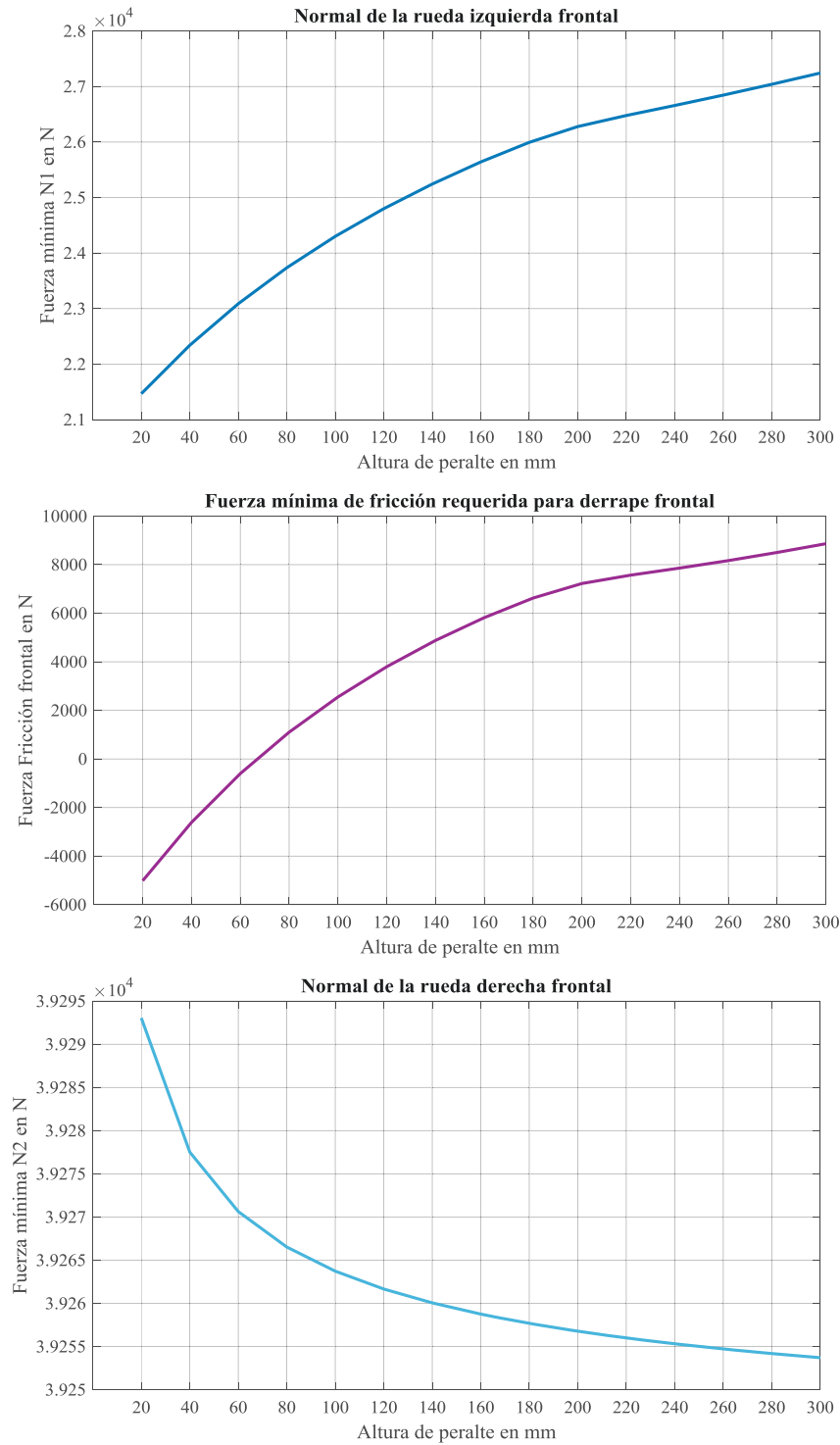


Figura 8-4 Sensibilidad al peralte frontal.

De los resultados mostrados, se puede apreciar que la disminución del peralte en la vía tiende al derrape del mismo, siendo este parámetro más sensible a dicho fenómeno que al vuelco.

8.2.4 Ancho de vía

El ancho de vía resulta crítico en términos de vuelco ya que la distancia entre los apoyos del vehículo determina la estabilidad del mismo ante fenómenos de vuelco.

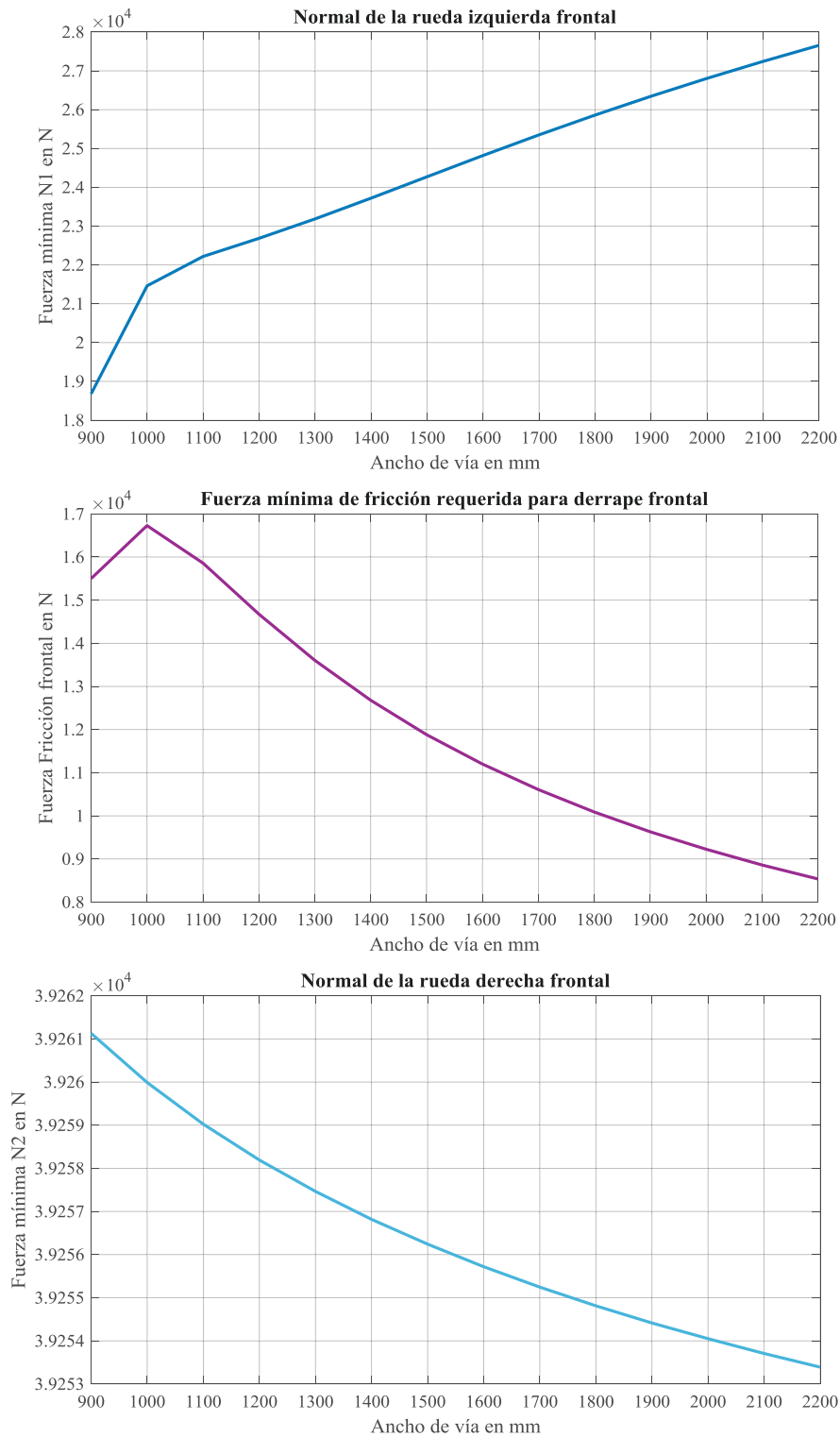


Figura 8-5 Sensibilidad al ancho de vía frontal.

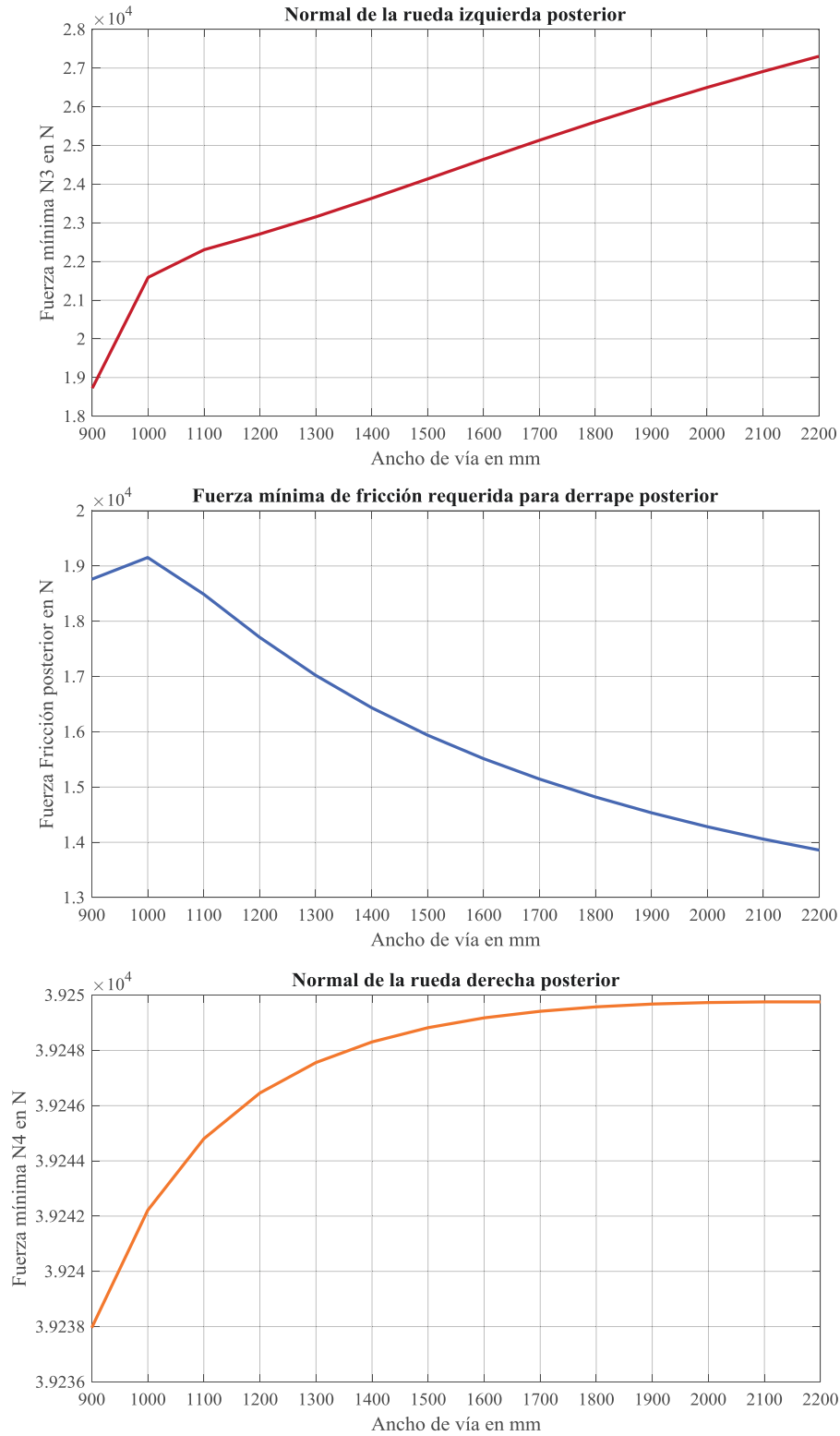


Figura 8-6 Sensibilidad al ancho de vía posterior.

En este caso, se puede apreciar que ampliando el ancho de vía se tiene una baja tendencia al vuelco; mientras que el derrape es prácticamente insensible a este parámetro.

8.2.5 Radio de curvatura final

Otro parámetro, que resulta crítico es la influencia del radio de curvatura del tramo de radio constante; con lo cual se modifica la longitud del tramo de acuerdo y con ello una mayor tendencia al vuelco:

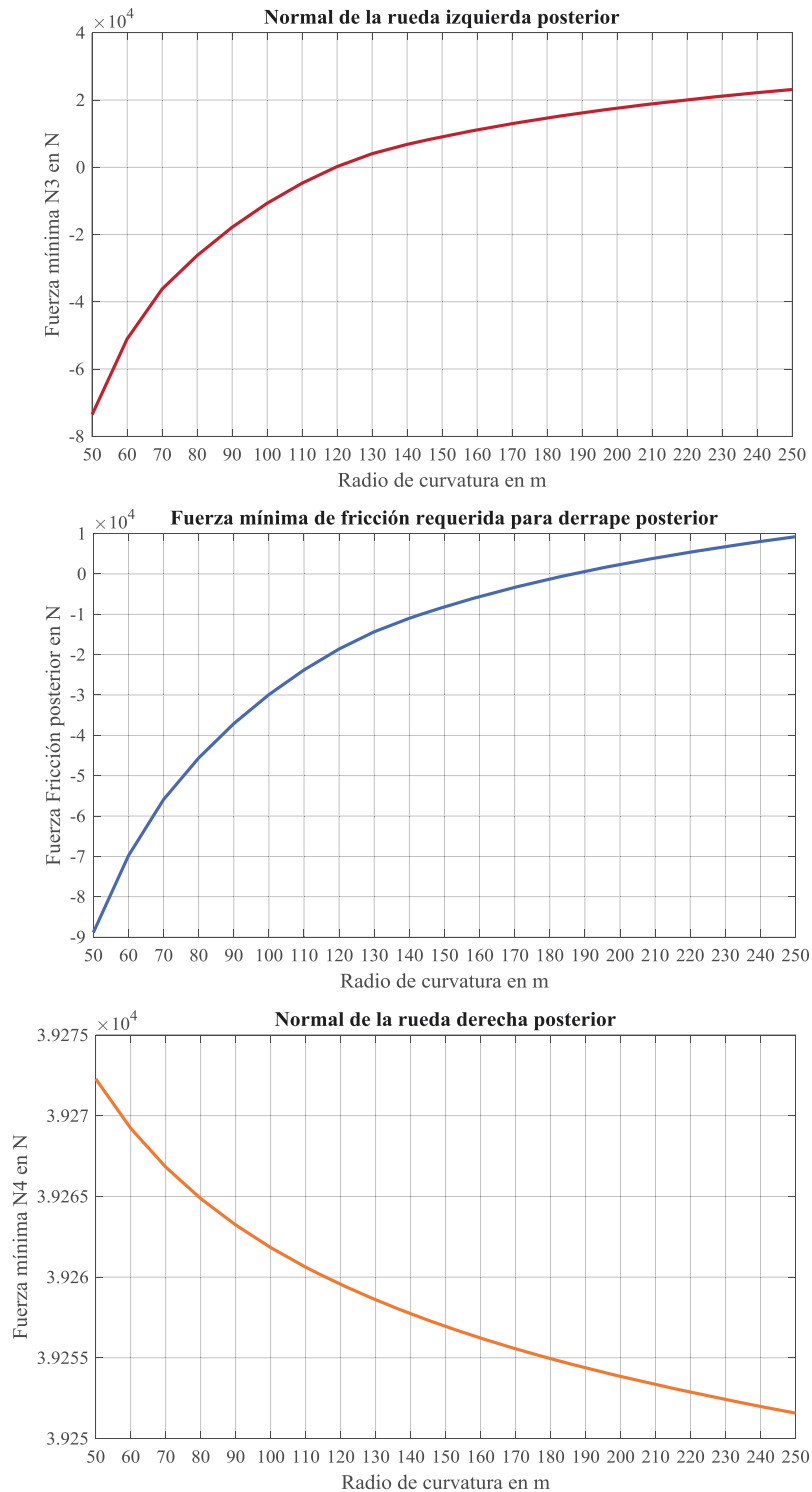


Figura 8-7 Sensibilidad al radio de curvatura posterior.

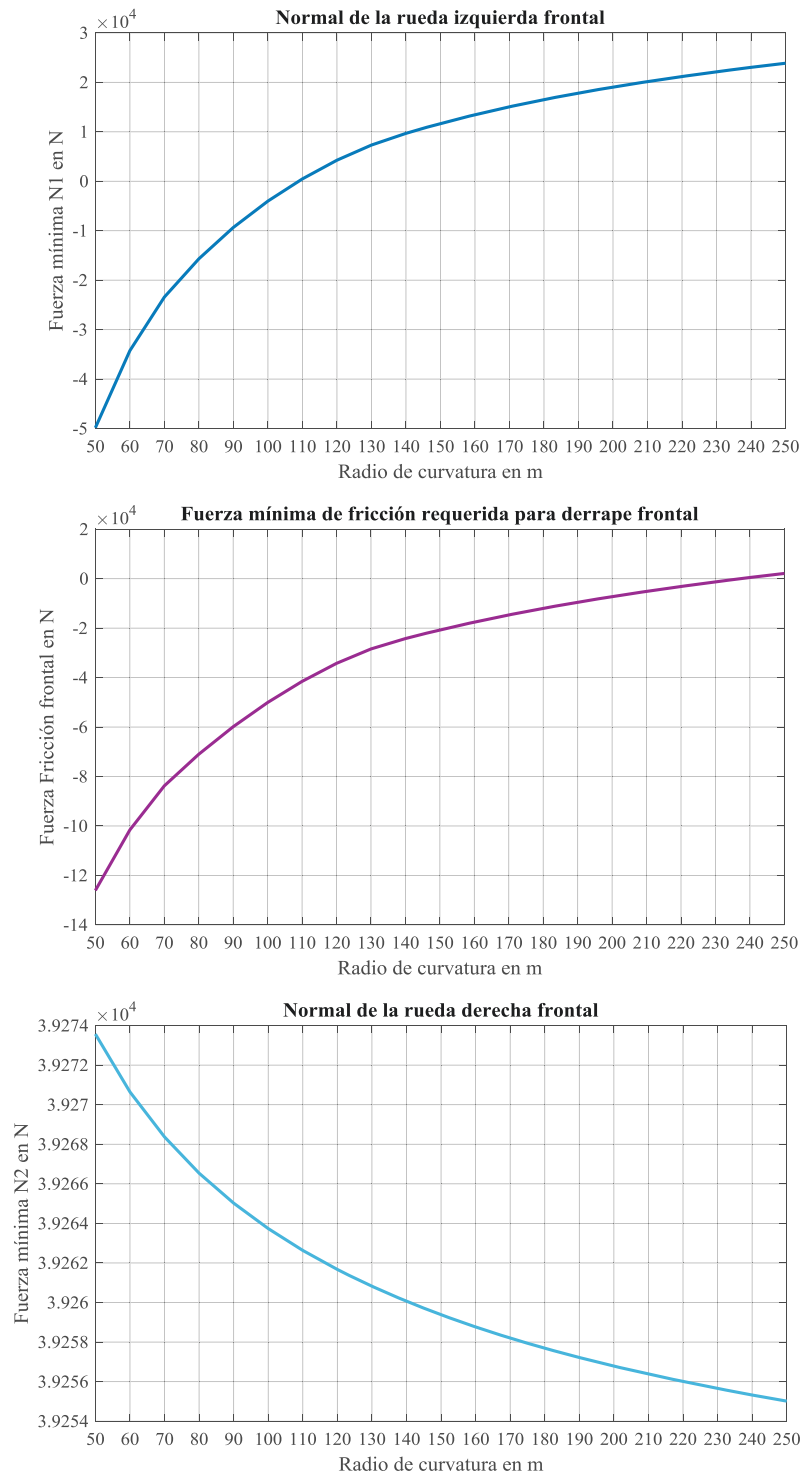


Figura 8-8 Sensibilidad al radio de curvatura frontal.

En este caso, el radio de curvatura provoca la volcadura a un radio de 230 m; mientras que para el derrape se requiere de un radio aproximadamente 110 m; con lo cual se puede concluir que la sensibilidad es alta el derrape producto de las fuerzas de inercia generadas por la aceleración centrípeta.

8.3 Sensibilidad a los parámetros del vehículo

8.3.1 Rigidez torsional de la carrocería

Dentro de los parámetros del vehículo, el efecto de la rigidez de la carrocería resulta en un elemento de análisis ya que es el único componente que vincula las sendas secciones de un vehículo. Manteniendo constantes las variables dadas en la simulación se obtiene:

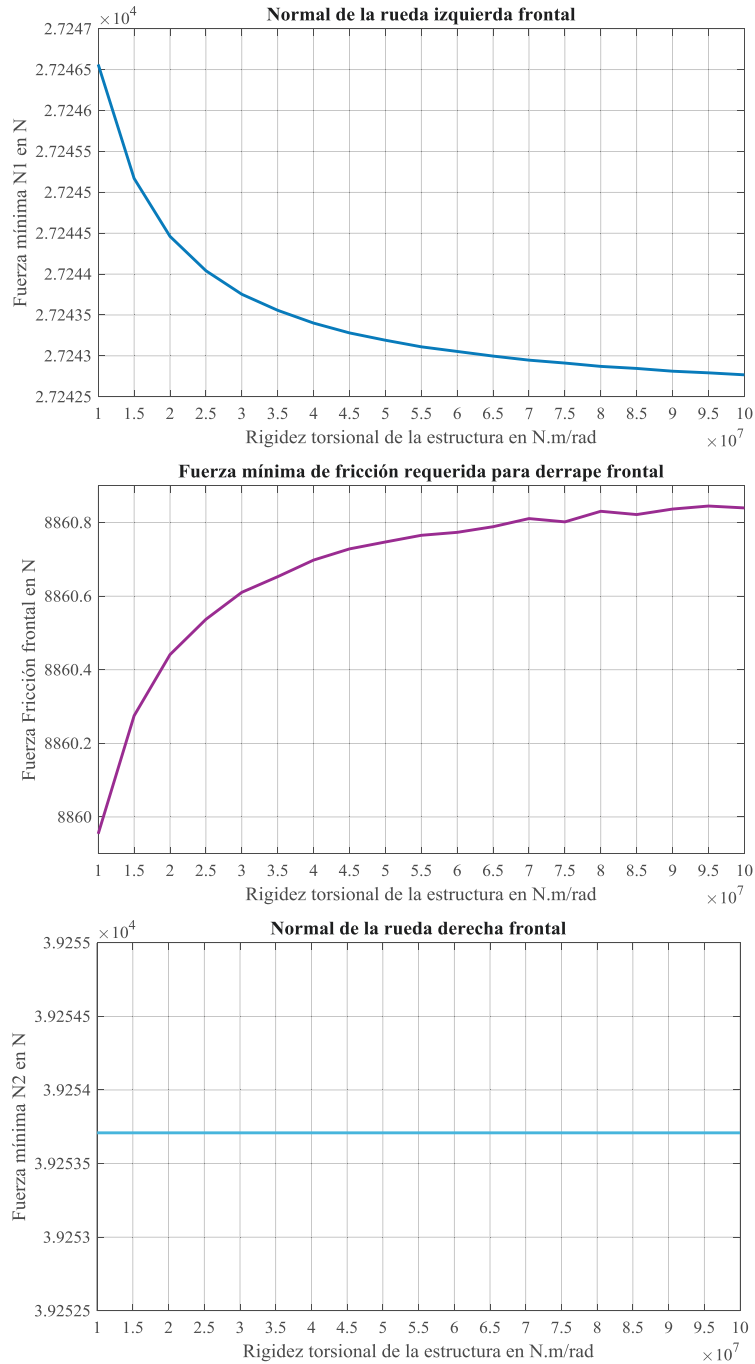


Figura 8-9 Sensibilidad a la rigidez torsional frontal.

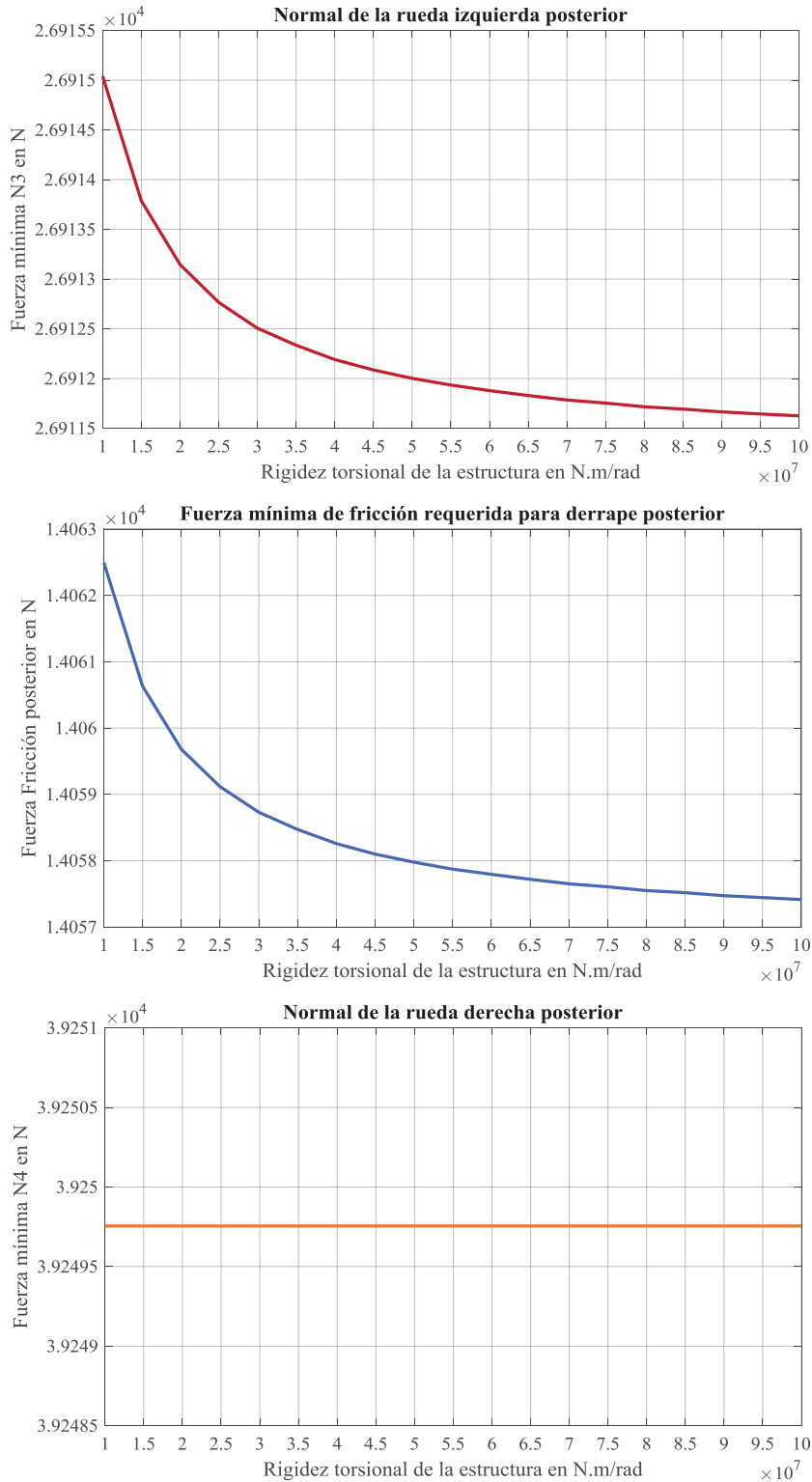


Figura 8-10 Sensibilidad a la rigidez estructural posterior.

Para este parámetro, se tiene que ambos fenómenos son de manera práctica insensibles a este parámetro; más si se analizara un mayor número de secciones de manera secuencial, la tendencia a otros fenómenos de inestabilidad sería determinante.

8.3.2 Rigidez de los neumáticos

Un elemento básico en el comportamiento de un vehículo, es la rigidez de los neumáticos, si bien ésta depende de la carga y de varias características como la presión interna a la cual se encuentran sometidos, material de la calzada, etc. Además, notorio en las matrices presentadas anteriormente, que dicho parámetro interviene de manera importante en la dinámica del vehículo:

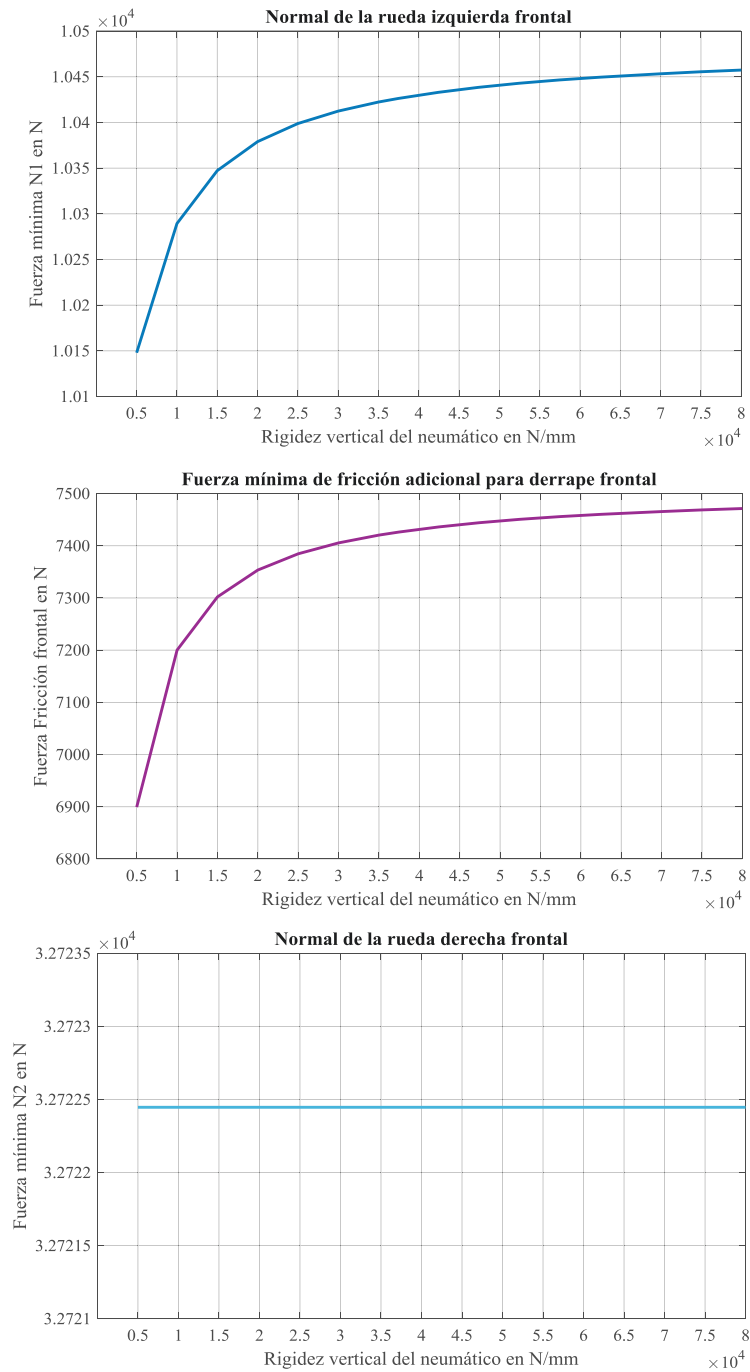


Figura 8-11 Sensibilidad a la rigidez de los neumáticos frontal.

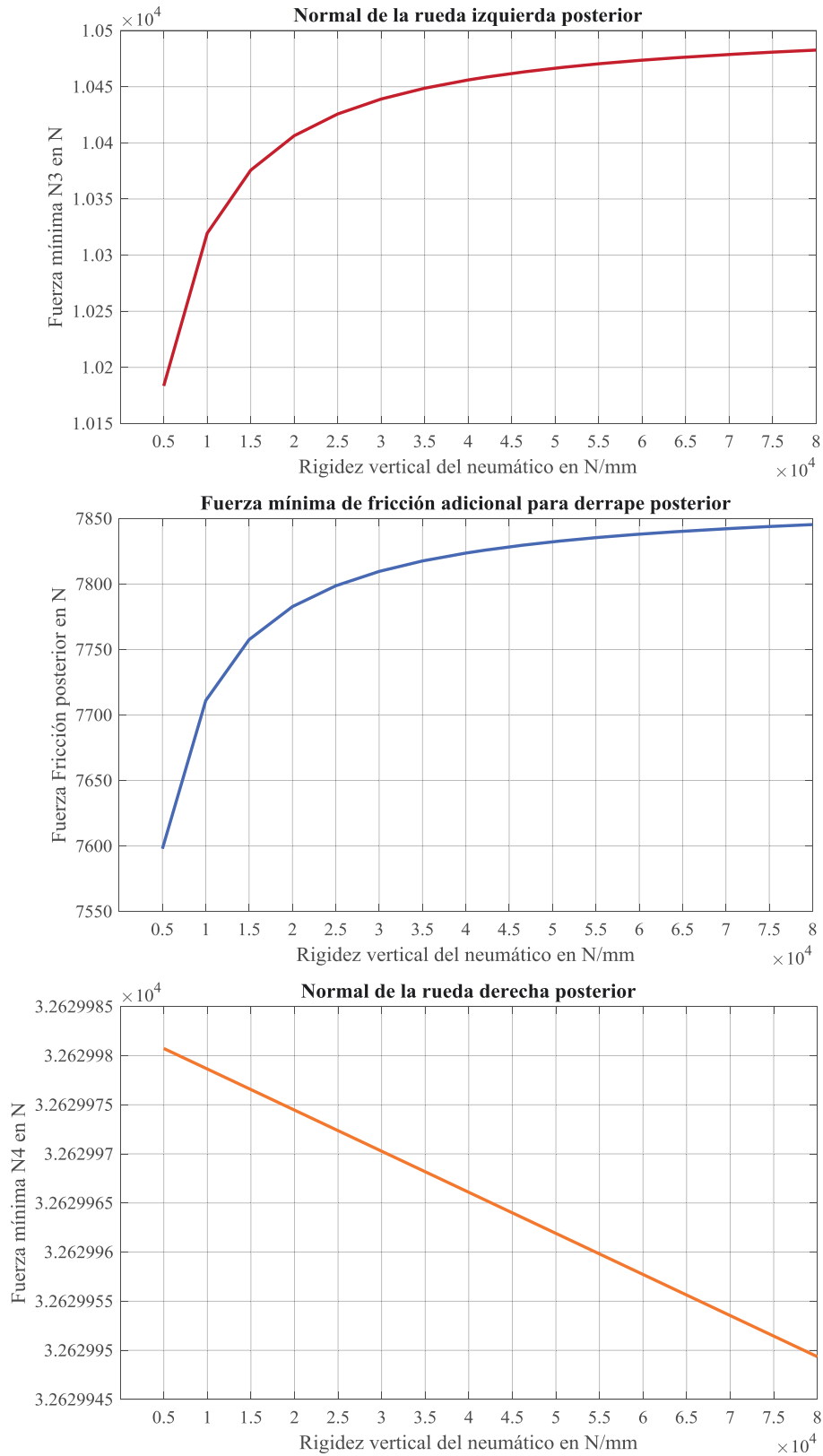


Figura 8-12 Sensibilidad a la rigidez de los neumáticos posterior.

8.3.3 Altura del centro de gravedad de la cabina

La altura del centro de la gravedad de la cabina es uno de los principales actuadores al momento de provocar el vuelco, ya que ello implica que la fuerza centrífuga originada en el tránsito sobre una calzada curva provocará un mayor momento sobre los neumáticos; ello puede ser apreciado en las siguientes gráficas:

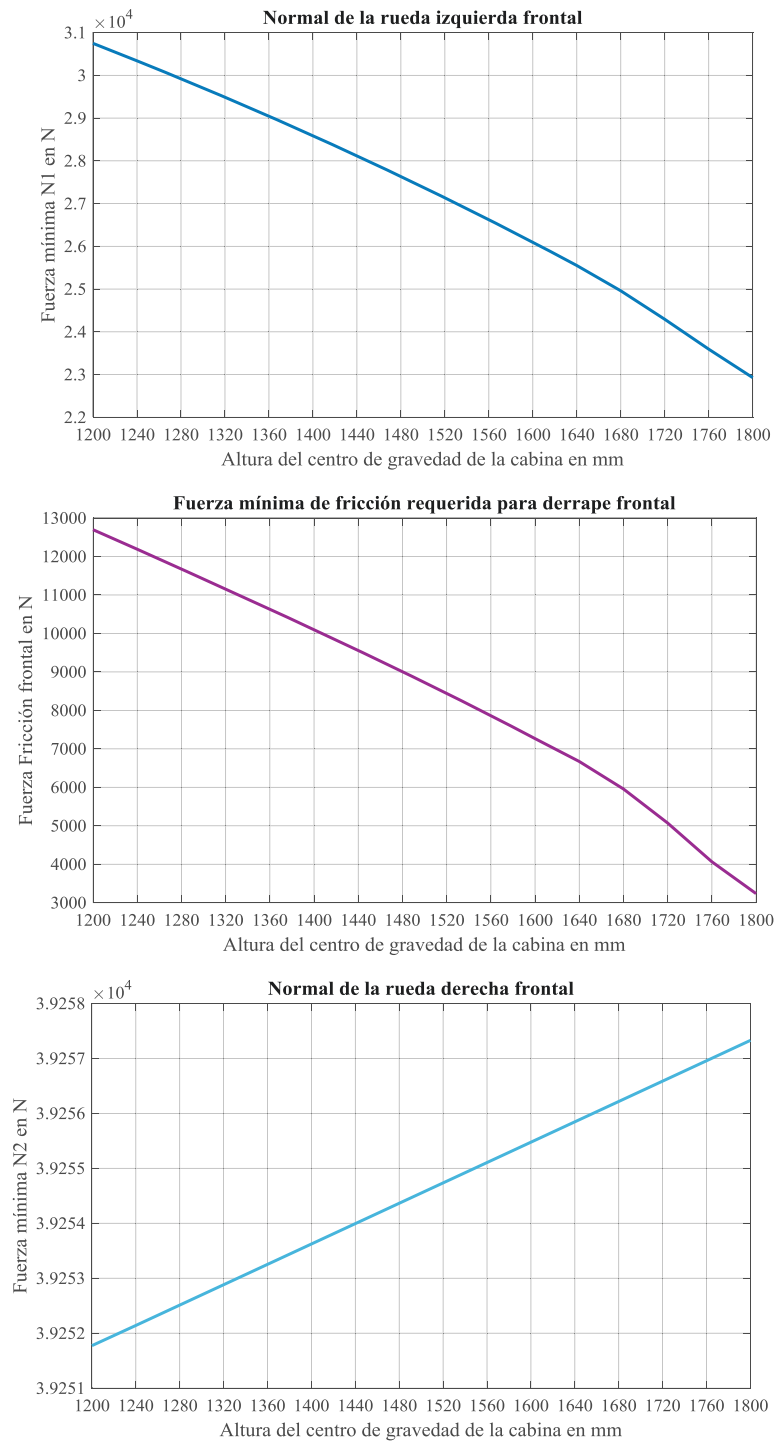


Figura 8-13 Sensibilidad a la altura del centro de gravedad frontal.

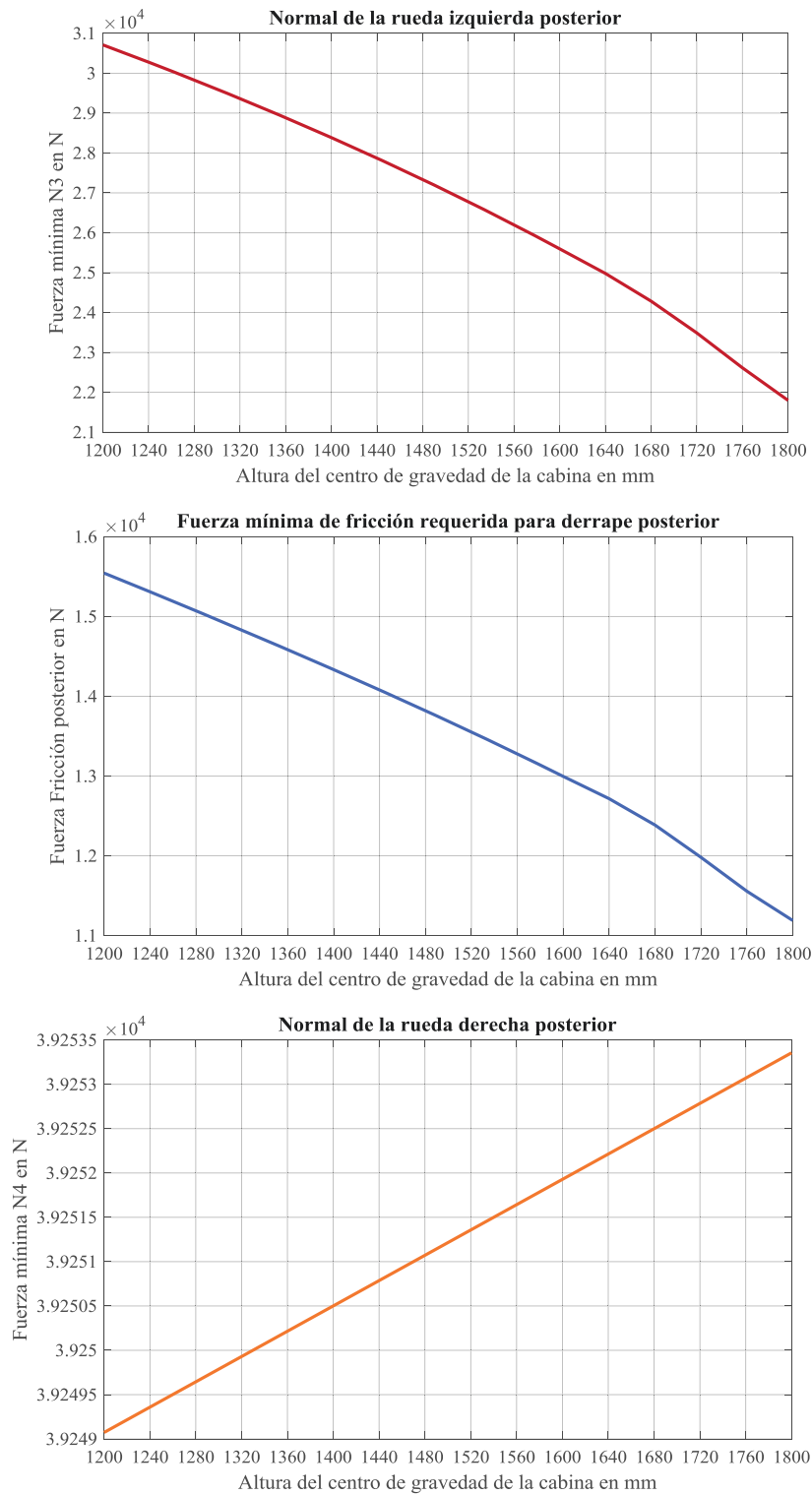


Figura 8-14 Sensibilidad a la altura del centro de gravedad posterior.

Como se puede apreciar en la gráficas, la principal tendencia de la variación de la altura del centro de gravedad de la cabina, es la tendencia al vuelco que esta genera debido al momento en la ruedas producido por las fuerza centrípeta en sendas secciones.

CAPITULO 9 VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

9.1 Limitaciones del modelo

Con la finalidad de comprobar la validez práctica del modelo dinámico propuesto, se han realizado ensayos sobre tramos curvos de carretera a fin de contrastar los datos arrojados por el algoritmo frente a los obtenidos en el experimento.

Cabe mencionar que el modelo posee limitaciones en cuanto a la libertad de desplazamiento del vehículo sobre la curva ya que el modelo considera únicamente el desplazamiento en la dirección longitudinal de la vía; además, el modelo solo evalúa un segmento de un tramo curvo de carretera compuesto por una curva de acuerdo (Clotoide) y una curva de radio constante; adicionalmente, no se tiene medidas del peralte de la vía ni de datos relacionados a las características de la clotoide usada en cada tramo de experimental.

Adicionalmente, los datos respecto a los coeficientes de amortiguamiento tanto del sistema de suspensión y de los neumáticos, así como los momentos de inercia son extraídos de [Mustafá (2000)], [Rojas y Arzola (2013)], [Popp y Schiehlen (2010)], [Sekulic y Dedovic (2011)] y [Guiggiani (2014)]. De la bibliografía citada, se extrajeron los valores que no son provistos en las características del vehículo.

Con respecto al segmento de vía analizado, dado el cambio de concavidad de las curvas sobre las que se realizaron las mediciones, se ha tomado los datos medidos sobre el tránsito en curvas cóncavas a la izquierda con las cuales concuerda el modelo planteado.

9.2 Equipo utilizado para la experimentación

Los ensayos dinámicos fueron realizados en el municipio de Vilagarcía de Arousa (Pontevedra) en locaciones cercanas a la empresa Castrosua. En la **Figura 9-1** se muestra el vehículo en el cual se montaron los equipos de medición:



Figura 9-1 Vehículo de ensayo.

El ensayo se realizó con una unidad de medición inercial “*Inertial Measurement Unit (IMU)*” la cual se situó lo más próximo al centro de gravedad del autobús a fin de obtener los ángulos de giro en la cabina.

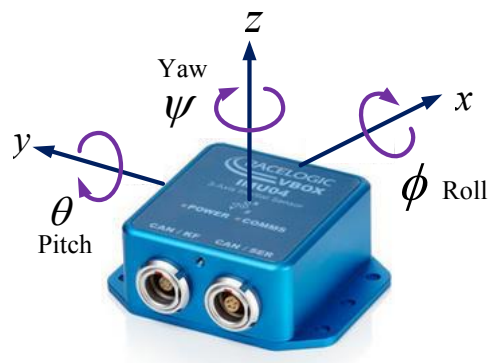


Figura 9-2 Inertial Measurement Unit (IMU)

El equipo mostrado en la **Figura 9-2** corresponde a un VBOX – 3i –SL -100H el cual integra:

- GPS diferencial.
- Dos antenas para la medición de los ángulos Roll, Pitch y Yaw.
- Dos salidas analógicas de 16 bits.
- Do salidas digitales de 24 bits.
- Cuatro entradas analógicas

- Dos puestos CAN.
- Un puesto serie USB.
- Una entrada digital para un trigger (gatillo)

Se tiene, también, una Unidad Inercial RLVBIMU03- IP65 incluyendo el cable RLCAB030-S de configuración en serie, alimentación y RLCAB005-CS de comunicación mediante CAN; acelerómetros y amplificadores y una unidad de registro de datos.

9.3 Características del vehículo

El autobús con el cual se realizaron los ensayos sobre pista posee las siguientes características mecánicas:

Tabla 9-1 Datos para el autocar ensayado.

DATOS PARA EL AUTOCAR ENSAYADO		
B_{via}	Ancho de vía [m]	2.100
$b_1 + b_2$	Distancia entre fuelles neumáticos [m]	1.600
m_1	Masa suspendida por eje [kg]	7000
$m_2 + m_3$	Masa no suspendida por eje [kg]	1000
$h_{G2} - h_{B2}$	Cota del CDG respecto al centro de balanceo [m]	0.800
$h_{B2} - h_{E2}$	Cota del centro de balanceo respecto al eje [m]	0.250
h_{E2}	Radio de los neumáticos [m]	0.500
k_s	Rigidez de un fuelle del sistema de suspensión [N/m]	200000
k_{TB}	Rigidez de la barra estabilizadora [N/m]	1000000
k_w	Rigidez radial de los neumáticos [N/m]	650000

Adicionalmente se tienen las características mecánicas mostradas en la

Tabla 9-2 extraídas de la bibliografía:

Tabla 9-2 Datos mecánicos tomados de la bibliografía

DATOS PARA EL AUTOCAR TOMADOS DE LA BIBLIOGRAFÍA		
I_1	Momento de Inercia de la masa suspendida frontal $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	125000
c_s	Coefficiente de amortiguamiento del fuelle neumático $[\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}]$	6000
c_w	Coefficiente de amortiguamiento de los neumáticos $[\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}]$	8000
k_E	Rigidez torsional de la estructura del autobús $[\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}]$	60000000
I_4	Momento de Inercia de la masa suspendida posterior $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	125000
I_5	Momento de Inercia de la masa no suspendida posterior $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	200
k_P	Rigidez de la barra Panhard $[\text{N}/\text{m}]$	100000000

9.4 Vías de simulación y contrastación

Seguidamente, se muestran las vías sobre las cuales se realizó la medición de los valores experimentales; estas corresponden a dos curvas en carretera y un cambio de carril:



Figura 9-3 Curva en carretera.

En el primer caso mostrado en la **Figura 9-3**, se tienen los siguientes datos experimentales respecto al ángulo de giro de la cabina

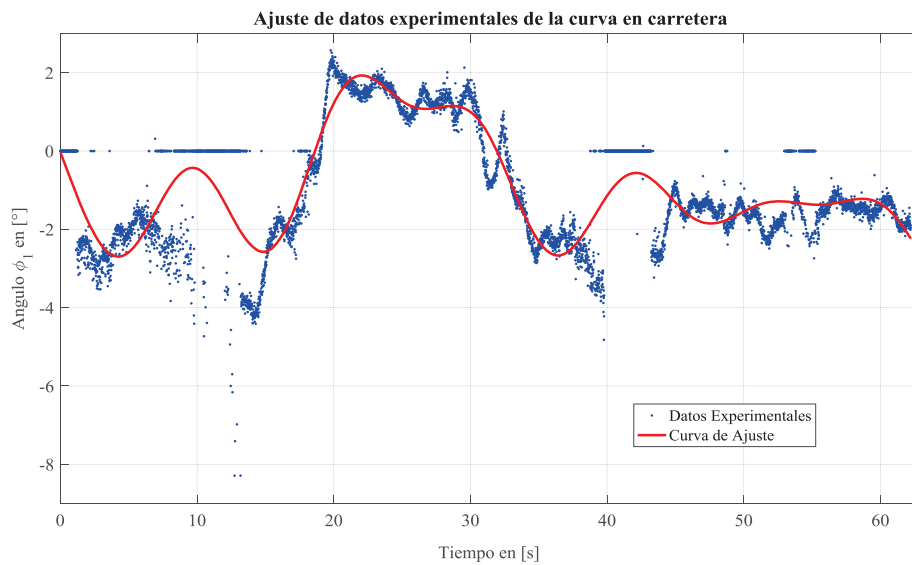


Figura 9-6 Ajuste de datos experimentales del tramo de carretera curvo.

Seguidamente, al tener una dispersión muy grande de datos no es posible obtener un buen ajuste de datos; en la figura mostrada se usó una sumatoria de senos de 7mo orden, con la cual se obtuvo una bondad de 4000 la cual resulta en una pobre calidad de ajuste de datos. Adicionalmente se puede apreciar que el cambio de signo en el ángulo de giro indica un cambio de concavidad que se puede comprobar al observar la **Figura 9-3**; por lo anterior se opta por reducir el tramo de análisis al tiempo comprendido entre 1.3 y 7 segundos de la simulación; en dicho tramo se obtiene la siguiente gráfica de ajuste de datos:

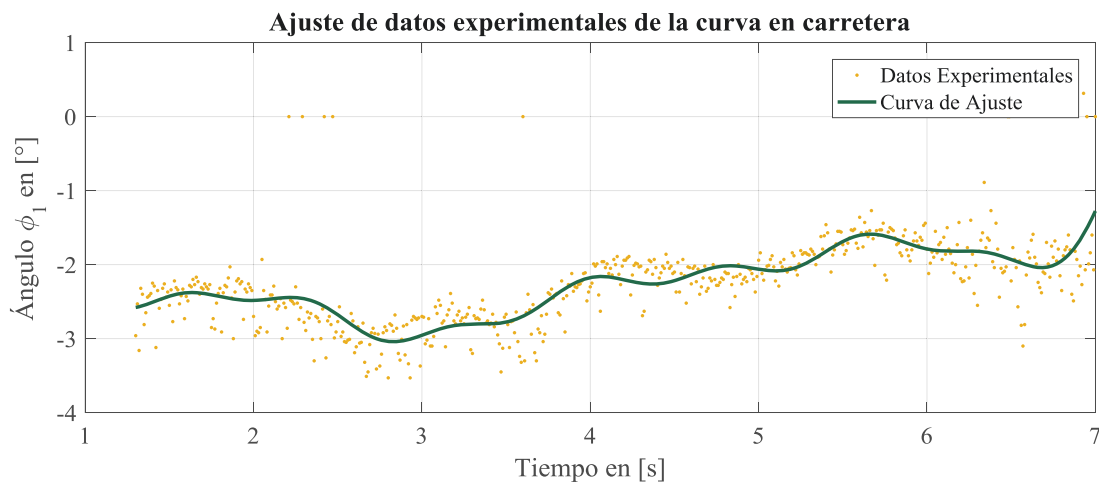


Figura 9-7 Ajuste de datos experimentales del tramo curvo en carretera entre 1.3 y 7s.

El resultado mostrado en la figura **Figura 9-7** corresponde a un tramo de curva con concavidad izquierda, la cual coincide con la simulada por el modelo. Adicionalmente, el ajuste es una sumatoria de senos de 5to orden con una bondad de 84.5 con lo cual se garantiza la buena calidad del ajuste. Seguidamente al ejecutar el modelo dinámico con una velocidad de 60 km/h, la cual es la velocidad promedio que se obtuvo durante la toma de datos, se obtuvo el siguiente resultado para el ángulo de giro de la cabina ϕ_1 :

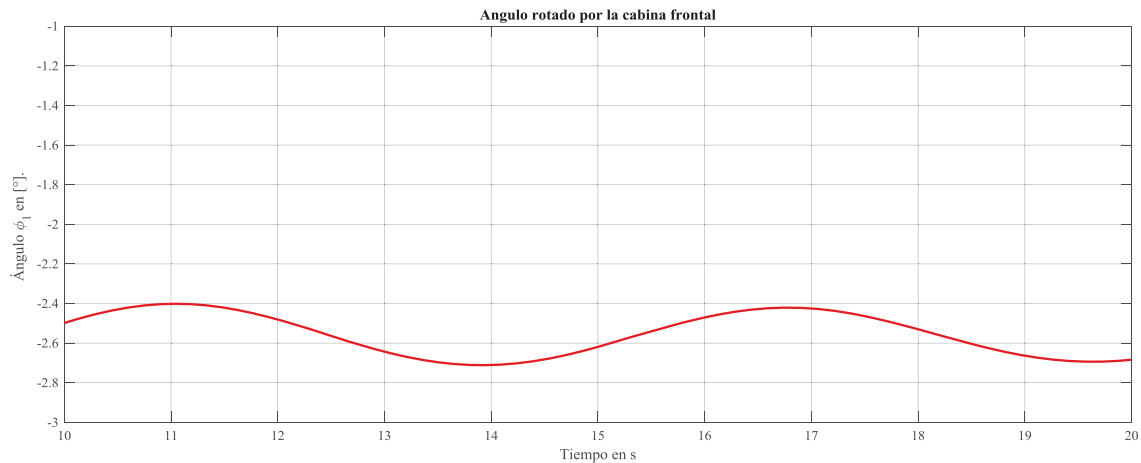


Figura 9-8 Resultados del modelo de simulación para el tramo de carretera curvo.

La **Figura 9-8** corresponde al tránsito del vehículo sobre un tramo de radio constante; como se mencionó anteriormente, no es posible equiparar los resultados del tramo de acuerdo debido a que se carece de los datos exactos de la vía; se puede apreciar que en los resultados experimentales el valor del ángulo rotado oscila alrededor de -2.5° mientras que en la simulación se tiene el mismo comportamiento, con lo cual se puede afirmar que el modelo posee validez experimental para este caso.

En una segunda toma de datos realizada sobre el cambio de vía; se obtuvo la siguiente gráfica de ángulo de inclinación de la cabina vs. tiempo.

El ajuste se realizó mediante el uso de una sumatoria de senos de 3er orden; de la cual se obtuvo una bondad de ajuste de 280; con lo cual, dada la dispersión de datos se puede concluir que es un buen ajuste.

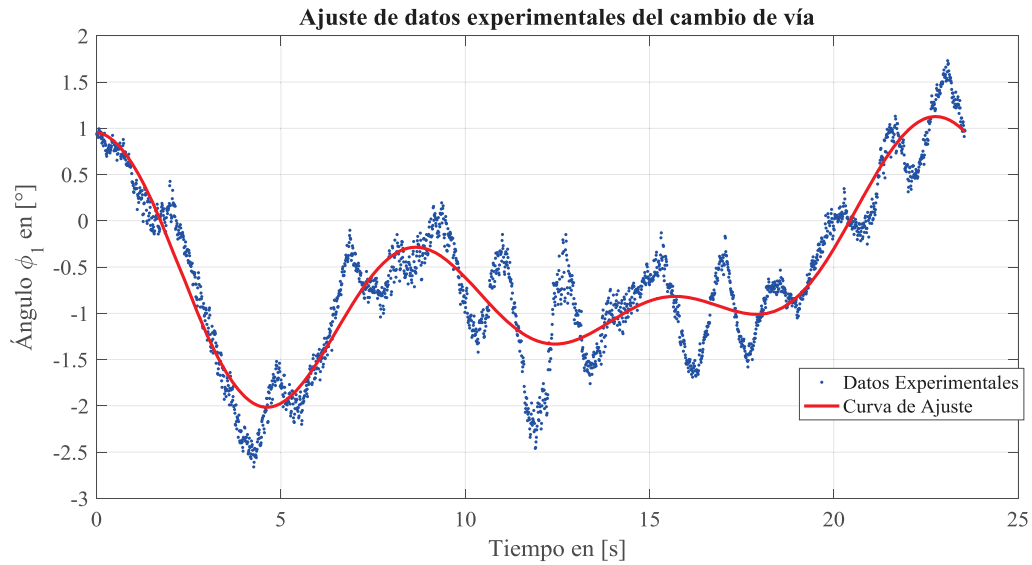


Figura 9-9 Resultados experimentales y ajuste de curva sobre el cambio de vía.

Tomando el segmento entre 5 y 15 segundos de la **Figura 9-9**, que por la tendencia corresponde al tránsito sobre la curva de radio constante, se obtiene:

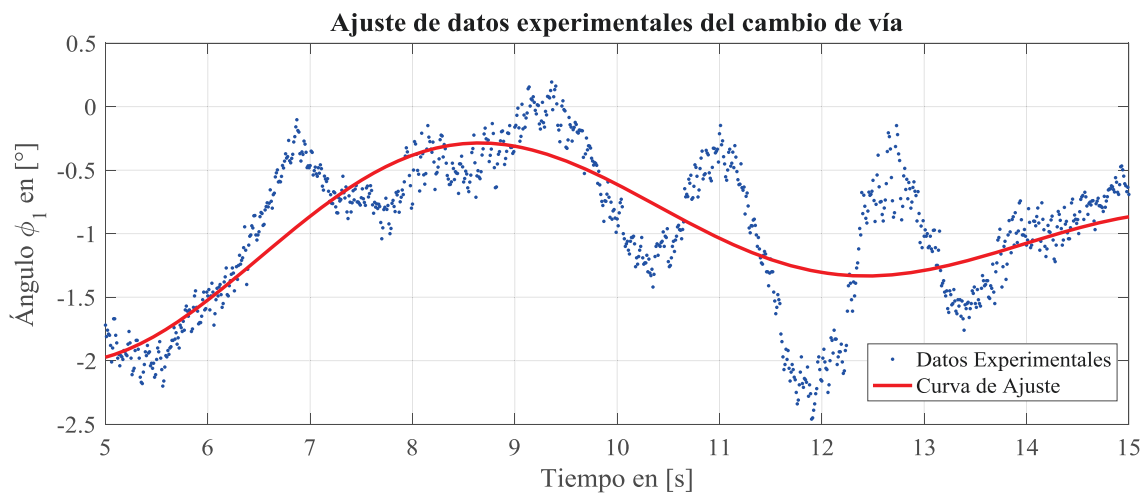


Figura 9-10 Ajuste de datos experimentales entre 5 y 15s.

Para el ajuste realizado en la **Figura 9-10**, se hace uso de una sumatoria de senos de 3er. orden, con lo cual se obtuvo una bondad de 80 con lo cual se garantiza un buen ajuste de datos. Seguidamente, de los datos recabados, se tiene que la velocidad promedio a la cual se realizaron las mediciones es de 15 km/h, de ello, se tiene la siguiente respuesta del modelo de simulación para el tramo de curvatura constante:

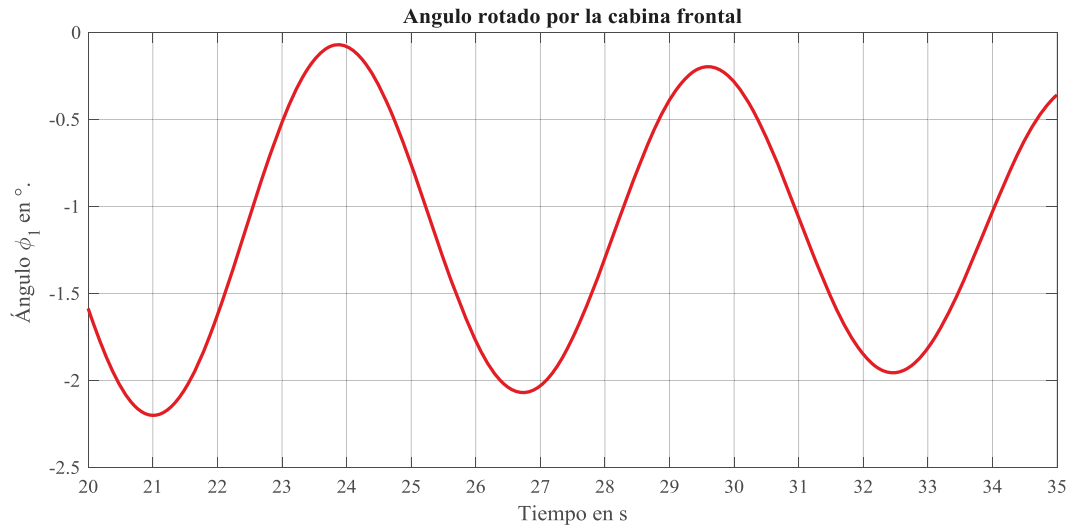


Figura 9-11 Resultados del modelo de simulación en el cambio de vía.

Finalmente, para el caso mostrado en la **Figura 9-5**, se tiene el siguiente ajuste de datos:

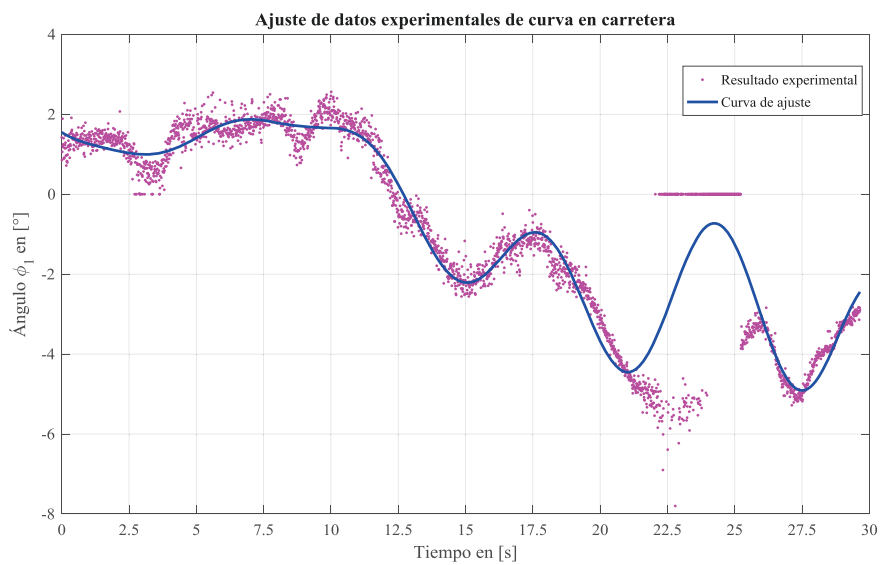


Figura 9-12 Ajuste de datos de experimentales de resultados en curva de radio amplio

En los resultados mostrados, se tiene que un primer segmento, comprendido entre el segundo cero y el quince, corresponde al tramo de carretera de curvatura 720 m mientras que el segmento restante corresponde a un tramo de carretera de diferente concavidad, razón por la cual se aprecia el cambio de signo; adicionalmente se tiene que en los primer segmento analizado, la velocidad promedio es de 72 km/h mientras que para el resto del tramo de experimentación se obtuvo 48 km/h. El ajuste de datos, que corresponde a una sumatoria de senos de 5to orden, posee una bondad de 1940.03, lo

cual se explica por la dispersión de datos en algunos instantes del muestreo. Afinando los datos para el primer segmento, se obtienen los resultados mostrados en la **Figura 9-13**.

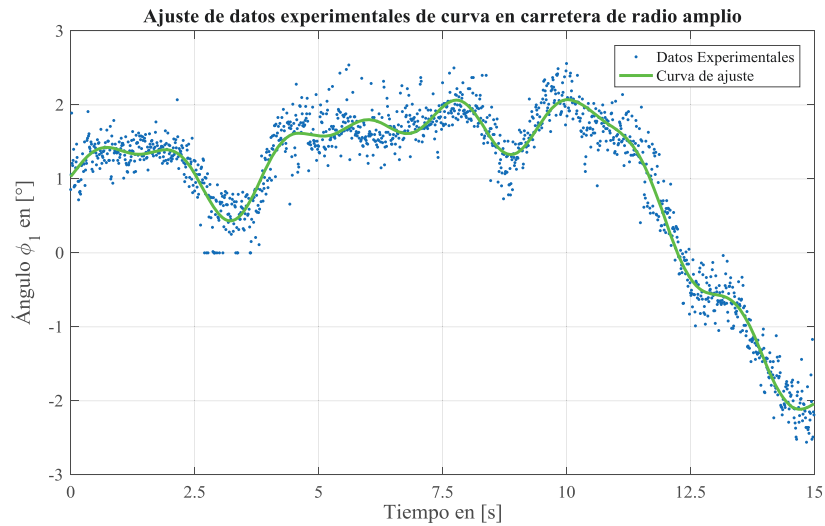


Figura 9-13 Resultados de ajuste de datos experimentales segmentados

En el ajuste mostrado, la bondad obtenida para una curva de ajuste compuesta por una sumatoria de senos de 5to orden es de 90.43; con lo cual se garantiza la validez de la curva obtenida. Adicionalmente en la se muestra el resultado obtenido mediante el modelo de simulación en características de vía similares a la de la **Figura 9-5**:

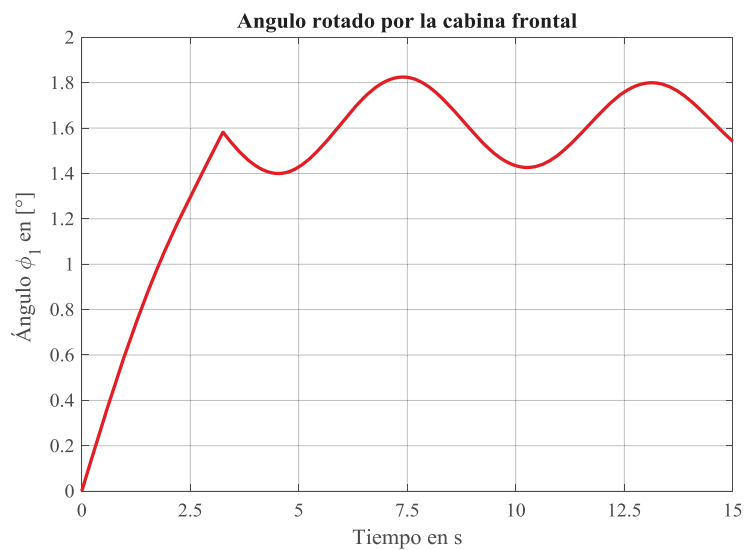


Figura 9-14 Resultados del modelo de simulación para la curva de radio amplio

Dejando de lado los primeros segundos de la simulación que corresponden al segmento de la curva clotoide; la alternancia de los valores de ángulo rotado por la sección frontal de la cabina oscilan en torno a 1.6° lo cual corresponde al ajuste de los datos experimentales.

Como conclusión de lo expuesto, el modelo posee limitaciones en cuanto a la parametrización de la calzada, que en primera instancia, es el principal determinante del comportamiento dinámico del automóvil; no obstante, la respuesta dinámica del vehículo coincide en gran medida con los resultados dados por el modelo.

CAPITULO 10 CONCLUSIONES

- El modelado realizado en la presente tesis doctoral, mediante sistemas de multicuerpos rígidos, ha permitido obtener, como se esperaba, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias; el cual se adecua a resultados experimentales. Ello ha permitido realizar el diseño de un algoritmo de simulación que modele el comportamiento dinámico de un autobús en tránsito sobre una curva. Este modelo se ajusta a vías de transporte realistas, dado que se ha calculado y parametrizado con intersecciones y vías de entrada y salida (desvíos) calculados según norma.
- El modelado se ha realizado de tal manera que el sistema total que representa al autobús ha sido dividido en dos partes fundamentales: la parte frontal del vehículo que contempla a su vez varios subsistemas como las masas no suspendida, masas suspendidas unidas por una barra de estabilidad o barra de torsión, ruedas flexibles radial y lateralmente. A su vez, la parte trasera ha sido modelada de manera análoga aunque a diferencia del parte frontal, en ésta solamente hay una masa suspendida y más bien se utiliza una barra de tipo Panhard para mejorar el comportamiento dinámico vertical y lateral de ella. Este modelamiento mediante subsistemas, el cual se ha visto reflejado en el diseño del algoritmo de solución, también es modular, de tal manera que futuros cambios en el diseño del sistema serán fácilmente introducidos en el modelo sin tener que iniciar nuevamente todo el proceso de modelado con la consecuente inversión de tiempo y recursos. La cual, en comparación a trabajos anteriores, este modelado representa el comportamiento dinámico, ad hoc, del movimiento transitorio de un vehículo en curva.
- El análisis de sensibilidad muestra que el modelo responde cualitativa y cuantitativamente a los parámetros de sensibilidad seleccionados; siendo el principal de ellos la velocidad, el peralte, el radio de curvatura final y la altura del centro de gravedad.
- A partir de un sinnúmero de simulaciones con diferentes parámetros dinámicos tanto del vehículo como de la vía, ha permitido la mejora constante del modelo, los cuales responde satisfactoriamente con datos experimentales obtenidos por el departamento de ingeniería de la UC3.

CAPITULO 11 DESARROLLOS FUTUROS

- Se sugiere en un futuro modelado mediante sistemas de multicuerpos flexibles para poder mejorar la calibración del modelo a fin de obtener resultados que se aproximen más a la realidad y a la vez poder realizar un estudio de resistencia de la superestructura del vehículo.
- Se sugiere utilizar otros principios físicos para conseguir otros modelos teóricos (ecuaciones matemáticas) que describen el sistema de tal manera que se puedan complementar. Por ejemplo, un modelado mediante el principio de Lagrange permitirá respuestas más rápidas del sistema global del autobús aun cuando para saber el comportamiento dinámico, sobre todo el que corresponde a las fuerzas al interior de los subsistemas exigirá de todas maneras la utilización del principio de D'Alembert, el cual ha sido ampliamente utilizado en esta tesis.
- Se sugiere la utilización de otros formalismos para deducir el sistema de ecuaciones diferenciales del sistema que representa a un autobús circulando por una carretera. Por ejemplo los estudiados en los libros de [Popp (2010)] y de [Schramm (2014)]. Ello permitirá ampliar las posibilidades de estudio del sistema a otros aspectos importantes como por ejemplo la dinámica longitudinal, la incorporación de obstáculos en la carretera (baches, por ejemplo), análisis de confort, etc.
- Se sugiere una calibración del modelo empleando el software Car-Sim, considerado en la actualidad como modelización patrón.
- Se sugiere que en un siguiente trabajo se añadan parámetros de dinámica vertical relativos al confort de los pasajeros.

BIBLIOGRAFÍA

- [**Andrzejewski (2005)**] Ryszard Andrzejewski & Jan Awrejcewicz: *Nonlinear Dynamics of a Wheeled Vehicle*, Springer, 2005.
- [**Ángeles (2011)**] Jorge Ángeles: *Dynamic Response of Linear Mechanical Systems – Modeling, Analysis and Simulation*, Springer, 2011.
- [**Anuario estadístico de accidentes (2015)**]. Dirección General de Tráfico: *Anuario estadístico de accidentes*, Ministerio del Interior, España, 2015.
- [**Anuario estadístico PNP (2015)**]. Dirección de Estadística de la Policía Nacional del Perú: *Anuario estadístico*, Dirección Nacional de Gestión Institucional, Perú, 2015.
- [**Aparicio (1992)**] Aparicio, F.; Lozano, J.A.: *Estudio de accidentes de tráfico en carretera con implicación de autocares*. Memoria de investigación GIVET, E.T.S.I. Industriales, Madrid, 1992.
- [**Aparicio (1993)**] Aparicio Izquierdo, F.: *Exigencias de seguridad pasiva de autobuses y autocares*, Jornadas sobre autobuses y autocares: diseño, fabricación, explotación y seguridad, 1993.
- [**Aparicio (2012)**] Aparicio F., Vera C. y Díaz V.: *Teoría de los vehículos automóviles*. Sección de Publicaciones, ETSII, Universidad Politécnica de Madrid, 1995.
- [**Aparicio (2012)**] Aparicio, Francisco: *La investigación científica de accidentes y las políticas de seguridad*. Seminario Internacional de Investigación de Accidentes. Universidad de los Andes. Bogotá, 2012.
- [**Ardema (2005)**] Mark D. Ardema: *Newton-Euler Dynamics*, Springer, 2005.
- [**Blanch (2013)**] Blanch, Checa y Marín: *Una aproximación a la curva de transición clotoide vista desde Mathematica*, Instituto Universitario de Matemática Aplicada. Universidad de Piura, Perú, 2013.

- [**Bungartz (2009)**] H.-J. Bungartz, St. Zimmer, M. Buchholz, D. Pfluger: *Modellbildung und Simulation, Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, 2009.
- [**Carrillo (2016)**] Carrillo Li, Enrique Roberto: *Análisis de cargas en un Bogie Remolcado*, Tesis de licenciatura en Ingeniería Mecánica, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2016.
- [**Castejón (1996)**] Castejón, L., Miravete, A., Larrodé, E., *Intercity Bus Roll over Simulation*, International Journal of Vehicle Design, edited by Centre for Transportation Technology, United Kingdom, pp. 10, 1996.
- [**Cheli (2015)**] Federico Cheli, Giorgio Diana: *Advanced Dynamics of Mechanical Systems*, Springer, 2015.
- [**Coenraad (2010)**] Coenraad, Esveld., *Modern Railway Track*, Delft University, MRT - Productions, Zaltbommel – Netherlands.
- [**Davies (2015)**] Matthew A. Davies and Tony L. Schmitz: *System Dynamics for Mechanical Engineers*, Springer, 2015.
- [**Detwiler (1996)**] Detwiler, D.: *Computer aided structural optimization of automotive*, SAE Technical Paper, 1996.
- [**Dextre (2008)**] Dextre J.C., Pirota M.D., Tabasso C., Bermúdez J., García A.: *Vías humanas: Un enfoque multidisciplinario y humano de la seguridad vial*. Fondo Editorial Pontificia Universidad Católica del Perú, 2008.
- [**Díaz (2004)**] Díaz, V., Fernandez, M.G., S. Román, J.L., Ramírez, M., García, A.: *A new methodology for predicting the rollover limit of buses*. International Journal of Vehicle Design. Vol. 34, N. 4, pp 340-353. 2004.
- [**Díaz (2008)**] Díaz, V., Boada, M.J.L., Gauchía, A. and Boada, B.L.: *Simplified dynamic torsional model of an urban bus*. International Journal of Heavy Vehicle Systems. Accepted on 2008.

- [**Díaz (2012)**] Díaz, V., Olmeda, E., Gauchía, A., García Pozuelo, D., Boada, M.J., Boada, B. y Fuentes, J.: *Automóviles y Ferrocarriles*, UNED, 2012.
- [**Directiva 97/27/CE**] Directiva 97/27/CE del Parlamento Europeo y del Consejo de la Unión Europea de 22 de julio de 1997 relativa a las masas y dimensiones de determinadas categorías de vehículos de motor y sus remolques.
- [**Directiva 2001/85/CEE**] Directiva 2001/85/CE del Parlamento Europeo y del Consejo de la Unión Europea de 20 de noviembre de 2001 relativa a las disposiciones especiales aplicables a los vehículos utilizados para el transporte de viajeros con más de ocho plazas además del asiento del conductor, y por lo que se modifican las Directivas 70/156/CEE y 97/27/CE.
- [**Du (2000)**] Du, X., Chen, W.: *Methodology for Managing Uncertainty in Simulation-Based Systems Design*, AIAA Journal, Vol. 38, No. 8, pp. 1471-1478, 2000.
- [**Featherstone (2008)**] Roy Featherstone: *Rigid Body Dynamics Algorithms*, Springer, 2008.
- [**Fernández (2001)**] Fernández Rico Guadalupe, *Predicción del límite de vuelco en autobuses y autocares*, Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, 2001.
- [**Gans (2013)**] Roger Gans: *Engineering Dynamics - From de Lagrangian to Simulation*, Springer, 2013.
- [**García de Jalón (1994)**] Javier García de Jalón and Eduardo Bayo: *Kinematics and Dynamic Simulation of Multibody Systemas – The Real Time Challenge*, Springer 1994.
- [**García (1990)**] García Gracia, J.A., *Estudio teórico y experimental del comportamiento de la superestructura de los vehículos de grandes dimensiones para el transporte de pasajeros bajo la acción de vuelco lateral*, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 1990.

- [García (1993)] García Gracia, A., *Verificación de la resistencia al vuelco aplicando modelos de cálculo y ensayos de componentes*, Jornadas sobre Autobuses y autocares: diseño, fabricación, explotación y seguridad, diciembre 1993.
- [García (1998)] García Gracia, A. et al., *Diseño estructural en autobuses y autocares*, DYNA, 7, p. 59-64, 1998.
- [García (2008)] García, A; Alcalá, E; Sánchez, M; Carretero, A.: *Diseño estructural de autobuses y autocares*, INSIA (Instituto Universitario de Investigación del Automóvil), UPM, Madrid, 2008.
- [Ghosh (2015)] Asish Ghosh: *Dynamic Systems for Everyone*, Springer, 2015.
- [Gonzales (2010)] Gonzales, Francisco y Fuentes, Julio: *Ingeniería Ferroviaria*, Madrid, UNED, 2008.
- [Guiggiani (2014)] Massimo Guiggiani: *The Science of Vehicle Dynamics – Handling, Braking, and Ride of Road and Race Cars*, Springer 2014.
- [Guglielmino (2008)] Emanuele Guglielmino, Tudor Sireteanu, Charles W. Stammers, Gheorghe Ghita & Marius Giuclea: *Semi-active Suspension Control – Improved Vehicle Ride and Road Friendliness*, Springer, 2008.
- [Hiller (1983)] Manfred Hiller: *Mechanische Systeme: Eine Einführung in die analytische Mechanik und Systemdynamik*, Springer, 1983.
- [Hoffmann (1998)] Josef Hoffmann: *Matlab und Simulink- -:Beispielorientierte Einführung in die Simulation dynamischer Systeme*, Addison-Wesley, 1998.
- [Howland (2006)] R. A. Howland: *Intermediate Dynamics - A linear algebraic approach*, Springer, 2006.
- [Isermann (2005)] Rolf Isermann: *Mechatronic Systems – Fundamentals*, Springer, 2005.
- [Isermann (2011)] R. Isermann, M. Munchhof: *Identification of Dynamic Systems – An Introduction with Applications*, Springer Verlag, 2011

- [Imine (2011)] Hocine Imine, Leonid Fridman, Hassan Shraim and Mohamed Djemai: *Sliding Mode Based Analysis and Identification of Vehicle Dynamics*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2011.
- [Jazar (2014)] Reza N. Nazer: *Vehicle Dynamics – Theory and Application*, Springer, 2014.
- [Jia (2014)] Junbo Jia: *Essentials of Applied Dynamic Analysis*, Springer 2014.
- [Kortuem and Sharp (1991)] W. Kortuem and R.S: Sharp: *Report on the state-of-affairs on application of multibody computer codes to vehicle system dynamics*, Non linear dynamics, 5(2), 181-192, 1991.
- [Kreuzer (1979)] Edwin Kreuzer: *Symbolische Berechnung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen*, VDI-Verlag, Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 11, Nr. 32, 1979.
- [Ljung (1987)] Lennart Ljung: *System Identification - Theory for the User*, Prentice Hall, 1987.
- [Louis (2011)] L. Louis and D. Schramm: *Nonlinear State Estimation of Tire-Road Contact Forces using a 14 DoF Vehicle Model*, In Proceedings Regional Conference on Automotive Research (ReCAR), Malaysia, 2011.
- [Mustafa (2010)] Owais Mustafa Siddiqui: *Dynamic Analysis of a Modern Urban Bus for Assessment of Ride Quality and Dynamic Wheel Load*, Tesis de Maestría en Ciencias aplicadas. Concordia University Montreal, 2010.
- [Marghitu (2012)] Dan B. Marghitu and Mihai Dupac: *Advanced Dynamics – Analytical and Numerical Calculations with MATLAB*, Springer, 2012.
- [Nollau (2009)] R. Nollau: *Modellierung und Simulation technischer Systeme, Eine praxisnahe Einführung*, Springer, 2009.
- [Pérez (2016)] Pérez B., Luis: *Modelo dinámico teórico para determinar el límite de vuelco de vehículos en curvas*, Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2016.

- [Pfeiffer (2005)] Friedrich Pfeiffer: *Mechanical System Dynamics*, Lecture and Notes in Applied and Computational Mechanics, Volume 40, Springer, 2005.
- [Popp (2010)] Karl Popp and Werner Schiehlen: *Ground Vehicle Dynamics*, Springer, 2010.
- [Rajamani (2012)] Rajesh Rajamani: *Vehicle Dynamics and Control*, Mechanical Engineering Series, Springer, 2012.
- [Reglamento CEPE/ONU 66] Reglamento número 66 del acuerdo de Ginebra de 20 de marzo de 1958, sobre prescripciones uniformes relativas a la homologación de los vehículos de gran capacidad para el transporte de personas respecto a la resistencia mecánica de su superestructura. (No aplicable a vehículos urbanos).
- [Reglamento CEPE/ONU 80] Reglamento número 80 del acuerdo de Ginebra de 20 de marzo de 1958, relativo a las prescripciones uniformes relativas a la homologación de los asientos de los vehículos de gran capacidad para el transporte de viajeros en relación a la resistencia de los asientos y de sus anclajes.
- [Reglamento CEPE/ONU 107] Reglamento número 107 del acuerdo de Ginebra de 20 de marzo de 1958, relativo a las disposiciones uniformes relativas a la homologación de vehículos de la categoría M2 o M3 en lo que respecta a sus características generales de construcción.
- [Rill (2014)] Georg Rill und Thomas Schaeffer: *Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation – Vertieft in Matlab-Beispielen, Übungen und Anwendungen*, 2014, Springer.
- [Rodríguez (1994)] Jorge Rodríguez Hernández: *Implementierung des Roberson-Wittenburg-Formalismus mit Hilfe eines mathematischen Symbolmanipulators*, Diplomarbeit, Universität Friedericiana zu Karlsruhe, 1994.
- [Rojas (2012)] Gonzalo Rojas y Nelson Arzola: *Análisis del comportamiento dinámico de un vehículo con suspensión independiente tipo paralelogramo deformable y barras de estabilidad transversal*, Artículo en revista, Revista de la Facultad de

Ingeniería de la Universidad de Antioquia - Colombia, N°67 pp 112 – 125, Junio 2013.

[SKF (2012)] SKF: *Handbuch Schienenfahrzeuge Band 1*, 2012.

[Scherf (2010)] Helmut Scherf: *Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme – Eine Sammlung von Simulink-Beispielen*, Oldenbourg Verlag München, 2010.

[Schiehlen (2014)] Werner Schiehlen: *Computational dynamics: theory and applications of multibody systems*, European Journal of Mechanics A/Solids 25 (2006), S. 566-594, 2014.

[Schiehlen (2014)] Werner Schiehlen, Peter Eberhard: *Applied Dynamics*, Springer, 2014.

[Schramm (2014)] Dieter Schramm, Manfred Hiller, Roberto Bardini: *Vehicle Dynamics – Modelling and Simulation*, Springer, 2014.

[Sekulić (2011)] Dragan Sekulić and Vlastimir Dedović: *The Effect of Stiffness and Damping of the Suspension System Elements on the Optimisation of the Vibrational Behaviour of a Bus*, International Journal for Traffic and Transport Engineering, 2011, 1(4): 231 – 244, Springer, 2011.

[Thomsen (2010)] Per Grove Thomsen and Hans True: *Non-smooth Problems in Vehicle Systems Dynamics*, Proceedings of the Euromech 500 Colloquium, Springer, 2010.

[Troch (2009)] Inge Troch and Felix Breitenecker: *Modeling and Simulation of Dynamic Systems*, Control Systems, Robotics and Automation, Vol. IV, Vienna University of Technology, Austria, EOLSS, 2009.

[Weinfurter (2004)] Weinfurter, H; Hirschberg, W.; Hipp, E.: *Entwicklung einer Störgrößenkompensation für Nutzfahrzeuge mittels Steer-by-Wire durch Simulation*. In: Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, VDI-Berichte 1846. Düsseldorf, 2004, S. 923-941.

- [Wittbrodt (2005)] Edmund Wittbrodt, Iwona Adamiec-Wójcik, Stanislaw Wojciech: *Dynamics of Flexible Multibody Systems – Rigid Finite Elements Method*, Springer, 2006.
- [Wittenburg (1977)] Jens Wittenburg: *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*, Teubner Stuttgart, 1977.
- [Woernle (2011)] Christoph Woernle: *Mehrkörpersysteme – Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper*, Springer, 2011.
- [Yang (2015)] Shaopu Yang, Liqun Chen, Shahua Li: *Dynamics of Vehicle-Road Coupled System*, Springer, 2015.
- [Zeid (1991)] Zeid, A. and D. Chang: *Simulation of Multibody systems for the computer aided design of vehicle dynamic controls*, Vehicle Dynamics and Electronic Controlled Suspensions SAE Special Publications no. 861, Publ. by SAE, pp. 63-70, 1991.

ANEXO: ALGORITMO DE SIMULACIÓN

En la siguiente sección se muestra el algoritmo utilizado en la predicción del vuelco; cabe mencionar que dicho algoritmo permite la implementación futura de sistemas de suspensión activos; ya que calcula, en tiempo real, el valor de las aceleraciones presentes sobre todas las masas e inercias que componen el vehículo. Así mismo, se puede implementar un algoritmo de distribución asimétrica de cargas por disposición de pasajeros ya que la ubicación del centro de gravedad de ambas secciones de la cabina posee una distancia paramétrica.

El algoritmo se compone de 3 archivos; para la implementación del programa se hizo uso del algoritmo Runge–Kutta 4 para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales; a la par se aprovechó el bucle creado por dicho algoritmo para la evaluación de aceleraciones, fuerza de inercia, normales y fuerzas de fricción de manera instantánea; así mismo, se hizo uso de variables globales para el uso de variables en programas independientes.

Programa principal – Solucionador.m

```
%%Programa de cálculo del comportamiento dinámico del autocar

%% Declaración de las variables globales

% Variables de vía

global zb           % Peralte la curva de radio constante en m
global rho_b       % Radio de curvatura constante en m
global a_via       % Ancho de vía en m
global v           % Velocidad del autocar en m/s
global n_carriles  % Numero de carriles en la pista
global w_max       % Yerk máximo en la clotoide en m/s^3
global g           % Aceleración de la gravedad en m/s^2
global s_total     % Longitud total de la curva de simulación en m
global step        % Subintervalo de tiempo de la simulación en s
global rho1        % Vector Radio de curvatura frontal
global alpha1      % Vector ángulo de peralte frontal
global rho2        % Vector Radio de curvatura posterior
global alpha2      % Vector ángulo de peralte posterior
global mu          % Coeficiente de fricción entre los neumáticos y
la vía

% Variables frontales

global m1          % Masa de la cabina del autocar en kg. (Masa suspendida)
global m2          % Masa de la dirección derecha en kg. (Masa no
suspendida)
```

```
global m3      % Masa de la dirección derecha en kg. (Masa no
suspendida)
global I1      % Momento de inercia de la cabina frontal del autocar
respecto al centro de gravedad en mm^2-kg.
global c1      % Constante de amortiguamiento del fuelle neumático
derecho en N.s/mm.
global c2      % Constante de amortiguamiento del fuelle neumático
izquierdo en N.s/mm.
global b1      % Distancia entre suspensiones en m.
global b2      % Distancia entre suspensiones en m.
global h_g1    % Altura del centro de gravedad en m.
global h_e1    % Altura de la masa no suspendida en m.
global h_b1    % Altura del centro de balanceo en m.
global ks1     % Constante de rigidez instantanea de los fuelle
neumático derecho en N/m.
global ks2     % Constante de rigidez instantanea de los fuelle
neumático izquierdo en N/m.
global ktb     % Constante de rigidez de la barra de torsión en N/m.
global ke      % Constante de rigidez torsional de la estructura en
N.m/rad.
global kw1     % Constante de rigidez vertical del neumático derecho en
N/m.
global kw2     % Constante de rigidez vertical del neumático izquierdo
en N/m.
global cw1     % Constante de amortiguamiento vertical del neumático
derecho en N.s/m.
global cw2     % Constante de amortiguamiento vertical del neumático
izquierdo en N.s/m.

% Variables posteriores

global m4      % Masa de la cabina del autocar en kg. (Masa suspendida)
global m5      % Masa de la dirección derecha en kg. (Masa no
suspendida)
global I4      % Momento de inercia de la cabina posterior del autocar
respecto al centro de gravedad en m^2-kg.
global I5      % Momento de inercia del eje de la sección posterior del
autocar respecto al centro de gravedad en m^2-kg.
global c3      % Constante de amortiguamiento del fuelle neumático
derecho en N.s/m.
global c4      % Constante de amortiguamiento del fuelle neumático
izquierdo en N.s/m.
global b3      % Distancia a la suspensión izquierda respecto al centor
de gravedad de la cabina en m.
global b4      % Distancia a la suspensión derecha respecto al centor de
gravedad de la cabina en m.
global b5      % Distancia a la suspensión izquierda respecto al centor
de gravedad del eje en m.
global b6      % Distancia a la suspensión derecha respecto al centor de
gravedad del eje en m.
global h_e2    % Altura de la masa no suspendida en m.
global h_g2    % Altura del centro de gravedad en m.
global h_b2    % Altura del centro de balanceo en m.
global HB0     % distancia vertical entre extremos inicial de la barra
panhard en m
global h_s2    % Altura de la masa no suspendida en m
global ks3     % Constante de rigidez instantanea de los fuelle
neumático izquierdo en N/m.
global ks4     % Constante de rigidez instantanea de los fuelle
neumático derecho en N/m.
global kp      % Constante de rigidez de la barra Panhard
```

```
global kw3 % Constante de rigidez vertical del neumático derecho en
N/m.
global kw4 % Constante de rigidez vertical del neumático izquierdo
en N/m.
global cw3 % Constante de amortiguamiento vertical del neumático
derecho en N.s/m.
global cw4 % Constante de amortiguamiento vertical del neumático
izquierdo en N.s/m.

%% Generación de vía de simulación %%

% Parametros variables

%Peralte en la curva de radio constante (Peralte final)
zb = 0.300 ; % m
%Radio de curvatura constante (Radio de curvatura final)
rho_b = 300 ; % m
%Ancho del carril
a_via = 2.100 ; % m
%Coeficiente de fricción de la vía
mu = 0.4 ;
%Numero de carriles en la pista
n_carriles = 3 ; % carriles
%Velocidad del autocar
v = 25 ; % m/s
%Sobreaceleración máxima
w_max = 0.15 ; % m/s^3
%Aceleración de la gravedad
g = 9.81 ; % m/s^2
%Longitud total de la curva de simulación
s_total = 1250 ; % m
%Subintervalo de tiempo de la simulación
step = 0.01; %s

%%Cálculos de los elementos de vía peraltada%%

% Calculo del ancho de pista
a_pista = a_via * n_carriles;

% Determinación de la velocidad de diseño (v_d) de la vía de radio
% constante.
v_d = nthroot((zb^2*g^2*(rho_b)^2)/(a_pista^2 - zb^2),4);

% Aceleración no compensada en la curva de radio contante.
a_nc = ( ( (g*zb)/(a_pista) ) - ( (v^2*sqrt(a_pista^2 -
zb^2))/(a_pista * rho_b) ) );

%Determinación de la longitud mínima de la clotoide
sb_min = abs( a_nc * v_d/w_max );

%Determinación del factor de la clotoide
A_clotho = sqrt( rho_b * abs(sb_min) );

% Determinación del tiempo sobre la clotoide
t_clotho_max = round(sb_min/v,3);

%Tiempo total de simulación
t_max = round(s_total/v,0) ;
```



```
% Tiempo de simulación sobre la clotoide (Matriz)
t_c = step:step:t_clotho_max;

% Radios de curvatura sobre la clotoide
rhoc = A_clotho^2./(v * t_c);

% Calculo de los peraltes y angulo de peralte en la clotoide
zc      = (v*t_c)*(zb./(sb_min));

% Ángulo de peralte en la clotoide
alphac = asin(zc./a_pista);

% Ángulo final de peralte
alpha_b = asin(zb/a_pista);

%%Generación de parámetros de vía%%

% Calculo del numero de subintervalos de simulación
n_total  = t_max/step;

% Numero de subintervalos sobre la clotoide
n_clot   = length (t_c);

% Numero de subintervalos de radio constante
n_rho_cont = n_total - n_clot;

% Generación del vector radio de curvatura, peralte y angulo de
peralte
% constate

rho_p    = rho_b * ones (1,n_rho_cont);
z_p      = zb * ones (1,n_rho_cont);
alphap   = alpha_b * ones (1,n_rho_cont);

% Generación de un vector unico de los parámetros frontales

rho1     = [rhoc(1),rhoc,rhop];
alpha1   = [0,alphac, alphap];

% Generación de un vector unico de los parámetros posteriores

rho2     = [rho1(1),rho1(1),rhoc,rhop];
alpha2   = [0,0,alphac,alphap];

%% Variables numéricas de entrada

% Variable frontales

m1       = 7000;      %kg
m2       = 500;      %kg
m3       = 500;      %kg
I1       = 125000;   %kg-m^2
c1       = 6000;     %N.m/s
c2       = 6000;     %N.m/s
b1       = 0.800;    %m
b2       = 0.800;    %m
ks1      = 200000;   %N/m
```

```

ks2    = 200000;    %N/m
h_b1   = 0.750;    %m
h_e1   = 0.500;    %m
h_g1   = 1.550;    %m
ktb    = 1000000;  %N/m
kw1    = 650000;   %N/m
kw2    = 650000;   %N/m
cw1    = 8000;     %N.s/m
cw2    = 8000;     %N.s/m
ke     = 60000000; %N.m/rad

```

```
% Variables posteriores
```

```

m4     = 7000;      %kg
m5     = 1000;      %kg
I4     = 125000;    %kg-m^2
I5     = 200;       %kg-m^2
c3     = 6000;      %N.m/s
c4     = 6000;      %N.m/s
b3     = 0.800;    %m
b4     = 0.800;    %m
b5     = 0.800;    %m
b6     = 0.800;    %m
ks3    = 200000;    %N/m
ks4    = 200000;    %N/m
kp     = 100000000; %N/m
h_b2   = 0.750;    %m
h_g2   = 1.550;    %m
h_s2   = 0.500;    %m
h_e2   = 0.500;    %m
kw3    = 650000;   %N/m
kw4    = 650000;   %N/m
cw3    = 8000;     %N.s/m
cw4    = 8000;     %N.s/m

```

```
HB0 = (h_g2 - h_s2) - h_b2;
```

```
% Condición inicial de solución del sistema de ecuaciones
diferenciales
```

```

i_val = 0; % Valor de las condiciones iniciales
S0 = i_val * ones (1,16);
[ Ff_f, Ff_p, Fj, N4, N3, N2, N1, R, Ff_1, Ff_2, Ff_3, Ff_4, beta,dL ]
= rks4('eqdsys',0,t_max,S0,n_total);

```

```
%Corrector de variables Normales(El ultimo valor estaba definido en
cero)
```

```

N1(n_total+1) = N1(n_total);
N2(n_total+1) = N2(n_total);
N3(n_total+1) = N3(n_total);
N4(n_total+1) = N4(n_total);
Ff_1(n_total+1) = Ff_1(n_total);
Ff_2(n_total+1) = Ff_2(n_total);
Ff_3(n_total+1) = Ff_3(n_total);
Ff_4(n_total+1) = Ff_4(n_total);
Ff_f(n_total+1) = Ff_f(n_total);
Ff_p(n_total+1) = Ff_p(n_total);

```

```
% Comprobación de derrape
```

```
%Frontal
Fff = Ff_1 + Ff_2 - Ff_f;

%Posterior
Ffp = Ff_3 + Ff_4 - Ff_p;

% %% Generador de gráficas

t = 0:step:t_max;

figure
plot(t,R(:,1)*1000,'LineWidth',2,'Color',[0,128/256,0])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Desplazamiento y_1 en mm ','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
grid on
title('Desplazamiento de la cabina frontal','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,R(:,3)*1000,'LineWidth',2,'Color',[1,0,1])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Desplazamiento y_2 en mm ','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
grid on
title('Desplazamiento de la masa no suspendida izquierda','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,R(:,5)*1000,'LineWidth',2,'Color',[0,0.5,0.5])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Desplazamiento y_3 en mm ','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
grid on
title('Desplazamiento de la masa no suspendida derecha','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,(R(:,7))*(180/pi),'LineWidth',2,'Color',[0.9,0,0])
```

```
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Ángulo \phi_1 en °. ','FontSize',12,'FontName','Times New
Roman')
grid on
title('Angulo rotado por la cabina
frontal','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,R(:,9)*1000,'LineWidth',2,'Color',[1,153/256,0])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Desplazamiento y_4 en mm ','FontSize',12,'FontName','Times New
Roman')
grid on
title('Desplazamiento de la cabina
posterior','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,R(:,11)*1000,'LineWidth',2,'Color',[171/256,84/256,140/256])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Desplazamiento y_5 en mm ','FontSize',12,'FontName','Times New
Roman')
grid on
title('Desplazamiento de la masa no suspendida
posterior','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,R(:,13)*(180/pi),'LineWidth',2,'Color',[137/256,16/256,52/256])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Ángulo \phi_4 en °.','FontSize',12,'FontName','Times New
Roman')
grid on
title('Angulo rotado por la cabina
posterior','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';
```

```
figure
plot(t,R(:,15)*(180/pi),'LineWidth',2,'Color',[255/256,204/256,153/256
])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Ángulo \phi_5 en °','FontSize',12,'FontName','Times New
Roman')
grid on
title('Angulo rotado por la masa no suspendida
posterior','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';
```

```
figure
plot(t,N1,'LineWidth',2,'Color',[164/256,100/256,80/256])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Fuerza N1 en N','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
grid on
title('Normal de la rueda izquierda
frontal','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';
```

```
figure
plot(t,N2,'LineWidth',2,'Color',[85/256,184/256,221/256])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Fuerza N2 en N','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
grid on
title('Normal de la rueda derecha
frontal','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';
```

```
figure
plot(t,N3,'LineWidth',2,'Color',[120/256,150/256,220/256])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Fuerza N3 en N','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
grid on
title('Normal de la rueda izquierda
posterior','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
```

```
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,N4,'LineWidth',2,'Color',[247/256,125/256,60/256])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Fuerza N4 en N','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
grid on
title('Normal de la rueda derecha
posterior','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,Fff,'LineWidth',2,'Color',[120/256,230/256,77/256])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Fuerza Fricción frontal en N','FontSize',12,'FontName','Times
New Roman')
grid on
title('Fuerza de fricción necesaria para derrape
frontal','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,Ffp,'LineWidth',2,'Color',[68/256,111/256,238/256])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Fuerza Fricción posterior en
N','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
grid on
title('Fuerza de fricción necesaria para derrape
posterior','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,beta*(180/pi),'LineWidth',2,'Color',[44/256,180/256,125/256])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Ángulo formado por la barra Panhard respecto a la
vertical','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
grid on
title('Ángulo formado por la barra Panhard respecto a la
vertical','FontSize',14,'FontName','Times New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
```

```
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';

figure
plot(t,dL*1000,'LineWidth',2,'Color',[185/256,21/256,21/256])
xlabel('Tiempo en s','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
ylabel('Longitud de la barra Panhard en
mm','FontSize',12,'FontName','Times New Roman')
grid on
title('Longitud de la barra Panhard','FontSize',14,'FontName','Times
New Roman')
ax = gca;
ax.GridLineStyle = '-';
ax.GridAlpha = 0.4;
ax.GridColor = [69/256 69/256 69/256];
ax.XTick = 0:5:t_max;
ax.FontSize = 12;
ax.FontName = 'Times New Roman';
```

Sistema de ecuaciones diferenciales – eqdsys.m

```
function [ Y ] = eqdsys( t , X , dL , beta )
%EQN Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
% Variables frontales

global m1          % Masa de la cabina del autocar en kg. (Masa
suspendida)
global m2          % Masa de la dirección izquierda en kg. (Masa no
suspendida)
global m3          % Masa de la dirección derecha en kg. (Masa no
suspendida)
global I1          % Momento de inercia de la cabina frontal del
autocar respecto al centro de gravedad en mm^2-kg.
global c1          % Constante de amortiguamiento del fuelle
neumático derecho en N.s/mm.
global c2          % Constante de amortiguamiento del fuelle
neumático izquierdo en N.s/mm.
global b1          % Distancia entre suspensiones en mm.
global b2          % Distancia entre suspensiones en mm.
global h_g1        % Altura del centro de gravedad en mm.
global h_b1        % Altura del centro de balanceo en mm.
global ks1         % Constante de rigidez instantanea de los fuelle
neumático derecho en N/mm.
global ks2         % Constante de rigidez instantanea de los fuelle
neumático izquierdo en N/mm.
global ktb         % Constante de rigidez de la barra de torsión en
N/mm.
global ke          % Constante de rigidez torsional de la estructura
en N.mm/rad.
global kw1         % Constante de rigidez vertical del neumático
derecho en N/mm.
global kw2         % Constante de rigidez vertical del neumático
izquierdo en N/mm.
global cw1         % Constante de amortiguamiento vertical del
neumático derecho en N.s/mm.
global cw2         % Constante de amortiguamiento vertical del
neumático izquierdo en N.s/mm.
global v          % Velocidad del autocar
```

```
global g          % Aceleración de la gravedad
global rho1      % Vector Radio de curvatura frontal
global alpha1    % Vector ángulo de peralte frontal
global rho2      % Vector Radio de curvatura posterior
global alpha2    % Vector ángulo de peralte posterior
global Z         % Soluciones del estado anterior

% Variables posteriores

global m4        % Masa de la cabina del autocar en kg. (Masa suspendida)
global m5        % Masa de la dirección derecha en kg. (Masa no
suspendida)
global I4        % Momento de inercia de la cabina posterior del autocar
respecto al centro de gravedad en mm^2-kg.
global I5        % Momento de inercia del eje de la sección posterior del
autocar respecto al centro de gravedad en mm^2-kg.
global c3        % Constante de amortiguamiento del fuelle neumático
derecho en N.s/mm.
global c4        % Constante de amortiguamiento del fuelle neumático
izquierdo en N.s/mm.
global b3        % Distancia a la suspensión izquierda respecto al centor
de gravedad de la cabina en mm.
global b4        % Distancia a la suspensión derecha respecto al centor de
gravedad de la cabina en mm.
global b5        % Distancia a la suspensión izquierda respecto al centor
de gravedad de la cabina en mm.
global b6        % Distancia a la suspensión derecha respecto al centor de
gravedad de la cabina en mm.
global h_g2      % Altura del centro de gravedad en mm.
global h_b2      % Altura del centro de balanceo en mm.

global h_s2      % Altura de la masa no suspendida en mm
global h_e2      % Altura de la masa no suspendida en mm
global ks3       % Constante de rigidez instantanea de los fuelle
neumático izquierdo en N/mm.
global ks4       % Constante de rigidez instantanea de los fuelle
neumático derecho en N/mm.
global kp        % Constante de rigidez instantanea de los fuelle
neumático derecho en N/mm.
global kw3       % Constante de rigidez vertical del neumático derecho en
N/mm.
global kw4       % Constante de rigidez vertical del neumático izquierdo
en N/mm.
global cw3       % Constante de amortiguamiento vertical del neumático
derecho en N.s/mm.
global cw4       % Constante de amortiguamiento vertical del neumático
izquierdo en N.s/mm.

% FPBV = 0;
% FPBH = 0;
% FPAV = 0;
% FPAH = 0;

% Sistema de ecuaciones diferenciales

Y (1,1) = y11;
```



```

Y (2,1) = ( -( Fs1 + Fs2 + Fd1 + Fd2 ) / m1 ) + ( g*( cos( alpha1(j+1)
+ phi10 ) - cos( alpha1(j) + Z(7,j) ) ) ) + ( ( v^2 * sin (
alpha1(j+1) + phi10 ) ) / rho1(j+1) );

Y (3,1) = y21;
Y (4,1) = ( ( -Ftb - Fw1 - Fwd1 + Fs1 + Fd1 ) / m2 ) + ( g*( cos(
alpha1(j+1) ) - cos( alpha1(j) ) ) ) + ( ( v^2 * sin ( alpha1(j+1) )
) / rho1(j+1) );

Y (5,1) = y31;
Y (6,1) = ( ( -Fw2 - Fwd2 + Ftb + Fs2 + Fd2 ) / m3 ) + ( g*( cos(
alpha1(j+1) ) - cos( alpha1(j) ) ) ) + ( ( v^2 * sin ( alpha1(j+1) )
) / rho1(j+1) );

Y (7,1) = phi11;
Y (8,1) = ( ( b2 * ( Fs2 + Fd2 ) - b1 * ( Fs1 + Fd1 ) ) + ( ( m1 * ( -
( ( v^2*cos( alpha1(j+1) + phi10 ) ) / rho1(j+1) ) + g * sin(
alpha1(j+1) + phi10 ) ) * ( h_g1 - h_b1 ) ) + Test ) ) / ( I1 + m1*(
h_g1 - h_b1 )^2 ) );

Y (9,1) = y41;
Y (10,1) = ( -( Fs3 + Fs4 + Fd3 + Fd4 + FPAV) / m4 ) + ( g*( cos(
alpha2(j+1) + phi40 + phi50 ) - cos( alpha2(j) + Z(13,j) + Z(15,j) )
) ) + ( ( v^2 * sin ( alpha2(j+1) + phi40 + phi50 ) ) / rho2(j+1) );

Y (11,1) = y51;
Y (12,1) = ( ( -Fw3 - Fwd3 - Fw4 - Fwd4 + Fs3 + Fd3 + Fs4 + Fd4 +
FPBV) / m5 ) + ( g*( cos( alpha2(j+1) + phi50 ) - cos( alpha2(j) +
Z(15,j) ) ) ) + ( ( v^2 * sin ( alpha2(j+1) + phi50 ) ) / rho2(j+1) );

Y (13,1) = phi41;
Y (14,1) = ( ( b4 * ( Fs4 + Fd4 ) - b3 * ( Fs3 + Fd3 + FPAV ) ) + (
( m4 * ( -( ( v^2 * cos( alpha2(j+1) + phi40 + phi50 ) ) / rho2(j+1) )
+ g * sin( alpha2(j+1) + phi40 + phi50 ) ) * ( h_g2 - h_b2 ) ) ) +
(FPAH * ( h_g2 - h_s2 - h_b2 - y40 - b3*phi40)) - Test ) / ( I4 + m4*(
h_g2 - h_b2 )^2 ) ;% Todo correcto hasta aquí

Y (15,1) = phi51;
Y (16,1) = ( ( b6 * ( Fw4 + Fwd4 - Fs4 - Fd4 - FPBV) + b5 * ( Fs3 +
Fd3 - Fw3 - Fwd3 ) ) + ( ( m5 * ( ( -( ( v^2 * cos( alpha2(j+1) + phi50
) ) / rho2(j+1) ) + g * sin( alpha2(j+1) + phi50 ) ) ) - FPBH ) * (
h_e2 ) ) ) / ( I5 + m5*( h_e2 )^2 );

```

end

Algoritmo solucionador – rks4.m

```

function [ Ff_f, Ff_p, Fj, N4, N3, N2, N1, R, Ff_1, Ff_2, Ff_3, Ff_4
,beta, LB] = rks4(F,a,b,Za,M)
% Algoritmo Runge-Kutta 4 modificado para el análisis del vehículo por
% instante de tiempo (Iteración)

global j           % Variable de control, Número de iteración
global m1         % Masa de la cabina frontal del autocar en kg. (Masa
suspendida)
global m2         % Masa de la dirección izquierda frontal en kg. (Masa
no suspendida)

```

```
global m3      % Masa de la dirección derecha frontal en kg. (Masa
no suspendida)
global m4      % Masa de la cabina posterior del autocar en kg. (Masa
suspendida)
global m5      % Masa no suspendida posterior en kg
global rho1    % Vector Radio de curvatura frontal
global rho2    % Vector Radio de curvatura posterior
global alpha1  % Vector ángulo de peralte frontal
global alpha2  % Vector ángulo de peralte posterior
global v       % Velocidad del autocar en m/s
global g       % Aceleración de la gravedad en m/s^2
global a_via   % Ancho de vía en mm
global I1      % Momento de inercia de la cabina frontal del autocar
respecto al centro de gravedad en mm^2-kg.
global I4      % Momento de inercia de la cabina posterior del
autocar respecto al centro de gravedad en mm^2-kg.
global I5      % Momento de inercia del eje de la sección posterior
del autocar respecto al centro de gravedad en mm^2-kg.
global h_g1    % Altura del centro de gravedad en mm.
global h_e1    % Altura de la masa no suspendida en mm.
global h_b1    % Altura del centro de balanceo en mm.
global h_g2    % Altura del centro de gravedad en mm.
global h_b2    % Altura del centro de balanceo en mm.
global h_e2    % Altura de la masa no suspendida en mm
global Z       % Variable de control de soluciones anteriores
global mu      % Coeficiente de fricción entre los neumáticos y la
vía
global HB0     % distancia entre extremos inicial de la barra panhard
global b3      % Distancia a la suspensión izquierda respecto al centor
de gravedad de la cabina en mm.

global b6      % Distancia a la suspensión derecha respecto al centor de
gravedad de la cabina en mm.

% Creación de variables (Almacenamiento de datos)

h              = (b-a)/M; % Calculo del paso

Z              = zeros(length(Za),M+1); % Variable de control de
soluciones anteriores

Fj             = zeros(length(Za),M+1); % Fuerzas y torques de inercia
instantáneos

Ff_f          = zeros(1,M+1); % Suma de la fuerza de fricción frontal de
ambas ruedas
Ff_p          = zeros(1,M+1); % Suma de la fuerza de fricción posterior
de ambas ruedas
Ff_1          = zeros(1,M+1); % Suma de la fuerza de fricción frontal de
ambas ruedas
Ff_2          = zeros(1,M+1); % Suma de la fuerza de fricción posterior
de ambas ruedas
Ff_3          = zeros(1,M+1); % Suma de la fuerza de fricción frontal de
ambas ruedas
Ff_4          = zeros(1,M+1); % Suma de la fuerza de fricción posterior
de ambas ruedas

N1            = zeros(1,M+1); % Fuerza normal rueda izquierda frontal
N2            = zeros(1,M+1); % Fuerza normal rueda derecha frontal
N3            = zeros(1,M+1); % Fuerza normal rueda izquierda posterior
```

```

N4          = zeros(1,M+1); % Fuerza normal rueda derecha posterior

T          = a:h:b;          % Espacio de tiempo
Z(:,1)     = Za;            % Asignación de valores iniciales
LB         = zeros(1,M+1); % Longitud de la barra panhard
HB         = zeros(1,M+1); % Distancia vertical entre extremos de la
barra panhard
dL         = zeros(1,M+1); % Diferencial de longitudes de la barra
beta      = zeros(1,M+1); % Ángulo formado por la barra Panhard

LB0        = sqrt( HB0^2 + a_via^2 ); % Calculo de la longitud
inicial de la barra Panhard

LB(:,1)    = LB0;
HB(:,1)    = HB0;
dL(:,1)    = 0 ;
beta(:,1)  = atan2(a_via,HB0);

%Ejecución del algoritmo Runge-Kutta4 y cálculo de fuerzas de inercia

for j=1:M

    k1=h* ( F,T(j)          , Z(:,j)          ,dL(:,j) ,beta(:,j) );
    k2=h* ( F,T(j)+ h/2   , Z(:,j)+(k1/2) ,dL(:,j) ,beta(:,j) );
    k3=h* ( F,T(j)+ h/2   , Z(:,j)+(k2/2) ,dL(:,j) ,beta(:,j) );
    k4=h* ( F,T(j)+ h     , Z(:,j)+ k3     ,dL(:,j) ,beta(:,j) );

    % Solución del sistema de ecuaciones diferenciales en el instante
    analizado.

    Z(:,j) = Z(:,j) + ( k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6;

    % Almacenamiento de la longitud efectiva de la barra Panhard

    HB(:,j) = HB(:,j) + Z(9,j+1) + b3 * Z(13,j+1) - Z(9,j) - b3 *
    Z(13,j);% - Z(11,j+1) + b6 * Z(15,j+1) + Z(11,j) - b6 * Z(15,j);

    LB(:,j) = sqrt( HB(:,j+1)^2 + ( a_via )^2 );

    dB = abs ( LB(:,j) - LB(:,j+1) );

    Sent_forc = LB(:,j+1) - LB0;

    if Sent_forc < 0

        dL(:,j+1) = dB;

    else

        dL(:,j+1) = -dB;

    end

    beta(:,j+1)= ( atan2( a_via , (HB(:,j+1) ) ));

```

```
% Cálculo de las componentes del peso y de las fuerzas de inercia
paralelas
% y normales a la vía.
```

```
F11i      = ( (m1 * v^2)./rho1(j+1) ).*cos(alpha1(j+1)+ Z(7,j));
F12i      = ( (m2 * v^2)./rho1(j+1) ).*cos(alpha1(j+1));
F13i      = ( (m3 * v^2)./rho1(j+1) ).*cos(alpha1(j+1));
F14i      = ( (m4 * v^2)./rho2(j+1) ).*cos(alpha2(j+1)+ Z(13,j) +
Z(15,j));
F15i      = ( (m5 * v^2)./rho2(j+1) ).*cos(alpha2(j+1)+ Z(15,j));
W11       = ( m1 * g * sin( alpha1(j+1) + Z(7,j) ) );
W12       = ( m2 * g * sin( alpha1(j+1) ) );
W13       = ( m3 * g * sin( alpha1(j+1) ) );
W14       = ( m4 * g * sin( alpha1(j+1)+ Z(7,j) + Z(13,j) +
Z(15,j) ) );
W15       = ( m5 * g * sin( alpha1(j+1) + Z(7,j)+ Z(13,j) ) );
Wv1       = ( m1 * g * cos( alpha1(j+1) + Z(7,j) ) );
Wv2       = ( m2 * g * cos( alpha1(j+1) ) );
Wv3       = ( m3 * g * cos( alpha1(j+1) ) );
Wv4       = ( m4 * g * cos( alpha1(j+1)+ Z(7,j) + Z(13,j) +
Z(15,j) ) );
Wv5       = ( m5 * g * cos( alpha1(j+1) + Z(7,j)+ Z(13,j) ) );
Fvi1      = ( Fj(2,j) * m1 );
Fvi2      = ( Fj(4,j) * m2 );
Fvi3      = ( Fj(6,j) * m3 );
Fvi4      = ( Fj(10,j) * m2 );
Fvi5      = ( Fj(12,j) * m3 );
Ti1       = ( Fj(8,j) * ( I1 + m1 * ( h_g1 - h_b1 )^2 ) );
Ti4       = ( Fj(14,j) * ( I4 + m4 * ( h_g2 - h_b2 )^2 ) );
Ti5       = ( Fj(16,j) * ( I5 + m5 * ( h_e2 )^2 ) );
```

```
% Calculo de la fuerza de fricción frontal
```

```
Ff_f(:,j) = F11i + F12i + F13i - W11 - W12 - W13;
```

```
% Calculo de la fuerza de fricción posterior
```

```
Ff_p(:,j) = F14i + F15i -W14 - W15;
```

```
% Calculo de la fuerza normal de las ruedas frontales
```

```
%Momentos respecto a la rueda izquierda generados por las fuerzas
externas
```

```
%y de inercia en la sección frontal
```

```
M1_f = Fvi1 * a_via/2;
M2_f = Fvi3 * a_via;
M3_f = ( W11 - F11i ) * ( h_g1 - Z(1,j) );
M4_f = ( W12 - F12i ) * ( h_e1 - Z(3,j) );
M5_f = ( W13 - F13i ) * ( h_e1 - Z(5,j) );
M6_f = -Wv1 * a_via/2 ;
M7_f = -Wv3 * a_via ;
```

```
N2(:,j) = -(M1_f + M2_f + M3_f + M4_f + M5_f + M6_f + M7_f -
Ti1)/a_via;
```

```
N1(:,j) = -( N2(:,j) + Fvi1 + Fvi2 + Fvi3 - Wv2 - Wv1 -Wv3);
```

```
Ff_1(:,j) = N1(:,j) * mu;
```

```
Ff_2(:,j) = N2(:,j) * mu;
```

```
%Momentos respecto a la rueda izquierda generados por las fuerzas
externas
%y de inercia en la sección posterior

M1_p = Fvi4 * a_via/2;
M2_p = Fvi5 * a_via/2;
M3_p = ( Wl4 - Fl4i ) * ( h_g2 - Z(9,j) );
M4_p = ( Wl5 - Fl5i ) * ( h_e2 - Z(11,j) );
M5_p = -Wv4 * a_via/2 ;
M6_p = -Wv5 * a_via/2 ;

%Calculo de la fuerza normal en las ruedas posteriores y de las
fuerzas de
%fricción

N4(:,j) = -(M1_p + M2_p + M3_p + M4_p + M5_p + M6_p - Ti4 -
Ti5)/a_via; %Rueda derecha
N3(:,j) = -( N2(:,j) + Fvi5 + Fvi4 - Wv5 - Wv4 ); %Rueda izquierda

Ff_3(:,j) = N3(:,j) * mu; %Calculo de la fuerza de fricción máxima de
la rueda izquierda posterior
Ff_4(:,j) = N4(:,j) * mu; %Calculo de la fuerza de fricción máxima de
la rueda derecha posterior

end

%Asignación de resultados

R=Z'; %Matriz de los resultados

end
```